選択公理, Hausdorff 極大原理, Zorn の補題, 整列可能定理

柳原 宏

山口大学工学部
hiroshi@yamaguchi-u.ac.jp

目次

1 順序集合と極大全順序部分集合 1

2 Hausdorff 極大原理 3

3 Zorn の補題 4

4 整列可能定理と超限帰納法 5

5 選択公理を用いた Hausdorff 極大原理の証明 7

数学の諸分野の中で, 分野をを問わずよく使われている結果であり, 選択公理と同値なものが幾つかある．この小文では, 典型的な例である Hausdorff 極大性原理, Zorn の補題, 整列可能定理を紹介し, 相互の同値性の証明を行う, そしてこれらの命題と選択公理が同値であることを導く．選択公理を除き, これらの命題は全て順序集合に関わるものであるので, §1 では半順序集合, 全順序についての定義と例を述べる．§2 において Hausdorff 極大原理を紹介する．但しこの段階では Hausdorff 極大原理の証明は行わない．§3 では帰納的順序集合を定義し, Hausdorff 極大原理を用いて Zorn の補題を証明する．§4 では整列集合の定義と整列集合を用いた超限帰納法の解説を行ってから Zorn の補題を用いた整列可能定理の証明を行う．また整列可能定理を用いた Hausdorff 極大原理の証明も行う．ここまでで Hausdorff 極大性原理, Zorn の補題, 整列可能定理 の同値性が示されたことになる．そして §5 において選択公理から Hausdorff 極大原理を導き, 最後に整列可能定理から選択公理を導く.

1 順序集合と極大全順序部分集合

集合 $\mathcal{A}$ に 2 項関係 "$\leq$" が定義されているとする．2 項関係とは $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ の部分集合 $\mathcal{D}$ のことであり, 順序対 $(a,b)\in\mathcal{D}$ の時に $a\leq b$ と書き表すというのが, 厳密な定義であるが, ここでは単に $a,b\in\mathcal{A}$ の間に $a\leq b$ と表される関係が (つねにとは限らないが) あるという漠然とした理解で構わない.

さて集合 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}$ 上の 2 項関係の組 $(\mathcal{A}, \leq)$ が半順序集合 (partially ordered set, poset) であるとは

(i) $\forall a \in \mathcal{A} : a \leq a$
(ii) $a \leq b$ かつ $b \leq c$ ならば $a \leq c$
(iii) $a \leq b$ かつ $b \leq a$ ならば $a = b$

が成り立つ時を言う. 順序 $\leq$ を特に書かなくても文脈から分かる場合は $(\mathcal{A}, \leq)$ の代わりに単に $\mathcal{A}$ のことを半順序集合と呼ぶ.

半順序集合のことを, "半" を省いて順序集合 (ordered set) と呼ぶこともあるが 2 元 a, $b \in \mathcal{A}$ について必ずしも a と b が比較可能でない, つまり $a \leq b$ でもなければ, $b \leq a$ でもない (換言すれば $(a,b),(b,a) \notin \mathcal{D}$ の場合である) を許すので "半" を付けることにする. (i) を

(i') $\forall a, b \in \mathcal{A} : a \leq b$ or $b \leq a$

に取り替え, $(\mathcal{A}, \leq)$ が (i'), (ii), (iii) を満たす時, 全順序集合 (totally ordered set) または線形順序集合 (linearly ordered set) と言う.

半順序集合に於ける $a, b \in \mathcal{A}$ の関係は

(1) $a \leq b$ かつ $a \neq b$
(2) $b \leq a$ かつ $a \neq b$
(3) $a = b$
(4) a, b は比較可能でない

の 4 つの場合のどれか 1 つのみが起こることに注意しよう. 勿論, $\mathcal{A}$ が全順序集合の場合は (4) の場合は起こらない. 以後, $a \leq b$ かつ $a \neq b$ の時, $a < b$ と書くことにする. このとき (1) は $a < b$, (2) は $b < a$ と短く表現できる.

半順序集合 $\mathcal{A}$ の任意の部分集合 $\mathcal{B}$ は $\leq$ を $\mathcal{B}$ に制限した順序のもとで半順序集合である. 以後, 特に断らない限り半順序集合の部分集合にはつねにこの半順序が定義されていると考える. また $\mathcal{B}$ が $\mathcal{A}$ 全順序部分集合であるとは $\mathcal{B}$ に制限された順序が全順序となること, 換言すれば任意の $a, b \in \mathcal{B}$ について $a \leq b$ または $b \leq a$ が成り立つことである. 全順序部分集合のことを鎖 (chain) と短く呼ぶことがある.

Definition 1. *半順序集合 $(\mathcal{A}, \leq)$ の空でない部分集合 $\mathcal{B}$ が極大全順序 (部分) 集合であるとは, $\mathcal{B}$ が $\leq$ のもとで全順序集合であること, つまり任意の 2 元 $a, b \in \mathcal{B}$ について $a \leq b$ または $b \leq a$ のどちらかが成り立つこと, 及び $\mathcal{B}$ を真に含む $\mathcal{A}$ の全順序部分集合が存在しないことと定義する.*

Example 2. *$\mathcal{A}$ を $\mathbb{R}^2$ 内の開集合の全体とすれば, 包含関係 $\subset$ を順序として半順序集合になる. 各 $r > 0$ について原点を中心とする開円板を $\mathbb{D}(r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$ と置き, $\mathcal{B} = \{\mathbb{D}(r) : 0 < r < \infty\}$ と置く. このとき $\mathcal{B}$ は $\mathcal{A}$ の全順序部分集合であるが極大全順序部分集合ではない. しかしながら $\mathcal{B}$ に $\mathbb{R}^2$ をつけ加えた $\mathcal{B} \cup \{\mathbb{R}^2\}$ は極大全順序部分集合である.*

Proof. 明らかに $\mathcal{B}$ 及び $\mathcal{B} \cup \{\mathbb{R}^2\}$ は $\mathcal{A}$ の全順序部分集合であり, $\mathcal{B}$ は極大でない.

$\mathcal{B} \cup \{\mathbb{R}^2\}$ の極大性を背理法で示そう．もし極大でないとすると $\mathcal{B} \cup \{\mathbb{R}^2\}$ を真に含む全順序部分集合 $\mathcal{B}'$ が存在する．そこで $V \in \mathcal{B}' \backslash \mathcal{B} \cup \{\mathbb{R}^2\}$ を 1 つ取る．このとき V と比較可能でない (= 包含関係がない) $\mathbb{D}(r)$ の存在, 正確に述べれば $V \backslash \mathbb{D}(r) \neq \emptyset \neq \mathbb{D}(r) \backslash V$ を満たす $r > 0$ が存在することを示そう．これは $\mathcal{B}'$ が全順序集合であることに反する．

$0 \notin V$ の場合 $x \in V$ を任意に取れば $0 < r < |x|$ を満たす r について $x \in V \backslash \mathbb{D}(r)$ かつ $0 \in \mathbb{D}(r) \backslash V$ より V と $\mathbb{D}(r) \in \mathcal{B}$ は比較可能ではない．

次に $0 \in V$ の場合は $r_0 = \sup\{r > 0 : \mathbb{D}(r) \subset V\}$ と置けば, $V \neq \mathbb{R}^2$ より $0 < r_0 < \infty$ であり, r_0 の定義より

$$\mathbb{D}(r_0) \subset V \quad \text{and} \quad \forall r > r_0 \mid \mathbb{D}(r) \backslash V \neq \emptyset \tag{1}$$

が成り立つ．また $V \neq \mathbb{D}(r_0)$ であるから点 $a \in V \backslash \mathbb{D}(r_0)$ が存在する．V は開集合であるから, 必要ならば a を取り直すことにより $|a| > r_0$ としてよい．このとき $r_0 < r < |a|$ を満たす r について $a \in V \backslash \mathbb{D}(r)$ が成り立つ．これと (1) の後半を合わせると

$$r_0 < \forall r < |a| \mid \mathbb{D}(r) \backslash V \neq \emptyset \neq V \backslash \mathbb{D}(r)$$

が成り立つ． □

2 Hausdorff 極大原理

それでは Hausdorff 極大原理 (Hausdorff maximal principle) と呼ばれる定理を述べよう．

Theorem 3 (Hausdorff 極大原理 I)**.** *$\mathcal{B}$ を半順序集合 $\mathcal{A}$ の空でない全順序部分集合とする．この時, $\mathcal{B}$ を含む $\mathcal{A}$ の極大全順序部分集合 $\mathcal{C}$ が少なくとも 1 つ存在する．*

一見するとより弱くみえるが実は同値な主張として, 次も Hausdorff 極大原理と呼ばれることがある．

Theorem 4 (Hausdorff 極大原理 II)**.** *$\mathcal{A}$ を空でない半順序集合とすれば極大全順序部分集合 $\mathcal{B}$ が少なくとも 1 つ存在する．*

同値性の証明. Hausdorff 極大性原理 I から II を導くのは容易である．実際 $\mathcal{A}$ を空でない半順序集合として元 $a \in \mathcal{A}$ を 1 つ取れば $\{a\}$ は $\mathcal{A}$ の全順序部分集合であるから $\{a\} \subset \mathcal{B}$ を満たす極大な全順序部分集合の存在が Hausdorff 極大性原理 I より分かる．

II から I を導くにはちょっとしたテクニックを要する．$\mathcal{B}$ を半順序集合 $\mathcal{A}$ の空でない全順序部分集合として

$$\mathcal{P} = \{\mathcal{B}' : \ \mathcal{B}' \text{ は } \mathcal{B} \subset \mathcal{B}' \text{ を満たす } \mathcal{A} \text{ の全順序部分集合}\}$$

と置けば, $\mathcal{P}$ は包含関係 “$\subset$” を順序として半順序集合であり, $\mathcal{B} \in \mathcal{P}$ より空でない．よって Hausdorff 極大性原理 II より $\mathcal{P}$ の極大な全順序部分集合 $\mathcal{Q}$ が存在する．この時 $\mathcal{B} \in \mathcal{Q}$ であることに注意しておこう．ここで

$$\mathcal{C} = \bigcup_{\mathcal{B}' \in \mathcal{Q}} \mathcal{B}'$$

と置けば, $\mathcal{B} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ を満たすことは容易に分かる．また $\mathcal{C}$ が全順序集合になることは任意の $a, b \in \mathcal{C}$ について $a \in \mathcal{B}_1$, $b \in \mathcal{B}_2$ を満たす $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathcal{Q}$ を取れば $\mathcal{Q}$ は包含関係について全順序集合であるから $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ または $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1$ が成り立つ．前者の場合は $a, b \in \mathcal{B}_2$ となり $\mathcal{B}_2$ は $\mathcal{A}$ の全順序部分集合ゆえ a, b は比較可能である．後者の場合も $a, b \in \mathcal{B}_1$ となり, やはり比較可能である．

最後に $\mathcal{C}$ を含む $\mathcal{A}$ の全順序部分集合 $\mathcal{C}'$ が存在すると仮定すると $\mathcal{Q} \cup \{\mathcal{C}'\}$ は $\mathcal{Q}$ を含む $\mathcal{P}$ の全順序部分集合である．$\mathcal{Q}$ の極大性より $\mathcal{Q} \cup \{\mathcal{C}'\} \subset \mathcal{Q}$ が成り立つ．よって $\mathcal{C}' \in \mathcal{Q}$ が成り立ち, これより $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ が従う．よって $\mathcal{C}$ は極大である． □

3　Zorn の補題

Zorn の補題を述べる為に, 用語を定義しておこう．半順序集合 $(\mathcal{A}, \leq)$ の空でない部分集合 $\mathcal{B}$ について $a \in \mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ の上界 (upper bound) であるとは, "$\forall b \in \mathcal{B} \mid b \leq a$" が成り立つ時を言う．言うまでもないとは思うが, $a \in \mathcal{B}$ とは仮定していないことを注意しておこう．同様に $a \in \mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ の下界 (lower bound) であることは "$\forall b \in \mathcal{B} \mid a \leq b$" が成り立つ時を言う．次に $s \in \mathcal{B}$ が $\mathcal{B}$ の極大元 (maximal element) であるとは $s \leq b$ を満たす $b \in \mathcal{B}$ はつねに $b = s$ となる時を言う．

$$s \in \mathcal{B} \text{ が } \mathcal{B} \text{ の極大元} \iff s < b \text{ を満たす } b \in \mathcal{B} \text{ は存在しない}$$

である．また $s \in \mathcal{B}$ が $\mathcal{B}$ の最大元 (maximum element) であるとは任意の $b \in \mathcal{B}$ について $b \leq s$ が成り立つ時を言う．$\mathcal{B}$ の最大元 s は, 任意の $b \in \mathcal{B}$ と比較可能であり $b \leq s$ が成り立つことに注意しよう．極小元 (minimal element) や最小元 (mimimum element) についても同様に定義する．

半順序集合 $(\mathcal{A}, \leq)$ の空でない部分集合 $\mathcal{B}$ について, 最大元や最小元は高々 1 つしか存在せず, もし最大元が存在すれば, それは極大元であり, もし最小元が存在すれば, それは極小元である．しかしながら極大元や極小元は存在する場合でも 1 つとは限らないことに注意しよう．

Example 5. *区間 $I = [0, 1]$ の直積 $I \times I$ の 2 元 (x, y) と (x', y') について $x = x'$, $y \leq y'$ となるとき $(x, y) \leq (x', y')$ と定義すれば, $(I \times I, \leq)$ は半順序集合になり, 任意の $x \in I$ について $(x, 1)$ は $I \times I$ の極大元であるが, 最大元ではない．*

半順序集合 $\mathcal{A}$ が帰納的順序集合 (inductively ordered set) であるとは, $\mathcal{A}$ の任意の空でない全順序部分集合 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{A}$ の中に上界を持つこと, つまり $a \in \mathcal{A}$ で "$\forall b \in \mathcal{B} \mid b \leq a$" が成り立つものが存在することである．

それでは Zorn(ツォルン) の補題 (Zorn's lemma) を述べよう．

Theorem 6 (Zorn の補題)**.** 空でない帰納的順序集合は極大元を持つ．

Proof. Hausdorff 極大性原理 II より Zorn の補題を導こう．$\mathcal{A}$ を空でない帰納的順序集合とし, Hausdorff 極大性原理 II を用いて極大な全順序部分集合 $\mathcal{B}$ を取る．そして $\mathcal{B}$ の上界の 1 つを $s \in \mathcal{A}$ と置く．このとき $s \in \mathcal{B}$ であることと, s が $\mathcal{A}$ の極大元であることを示そう．

$s \leq a$ を満たす $a \in \mathcal{A}$ を取ると, 任意の $b \in \mathcal{B}$ について $b \leq s$ と $s \leq a$ より b と s, s と a は比較可能であり, 推移律より b と a も比較可能である．従って $\mathcal{B} \cup \{s, a\}$ は $\mathcal{A}$ の全順序部分集合になるが $\mathcal{B}$ の極大性よ

り $\mathcal{B} \cup \{s, a\} = \mathcal{B}$ でなければならない．よって $s = a \in \mathcal{B}$ が成り立つ．これは s が $\mathcal{A}$ の極大元であること示す． $\square$

4 整列可能定理と超限帰納法

半順序集合 $\mathcal{A}$ が整列集合 (well-ordered set) であるとは $\mathcal{A}$ の任意の空でない部分集合が最小元を持つときを言う．定義より直ちに, 空でない整列集合は最小元を持つことが分かる．また"整列集合は全順序集合である"と言うことも分かる．実際 $a, b \in \mathcal{A}$ ならば部分集合 $\{a, b\}$ には最小元が存在するので $a \leq b$ または $b \leq a$ のどちらかが成り立つ．つまり a, b はつねに比較可能であり, $\mathcal{A}$ は全順序集合である．

整列集合には (数学的) 帰納法を一般化した, 超限帰納法 (transfinite induction) という証明の手法が使える．

Theorem 7 (超限帰納法)**.** *$(\mathcal{A}, \leq)$ を整列集合とし, a_0 をその最小元とする．また各 $a \in \mathcal{A}$ について命題 $P(a)$ が定まっていて*

(i) $P(a_0)$ が真.

(ii) 各 $a \in \mathcal{A}$, $a \neq a_0$ について,

$$\forall x \in \mathcal{A} \textit{ with } x < a \mid P(x) \text{ が真} \quad \Longrightarrow \quad P(a) \text{ が真}$$

が成り立つとする．このとき $P(a)$ は全ての $a \in \mathcal{A}$ について真である．

Proof. $\mathcal{B} = \{b \in \mathcal{A} \mid P(b) \text{ は偽 }\}$ と置いて $\mathcal{B} = \emptyset$ となることを背理法により示そう．もし $\mathcal{B} \neq \emptyset$ ならば, $\mathcal{B}$ には最小元 b_0 が存在するが, (i) より $b_0 \neq a_0$ である．従って $a_0 < b_0$ である．次に $x < b_0$ ならば $x \notin \mathcal{B}$ であるから $P(x)$ は真である．よって (ii) を用いて $P(b_0)$ も真となってしまうが, これは $b_0 \in \mathcal{B}$ に矛盾する． $\square$

次の定理は, "任意の集合には適当な順序を導入し, 整列集合にすることができる" と言うことを主張している．従ってこの導入された順序のもとで超限帰納法が使えることになる．

Theorem 8 (整列可能定理 (well-ordering theorem))**.** *任意の集合は整列集合となるように順序を定めることができる．*

Proof. Zorn の補題より整列可能定理を導こう．X を空でない集合とする．

$$\mathcal{P} = \{(A, \leq_A) \mid A \subset X, \text{ “}\leq_A\text{” は } A \text{ 上の順序で } (A, \leq_A) \text{ は整列集合 }\}$$

と置く．$x \in X$ について $\{x\}$ は自明な順序 $x \leq x$ のもとで整列集合であるから $\mathcal{P}$ は空でない．また $\mathcal{P}$ における順序を

$$\begin{aligned}(A, \leq_A) \prec (B, \leq_B) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad & \text{ある } b \in B \text{ について } A = B\langle b \rangle := \{x \in B : x < b\} \\ & \text{かつ } A \text{ の順序 } \leq_A \text{ は } \leq_B \text{ の } A \text{ への制限である.}\end{aligned}$$

と置く．そして $(A,\leq_A) \preceq (B,\leq_B)$ とは $(A,\leq_A) \prec (B,\leq_B)$ または $(A,\leq_A) = (B,\leq_B)$ が成り立つこととする．このように定義した関係 $\preceq$ が実際に $\mathcal{P}$ の順序であることは §1 の (i), (ii), (iii) を順に確かめることにより従う．(i) は明らかであり, (ii) を確かめるには $(A,\leq_A) \prec (B,\leq_B) \prec (C,\leq_C)$ のとき, $(A,\leq_A) \prec (C,\leq_C)$ を示せば十分であろう．これは, ある $b \in B$, $c \in C$ により $A = B\langle b\rangle = \{x \in B : x <_B b\}$, $B = C\langle c\rangle = \{x \in C : x <_C c\}$ と表せるが $b < c$, $b \in C$ より

$$\begin{aligned} a \in A \quad &\Longleftrightarrow \quad a \in B \text{ and } a <_B b \\ &\Longleftrightarrow \quad a \in C \text{ and } a <_C c \text{ and } a <_B b \\ &\Longleftrightarrow \quad a \in C \text{ and } a <_C b \\ &\Longleftrightarrow \quad a \in C\langle b\rangle \end{aligned}$$

となることより $A = C\langle b\rangle$ が従うことより了解されるであろう．(iii) を示すには $(A,\leq_A) \prec (B,\leq_B)$ ならば $A = B\langle b\rangle \subsetneq B$ が成り立つことを利用すればよい．

Claim. $\mathcal{P}$ が帰納的順序集合になることを示そう．実際 $\mathcal{Q}$ が $\mathcal{P}$ の全順序部分集合ならば

$$S = \bigcup_{(A,\leq)\in\mathcal{Q}} A$$

と置いて, $a_1, a_2 \in S$ について以下のように順序を定義する．$(A_1,\leq_1), (A_2,\leq_2) \in \mathcal{Q}$ を $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ となるように取る．もし $(A_1,\leq_1) \preceq (A_2,\leq_2)$ ならば, ある $a \in A_2$ について $A_1 = A_2\langle a\rangle \subset A_2$ であるから $a_1, a_2 \in A_2$ が成り立つ．そこで a_1, a_2 の大小関係は A_2 におけるものと同じと定義する．同様に $(A_2,\leq_2) \preceq (A_1,\leq_1)$ ならば $a_1, a_2 \in A_1$ であるから a_1, a_2 の大小関係は A_1 におけるものと同じと定義する．この定義の仕方は $(A_1,\leq_1), (A_2,\leq_2) \in \mathcal{Q}$ の取り方に依らず定まることは容易に分かる．$a_1, a_2 \in S$ は任意であるから関係 $\leq$ は §1 の (i') を満たす．(ii), (iii) を満たすことも容易に分かるので, 関係 $\leq$ は S の全順序である．このように定めた順序を $\leq_S$ と書くことにする．

$(S,\leq_S)$ が整列集合であることを示すために, 空でない $Z \subset S$ が最小限を持つことを示そう．これは

(2)
$$Z = \bigcup_{(A,\leq_A)\in\mathcal{Q},\, A\cap Z\neq\emptyset} A \cap Z$$

と表せることを利用する．まず $(A,\leq_A) \in \mathcal{Q}$ について $A \cap Z \neq \emptyset$ ならば $A \cap Z$ は整列集合 A の空でない部分集合であるから最小元 $m_A = \min A \cap Z$ が存在する．m_A が $(A,\leq_A) \in \mathcal{Q}$ に依存しないことを示そう．実際 $(B,\leq_B) \in \mathcal{Q}$ が $B \cap Z \neq \emptyset$ を満たせば最小元 $m_B = \min B \cap Z$ が存在する．$\mathcal{Q}$ は全順序集合であるから $(A,\leq_A) \preceq (B,\leq_B)$ または $(B,\leq_B) \preceq (A,\leq_A)$ が成り立つ．ここでは前者が成り立つとして議論を進めよう．この場合は $A \subset B$ より $m_B = \min B \cap Z \leq \min A \cap Z = m_A$ 成り立つ．また $A = B\langle b\rangle = \{x \in B : x <_B b\}$ と $A \cap Z \neq \emptyset$ を合わせると $a \in A \cap Z (\subset B \cap Z)$ で $a < b$ を満たすものが存在する．これより $m_B <_B b$ が分かり, $m_B \in B$ と合わせると $m_B \in \{x \in B : x <_B b\} \cap Z = A \cap Z$ が従う．よって $m_A = A \cap Z \leq m_B$ が分かり, 先に示した逆の不等号と合わせ $m_A = m_B$ が従う．また m_A が A に依存しないことと (2) より $m_A = \min Z$ であることが分かる．以上で $(S,\leq_S)$ が整列集合であることが示され $(S,\leq_S) \in \mathcal{P}$ が成り立つ．

$(S,\leq_S)$ が $\mathcal{Q}$ の上界であることを示せば **Claim** の証明は完了する．$(A,\leq_A) \in \mathcal{Q}$ について $A = S$ ならば $\leq_S$ の定義より $\leq_S$ は $\leq_A$ と一致するので $(A,\leq_A) = (S,\leq_S)$ である．従って残るは $A \subsetneq S$ ならば, ある $c \in S$ で $A = S\langle c\rangle$ となるものが存在することを示すのみである．このとき $S\backslash A$ は空でないから最小元が存在するので $c = \min(S\backslash A)$ と置く．このとき

$$x \in S \text{ and } x < c \quad \Longrightarrow \quad x \notin S\backslash A \quad \Longrightarrow \quad x \in A$$

より $S\langle c\rangle \subset A$ が成り立つ．次に $c \in B$ を満たす $(B, \le_B) \in Q$ を取る．Q は全順序集合であるから $(A, \le_A) \preceq (B, \le_B)$ または $(B, \le_B) \preceq (A, \le_A)$ が成り立つが, $c \notin A$ かつ $c \in B$ より $(A, \le_A) \preceq (B, \le_B)$ が成り立つ．従ってある $b \in B$ により $A = B\langle b\rangle = \{x \in B : x <_B b\}$ と表せる．ここで $c <_B b$ とすると $c \in A$ となり矛盾を生じるので $b \le c$ である．よって

$$A = B\langle b\rangle = \{x \in B : x <_B b\} \subset \{x \in B : x <_B c\} \subset \{x \in S : x <_c\} = S\langle c\rangle$$

を得る．

それでは整列可能定理の証明を終わらせよう．Zorn の補題 (Theorem 6) より帰納的順序集合 $\mathcal{P}$ には極大元が存在するので, その (任意の 1 つを) $(M, \le_M)$ と置く．このとき $X \subset M$ を示せば, $X = M$ となり X には自身が整列集合となるような全順序が導入されたことになる．そこでもし $a \in X\backslash M$ が存在したと仮定しよう．このとき $M_* = M \cup \{a\}$ に順序 $\le_M$ を拡張した順序 $\le_{M^*}$ を

$$x \le_{M^*} a \quad \forall x \in M$$

と定義すれば, 明らかに $(M^*, \le_{M^*})$ も整列集合であり $(M, \le_M) \preceq (M^*, \le_{M^*})$ かつ $(M, \le_M) \ne (M^*, \le_{M^*})$ $(\because M \ne M^*)$ を満たす．これは $(M, \le_M)$ の極大性に反する． $\square$

整列可能定理を用いた Hausdorff 極大原理 II の証明. $(X, \preceq)$ を空でない半順序集合とする．整列可能定理 (Theorem 8) を用いて X に全順序 $\le$ を導入し $(X, \le)$ が整列集合となるようにする．このとき写像 $f : X \to X$ を以下のように定義する．$(X, \le)$ の最小元 x_0 について $f(x_0) = x_0$ と置き．$x \in X\backslash\{x_0\}$ について

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{if } a \text{ が } f(X\langle x\rangle) \text{ の任意の元と } \preceq \text{ に関し比較可能} \\ x_0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

と置く．ただし $X\langle x\rangle = \{y \in X : y < x\}$ とする．写像 f のこのような定義の仕方は, 超限再帰的定義と呼ばれ, 超限帰納法 (Theorem 7) により, 全ての $x \in X$ について $f(x)$ が定義されることが保証される．

このとき $f(X)$ が $\preceq$ に関する極大全順序部分集合であることを示せば証明は完了する．任意の $x_1, x_2 \in f(X)$, $x_1 \le x_2$ について, x_1, x_2 が $\preceq$ に関し比較可能であることを示そう．はじめに $x \in f(X)$ ならば $f(x) = x$ が成り立つことに注意する．$x_1 = x_2$ のときは明らかであるから $x_1 < x_2$ とすると $x_0 < x_2$ と f の定義より $f(x_2) = x_2$ であり x_2 は $f(X\langle x_2\rangle)$ の任意の元と $\preceq$ に関し比較可能である．$x_1 = f(x_1) \in f(X\langle x_2\rangle)$ であるから x_2 は x_1 と $\preceq$ に関し比較可能である．これで $f(X)$ が $\preceq$ に関し全順序集合であることが示された．

次に $y \in X\backslash f(X)$ とすると, $y \ne x_0$ かつ $f(y) = x_0$ が成り立つ．従って y は $f(X\langle y\rangle)$ のある元と $\preceq$ に関し比較可能でない．よって y は $f(X)$ のある元と $\preceq$ に関し比較可能でない．よって $f(X)$ は $\preceq$ に関し極大全順序部分集合である． $\square$

これで Hausdorff 極大原理 I, II, Zorn の補題, 整列可能定理の同値性が示されたことになる．

5　選択公理を用いた Hausdorff 極大原理の証明

Theorem 9 (選択公理 (axiom of choice))**.** $\mathcal{P}$ を空でない集合よりなる族とし, $X = \bigcup_{A \in \mathcal{P}} A$ とする．このとき写像 $f : \mathcal{P} \to X$ で, 任意の $A \in \mathcal{P}$ について $f(A) \in A$ が成り立つものが存在する．

上のように $f(A) \in A$ を満たす写像 $f : \mathcal{P} \to X$ のことを $\mathcal{P}$ の選択関数 (choice function) と言う．つまり集合 A について A の元 $f(A)$ を 1 つ選択する写像のことである．

選択公理による Hausdorff 極大原理 II の証明. $(X, \leq)$ を空でない半順序集合とし、X に極大な全順序部分集合が存在することを示す．

$$\mathcal{F} = \{A \mid A \text{ は } X \text{ の } \leq \text{ に関する全順序部分集合で } A \neq \emptyset\ \}$$

と置く．各 $x \in X$ について $\{x\}$ は X の空でない全順序部分集合であるから, $\mathcal{F}$ は空でない．以下, $\mathcal{F}$ を包含関係 “$\subset$” のもとで半順序集合とみなし, $\mathcal{F}$ に極大元が存在することを示そう．まず次が成り立つことに注意しよう．

Claim 1　$\mathcal{Q} \subset \mathcal{F}$ が包含関係に関する $\mathcal{F}$ の空でない全順序部分集合ならば

$$\bigcup_{A \in \mathcal{Q}} A \in \mathcal{F}$$

が成り立つ．実際 $x_1, x_2 \in \bigcup_{A \in \mathcal{Q}} A \in \mathcal{F}$ ならば $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$ を満たす $A_1, A_2 \in \mathcal{Q}$ が存在する．$\mathcal{Q}$ は包含関係に関する全順序集合ゆえ $A_1 \subset A_2$ または $A_2 \subset A_1$ のどちらかが成り立つ．前者の場合は $x_1, x_2 \in A_2$ であり x_1, x_2 は $\leq$ に関し比較可能である．後者の場合も同様であり, x_1, x_2 は $\leq$ に関し比較可能である．よって $\bigcup_{A \in \mathcal{Q}} A \in \mathcal{F}$ は $\leq$ に関する全順序部分集合である．

各 $A \in \mathcal{F}$ について

$$A^* = \{x \in X \backslash A \mid A \cup \{x\} \in \mathcal{F}\}$$

と置く．つまり A に x を付け加えても全順序集合であるような x, 言い換えれば任意の $a \in A$ と比較可能な x の全体を A^* と置く．ここで $\mathcal{P}(X)$ を X の全ての部分集合がなす族とし, 選択公理により, 選択関数 $f : \mathcal{P}(X) \backslash \{\emptyset\} \to X$ をを取る．各 $A \in \mathcal{F}$ について

$$g(A) = \begin{cases} A \cup \{f(A^*)\}, & \text{if } A^* \neq \emptyset \\ A, & \text{if } A^* = \emptyset \end{cases}$$

と置く．この時 $f(A^*) \in A^*$ と g の定義より次の主張が成り立つことも容易に分かる．

Claim 2　各 $A \in \mathcal{F}$ について $g(A) \in \mathcal{F}$ であり, $A \subset g(A)$ かつ $g(A) \backslash A$ は高々 1 点である．

次の主張はこの証明の核心的な箇所であり, ひとまず認めて証明を先に進めよう．

Claim 3　少なくとも 1 つの $A \in \mathcal{F}$ について $g(A) = A$ が成り立つ．

$g(A) = A$ とは $A^* = \emptyset$ を意味し, これはさらに全順序部分集合 A に如何なる元 x を追加しても, もはや $A \cup \{x\}$ は全順序部分集合とならないということであるから A は極大である．従って $(X, \leq)$ に極大な全順序部分集合が存在する．□

Proof of **Claim 3**　$A_0 \in \mathcal{F}$ を固定する．$\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ が tower であるとは

(i) $A_0 \in \mathcal{F}'$

(ii) $\mathcal{Q} \subset \mathcal{F}'$ が包含関係に関する $\mathcal{F}'$ の全順序部分集合ならば

$$\bigcup_{A \in \mathcal{Q}} A \in \mathcal{F}'$$

が成り立つ．

(iii) $A \in \mathcal{F}'$ ならば $g(A) \in \mathcal{F}'$

の 3 条件が全て成り立つ時であると定義しよう．

例えば

$$\mathcal{F}_1 = \{A \in \mathcal{F} \mid A_0 \subset A\}$$

と置く時 $\mathcal{F}_1$ が (i) を満たすことは明らかで (ii) を満たすことは Claim 1 より従う．そして $A \in \mathcal{F}_1$ ならば $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ より $A \in \mathcal{F}$ ゆえ Claim 2 を用いて $g(A) \in \mathcal{F}$ であり $A_0 \subset A \subset g(A)$ より $g(A) \in \mathcal{F}_1$ である．従って $\mathcal{F}_1$ は (iii) も満たすので tower である．

tower が少なくとも 1 つは存在することが確かめられたので

$$\mathcal{F}_0 = \bigcap_{\mathcal{F}' \text{ is tower}} \mathcal{F}'$$

と置こう．このとき $\mathcal{F}_0$ が (i), (ii), (iii) を満たしやはり tower になることは容易に分かる．そして $\mathcal{F}_0$ より真に小さい族はもはや tower ではない．また $A \in \mathcal{F}_0$ ならば $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1$ より $A \in \mathcal{F}_1$ であるから $A_0 \subset A$, つまり

(3) $$A \in \mathcal{F}_0 \Longrightarrow A_0 \subset A$$

が成り立つ．

さて $\mathcal{F}_0$ は (i), (ii), (iii) の性質を満たす最小の族であるから $\mathcal{F}_0$ 自身が $\mathcal{F}$ の全順序部分集合になると期待される．これを示す為に

$$\Gamma = \{C \in \mathcal{F}_0 \mid C \subset A \text{ or } A \subset C \quad \forall A \in \mathcal{F}_0\}$$

と置き, 各 $C \in \Gamma$ について

$$\Phi(C) = \{A \in \mathcal{F}_0 \mid A \subset C \text{ or } g(C) \subset A\}$$

と置く．この時 (3) より $A_0 \in \Gamma$ が直ちに従う．また $C \in \Gamma$ ならば $\Gamma \subset \mathcal{F}_0$ より $C \in \mathcal{F}_0$ であるからやはり (3) より $A_0 \subset C$ が成り立つので $A_0 \in \Phi(C)$ である．以上より Γ と $\Phi(C)$ は (i) を満たす．

さらに $\mathcal{Q} \subset \Gamma$ が包含関係に関する全順序部分集合ならば $\bigcup_{B \in \mathcal{Q}} B$ は $\mathcal{F}_0$ が tower であることから $\bigcup_{B \in \mathcal{Q}} B \in \mathcal{F}_0$ を満たす．また $\bigcup_{B \in \mathcal{Q}} B$ と任意の $A \in \mathcal{F}_0$ は比較可能である．実際, $A \in \mathcal{F}_0$ を固定して (a) 全ての $B \in \mathcal{Q}$ について $B \subset A$ のときは $\bigcup_{B \in \mathcal{Q}} B \subset A$ が成り立つ．(b) (a) でないときはある $B \in \mathcal{Q}$ について $B \not\subset A$ であるが A と B は比較可能ゆえ $A \subset B$ が成り立つので $A \subset \bigcup_{B \in \mathcal{Q}} B$ が成り立つ．従って $\bigcup_{B \in \mathcal{Q}} B$ と A は比較可能であり, $\bigcup_{B \in \mathcal{Q}} B \in \Gamma$ が成り立つ．つまり Γ について (ii) が成り立つ．

同様に $\Phi(C)$ も (ii) を満たす．実際 $\mathcal{Q} \subset \Phi(C)$ が包含関係に関する全順序部分集合ならば $\bigcup_{B \in \mathcal{Q}} B \in \mathcal{F}_0$ であり, (a) 全ての $B \in \mathcal{Q}$ について $B \subset C$ のときは $\bigcup_{B \in \mathcal{Q}} B \subset C$ が成り立つ．(b) (a) でないときはある $B \in \mathcal{Q}$ について $B \not\subset C$ であるが $B \in \Phi(C)$ より $B \subset C$ または $g(C) \subset B$ であるから $g(C) \subset B$ が成り立つ．よって $g(C) \subset \bigcup_{B \in \mathcal{Q}} B$ が成り立つ．従って $\bigcup_{B \in \mathcal{Q}} B \in \Phi(C)$ が成り立つ．

次に $\Phi(C)$ が (iii) を満たすことを示そう．これには $A \in \Phi(C)$ ならば $g(A) \in \Phi(C)$ つまり

(4) $$A \subset C \text{ or } g(C) \subset A \quad \Longrightarrow g(A) \subset C \text{ or } g(C) \subset g(A)$$

を示そう．$A \subset g(A)$ より $g(C) \subset A$ の時, 上の命題は明らかに成り立つ．また $A = C$ の場合も $g(C) = g(A)$ ゆえ, やはり明らかに成り立つ．残る場合は $A \subset C$ かつ $A \neq C$ の時である．まず $A \in \Phi(C) \subset \mathcal{F}_0$ より

$g(A) \in \mathcal{F}_0$ である. $C \in \Gamma$ と合わせると, $g(A)$ と C は比較可能, つまり $g(A) \subset C$ または $C \subset g(A)$ が成り立つ. 前者の場合は命題 (4) の結論が明らかに成り立つ. 以上より $C \subset g(A)$ と仮定してよい. 今の場合は $A \subset C \subset g(A)$ となり $A \neq C$ と $g(A)\backslash A$ が高々 1 点であることを合わせて $g(A) = C$ が従い, 命題 (4) の結論が成り立つ.

以上で $\Phi(C)$ が (iii) を満たすことが分かり, 結局 tower である. $\mathcal{F}_0$ の最小性より $\Phi(C) = \mathcal{F}_0$ が任意の $C \in \Gamma$ について成り立つが, これは任意の $A \in \mathcal{F}_0$ について $A \subset C$ または $g(C) \subset A$ が成り立つことを意味し, $C \subset g(C)$ と合わせれば A と $g(C)$ は比較可能である. 従って任意の $C \in \Gamma$ について $g(C) \in \Gamma$ が成り立つことになり, 換言すれば Γ は (iii) を満たす. 先に Γ が (ii), (ii) を満たすことを示しているので, 結局 Γ も tower になり $\mathcal{F}_0$ の最小性より $\Gamma = \mathcal{F}_0$ が成り立つ. これは $\mathcal{F}_0$ が包含関係に関して全順序部分集合になることを示す. $\mathcal{F}_0$ は tower であったから $\tilde{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{F}_0} A$ と置けば, (ii) より $\tilde{A} \in \mathcal{F}_0$ であり, $\tilde{A}$ の定義より, 任意の $A \in \mathcal{F}_0$ について $A \subset \tilde{A}$ が成り立つ. (iii) より $g(\tilde{A}) \in \mathcal{F}_0$ であるから, 特に $g(\tilde{A}) \subset \tilde{A} \subset g(\tilde{A})$ が成り立ち, $g(\tilde{A}) = \tilde{A}$ を得る. これで **Claim 3** が示された.

整列可能定理を用いた選択公理の証明. 空でない集合の族 $\mathcal{P}$ について $X = \displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{P}} A$ と置き, 選択関数 $f : \mathcal{P} \to X$ の存在を示そう. これにはまず整列可能定理を適用し X に全順序 $\leq$ を導入して整列集合にする. そして各 $A \in \mathcal{P}$ について最小元 $\min A$ が存在するから $f(A) = \min A$ と置けば, $f(A) \in A$ である. $\square$

参考文献

[1] M. Roginskaya, Advanced Basics of Geometric Measure Theory, Lulu.com, 2015.

[2] W. Rudin, Real and complex analysis. Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.