普遍被覆写像の解析学

柳原 宏

目次

序　–Koebe の $1/4$ 円定理と Bloch, Landau 定数 –

第 I 部

基本群と被覆空間

第 1 章

コンパクト性と連結性

この章では, 後の章で用いる位相空間に関する定義や定理などをまとめる．とはいうものの位相空間の定義から始めるのは, 論理的には完璧であるが, あまりに煩雑である．そこで位相空間や距離空間などに関する定義や初歩的な内容は知っているものと仮定して議論を進める．そして距離空間においてコンパクト性と点列コンパクト性が同値であることの証明から実質的な議論を始めよう．

1.1 コンパクト距離空間

位相空間 X の部分集合 A について $\operatorname{Int} A$, $\operatorname{Ext} A$, ∂A で, それぞれ A の内点の全体, 外点の全体, 境界点の全体を表す．また $\overline{A}$ で A の閉包を表す．$\overline{A} = A \cup \partial A$ が成り立つことに注意する．

Definition 1.1.1. 位相空間 X が点列コンパクトであるとは X の任意の $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ について収束する部分列 $\{p_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が取り出せるときを言う．また X がコンパクトであるとは X の任意の開被覆 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について有限部分被覆 $\{V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \ldots, V_{\lambda_n}\}$ が選び出せることである．

Theorem 1.1.2. 位相空間 X について X がコンパクトであるための必要十分条件は, 閉集合の族 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が有限交差性を持てば, 空でない共通部分 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ を持つこと．つまり任意の有限部分族 $F_{\lambda_1}, \ldots, F_{\lambda_n}$ について $F_{\lambda_1} \cap \cdots \cap F_{\lambda_n} \neq \emptyset$ が成り立つとき $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$ が成り立つ．

Proof. X はコンパクトであるとする．閉集合の族 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が有限交差性を持つと仮定して $V_\lambda = X \backslash F_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ と置く．このとき $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \emptyset$ ならばド・モルガン則より $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda = X$ が成り立つ．従って $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は X の開被覆である．よって $V_{\lambda_1} \cup \cdots \cup V_{\lambda_1} = X$ を満たす $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ が存在する．これより再びド・モルガン則を用いて $F_{\lambda_1} \cap \cdots \cap F_{\lambda_1} = \emptyset$ となり矛盾を生じる．従って $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$ である．

逆に X の閉集合の族が有限交差性を持てば, 空でない共通部分を持つと仮定しよう．また $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の開被覆とする．このとき $F_\lambda = X \backslash V_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ と置けば $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda = X$ より $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \emptyset$ が成り立つ．従って $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は有限交差性を持たない．つまり $F_{\lambda_1} \cap \cdots \cap F_{\lambda_n} \neq \emptyset$ を満たす有限部分族 $F_{\lambda_1}, \ldots, F_{\lambda_n}$ が存在する．これより $V_{\lambda_1} \cup \cdots \cup V_{\lambda_n} = X$ が成り立つ．よって X はコンパクトである． □

Theorem 1.1.3. X を位相空間とし, $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の空でないコンパクト集合の減少列とすれば

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$$

が成り立つ．

Proof.

$$F_{n_1} \cap \cdots \cap F_{n_k} = F_{\max\{n_1,\ldots,n_k\}} \neq \emptyset$$

より $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有限交叉性を持つ．そこでコンパクト集合 $X := F_1$ に Theorem 1.1.2 を適用すれば $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ が成り立つ． □

以下では X を距離 $d(\cdot,\cdot)$ を持つ距離空間とし，$p \in X$ と $\varepsilon > 0$ について $N_\varepsilon(p)$ で p の ε-近傍を表す．つまり

$$N_\varepsilon(p) = \{q \in X : d(q,p) < \varepsilon\}$$

である．また集合 $A \subset X$ について

$$N_\varepsilon(A) = \{q \in X : \text{ある } p \in A \text{ について } d(q,p) < \varepsilon\}$$

と置く．容易に分かるように $N_\varepsilon(p)$, $N_\varepsilon(A)$ は，ともに開集合である．

Theorem 1.1.4. X を距離空間とし，$\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の空でないコンパクト集合の減少列とする．また $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ とする．このとき任意の $\varepsilon > 0$ について $F_{n_0} \subset N_\varepsilon(F)$ となる $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在する．

Proof. $\varepsilon > 0$ とする．結論を否定すると，任意の n について $F_n \backslash N_\varepsilon(F) \neq \emptyset$ となるが，$F_n \backslash N_\varepsilon(F)$ はコンパクト集合であり，n について減少である．よって Theorem 1.1.3 より

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} (F_n \backslash N_\varepsilon(F)) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) \backslash N_\varepsilon(F) = F \backslash N_\varepsilon(F) = \emptyset$$

となり矛盾を生じる． □

Theorem 1.1.5. 距離空間 X について X がコンパクトならば，点列コンパクトである．

Proof. X の点列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ について

$$F_n = \overline{\{p_n, p_{n+1}, \ldots\}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

と置けば，閉集合の族 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ は明らかに有限交差性を持つ．従って Lemma ?? より $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ である．$p_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ を任意に取る．このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ と $\varepsilon > 0$ について $N_\varepsilon(p_0) \cap \{p_n, p_{n+1}, \ldots\} \neq \emptyset$ が成り立つ．そこで $\varepsilon = 1$ について $p_{n_1} \in N_1(p_0)$ を満たす $n_1 \in \mathbb{N}$ を取る．そして次に $\varepsilon = 1/2$ について $n_2 \in \mathbb{N}$ を $n_2 > n_1$ かつ $p_{n_2} \in N_{1/2}(p_0)$ を満たすように取る．以下同様に $\varepsilon = 1/k$ について $n_k \in \mathbb{N}$ を $n_k > n_{k-1}$ かつ $p_{n_k} \in N_{1/k}(p_0)$ を満たすように取る．この操作を限りなく続ければ，p_0 に収束する部分列 $\{p_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を得る． □

Theorem 1.1.6. 距離空間 X が点列コンパクトであるとき任意の開被覆 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について，次の性質を持つ正数 $\varepsilon > 0$ が存在する．X の部分集合 A の直径が ε 以下ならば $A \subset V_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda$ が少なくとも 1 つ存在する．

上の性質を持つ ε を開被覆 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の Lebesgue 数 (Lebesgue number) と呼ぶ．

Proof. 定理の主張を論理式で表せば

$$\exists\varepsilon > 0 : \forall A \subset X \text{ with } \operatorname{diam}(A) \leq \varepsilon : \exists\lambda \in \Lambda : A \subset V_\lambda.$$

であるから，これの否定である

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists A \subset X \text{ with } \operatorname{diam}(A) \leq \varepsilon : \forall\lambda \in \Lambda : A \backslash V_\lambda \neq \emptyset.$$

を仮定して矛盾を導こう．

各 $n \in \mathbb{N}$ について $A_n \subset X$ を $\operatorname{diam}(A_n) \le \frac{1}{n}$ かつ

$$\forall \lambda \in \Lambda : A_n \backslash V_\lambda \neq \emptyset \tag{1.1.1}$$

が成り立つように取り，さらに点 $x_n \in A_n$ を任意に取る．X の点列コンパクト性より $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ から収束する部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ が取り出せる．このとき $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ と置けば $x_0 \in V_{\lambda_0}$ を満たす $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在する．V_{λ_0} は x_0 を含む開集合であるから，十分大きな全ての k について $A_{n_k} \in V_{\lambda_0}$ が成り立つ筈であるが，これは (1.1.1) に矛盾する． □

Theorem 1.1.7. 距離空間 X が点列コンパクトならば，任意の $\varepsilon > 0$ について $X \subset \bigcup_{k=1}^n N_\varepsilon(p_k)$ が成り立つように有限個の点 $p_1, \ldots, p_n \in X$ を選び出せる．

Proof. $p_1 \in X$ を任意に取る．次に $N_{\varepsilon/2}(p) \cap N_{\varepsilon/2}(p_1) = \emptyset$ を満たす $p \in X$ がもし存在すれば，p_2 をそのような p の中から任意に選んだ 1 点とする．以下同様に $p_1, \ldots, p_{n-1}$ まで選べたとして

$$N_{\varepsilon/2}(p) \cap N_{\varepsilon/2}(p_k) = \emptyset, \quad k = 1, \ldots, n-1$$

を満たす $p \in X$ がもし存在すれば，p_n をそのような p の中から任意に選んだ 1 点とする．

さてこのような操作が限りなく続けられたとすると，点列 $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ が得られるが，作り方より

$$N_{\varepsilon/2}(p_k) \cap N_{\varepsilon/2}(p_\ell) = \emptyset, \quad k, \ell \in \mathbb{N} \text{ with } k \neq \ell$$

が成り立つ．従って $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ は収束する部分列を持つことが出来ないことになり，X が点列コンパクトであることに矛盾する．

以上より，上の操作は有限回で終わる．そこで $p_1, \ldots, p_n$ を得たとして

$$\forall p \in X : \exists k \in \{1, \ldots, n\} : N_{\varepsilon/2}(p) \cap N_{\varepsilon/2}(p_k) \neq \emptyset$$

が成り立つとする．$N_{\varepsilon/2}(p) \cap N_{\varepsilon/2}(p_k) \neq \emptyset$ となる k について三角不等式より $p \in N_\varepsilon(p_k)$ が成り立つことと p の任意性より $X \subset \bigcup_{k=1}^n N_\varepsilon(p_k)$ が成り立つ． □

Theorem 1.1.8. 距離空間 X が点列コンパクトならば，コンパクトである．

Proof. 開被覆 $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ について $\varepsilon > 0$ を Lebesgue 数とし，Theorem 1.1.7 により $X \subset \bigcup_{k=1}^n N_\varepsilon(p_k)$ が成り立つように有限個の点 $p_1, \ldots, p_n \in X$ を取る．このとき各 $k = 1, \ldots, n$ について $N_\varepsilon(p_k) \subset V_{\lambda_k}$ を満たす λ_k を取れば $X = \bigcup_{k=1}^n V_{\lambda_k}$ が成り立つ． □

以上で次が分かったことになる．

Theorem 1.1.9. 距離空間 X について点列コンパクトであることとコンパクトであることは互いに同値である．

1.2 連結性

Definition 1.2.1. 位相空間 X の部分集合 A が連結でない *(または不連結とも言う)* とは次の条件を満たす開集合 V_1, V_2 が存在するときを言う．

(i) $V_1 \cap A \neq \emptyset$ かつ $V_2 \cap A \neq \emptyset$.

(ii) $V_1 \cap V_2 \cap A = \emptyset$.

(iii) $A \subset V_1 \cup V_2$.

つまり A が X より導入される相対位相のもとで互いに交わらない 2 つの空でない開集合 $H_1 = A \cap V_1$, $H_2 = A \cap V_2$ に分解されるときを言う．このような開集合 H_1, H_2 のことを A の分割と言う．また A が分割を持たないとき，つまり上の条件を満たす開集合 V_1, V_2 が存在しないとき A は連結 *(connected)* であると言う．

集合 A が連結でないとし，上の定義のような V_1, V_2 を取ったとする．このとき $F_1 = V_1^c = X \backslash V_1$, $F_2 = V_2^c = X \backslash V_2$ と置けば以下が成り立つ．

(i') $F_1 \cap A \neq \emptyset$ かつ $F_2 \cap A \neq \emptyset$.
(ii') $F_1 \cap F_2 \cap A = \emptyset$.
(iii)' $A \subset F_1 \cup F_2$.
(iv)' $A \cap V_1 = A \cap F_2$, $A \cap V_2 = A \cap F_1$,

Proof. (iii) $A \subset V_1 \cup V_2$ より

$$\emptyset = A \backslash (V_1 \cup V_2) = A \cap (V_1^c \cap V_2^c) = A \cap F_1 \cap F_2$$

が成り立つ．また (ii) $V_1 \cap V_2 \cap A = \emptyset$ より $V_2 \cap A \subset V_1^c = F_1$ が成り立つ．同様に $V_1 \cap A \subset V_2^c = F_2$ が成り立つ．これらの式の両辺と A の共通部分を取ると

$$V_2 \cap A \subset F_1 \cap A, \quad V_1 \cap A \subset F_2 \cap A$$

が成り立つ．これと (i) を合わせると (i') が従う．また全く同様に (ii') $F_1 \cap F_2 \cap A = \emptyset$ より

$$F_2 \cap A \subset V_1 \cap A, \quad F_1 \cap A \subset V_2 \cap A$$

が成り立つことが示されるので (iv') が成り立つ． □

以上の議論より次の定理が成り立つ．

Theorem 1.2.2. 位相空間 X の部分集合 A が連結でない為の必要十分条件は A が X より導入される相対位相のもとで互いに交わらない 2 つの空でない閉集合 $H_2 = A \cap F_1$, $H_1 = A \cap F_2$ に分解されることと同値である．また空でない A の真部分集合で A の相対位相に関して開かつ閉集合であるものが存在することとも同値である．

Remark 1.2.3. $A \subset B \subset X$ の場合，A の連結，不連結については 2 つの方法で定義をすることが出来る．1 つは A を X の部分集合とみて，*Definition* 1.2.1 そのままに定義する仕方である．もう 1 つは B を X の位相より導入される相対位相をもつ位相空間とみなし，この位相のもとで A が連結ま，不連結を定義する仕方である．しかしながら容易に分かるように，この 2 つの定義の仕方は互いに同値である．従って例えば，複素平面 $\mathbb{C}$ の位相は *Riemann* 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ から導入される相対位相と一致することに注意すれば，集合 $E(\subset \mathbb{C})$ について $\mathbb{C}$ と $\hat{\mathbb{C}}$ のどちらで考えても連結がそうでないかは同一である．

Theorem 1.2.4. X, Y を位相空間とし，$\varphi : X \to Y$ を連続写像とする．このとき X が連結ならば $\varphi(X)$ も連結である．

Proof. $\varphi(X)$ が連結でなければ Y の開集合 U_1, U_2 を $\varphi(X) \subset U_1 \cup U_2$, $(\varphi(X) \cap U_1) \cap (\varphi(X) \cap U_2) = \emptyset$ かつ $(\varphi(X) \cap U_1) \neq \emptyset \neq (\varphi(X) \cap U_1)$ が成り立つように取れる．このとき $\varphi^{-1}(U_1)$, $\varphi^{-1}(U_2)$ が X の分割を与えることは容易に分かる． □

Thorem 1.2.4 より連結性は位相写像で不変な性質であることが分かる.

Theorem 1.2.5. 位相空間 X が連結でないための必要十分条件は全射連続関数 $f : X \to \{0, 1\}$ が存在すること.

Proof. X が連結でなければ, X の分割 V_1, V_2 を取り $x \in V_1$ について $f(x) = 0$, $x \in V_2$ について $f(x) = 1$ と置けば全射かつ連続である.

逆に全射連続関数 $f : X \to \{0, 1\}$ が存在すれば $V_1 = f^{-1}(0)$, $V_2 = f^{-1}(1)$ と置けば, 両方とも空でない開集合であり, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = X$ を満たす. □

$\mathbb{R}\backslash\{0\}$ は $\mathbb{R}\backslash\{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ と, 共通部分を持たず両方とも空でない 2 つの開集合に分解できるので連結でない. 一方 $\mathbb{R}$ は連結であるが, これを証明するには Theorem 1.2.5 を用いれば容易である. 実際 $\mathbb{R}$ は連結でなければ全射連続関数 $f : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ が存在することになるが, これは中間値の定理に矛盾する.

Definition 1.2.6. 位相空間 X 上の関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が局所的に一定であるとは, 任意の点 $p \in X$ について, p の開近傍 V で V 上 f が一定値になるものが存在するときを言う.

Theorem 1.2.7. 位相空間 X が連結ならば X 上の局所的に一定な関数 $f : X \to \mathbb{R}$ は X 全体で一定である.

Proof. $x_0 \in X$ を適当に取り $V_1 = \{x \in X : f(x) = f(x_0)\}$, $V_2 = \{x \in X : f(x) \neq f(x_0)\}$ と置けば f が局所的に一定であることより V_1, V_2 はともに開集合である. また共通部分を持たず $X = V_1 \cup V_2$ である. そして $x_0 \in V_1$ より $V_1 \neq \emptyset$ である. ここで $V_2 \neq \emptyset$ ならば V_1, V_2 は X の分割となってしまい, X の連結性に反する. 従って $V_2 = \emptyset$ となり, $V_1 = X$ である. これは f が X で一定であることを意味する. □

Corollary 1.2.8. X を連結な位相空間とし, $f : X \to \mathbb{R}$ を連続な関数とする. このとき $f(X)$ が $\mathbb{R}$ の孤立点集合ならば f は X で一定値である.

Proof. $f(X)$ は孤立点集合であるから, 各 $p \in X$ について $f(X) \cap U = f(p)$ を満たす $\mathbb{R}$ の開集合 U が存在する. このとき $f^{-1}(U)$ は p の X における近傍であり, $q \in f^{-1}(U)$ について $f(q) \in U \cap f(X) = \{f(p)\}$ より $f(q) = f(p)$ が成り立つ. 従って f は p の近傍である $f^{-1}(U)$ で一定である.

以上で f が局所的に一定であることが示されたので, Theorem 1.2.7 より X で一定である. □

Theorem 1.2.9. X を位相空間とし $A \subset X$ とする. このとき連結な部分集合 $B \subset A$ が $B \cap \operatorname{Int} A \neq \emptyset \neq B \cap \operatorname{Ext} A$ を満たせば, $B \cap \partial A \neq \emptyset$ である.

Proof. $B \cap \partial A = \emptyset$ ならば $B \cap \operatorname{Int} A$ と $B \cap \operatorname{Ext} A$ が B の分割を与えることになり, B の連結性に反する. □

Theorem 1.2.10. $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を位相空間 X の連結部分集合の族とし, A を X の連結部分集合とする.

(i) 各 $\lambda, \mu \in \Lambda$ について $A_\lambda \cap A_\mu \neq \emptyset$ ならば $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ も連結である. 特に $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ ならばそうである.
(ii) 各 $\lambda \in \Lambda$ について $A \cap A_\lambda \neq \emptyset$ ならば $A \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ も連結である.

Proof. (i) $B := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ が不連結ならば $B = (B \cap V_1) \cup (B \cap V_2)$, $(B \cap V_1) \cap (B \cap V_2) = \emptyset$, $B \cap V_1 \neq \emptyset \neq B \cap V_2$, を満たす 2 つの開集合 V_1, V_2 が存在する. $\lambda_0 \in \Lambda$ を任意に 1 つ取れば $A_{\lambda_0} \subset V_1 \cup V_2$ と A_{λ_0} の連結性より $A_{\lambda_0} \subset V_1$ または $A_{\lambda_0} \subset V_2$ のどちらか一方のみが成り立つ. 例えば $A_{\lambda_0} \subset V_1$　仮定しよう. 他の全ての $\lambda \in \Lambda$ についても $A_\lambda \subset V_1$ または $A_\lambda \subset V_2$ のどちらか一方のみが成り立つが, $A_\lambda \cap A_{\lambda_0} \neq \emptyset$ より $A_\lambda \subset V_1$ が成り立つ. (さもなければ $A_{\lambda_0} \subset V_2$ より $A_{\lambda_0} \cap A_\lambda = \emptyset$ となり仮定に反する.) 従って $B = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset V_1$ となる. これは仮定に反する.

(ii) $A \cup \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A \cup A_\lambda)$ に (i) を適用すればよい. □

Theorem 1.2.11. 位相空間 X の部分集合 A が連結ならば $A \subset B \subset \overline{A}$ を満たす任意の部分集合 B も連結である.

Proof. B が不連結ならば

$$B = (B \cap V_1) \cup (B \cap V_2), \quad (B \cap V_1) \cap (B \cap V_2) = \emptyset$$

かつ $B \cap V_1 \neq \emptyset \neq B \cap V_2$ を満たす 2 つの開集合 V_1, V_2 が存在する. このとき $A \subset B$ より

$$A = (A \cap V_1) \cup (A \cap V_2), \quad (A \cap V_1) \cap (A \cap V_2) = \emptyset$$

が成り立つ. よって A の連結性より $A \subset A \cap V_1$, $A \subset A \cap V_2$ のどちらか一方が成り立つ. 例えば $A \subset A \cap V_1$w　の場合 $A \cap V_2 = \emptyset$ となるが, これより $\overline{A} \cap V_2 = \emptyset$ となることが従う. (実際 $\overline{A} \cap V_2 \neq \emptyset$ ならば点 $x \in (\overline{A} \backslash A) \cap V_2$ が取れる. V_2 は x の近傍であるから, V_2 の中に A の点が存在するので $V_2 \subset A \neq \emptyset$ となり矛盾を生じる.) $\overline{A} \cap V_2 = \emptyset$ と $B \subset \overline{A}$ より $B \cap V_2 = \emptyset$ が成り立つことになる. これは矛盾である. □

Definition 1.2.12. A を位相空間 X の部分集合とし, $A_0 \subset A$ とする. このとき A_0 が A の連結成分であるとは

(i) A_0 は空でない連結集合である.
(ii) B が $B \subset A$ かつ $A_0 \cap B \neq \emptyset$ を満たす連結集合ならば $B \subset A_0$

が成り立つときを言う. この定義より明らかに A_0, A_1 が A の連結成分ならば $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ であるか $A_0 = A_1$ のどちらか一方が成り立つ.

Theorem 1.2.13. A を位相空間 X の部分集合とし, E を A の空でない連結部分集合とすれば E を含む A の連結成分が一意的に存在する.

Proof. E を含み, A に含まれる連結集合の全ての和集合を A_0 と置けば A_0 は Theorem 1.2.10 より連結である.

A_0 が成分であることを示すために, B が $B \subset A$ かつ $A_0 \cap B \neq \emptyset$ を満たす連結集合と仮定する. このとき $B \cup A_0$ は共通部分が空でない 2 つの連結集合の和であるから, やはり連結であり, E を含み A に含まれる. よって A_0 の最大性より $B \cup A_0 \subset A_0$ が成り立つ. 従って $B \subset A_0$ が成り立つので A_0 は A の成分である.

A_0 の一意性は (ii) より明らかであろう. □

Remark 1.2.14. $p \in A$ のとき $\{p\}$ は連結であるから, 上の *Theorem 1.2.13* より $\{p\}$ を含む A の成分 A_0 が一意的に存在する. A_0 は p が<u>属する</u> A の成分と呼ぶべきものであるが, p を<u>含む</u> A の連結成分 *(connected component)* と呼ぶことが多い.

Theorem 1.2.15. A_0 が A の連結成分ならば

$$A_0 = \overline{A_0} \cap A$$

が成り立ち A_0 は A の相対位相のもとで閉集合である.

Proof. $A_0 \subset \overline{A_0} \cap A$ が成り立つのは明らかである. また

$$A_0 \subset \overline{A_0} \cap A \subset \overline{A_0}$$

において A_0 が連結であるから, Theorem 1.2.11 より $\overline{A_0} \cap A$ は連結である. また $\overline{A_0} \cap A$ は A に含まれるので, 連結成分の最大性より $\overline{A_0} \cap A \subset A_0$ が成り立つ. よって等号が成り立つ. □

Corollary 1.2.16. 領域 D が開集合 G の連結成分ならば

$$\partial D = \overline{D} \backslash G \subset \partial G$$

が成り立つ．

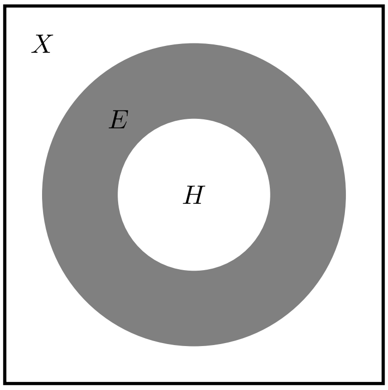
Proof. Theorem 1.2.15 より $D = \overline{D} \cap G$ が成り立つ．よって

$$\partial D = \overline{D} \backslash D = \overline{D} \backslash (\overline{D} \cap G) = \overline{D} \backslash G \subset \overline{G} \backslash G = \partial G$$

が成り立つ． □

さてユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ 内の閉集合 F について $\mathbb{R}^2 \backslash F$ は開集合である．D を $\mathbb{R}^2 \backslash F$ の成分の 1 つとすれば D は成分であるから $\mathbb{R}^2 \backslash F$ の閉集合であるが，($\mathbb{R}^2$ の局所連結性 (§1.4) より) 開集合でもある．そして和集合 $F \cup D$ が連結となることを証明出来る．この事実はもっと一般的な状況で成り立つ．

Theorem 1.2.17. X を連結位相空間とし，E を X の連結部分集合とする．このとき集合 H が $X \backslash E$ の部分集合であり，$X \backslash E$ の相対位相のもとで開かつ閉ならば $E \cup H$ は連結である．



Proof. $E \cup H$ が連結でなく，分割 $E \cup H = H_1 \cup H_2$ を持つと仮定して矛盾を導く．ここに H_1, H_2 は $E \cup H$ の空でない開かつ閉集合で $H_1 \cup H_2 = E \cup H$, $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ である．

さて E の連結性より $E \subset H_1$ または $E \subset H_2$ のどちらか一方が成り立つ．以下では一般性を失うことなく $E \subset H_1$ と仮定して証明を進める．このとき $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ と合わせて $H_2 \cap E = \emptyset$ であるから $H_2 \subset H$ が成り立つ．ここで H は $X \backslash E$ の開かつ閉集合であり H_2 は $E \cup H$ の開かつ閉集合であるので

$$H = (X \backslash E) \cap G = (X \backslash E) \cap F, \quad H_2 = (E \cup H) \cap G_2 = (E \cup H) \cap F_2$$

を満たす開集合 G, G_2 と閉集合 F, F_2 が存在する．よって

$$\begin{aligned} H_2 &= (E \cup H) \cap G_2 \\ &= (E \cap H) \cup (H \cap G_2) \\ &= H \cap G_2 \qquad (\because\ H \subset X \backslash E\ ) \\ &= (X \backslash E) \cap (G \cap G_2) \end{aligned}$$

また $H_2 \subset H \subset G$ より

$$H_2 = H_2 \cap G = (E \cup H) \cap (G \cap G_2)$$

であるから

$$\begin{aligned} H_2 &= H_2 \cup H_2 \\ &= \{(X\backslash E) \cap (G \cap G_2)\} \cup \{(E \cup H) \cap (G \cap G_2)\} \\ &= \{(X\backslash E) \cup (E \cup H)\} \cap (G \cap G_2) \\ &= G \cap G_2 \end{aligned}$$

が成り立つ．よって H_2 は開集合である．また全く同様にして $H_2 = F \cap F_2$ が従うので，H_2 は閉集合でもある．H_2 は空でなく X とも一致しないので，これは X の連結性に反する． □

Theorem 1.2.18. X を連結位相空間とし，A を X の連結部分集合とする．また集合 C は $X\backslash A$ の成分とする．このとき $X\backslash C$ は連結である．

Proof. $X\backslash C$ が連結でないとして H_1, H_2 を $X\backslash C$ の分割とする．$C \subset X\backslash A$ より $A \subset X\backslash C = H_1 \cup H_2$ に注意しよう．仮に $A \cap H_1 = \emptyset$ とすると $H_1 \subset X\backslash A$ であり，$C \subset X\backslash A$ と合わせて $C \cup H_1 \subset X\backslash A$ が成り立つ．Theorem 1.2.17 より $C \cup H_1$ は連結であるから，これは C が $X\backslash A$ の成分であることに矛盾する．よって $A \cap H_1 \neq \emptyset$ である．全く同様に $A \cap H_2 \neq \emptyset$ が成り立つ．これらの結果と $A \subset H_1 \cup H_2 = X\backslash C$ を合わせると $A \cap H_1$, $A \cap H_2$ が A の分割を与えることになり，A の連結性に反する． □

Theorem 1.2.19. X を位相空間とし，G_λ, $\lambda \in \Lambda$ を互いに交わらない *(*つまり $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば $G_{\lambda_1} \cap G_{\lambda_2} = \emptyset$*)* 連結開集合の族とする．このとき開集合 $G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ の連結成分は各 G_λ よりなる．すなわち各 $\lambda \in \Lambda$ について

$$x \in G_\lambda \quad \Longrightarrow \quad C_x(G) = G_\lambda$$

が成り立つ．

Proof. $x \in G_{\lambda_0}$ とする．$C_x(G)$ は x を含む G の最大の部分集合であるから $G_{\lambda_0} \subset C_x(G)$ が成り立つ．

次に $C_x(G) \subset G_{\lambda_0}$ を示すために $y \in C_x(G)\backslash G_{\lambda_0}$ が存在すると仮定する．このとき $G_1 = G_{\lambda_0}$, $G_2 = \bigcup_{\lambda_0 \neq \lambda \in \Lambda} G_\lambda$ と置くと，G_1, G_2 はともに開集合であり $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $G = G_1 \cup G_2$ を満たす．また $x \in C_x(G) \cap G_1$, $y \in C_x(G) \cap G_2$ より $C_x(G) \cap G_1 \neq \emptyset \neq C_x(G) \cap G_2$ が成り立つ．これは $C_x(G)$ の連結性に反する． □

1.3　弧状連結性

Definition 1.3.1. 位相空間 X の 2 点 p, $q \in X$ について連続写像 $\gamma : [0,1] \to X$ で $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ を満たすものを p, q を結ぶ道と言い，p を道 γ の始点，q を終点と言う．またこのような道が存在するとき p, q は道で結べると言う． 位相空間 X が弧状連結 *(pathwise-connected)* であるとは，任意の 2 点 p, $q \in X$ について p, q を結ぶ道が存在するときを言う．

連結性と同様に弧状連結性についても次の定理が成り立つ．証明は容易であるから省略する．

Theorem 1.3.2.
(a) X, Y を位相空間とし $\varphi : X \to Y$ を連続写像とする．このとき X が弧状連結ならば $\varphi(Y)$ も弧状連結である．
(b) 位相空間 X の部分集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ において全ての A_λ が弧状連結であり，どの 2 つも空でない共通部分を持つならば，$A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ も弧状連結である．

Theorem 1.3.3. 位相空間 X が弧状連結ならば，連結である．

Proof. X が連結でないと仮定すると, 連続な全単射 $f : X \to \{0,1\}$ が存在する. $f(p)=0$, $f(q)=1$ となる $p, q \in X$ を取り, 連続写像 $\gamma : [0,1] \to X$ で $\gamma(0)=p$, $\gamma(1)=q$ を満たすものを取る. このとき $f \circ \gamma : [0,1] \to \{0,1\}$ は $f \circ \gamma(0) = 0$, $f \circ \gamma(1) = 1$ を満たす連続写像であるが, $(0,1)$ の全ての値を取らない. これは中間値の定理に矛盾する. □

上の定理の逆は必ずしも成り立たない.

Definition 1.3.4. 位相空間 X の各点 p とその近傍 U について $p \in V \subset U$ を満たす弧状連結な開近傍 V が存在するならば X は局所弧状連結であると言う.

Theorem 1.3.5. 位相空間 X は局所弧状連結であるとし, $G \subset X$ は開集合であるとする. このとき

$$G \text{ が連結} \quad \Longleftrightarrow \quad G \text{ が弧状連結}$$

が成り立つ.

Proof. "$\Longrightarrow$" については Theorem 1.3.3 より直ちに従う.

"$\Longleftarrow$" を示すために G は連結であるとして $x_0 \in G$ を任意に取る. x_0 と G 内の道で結べる $x \in G$ の全体を G_1 と置き, x_0 と G 内の道で結べない $x \in G$ の全体を G_2 と置けば, X の局所弧状連結性より, ともに開集合であり $V_1 \cup V_2 = G$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ を満たす. $x_0 \in V_1$ であるから, $V_1 \neq \emptyset$ なので G の連結性より $G_2 = \emptyset$ となり, $G_1 = G$, つまり G は弧状連結である. □

さて集合 $E \subset X$ について点 $x \in E$ を含む E の連結成分を $C_x(E)$ と表そう. $C_x(E)$ は x を含む E の連結部分集合の全ての和であり, x を含む E の連結部分集合で最大のものであった. Theorem 1.3.2 (b) より x を含む E の弧状連結部分集合の全ての和は x を含む E の弧状連結部分集合で最大のものである. これを $A_x(E)$ と表し, x を含む E の弧状連結成分 (pathwise connected component) と言う. しかしながら

$$A_x(E) = \{y \in E : y \text{ は } x \text{ と } E \text{ 内の道で結べる }\}$$

と直接的な定義も可能である. 実際, 上式の右辺を $B_x(E)$ と置けば $A_x(E) \subset B_x(E)$ が成り立つことは明らかであり, $y \in B_x(E)$ ならば x と y を結ぶ道 $\gamma : [0,1] \to E$ が取れるが, $\gamma([0,1])$ は弧状連結であり $x = \gamma(0) \in \gamma([0,1]) \subset E$ を満たすので $y = \gamma(1) \in \gamma([0,1]) \subset A_x(E)$ である. よって $B_x(E) \subset A_x(E)$ である.

弧状連結ならば連結であるから

$$A_x(E) \subset C_x(E) \tag{1.3.1}$$

が成り立つ. 具体例を挙げるのは控えるが, 逆の包含関係は一般に成り立つとは限らない.

Theorem 1.3.6. X を局所弧状連結位相空間とし, $G \subset X$ を開集合とする. このとき任意の $x \in G$ について x を含む連結成分 $C_x(G)$ は開集合であり, 連結成分と弧状連結成分は一致する, つまり $C_x(G) = A_x(G)$ が成り立つ.

Proof. 任意の $y \in C_x(G)$ について $y \in G$ と X の局所弧状連結性より $y \in V \subset G$ を満たす弧状連結な開集合 V が存在する. V は連結であり $y \in V \cap C_x(G)$ より $C_x(G) \subset V$ も連結であり $C_x(G) \subset V \subset G$ を満たす. よって $C_x(G)$ の最大性より $V \subset C_x(G)$ が成り立ち, 特に y は $C_x(G)$ の内点である. よって $C_x(G)$ は開集合である.

さらに $C_x(G)$ は局所弧状連結空間における連結な開集合であるから弧状連結であり, $x \in C_x(G) \subset G$ を満たすので $A_x(G)$ の最大性より $C_x(G) \subset A_x(G)$ が成り立つ. (1.3.1) より逆の包含関係も成り立つので $C_x(G) = A_x(G)$ である. □

1.4 局所連結空間

Definition 1.4.1. X を位相空間とし $x \in X$ とする.

(i) $x \in U$ を満たす任意の開集合 U について連結開集合 V で $x \in V \subset U$ を満たすものが存在するとき X は x において局所連結 *(locally connected at x)* であると言う.

(ii) $x \in U$ を満たす任意の開集合 U について連結集合 N で $x \in \operatorname{Int} N \subset N \subset U$ を満たすものが存在するとき X は x において弱局所連結 *(weakly locally connected at x)* であると言う.

(iii) $x \in U$ を満たす任意の開集合 U について弧状連結開集合 V で $x \in V \subset U$ を満たすものが存在するとき X は x において局所弧状連結 *(locally path connected at x)* であると言う． 全ての $x \in X$ において局所連結, 弱局所連結, または局所弧状連結のとき, X は局所連結, 弱局所連結, または局所弧状連結であると言う.

明らかに次が成り立つ.

Proposition 1.4.2. G を位相空間 X の開集合とすると, 相対位相の意味で

$$X \text{ が } \begin{cases} \text{局所弧状連結} \\ \text{局所連結} \\ \text{弱局所連結} \end{cases} \quad \text{ならば } G \text{ も } \begin{cases} \text{局所弧状連結} \\ \text{局所連結} \\ \text{弱局所連結} \end{cases}$$

が成り立つ.

また定義より明らかに

$$x \text{ において局所弧状連結} \implies x \text{ において局所連結} \implies x \text{ において弱局所連結} \tag{1.4.1}$$

が成り立つが, 注意すべきなのは

$$X \text{ が局所連結} \iff X \text{ が弱局所連結} \iff X \text{ の任意の開集合の任意の成分は開集合} \tag{1.4.2}$$

が成り立つことである.

Theorem 1.4.3. X を位相空間とし $x \in X$ とする. このとき X が x において弱局所連結である為の必要十分条件は $x \in U$ を満たす任意の開集合 U について開集合 V で $x \in V$ を満たし, 次の性質を持つものが存在することである.

$$\text{任意の } x_1, x_2 \in V \text{ について, ある連結集合 } N \text{ で } x_1, x_2 \in N \subset U \text{ となるものが存在する.}$$

Proof. 必要性は明らかであるから, 十分性を示そう. そこで開集合 U, V を上のように取ったとする. このとき各 $y \in V$ について連結集合 N_y で $x, y \in N_y \subset U$ を満たすものが存在するので

$$N = \bigcup_{y \in V} N_y$$

と置けば, $V \subset N \subset U$ を満たす. V は開集合であるから $x \in \operatorname{Int} N \subset U$ が成り立つ. $\square$

Theorem 1.4.4. 位相空間 X について, 次の 3 条件は互いに同値である.

(a) X は局所連結である.

(b) X は弱局所連結である.

(c) X の任意の開集合の任意の成分は開集合である.

Proof. $(a) \Longrightarrow (b)$ は明らかである. (b) が成り立つと仮定し, G を開集合とし G_0 をその成分とする. また $x \in G_0$ を任意に取る. このとき $x \in \operatorname{Int} N \subset N \subset G$ を満たす連結集合 N が存在する. G_0 の最大性より $N \subset G_0$ が成り立つので $x \in \operatorname{Int} N \subset G_0$ が成り立つことになり, x は G_0 の内点である. よって $x \in G_0$ の任意性より G_0 は開集合であり, (c) が成り立つ.

(c) が成り立つと仮定する. $x \in U$ を満たす開集合 U について x を含む G の成分を V と置けば (i) が成り立ち X は局所連結である. □

Example 1.4.5. ちょっとした例を挙げておこう.

(1) 任意の正の整数 n 対して, ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は弧状連結であるから連結であり, かつ局所弧状連結であるから局所連結である.
(2) $\mathbb{R}$ の部分空間 $[0,1] \cup [2,3]$ は局所弧状連結だが連結でない.
(3) $E_1 = \{(x,y) : 0 < x \leq 1,\ y = \sin\frac{1}{x}\}$ とし E_2 を線分 $\{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\}$ の部分集合とすれば $E_1 \cup E_2$ は連結であるが弧状連結でなく, 局所連結でない.

Proof. 証明を要するのは (3) のみであろう. まず E_1 は連結である区間 $(0,1]$ の連続像であるから連結である. 従って $\overline{E_1}$ も連結であり, $E_1 \subset E_1 \cup E_2 \subset \overline{E_1}$ であるから $E_1 \cup E_2$ も連結である.

書きかけ □

X が局所連結空間のとき X の成分は Theorem 1.4.4 より開集合である. 従って E が X の成分ならば E は開かつ閉集合になり $E, X \backslash E$ は X の分割である.

Theorem 1.4.6. X を局所連結空間とし $E \subset X$ とする. このとき C が E の成分ならば

$$\operatorname{Int} C = C \cap \operatorname{Int} E$$

が成り立ち, E が閉集合ならば

$$\partial C = C \cap \partial E$$

が成り立つ.

Proof. $\operatorname{Int} C \subset C \cap \operatorname{Int} E$ は明らかである. 逆の包含関係を示すために $x \in C \cap \operatorname{Int} E$ とすると, 局所連結性より $x \in V \subset \operatorname{Int} E$ を満たす連結開集合 V が存在する. V は x を含み E に含まれる連結集合であるから $V \subset C$ が成り立つ. これと V が開集合であり, $\operatorname{Int} C$ は C に含まれる最大の開集合であることより $x \in V \subset \operatorname{Int} C$ が成り立つ. よって $C \cap \operatorname{Int} E \subset \operatorname{Int} C$ が成り立つ.

さて C は E の成分であるから E の相対位相に関して閉集合であるが E 自身が閉集合の場合 C も X の閉集合になる.

$$\begin{aligned}
\partial C &= \overline{C} \backslash \operatorname{Int} C \\
&= C \backslash (C \cap \operatorname{Int} E) \\
&= C \cap (\partial E \cup \operatorname{Ext} E) \\
&= C \cap \partial E \qquad (\because\ C \subset E \text{ と } E \cap \operatorname{Ext} E = \emptyset \text{ より})
\end{aligned}$$

□

1.5　コンパクト距離空間における連結性

Definition 1.5.1. X を距離 $d(\cdot,\cdot)$ を持つ距離空間とし, $E \subset X$ とする. また $x,\, y \in E,\, \varepsilon > 0$ とする. このとき x と y が E 内の ε-鎖 (ε-*chain*) で結べるとは $x = a_0,\, y = a_n$ を満たす有限個の点の列 $\{a_k\}_{k=0}^{n} \subset E$ で

$$d(a_{k-1}, a_k) \leq \varepsilon, \quad k = 1, \ldots, n$$

を満たすものが存在するときを言う. また全ての $x,\, y \in E$ が E 内の ε-鎖で結べるとき X は ε-連結であると言う.

Theorem 1.5.2. X を距離空間とし, $E \subset X$ とする.

(i) E が連結ならば, 全ての $\varepsilon > 0$ について ε-連結である.

(ii) E がコンパクトならば

$$E \text{ は連結} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ について } E \text{ は } \varepsilon\text{-連結}$$

が成り立つ.

Proof. $x_0 \in X$ を任意に取り固定し,

$$E_\varepsilon = \{x \in E : \ x \text{ は } x_0 \text{ と } E \text{ 内の } \varepsilon\text{-鎖で結べる}\}, \quad \varepsilon > 0$$

と置く. このとき E_ε は E 内の開かつ閉集合であることを示そう. これが示されれば $x_0 \in E_\varepsilon$ であるから E_ε は空でないこと及び E の連結性より, $E_\varepsilon = E$ が従う. よって (i) および (ii) の "$\Longrightarrow$" の部分の証明は完了する.

$x \in E_\varepsilon$ ならば x の ε-近傍 $N_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$ と E の共通部分について $N_\varepsilon(x) \cap E \subset E_\varepsilon$ が成り立つ. 実際 $y \in N_\varepsilon(x) \cap E$ について x_0 と x の ε-鎖 $x_0 = a_0, \ldots, a_n = x$ に点 $a_{n+1} = y$ を追加すれば $d(a_n, a_{n+1}) = d(x,y) < \varepsilon$ であるから, x_0 と y を結ぶ E 内の ε-鎖が得られるので $y \in E_\varepsilon$ である. 従って E_ε は E の相対位相に関して開集合である. また殆ど同様にして $E \backslash E_\varepsilon$ についても E の相対位相に関して開集合であることが分かる.

(ii) の"$\Longleftarrow$" の部分については対偶を証明する. E がコンパクトであると仮定する. もし E が連結でなければ $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ を満たす 2 つの空でない閉集合 $H_1,\, H_2$ で共通部分を持たないものにより $X = H_1 \cup H_2$ と分解される. このとき $H_1,\, H_2$ もコンパクトであるから $d(H_1, H_2) = \inf\{d(x,y) : x \in H_1, \in y \in H_2\} > 0$ である. このとき任意の $x \in H_1,\, y \in H_2$ について $0 < \varepsilon < d(H_1, H_2)$ ならば $x,\, y$ が E 内の ε-鎖で結ぶことが出来ないことは明らかである. □

Theorem 1.5.3. X を距離空間とし, $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の空でない ε-連結かつコンパクトな集合の減少列とする. このとき $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ も ε-連結である.

Proof. まず $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ が空でないことに注意しよう. (Theorem 1.1.3 を参照). $x_0 \in F$ を任意に取り固定し

$$F_0 = \{x \in F : \ x \text{ は } x_0 \text{ と } F \text{ 内の } \varepsilon\text{-鎖で結べる}\}$$

と置く. 勿論 $x_0 \in F_0$ であるから F_0 は空でない.

それでは $F \backslash F_0 \neq \emptyset$ と仮定し矛盾を導こう. Theorem 6.2.2 の証明中で示したように F_0 及び $F \backslash F_0$ はコンパクト集合 F 内の開かつ閉部分集合であり, 共通部分を持たない. 従ってともにコンパクトであり $\delta = d(F_0, F \backslash F_0) > 0$ であり, $d(a,b) = \delta$ を満たす $a \in F_0,\, b \in F \backslash F_0$ が存在する.

もし $\delta \le \varepsilon$ ならば a と b は F 内の ε-鎖で結べることになり, 従って x_0 と b も F 内の ε-鎖で結べる．これは $b \notin F_0$ に矛盾する．よって $\delta > \varepsilon$ が成り立つ．そこで

$$F_n \subset N_{\frac{\delta-\varepsilon}{2}}(F) := \left\{ y \in X : \text{ ある } x \in F \text{ について } d(x,y) < \frac{\delta-\varepsilon}{2} \right\}$$

を満たす番号 n を取る．このような番号の存在は Theorem 1.1.4 より従う．ここで任意の $p \in F_0$, $q \in F \backslash F_0$ について $p, q \in F_n$ より p, q を結ぶ F_n 内の ε-鎖 $p = c_0, \dots, c_n = q$ が存在する．これら $\{c_k\}$ の各点と $F = F_0 \cup (F \backslash F_0)$ との距離は $\frac{\delta-\varepsilon}{2}$ より小であるから, 各 c_k について $d(c_k, F_0) < \frac{\delta-\varepsilon}{2}$ または $d(c_k, F\backslash F_0) < \frac{\delta-\varepsilon}{2}$ の少なくとも一方が成り立つが, 両方成り立つことはない．実際, 両方成り立てば $d(F_0, F\backslash F_0) \le d(c_k, F_0) + d(c_k, F\backslash F_0) < \delta - \varepsilon$ となり矛盾を生じる．

さて $a_0 = p \in F_0$, $a_n = q \in F\backslash F_0$ であるから $d(a_0, F_0) = 0 < \frac{\delta-\varepsilon}{2}$ $d(a_n, F\backslash F_0) = 0 < \frac{\delta-\varepsilon}{2}$ が成り立つ．従って $k = 1, \dots, n$ の中に

$$d(a_{k-1}, F_0) < \frac{\delta-\varepsilon}{2}, \quad d(a_k, F\backslash F_0) < \frac{\delta-\varepsilon}{2}$$

が成り立つものが存在する．これと $d(a_{k-1}, a_k) < \varepsilon$ を合わせて

$$d(F_0, F\backslash F_0) \le d(a_{k-1}, F_0) + d(a_{k-1}, a_k) + d(a_k, F\backslash F_0) < \frac{\delta-\varepsilon}{2} + \varepsilon + \frac{\delta-\varepsilon}{2} = \delta$$

となり矛盾を生じる． □

さて連続体とは 2 点以上を含むコンパクトかつ連結な集合のことであった．

Theorem 1.5.4. X を距離空間とし, $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の連続体の減少列とする．このとき $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ は連続体であるか, 1 点である．

Proof. $F \neq \emptyset$ は Theorem 1.1.3 より従う．そして F は閉集合の列の共通部分ゆえ閉集合であり, コンパクト集合 F_1 に含まれるのでコンパクトである．また任意の $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ について F_n は ε-連結であるから F もそうであり, ε の任意性より F は連結である．よって F は 1 点よりなるか, さもなければ連続体である． □

Theorem 1.5.5. 距離空間 X のコンパクト部分集合 F と $x \in F$ について x を含む F の連結成分 C は

$$C = \{ y \in F : \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ について } x \text{ と } y \text{ は } F \text{ 内の } \varepsilon\text{-鎖で結ばれる } \}$$

と表せる．これより特に $y \in F$ について x, y が F の同一の成分に含まれる為の必要十分条件は x, y が任意の $\varepsilon > 0$ について F 内の ε-鎖で結ばれることである．

Proof. "⊂" を示そう．$y \in C$ ならば Theorem 6.2.2 より任意の $\varepsilon > 0$ について x と y は F_0 内の ε-鎖で結ばれる．従って F 内の ε-鎖で結ばれる．

"⊃" を示そう．

$$F_n = \left\{ y \in F : \ y \text{ は } x \text{ と } F \text{ 内の } \tfrac{1}{n}\text{-鎖で結べる} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

と置くと,

$$\{ y \in F : \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ について } x \text{ と } y \text{ は } F \text{ 内の } \varepsilon\text{-鎖で結ばれる } \} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

であるから, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subset C$ を示せばよい．Theorem 6.2.2 の証明中で示したように F_n は閉集合であり, コンパクト集合 F に含まれるので F_n はコンパクトである．また明らかに $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ は減少列であり任意の $k \in \mathbb{N}$ について

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=k}^{\infty} F_n$$

が成り立つ．ここで上式の右辺はコンパクトかつ $\frac{1}{k}$-連結集合の減少列の共通部分ゆえ Theorem 6.2.4 よりコンパクトかつ $\frac{1}{k}$-連結である．さらに $k \in \mathbb{N}$ の任意性より $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ は連結であり $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subset F$ が成り立つ．C は x を含み F に含まれる最大の連結集合であったから $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subset C$ が成り立つ．□

Theorem 1.5.6. X を距離空間とし，F を X のコンパクト部分集合とする．このとき 2 点 $x, y \in F$ が F の異なる成分に属せば $x \in H_1$, $y \in H_2$ を満たす F の分割 H_1, H_2 が存在する．

Proof. $x, y \in F$ は F の異なる成分に属すので，ある $\varepsilon > 0$ について F 内の ε-鎖で結ばれない．そこで

$$H_1 = \{a \in F :\ x \text{ と } a \text{ は } F \text{ 内の } \varepsilon\text{-鎖で結ばれる }\}, \quad H_2 = F \backslash H_1$$

と置く．このとき Theorem 6.2.2 の証明中で示したように H_1, H_2 はともに開集合であり，明らかに共通部分を持たない．また $x \in H_1$, $y \in H_2$ であるから，ともに空でない．よって H_1, H_2 は F の分割である．□

Theorem 6.2.7 は次のように一般化できる．

Theorem 1.5.7. X を距離空間とし，F を X のコンパクト部分集合とする．また E_1, E_2 は F の空でない閉部分集合とし，F の任意の成分と同時に交わらないとする．このときに属せば $E_1 \subset H_1$, $E_2 \subset H_2$ を満たす F の分割 H_1, H_2 が存在する．

Proof. $j = 1, 2$ について E_j は F の成分の 1 つに含まれる．実際 $\emptyset \neq E_j \subset F$ より F の成分 C_j で $E_j \cap C_j = \emptyset$ となるものが存在するが，仮定より C_j 以外の F の成分と E_j は共通部分を持たない．従って $E_j \subset C_j$ である．

$\eta > 0$ で E_1 の任意の点と E_2 の任意の点が F 内の η-鎖で結べないようなものが存在することを示そう．これが示されれば $x \in E_1$ を任意に取り

$$H_1 = \{a \in F : a \text{ は } x \text{ と } \eta\text{-鎖で結ばれる }\}, \quad H_2 = F \backslash H_1$$

と置けば Theorem 6.2.2 で示したように H_1, H_2 はともに F の開集合であり，$\emptyset \neq E_1 \subset H_1, \emptyset \neq E_2 \subset H_2$ であるから，ともに空でない．従って H_1, H_2 は要請された性質を持つ F の分割である．

さてもしこのような $\eta > 0$ が存在しないとすると $x_n \in E_1$, $y_n \in E_2$ で F 内の $\frac{1}{n}$-鎖で結べるものが存在する．このとき E_1, E_2 のコンパクト性より $x_{n_k} \to x_0 \in E_1$, $y_{n_k} \to y_0 \in E_2$, となる部分列が取れる．任意の $\varepsilon > 0$ について

$$\frac{1}{n_k} < \varepsilon, \quad d(x_0, x_{n_k}) < \varepsilon, \quad d(y_0, y_{n_k}) < \varepsilon$$

を満たすように十分大きな k を取れば，x_{n_k} と y_{n_k} は $\frac{1}{n_k}$-鎖，従って ε-鎖で結べるので，x と y も F 内の ε-鎖で結べることになる．よって Theorem 6.2.6 より x, y は同一の F の成分に属することになり仮定に反する．□

Theorem 1.5.8. X を距離空間とし，F を X のコンパクト部分集合とする．また $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ を F 内の収束点列とし，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し x_n, y_n は F の同一の成分に属すとする．このとき $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$, $y_0 = \lim_{n\to\infty} y_n$ も F の同一の成分に属す．

Proof. 任意の $\varepsilon > 0$ について $d(x_0, x_n) < \varepsilon$, $d(y_0, y_n) < \varepsilon$ を満たす n を取る．x_n, y_n は F の同一の成分に属すので ε-鎖 $a_1 = x_n, \ldots, a_k = y_n$ が取れる．これに x_0, y_0 を追加すれば $a_0 = x_0, a_1 = x_n, \ldots, a_k = y_n, a_{k+1} = y_0$ は x_0, y_0 を結ぶ F 内の ε-鎖である．よって x_0, y_0 は任意の $\varepsilon > 0$ に対し F 内の ε-鎖で結ばれるので，F の同一の成分に属す．□

第 2 章

基本群

2.1 道のホモトピー

この章では閉区間 $[0,1]$ を I と表す.

Definition 2.1.1. *X, Y を位相空間とする. 連続写像 $f_0 : X \to Y$ が連続写像 $f_1 : X \to Y$ に homotopic であるとは連続写像 $F : X \times I \to Y$ で*

(2.1.1) $$F(x,0) = f_0(x) \quad and \quad F(x,1) = f_1(x) \quad \forall x \in X$$

が成り立つものが存在するときを言い, $f_0 \simeq f_1$ と表す. また F のことを f_0 から f_1 への (または f_0 と f_1 を結ぶ) homotopy と呼ぶ. また定値写像に homotopic な連続写像のことを nulhomotopic であると言う.

$t \in I$ について $f_t(x) = F(x,t)$ で $f_t : X \to Y$ を定義すれば $\{f_t\}$ は f_0 と f_1 を結ぶ 1-パラメータ族であり, F は f_0 から f_1 への連続的な変形を表すと考えられる.

X を位相空間とする. 閉区間 $I = [0,1]$ から X への連続写像のことを (X 内の) 道 (path) と呼んだことを思い出しておこう. 道はつねに nulhomotopic である. 実際 $F(s,t) = f(s(1-t))$, $(s,t) \in I \times I$ と置けば F は f から $f(0)$ のみを取る定値写像への homotopy である. そこで道に関しては単なる homotopy ではなく, 次に説明する条件を付して考える. この章では道を文字 α, β, γ などを用いて表す. 道 α について $a = \alpha(0)$ を始点, $b = \alpha(1)$ を終点と言い, α を a と b を結ぶ道と言ったりする. 記号 $\Gamma(X,a,b)$ で, a と b を結ぶ X の道の全体とする.

Definition 2.1.2. *始点と終点を共有する 2 つの道 $\alpha, \beta \in \Gamma(X,a,b)$ が path homotopic であるとは, α から β への path homotopy と呼ばれる連続写像 $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ で*

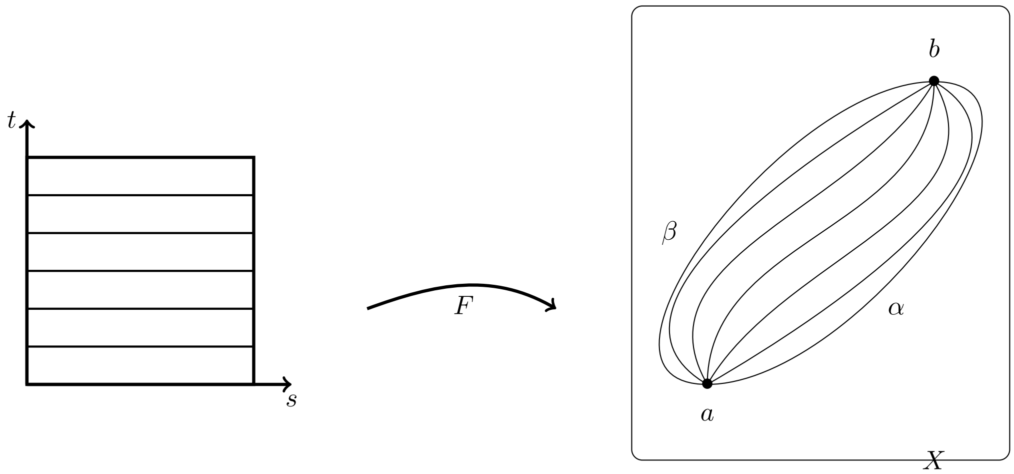
(2.1.2) $$F(0,t) = a \quad and \quad F(1,t) = b, \qquad 0 \le t \le 1$$

かつ

(2.1.3) $$F(s,0) = \alpha(s) \quad and \quad F(s,1) = \beta(s), \qquad 0 \le s \le 1$$

を満たすものが存在するときをいう. 道 α と β が path homotopic のとき $\alpha \simeq_p \beta$ と表す.

(2.1.3) は α から β まで連続的に変形が可能, つまり α と β が hotipic であることを意味し, (2.1.2) は変形の際に始点と終点が固定されたままであることを意味する.



Theorem 2.1.3. 関係 $\simeq$ と $\simeq_p$ は同値関係である．つまり

(i) $\alpha \simeq_p \alpha$.

(ii) $\alpha \simeq_p \beta \Longrightarrow \beta \simeq_p \alpha$.

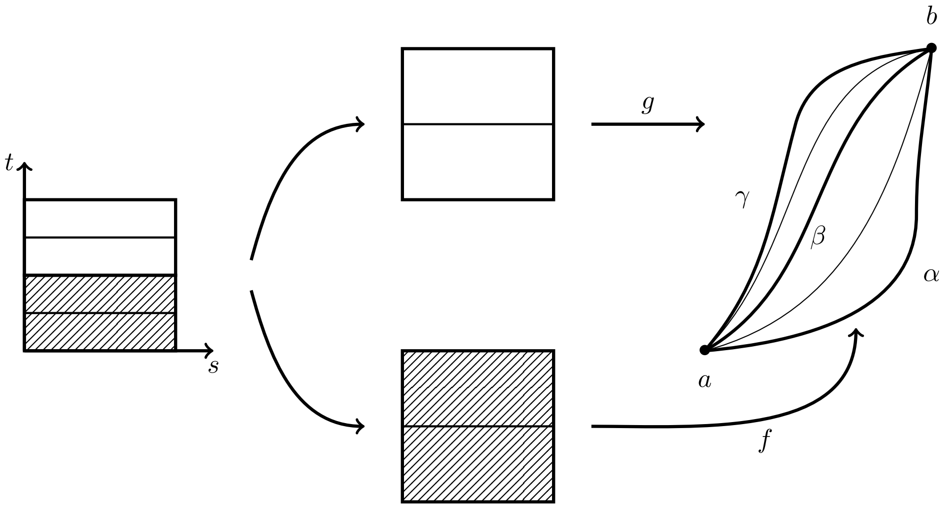
(iii) $\alpha \simeq_p \beta,\ \beta \simeq_p \gamma \Longrightarrow \alpha \simeq_p \gamma$.

が成り立ち, $\simeq$ についても同様な性質が成り立つ.

Proof. $\simeq$ の場合も殆ど同様であるから $\simeq_p$ の場合のみ示しておこう．(i) $f(s,t)=\alpha(s)$, $(s,t)\in I\times I$ と置けば, α から α への path homotopy である．よって $\alpha \simeq_p \alpha$ が成り立つ．(ii) $\alpha \simeq_p \beta$ ならば α から β への path homotopy $f(s,t)$ が存在する．このとき $f(s,1-t)$ が β から α への path homotopy を与える．よって $\beta \simeq_p \alpha$ が成り立つ.. (iii) α から β への path homotopy を $f(s,t)$ とし, β から γ への path homotopy を $g(s,t)$ とすれば

$$F(s,t)=\begin{cases} f(s,2t), & (s,t)\in[0,1]\times[0,1/2] \\ g(s,2t-1), & (s,t)\in[0,1]\times(1/2,1] \end{cases}$$

が α から γ への path homotopy を与える.



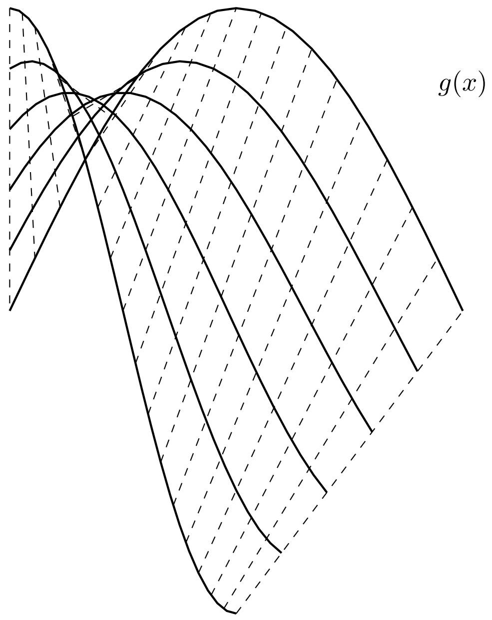
□

Example 2.1.4 (straight-line homotopy)**.** 位相空間 X 上の 2 つの連続写像 $f, g : X \to \mathbb{R}^2$ はつねに *homotopic* である．実際

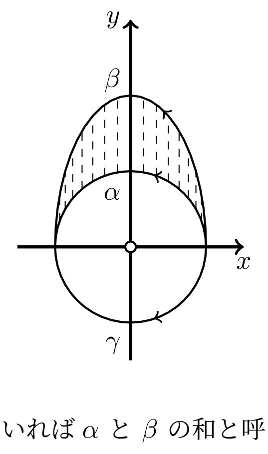
$$F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x), \quad (x,t) \in X \times I \tag{2.1.4}$$

が f から g への *homotopy* を与える．これを f から g への *straight-line homotopy* と呼ぶ．

上の例において f, g の値域は $\mathbb{R}^2$ である必要はなく, 位相空間でありかつベクトル空間でもあるものであり, 和とスカラー倍がその位相について連続であるもの, またはその凸部分集合であれば良い.



Example 2.1.5. X を *punctured plane* $X = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ とする． このとき $\alpha(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s)$, $\beta(s) = (\cos \pi s, 2 \sin \pi s)$, $0 \leq s \leq 1$ と置くと, X 内の道であり, $\alpha \simeq_p \beta$ が成り立つ．実際両者の *straight-line homotopy* が *path homotopy* を与える． しかしながら $\gamma(s) = (\cos \pi s, -\sin \pi s)$, $0 \leq s \leq 1$ は α と (勿論 β とも) *homotopic* ではない．これは直観的には頷けるであろうが証明はそれほど容易ではない．証明は後節で行う．また $X = \mathbb{R}^2$ の場合は α, β, γ はどの 2 つも *path-hotopic* である．このように *path-homotopy* を考える場合, どの空間の中で考えるかによって大きな違いがあるので注意が必要である．



例えば道 α の始点と道 β の終点が一致していれば α と β の和と呼ばれる 2 つの道をつないで出来る道を定義する

ことが可能である．道についてはこれ以外にも色々な演算 = 操作を行うことが可能である．このような道に関する操作と path homotopy との関係を見ていこう．

道 $\tilde{\alpha}$ が道 α のパラメータの取り換えであるとは, 連続で広義増加な写像 $\sigma : [0,1] \to [0,1]$ で $\sigma(0) = 0, \sigma(1) = 1$ を満たすものにより $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(\sigma(s))$, $s \in [0,1]$ と表現されるときを云う．

Theorem 2.1.6. $\tilde{\alpha}$ が α のパラメータの取り換えならば $\alpha \simeq_p \tilde{\alpha}$.

Proof. パラメータの取り換え写像 $\sigma : [0,1] \to [0,1]$ を取り

$$f(s,t) = \alpha((1-t)s + t\sigma(s)), \quad (s,t) \in [0,1] \times [0,1]$$

と置けば, α から $\tilde{\alpha}$ への path homotopy である． □

道 $\alpha \in \Gamma(X,a,b)$ について写像 $\bar{\alpha} \in \Gamma(X,b,a)$ を

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(1-s), \quad s \in [0,1]$$

と置けば, $\bar{\alpha}$ は α の終点と始点を結ぶ道である．$\overline{\bar{\alpha}} = \alpha$ が成り立つことは容易に分かる．

また 2 つの道 $\alpha \in \Gamma(X,a,b)$, $\beta \in \Gamma(X,b,c)$ について道 $\alpha * \beta \in \Gamma(X,a,c)$ を

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

とおく．このとき

$$\overline{\alpha * \beta} = \bar{\beta} * \bar{\alpha} \tag{2.1.5}$$

が成り立つ．実際

$$\begin{aligned} \overline{\alpha * \beta}(s) = \alpha * \beta(1-s) &= \begin{cases} \alpha(2(1-s)), & 0 \le 1-s \le \frac{1}{2} \\ \beta(2(1-s)-1), & \frac{1}{2} \le 1-s \le 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \beta(1-2s), & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \alpha(2(1-s)), & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} \bar{\beta} * \bar{\alpha}(s) &= \begin{cases} \bar{\beta}(2s), & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \bar{\alpha}(2s-1), & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \beta(1-2s), & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \alpha(2-2s), & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} \end{aligned}$$

であるから一致する．

点 $a \in X$ について a に留まって動かない道を e_a と置く．つまり

$$e_a(t) = a, \quad t \in [0,1]$$

により $e_a \in \Gamma(X,a,a)$ を定義する．

Theorem 2.1.7. 道 $\alpha \in \Gamma(X,a,b)$ について次が成り立つ．

(i) $\alpha\bar{\alpha} \simeq_p e_a$, $\bar{\alpha} * \alpha \simeq_p e_b$.

(ii) $e_a * \alpha \simeq_p \alpha$, $\alpha * e_b \simeq_p \alpha$.

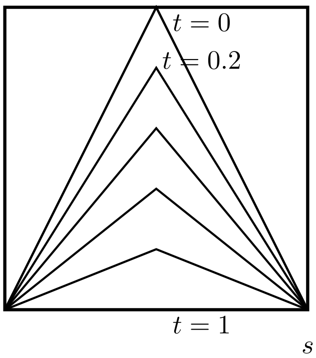
Proof. (i)

$$\alpha * \bar{\alpha}(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \bar{\alpha}(2s-1), & \frac{1}{2} < s \le 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2s), & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \alpha(2(1-s)), & \frac{1}{2} < s \le 1 \end{cases}$$

であるから

$$f(s,t) = \begin{cases} \alpha(2s(1-t)), & (t,s) \in [0,1/2] \times [0,1] \\ \alpha(2(1-s)(1-t)), & (s,t) \in (1/2,1] \times (0,1] \end{cases}$$

と置けば $\alpha * \bar{\alpha}$ から e_a への変形を与えるので $\alpha\bar{\alpha} \simeq_p e_a$ が成り立つ.



また α の代わりに $\bar{\alpha}$ に適用すれば $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$ より $\bar{\alpha} * \alpha = \bar{\alpha} * \bar{\bar{\alpha}} \simeq_p e_b$ が従う.

(ii) $e_a * \alpha$ は α のパラメータの取り替えである. 従って $e_a * \alpha \simeq_p \alpha$ である. 詳しく述べれば

$$e_a * \alpha = \begin{cases} \alpha(0), & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \alpha(2s-1), & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

であるから $0 \le t \le 1$ について

$$f(s,t) = \begin{cases} \alpha(ts), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \alpha((1-t)(2s-1) + ts), & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

とおけば, $e_a * \alpha$ から α への変形を与える. 同様に $0 \le s \le 1$ について

$$g(t,s) = \begin{cases} \alpha\left(2(1-t)s + ts\right), & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \alpha((1-t) + ts), & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

と置けば,

$$\alpha * e_b(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \alpha(1), & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

から α への変形を与える. よって $\alpha * e_b \simeq_p \alpha$ である. □

Theorem 2.1.8. $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma(X,a,b)$ $\beta, \beta_1, \beta_2 \in \Gamma(X,b,c)$, $\gamma \in \Gamma(X,c,d)$ について

(i) $\alpha_1 \simeq_p \alpha_2$, $\beta_1 \simeq_p \beta_2$ ならば $\alpha_1 \cdot \beta_1 \simeq_p \alpha_2 \cdot \beta_2$ が成り立つ.

(ii) $\alpha_1 \simeq_p \alpha_2$ ならば $\alpha_1^{-1} \simeq_p \alpha_2^{-1}$.

(iii) $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma \quad \simeq_p \alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$ が成り立つ.

Proof. (i) α_1 から α_2 への変形を f, β_1 から β_2 への変形を g とする．このとき

$$h(t,s) = \begin{cases} f(2t,s) & (t,s)\in[0,1/2]\times[0,1] \\ g(2t-1,s), & (t,s)\in(1/2,1]\times[0,1] \end{cases}$$

と置けば, $\alpha_1\cdot\beta_1$ から $\alpha_2\cdot\beta_2$ への変形を与える.

(ii) α_1 から α_2 への変形を f とすれば $f(1-t,s)$ が α_1^{-1} から α_2^{-1} への変形を与える.

(iii)

$$(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma(t) = \begin{cases}(\alpha\cdot\beta)(2t), & 0\le t\le \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1), & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

$$= \begin{cases}\alpha(4t), & 0\le t\le \frac{1}{4} \\ \beta(4t-1), & \frac{1}{4}\le t\le \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1), & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

$$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)(t) = \begin{cases}\alpha(2t), & 0\le t\le \frac{1}{2} \\ (\beta\cdot\gamma)(2t-1), & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

$$= \begin{cases}\alpha(2t), & 0\le t\le \frac{1}{2} \\ \beta(4t-2), & \frac{1}{2}\le t\le \frac{3}{4} \\ \gamma(4t-3), & \frac{3}{4}\le t\le 1\end{cases}$$

である．従って $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)($ は $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$ のパラメータの取り替えであるから互いにホモトピックである．または具体的に連続変形を次のように構成することも出来る.

$s=0$ のとき $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ $s=1$ のとき $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ となるように区間 $\left[0,\frac{1-s}{4}+\frac{s}{2}\right]=\left[0,\frac{s+1}{4}\right]$ を考え, この範囲を t が動くときに値が　$[0,1]$ を動く函数は

$$\frac{t-0}{\frac{1+s}{4}-0} = \frac{4t}{1+s}.$$

$s=0$ のとき $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$ $s=1$ のとき $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$ となるように区間 $\left[\frac{1-s}{4}+\frac{s}{2},\frac{1-s}{2}+\frac{3s}{4}\right]=\left[\frac{s+1}{4},\frac{2+s}{4}\right]$ を考え, この範囲を t が動くときに値が $[0,1]$ を動く函数は

$$\frac{t-\frac{1+s}{4}}{\frac{2+s}{4}-\frac{s+1}{4}} = 4t-(1+s).$$

$s=0$ のとき $\left[\frac{1}{2},1\right]$ $s=1$ のとき $\left[\frac{3}{4},1\right]$ となるように区間 $\left[\frac{1-s}{2}+1\cdot s, 1\cdot(1-s)+1\cdot s\right]=\left[\frac{2+s}{4},1\right]$ を考え, この範囲を t が動くときに値が　$[0,1]$ を動く函数は

$$\frac{t-\frac{2+s}{4}}{1-\frac{2+s}{4}} = \frac{4t-(2+s)}{2-s}.$$

以上より

$$f(t,s) = \begin{cases}\alpha\left(\frac{4t}{1+s}\right), & 0\le t\le \frac{1+s}{4}s \\ \beta(4t-(1+s)), & \frac{1+s}{4}\le t\le \frac{2+s}{4} \\ \gamma\left(\frac{4t-(s+2)}{2-s}\right), & \frac{2+s}{4}\le t\le 1\end{cases}$$

と置けば $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$ から $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$ への変形を与える. □

2.2 基本群

始点と終点が一致する道のことを閉道 (closed path) という. $a \in X$ を固定し, a を端点とする閉道の全体は $\Gamma(X,a,a)$ と表されるが, これを $\Gamma(X,a)$ と書くことにする.

さて $\Gamma(X,a)$ の任意の 2 元 α, β にはつねに積 $\alpha\cdot\beta$ が定義できるが, $\Gamma(X,a)$ はこの積に関して群になるとは限らない. 例えば単位元 γ が存在すると仮定すれば, 任意の $\alpha \in \Gamma(X,a)$ について $\alpha\cdot\gamma = \alpha$ を満たすはずである. これより $\alpha(t) = \alpha(2t)$ が $0 \le t \le 1/2$ で成り立つことになる. これはよほど特殊な道 α でないと成り立たないであろう.

$\Gamma(X,a)$ を同値関係 $\simeq_p$ で割った商集合 $\pi_1(X,a) = \Gamma(X,a)/\simeq_p$ は群になることが証明できる. 以下ではこれを順を追って示していこう.

まず $\alpha \in \Gamma(X,a)$ について α を含む同値類を $[\alpha]$ と表そう. つまり

$$[\alpha] = \{\gamma \in \Gamma(X,a) : \gamma \simeq_p \alpha\}$$

である.

まず Theorem 2.1.3 (i) より同値類 $[\alpha]$, は代表元のとり方に依らず定まる. つまり

$$\alpha \simeq_p \beta \quad\Longrightarrow\quad [\alpha] = [\beta] \tag{2.2.1}$$

が成り立つ. 次に 2 つの同値類 $[\alpha]$, $[\beta]$ について同値類 $[\alpha\cdot\beta]$ も代表元の取り方に依らず定まる. 実際 Theorem 2.1.8 (i) より $\alpha \simeq_p \alpha'$, $\beta \simeq_p \beta'$ ならば $\alpha\cdot\beta \simeq_p \alpha'\cdot\beta'$ であるから (2.2.1) より $[\alpha\cdot\beta] = [\alpha'\cdot\beta']$ である. そこで 2 つの同値類 $[\alpha]$, $[\beta]$ の積を

$$[\alpha]\cdot[\beta] := [\alpha\cdot\beta], \tag{2.2.2}$$

と定義する.

これで $\pi_1(X,a) = \Gamma(X,a)/\simeq_p$ に積が定義されたが, $\Gamma(X,a)$ における結合法則 (Theorem 2.1.8 (iii)) より

$$([\alpha]\cdot[\beta])\cdot[\gamma] = [\alpha\cdot\beta]\cdot[\gamma] = [(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma] = [\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)] = [\alpha]\cdot[\beta\cdot\gamma] = [\alpha]\cdot([\beta]\cdot[\gamma])$$

となり, $\pi_1(X,a)$ においても結合法則

$$([\alpha]\cdot[\beta])\cdot[\gamma] = [\alpha]\cdot([\beta]\cdot[\gamma]) \tag{2.2.3}$$

が成り立つ.

点 a に留まり動かない道 1_a の同値類 $[1_a]$ は $1_a\cdot\alpha \simeq_p \alpha$ と $\alpha\cdot 1_a \simeq_p \alpha$ を満たす (Theorem 2.1.7 (ii) を見よ). よって $[1_a]\cdot[\alpha] = [1_a\cdot\alpha] = [\alpha]$ と $[\alpha]\cdot[1_a] = [\alpha\cdot 1_a] = [\alpha]$ を満たすので 1_a は $\pi_1(X,a)$ の単位元である. さらに $\alpha\cdot\alpha^{-1} \simeq_p 1_a$ 及び $\alpha^{-1}\cdot\alpha \simeq_p 1_a$ が成り立つ (Theorem 2.1.7 (i) を見よ) ので $[\alpha]\cdot[\alpha^{-1}] = [\alpha\cdot\alpha^{-1}] = [1_a]$, $[\alpha^{-1}]\cdot[\alpha] = [\alpha^{-1}\cdot\alpha] = [1_a]$ が成り立つので, 同値類 $[\alpha]$ の逆元は $[\alpha^{-1}]$ で与えられることが分かる. つまり $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$ である.

Definition 2.2.1. 以上により $\pi_1(X,a) = \Gamma(X,a)/\simeq_p$ に積を導入することが出来て, 群になることが示された. これを位相空間 X の a を基点とする基本群 *(fundamental group)* と言う.

Theorem 2.2.2. X を弧状連結空間とし, $a, b \in X$ とする. このとき $\alpha, \beta \in \Gamma(X,a,b)$ について

$$\alpha \simeq_p \beta \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha\cdot\beta^{-1} \simeq_p 1_{x_0}$$

が成り立つ．但し左辺の $\simeq_p$ は始点 a と終点 b と止めたままホモトピックの意味であり，右辺の $\simeq_p$ は x_0 を基点とする閉道としてホモトピックの意味である．

Proof. $\alpha \simeq_p \beta$ ならば $\alpha \cdot \beta^{-1} \simeq_p \beta \cdot \beta^{-1} \simeq_p 1_{x_0}$ である．逆に $\alpha \cdot \beta^{-1} \simeq_p 1_{x_0}$ ならば

$$\beta \simeq_p 1_{x_0} \cdot \beta \simeq_p (\alpha \cdot \beta^{-1}) \cdot \beta \simeq_p \alpha \cdot (\beta^{-1}) \cdot \beta) \simeq_p \alpha \cdot 1_{x_1} \simeq_p \alpha$$

である． □

基点の取り替え　さて $a, b \in X$ とし $\eta \in \Gamma(X, a, b)$，つまり η は a, b を結ぶ道とする．$\alpha \in \Gamma(X, b)$ について $(\eta \cdot \alpha) \cdot \eta^{-1} \in \Gamma(X, a)$ を対応させる写像を $\eta_* : \Gamma(X, b) \to \Gamma(X, a)$ と表そう．このとき $\alpha, \beta \in \Gamma(X, b)$ について

$$\alpha \simeq_p \beta \Longrightarrow \eta \cdot \alpha \simeq_p \eta \cdot \beta \Longrightarrow (\eta \cdot \alpha) \cdot \eta^{-1} \simeq_p (\eta \cdot \beta) \cdot \eta^{-1}$$

であるから，この写像 η_* は $\pi_1(X, b)$ から $\pi_1(X, a)$ への写像を誘導する．つまり

$$\pi_1(X, b) \ni [\alpha] \mapsto [(\eta \cdot \beta) \cdot \eta^{-1}] \in \pi_1(X, a)$$

である．記号を節約する為に，この誘導された写像も $\eta_* : \pi_1(X, b) \to \pi_1(X, a)$ と表そう．

Theorem 2.2.3. 写像 η_* は $\pi_1(X, b)$ から $\pi_1(X, a)$ への群の同型写像である

Proof. 煩雑さを避けるために以後の計算では括弧 () や · を省略して書く．まず準同型であることは

$$\eta_*([\alpha][\beta]) = \eta_*([\alpha\beta]) = [\eta\alpha\beta\eta^{-1}] = [\eta\alpha\eta^{-1}\eta\beta\eta^{-1}] = [\eta\alpha\eta^{-1}][\eta\beta\eta^{-1}] = \eta_*([\alpha])\eta_*([\beta])$$

より従う．

さて η^{-1} は b と a を結ぶ道であるから準同型 $(\eta^{-1})_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(X, b)$ を誘導するが

$$\begin{aligned} (\eta^{-1})_*(\eta_*([\alpha])) &= (\eta^{-1})_*([\eta\alpha\eta^{-1}]) = [\eta^{-1}\eta\alpha\eta^{-1}\eta] = [\alpha] \\ \eta_*((\eta^{-1})_*([\beta])) &= \eta_*([\eta^{-1}\beta\eta]) = [\eta\eta^{-1}\beta\eta\eta^{-1}] = [\beta] \end{aligned}$$

より η_* は全単射であり $(\eta_*)^{-1} = (\eta^{-1})_*$ であることが分かる．特に η_* は $\pi_1(X, b)$ から $\pi_1(X, a)$ への群の同型写像である □

Definition 2.2.4. 位相空間 X が弧状連結であれば X の任意の 2 点 a, b は道で結べるので $\pi_1(X, a)$, $\pi_1(X, b)$ は群として同型である．そこでこの群を基点の取り方に依らず定まる群と考えて $\pi(X)$ で表し，X の基本群という．また弧状連結空間 X の基本群が単位元のみからなるとき，つまり任意の点 $a \in X$ を端点とする閉道が，a に留まり続ける閉道に連続的に変形できるとき S は単連結 *(simply connected)* であると言う．

Theorem 2.2.5. X を弧状連結な位相空間とする．このとき X が単連結であるための必要十分条件は任意の p, $q \in X$ と $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma(X, p, q)$ について $\gamma_0 \simeq_p \gamma_1$ が成り立つこと．

Proof. 十分であることは $p = q$ として $\gamma_1 = 1_p$ とすれば，任意の閉道 γ_0 は $\gamma_0 \simeq_p 1_p$ となることより従う．

必要性については

$$\begin{aligned} \gamma_0 &\simeq_p \gamma_0 \cdot 1_q \\ &\simeq_p \gamma_0 \cdot (\gamma_1^{-1} \cdot \gamma_1) \\ &\simeq_p (\gamma_0 \cdot \gamma_1^{-1}) \cdot \gamma_1) \\ &\simeq_p 1_p \cdot \gamma_1 \quad (\because X \text{ の単連結性より } \gamma_0 \cdot \gamma_1^{-1} \simeq_p 1_p\ ) \\ &\simeq_p \gamma_1 \end{aligned}$$

より従う． □

連続写像により誘導される基本群の準同型　X, Y を位相空間とし，$f : X \to Y$ を連続写像とする．$a \in X$ を任意に取り固定し，$b = f(a)(\in Y)$ と置く．このとき各 $\alpha \in \Gamma(X, a)$ について $f \circ \alpha \in \Gamma(Y, b)$ を対応させる写像を $f_* : \Gamma(X, a) \to \Gamma(Y, b)$ で表そう．$\alpha \simeq_p \beta$ のとき $f \circ \alpha \simeq_p f \circ \beta$ が成り立つので $\alpha \simeq_p \beta$ ならば $f_*(\alpha) \simeq_p f_*(\beta)$ である．よって f_* は $\pi_1(X, a)$ から $\pi_1(Y, b)$ への写像を誘導する．この写像も同じ記号 f_* で表そう．このとき

$$f_*([\alpha][\beta]) = f_*([\alpha\beta]) = [f \circ (\alpha \cdot \beta)] = [(f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta)] = [f \circ \alpha] \cdot [f \circ \beta] = f_*([\alpha]) \cdot f_*([\beta])$$

より準同型である．また $g : Y \to Z$ も連続写像ならば

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* \tag{2.2.4}$$

が成り立つことも容易に分かる．写像 $f : X \to Y$ が位相同型 (つまり全単射で f, f^{-1} ともに連続) の場合，f_* は $\pi_1(X, a)$ から $\pi_1(Y, f)$ への群同型になることに注意しておこう．つまり X, Y が位相同型ならば両者の基本群は群同型である．

Theorem 2.2.6. $\mathbb{R}^d$ は単連結である．特に $\mathbb{R}^d$ と位相同型な位相空間は単連結である．

Proof. 写像 $F : \mathbb{R}^d \times [0, 1] \to \mathbb{R}^d$ を

$$F(x, s) = sx = (sx_1, \ldots, sx_d), \quad x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad 0 \leq s \leq 1$$

と置けば，$F(x, 0) = x$, $F(x, 1) = 0$ を満たし連続である．よって $\alpha \in \Gamma(0, \mathbb{R}^d)$ について $F(\alpha(t), s)$ が α から 1_0 への連続変形を与える．従って $\pi_1(\mathbb{R}^d, 0) = [1_0]$ であり，他の基点についても $\pi_1(\mathbb{R}^d, x)$ は $\pi_1(\mathbb{R}^d, 0)$ と同型であるから $\mathbb{R}^d$ は単連結である． □

$\mathbb{R}^d$ の超球 $B^d = \{x = (x_1, \ldots, x_d) : x_1^2 + \cdots + x_d^2 < 1\}$ や立方体 $\mathbb{R}^d$ と位相同型であるから単連結である．他に $\mathbb{R}^d$ の凸部分集合あるいはもっと広く星型部分集合も単連結であるが，これは次の写像のホモトピーを述べてから示そう．

写像のホモトピー　X, Y を位相空間とする．Definition 2.1.1 において連続写像 $f : X \to Y$ を連続的に変形して $g : X \to Y$ を得るとき f は g にホモトープであると定義した．

X, Y にそれぞれ基点 p_0, q_0 が定められていて写像 $f : X \to Y$ が $f(p_0) = q_0$ と基点を止める写像の場合は $f(X, p_0) \to (Y, q_0)$ と表すことにしよう．このような基点を止める写像に関するホモトピーの定義は次のようにする．

Definition 2.2.7. X, Y を位相空間，$p_0 \in X$, $q_0 \in Y$ とし，$f, g : (X, p_0) \to (Y, q_0)$ を連続写像とする．f が g に基点を止めたままホモトープであるとは連続写像 $H : X \times [0, 1] \to Y$ で

$$\begin{aligned} &H(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X \\ &H(p_0, s) = q_0 \quad \forall s \in [0, 1] \end{aligned}$$

を満たすものが存在するときを言い，やはり $f \simeq g$ で表す．また H を f から g への基点を止めた連続変形またはホモトピーと言う．

基点を止めたホモトピーも，基点を問題にしないホモトピーと同じ $f \simeq g$ という記号で表すと混乱が起きそうなときはそれぞれ $f \simeq g : X \to Y$, $f \simeq_p g : (X, p_0) \to (Y, q_0)$ と書き分けることにする．

写像に関するホモトピー (基点を止めたホモトピーも同じことが言える) も同値関係になることが道のホモトピーの証明と殆ど同様に示すことができる．また写像の合成とホモトピーは両立する．つまり

$$f \simeq f' : X \to Y,\ g \simeq g' : Y \to Z \quad \Longrightarrow \quad g \circ f \simeq g' \circ f' : X \to Z \tag{2.2.5}$$

が成り立つ．実際 $H : X \times [0,1] \to Y$, $K : Y \times [0,1] \to Z$ をそれぞれ f から f', g から g' へのホモトピーとすれば $K(H(x,s),s)$ が $g \circ f$ から $g' \circ f'$ へのホモトピーを与える．基点を止めたホモトピーについても同じことが言える．

Theorem 2.2.8. *X, Y を位相空間とし $f_0 \simeq f_1 : X \to Y$, つまり 2 つの連続写像 f_0, f_1 がホモトピックとし, $H : X \times [0,1] \to Y$ を f_0 と f_1 を結ぶホモトピーとする．また p, $q \in X$ とし $f_0(p)$ と $f_1(p)$, $f_0(q)$ と $f_1(q)$ を結ぶ道をそれぞれ*

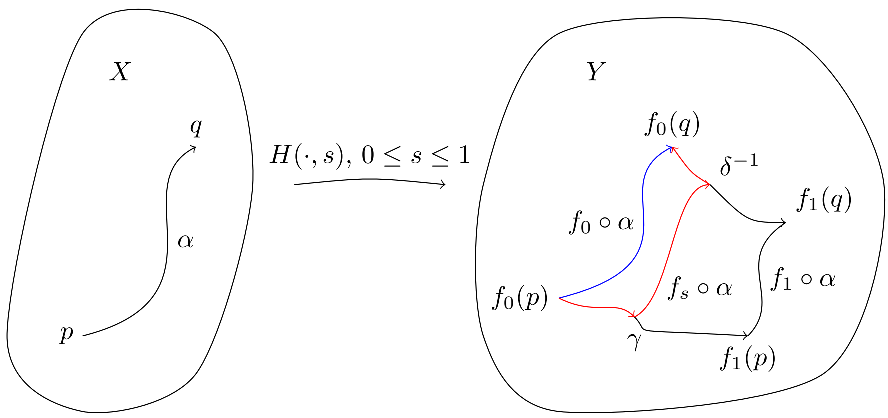
$$\gamma(t) = H(p,t), \quad \delta(t) = H(q,t), \quad 0 \le t \le 1$$

と置く．このとき

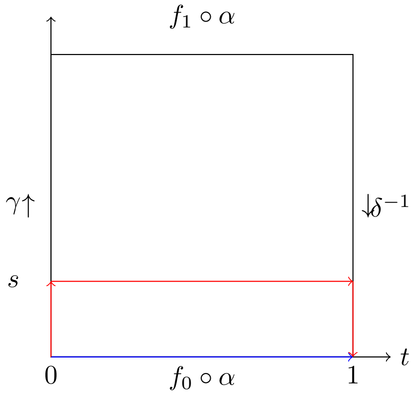
$$f \circ \alpha \simeq \gamma \cdot g \circ \alpha \cdot \delta^{-1} \tag{2.2.6}$$

が成り立つ．

Proof. H を利用して $f_0 \circ \alpha$ から $\gamma \cdot g \circ \alpha \cdot \delta^{-1}$ への連続変形を構成しよう．これは以下の図において $s \in [0,1]$ を固定したとき赤線で示される γ に沿って $f_0(p) = H(p,0)$ から $H(p,s)$ まで進む道に, $H(\alpha(t),s)$, $0 \le t \le 1$ によって与えられる $H(p,s)$ から $H(q,s)$ への道, そして δ^{-1} に沿って $H(q,s)$ から $H(q,0)$ へ向かう道を考えれば良い．



これには下の図の長さが $1+2s$ の赤い折れ線をもとに考えて



$0 \le t \le \frac{s}{1+2s}$ で $\gamma(0) = H(p,0)$ から $\gamma(s) = H(p,s)$ まで動き, $\frac{s}{1+2s} \le t \le \frac{1+s}{1+2s}$ で $H(\alpha(0),s)$ から $H(\alpha(1),s)$ まで動き, 最後に $\frac{1+s}{1+2s} \le t \le 1$ で $\delta(s) = H(q,s)$ $\delta(0) = H(q,0)$ まで動く曲線を考えれば良い．従って

$$f(t,s) = \begin{cases} H\left(\alpha(0), \frac{1+2s}{s}t\right), & 0 \le t \le \frac{s}{1+2s} \\ H\left(\alpha\left((1+2s)t - s\right)\right), & \frac{s}{1+2s} \le t \le \frac{1+s}{1+2s} \\ H\left(\alpha(1), (1+2s)(1-t)\right), & \frac{1+s}{1+2s} \le t \le 1 \end{cases}$$

が $f_0 \circ \alpha$ から $f_1 \circ \alpha$ への連続変形を与える. □

上の定理において $p = q$ の場合は $\gamma = \delta$ であるから $f \circ \alpha \simeq \gamma \cdot g \circ \alpha \cdot \gamma^{-1}$ であるから

$$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha] = [\gamma \cdot g \circ \alpha \cdot \gamma^{-1}] = \gamma_*([g \circ \alpha]) = \gamma_*(g_*([\alpha]))$$

が成り立つ. ただしここに $\gamma_* : \pi_1(Y, g(p)) \to \pi_1(Y, f(p))$ は基点の取り替えの写像である. またさらに $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ とし $f \simeq g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, つまり f, g が基点 x_0, y_0 を止めたままホモトープであるときは $\gamma = 1_{y_0}$ であるから $\pi_1(X, x_0)$ から $\pi_1(Y, x_0)$ への準同型とみて $f_* = g_*$ である.

Theorem 2.2.9. $f \simeq g : X \to Y$ ならば任意の x について道 $\gamma \in \Gamma(Y, f(x), g(x))$ が存在し準同型 $f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$, $g_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, g(x))$, $\gamma : \pi_1(Y, g(x)) \to \pi_1(Y, f(x))$ について

$$f_* = \gamma_* \circ g_*$$

が成り立つ. さらに $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ について $f \simeq g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ のときは

$$f_* = g_*$$

が成り立つ.

Definition 2.2.10. X, Y を位相空間とし, $q \in Y$ とする. このとき $1_q : X \to Y$ を

$$1_q(x) = q, \quad x \in X$$

と定義し, X の全ての点を q にうつす定値写像という. *(先に 1_q を q に留まったままの道と定義したが, $X = [0, 1]$ と考えれば, 新しい定義の特殊な場合になっている.)* 連続写像 $f : X \to Y$ が零ホモトープであるとは f がある定値写像にホモトープであるときを言う. つまり $q \in Y$ で $f \simeq 1_q$ となるものが存在することである.

上の Theorem 2.2.9 より直ちに次が得られる.

Theorem 2.2.11. 連続写像 $f : X \to Y$ が零ホモトープならば任意の $x \in X$ について $f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ は自明な準同型である.

Definition 2.2.12. 位相空間 X, Y がホモトピー同値であるとは連続写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ で

$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X, \quad f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$$

を満たすものが存在するときを言う. また f を X から Y へのホモトピー同値写像, g をそのホモトピー逆写像と言う.

ホモトピー同値であるという関係が同値関係であること, 並びに X, Y が位相同型ならばホモトピー同値であることは容易に分かるであろう. 勿論ホモトピー同値であるからと言って, 位相同型になるとは限らない. この節の最後に反例を述べる.

Theorem 2.2.13. X, Y を弧状連結な位相空間とし, $f : X \to Y$ をホモトピー同値写像とする. このとき任意の $x_0 \in X$ について $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ は同型写像である.

Proof. $g : Y \to X$ を $f : X \to Y$ のホモトピー逆写像とする.

(I) $x_0 \in g(Y)$ のとき $x_0 = g(y_0)$ を満たす $y_0 \in Y$ を取る. このとき $g_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$, $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ について $f_* \circ g_* = (f \circ g)_*$ であり, $f \circ g \simeq_p eq\, \mathrm{id}_Y : Y \to Y$ より道 $\gamma \in \Gamma(Y, y_0, f \circ g(y_0))$ が存在し

基点の取り替えの写像 $\gamma_* : \pi_1(Y, f\circ g(y_0)) \to \pi_1(Y, y_0)$ について $(f\circ g)_* = \gamma_* \circ (\mathrm{id}_Y)_* = \gamma_*$ が成り立つ．ここで $\gamma_* : \pi_1(Y, f\circ g(y_0)) \to \pi_1(Y, y_0)$ は同型, 特に全射であるから f も全射である．

次に $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$, $g_* : \pi_1(Y, f(x_0)) \to \pi_1(X, g(f(x_0)))$ についても同様な議論を行うことにより $g_* \circ f_*$ が同型, 特に単射であることが従う．よって f_* も単射である．先に示した全射性と合わせて, 全単射な準同型, つまり同型であることが分かる．

(II)　$x_0 \notin g(Y)$ のときは $x_1 \in g(Y)$ を任意に取れば (I) より $f_* : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(Y, f(x_1))$ は同型である．また X の弧状連結性より $\gamma \in \Gamma(X, x_0, x_1)$ を取り基点の取り替えの写像 $\gamma : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$ と $f\circ\gamma : \pi_1(Y, f(x_1)) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ により次の図式を考えよう．

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, p_1) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\gamma_*"] & \pi_1(Y, f(p_1)) \arrow[d, "(f\circ\gamma)_*"] \\
\pi_1(X, p_0) \arrow[r, "f_*"] & \pi_1(Y, f(p_0))
\end{tikzcd}$$

ここで任意の $\alpha \in \Gamma(X, p_1)$ について

$$\begin{aligned}
f_* \circ \gamma_*([\alpha]) &= f_*([\gamma\cdot\alpha\cdot\gamma^{-1}]) \\
&= [f(\gamma\cdot\alpha\cdot\gamma^{-1})] \\
&= [f\circ\gamma\cdot f\circ\alpha\cdot f\circ\gamma^{-1}] \\
&= (f\circ\gamma)_*([f\circ\alpha]) = (f\circ\gamma)_*(f_*([\alpha])) = (f\circ\gamma)_*\circ f_*([\alpha])
\end{aligned}$$

であるから, この図式は可換である．よって上の f_*, γ_*, $(f\circ\gamma)_*$ が同型であることより下の f_* も同型であることが分かる．　□

Definition 2.2.14. 位相空間 X の部分集合 R が X のレトラクト *(retract)* であるとは 連続写像 $f : X \to R$ で

$$f(x) = x, \quad x \in R$$

が成り立つものが存在するときを言う．またこのとき f をレトラクションと言う．

Example 2.2.15. $0 \le r_1 < 1 < r_2 \le \infty$ について $A(r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^d : r_1 < |x| < r_2\}$ と置くとき, $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$ は $A(r_1, r_2)$ のレトラクトである．実際 $f(x) = \frac{x}{|x|}$ と置けばレトラクションである．

Definition 2.2.16. 位相空間 X の部分集合 R が X の変位レトラクトであるとは連続写像 $H : X \times [0,1] \to X$ で

(i) $H(x, 0) = x$, $\forall x \in X$
(ii) $H(X, 1) \subset R$.
(iii) $H(x, 1) = x$, $\forall x \in R$

が成り立つものが存在するときを言う．つまり $\mathrm{id}_X (= H(\cdot, 0))$ が R の各点を止めたままあるレトラクション *(*$H(\cdots, 1)$ のこと*)* にホモトープのときである．

Theorem 2.2.17. 位相空間 X の部分集合 R が変位レトラクトならば, 包含写像 $i : R \to X$ はホモトピー同値写像である．

Proof. 変位レトラクトの定義のように $H : X \times [0,1] \to X$ を取り $f_s = H(\cdot, s) : X \to X$ と置く．このとき (ii) より $f_1(X) \subset R$ ゆえ $f_1 : X \to R$ とみなしてよく, さらに "$f_1(x) = x$, $\forall x \in R$" が成り立つので $f_1 \circ i = \mathrm{id}_R$ であるから

特に $f_1 \circ i \simeq \mathrm{id}_R$ である．また $f_1 \simeq f_0$ より $i \circ f_1 = f_1 \simeq_p eqf_0 = \mathrm{id}_X$ である．以上より $i : R \to X$ はホモトピー同値写像である． □

先に述べた Example 2.2.15 の，S^{d-1} は 実のところ $A(r_1, r_2)$ の変位レトラクトでもある．

Example 2.2.18. S^{d-1} は $A(r_1, r_2)$ の変位レトラクトである．実際

$$H(x, s) = (1 - s)x + s\frac{x}{|x|}, (x, s) \in A(r_1, r_2) \times [0, 1]$$

と置けば *(i), (ii), (iii)* を満たすことは容易に分かる．従って *Theorem 2.2.17* よりホモトピー同値であるが，位相同型でない 2 つの位相空間の例ともなっている．

Definition 2.2.19. 位相空間 X に点 $x_0 \in X$ で $\{x_0\}$ が X の変位レトラクトであるものが存在するとき，X は強い意味で可縮であると言う．この場合定義中の $H : X \times [0, 1] \to X$ を取れば *(i)* $H(\cdot, 0) = \mathrm{id}_X$, *(ii)* $H(\cdot, 1) = 1_{x_0}$, *(iii)* $H(x_0, s) =$ を満たすので，結局 X が可縮であるとは id_X がある定値写像 1_{x_0} に基点を止めたままホモトープであること

$$\mathrm{id}_X \simeq_p 1_{x_0} : (X, x_0) \to (X, x_0)$$

と同値である．これから基点を止めるという条件と省き，X が弱い意味で可縮であるとは

$$\mathrm{id}_X \simeq_p 1_{x_0} : X \to X$$

となる $x_0 \in X$ が存在することと定義する．

Theorem 2.2.20. 弧状連結空間 X が弱い意味で可縮ならば単連結である．

Proof. $\mathrm{id}_X \simeq_p 1_{x_0} : X \to X$ を満たす $x_0 \in X$ を取ると，任意の $x \in X$ について道 $\gamma \in \Gamma(X, p, p_0)$ で $(\mathrm{id}_X)_* = \gamma_* \circ 1_{x_0 *}$ となるものが存在する．但し $(\mathrm{id}_X)_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, x)$ は恒等写像であり $\gamma_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x)$ は基点の取り替え，$1_{x_0 *} : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, x_0)$ は自明な準同型である．従って $(\mathrm{id}_X)_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, x)$ も自明な準同型であるが，これは恒等写像でもあるから，結局 $\pi_1(X, x)$ が自明でなければならない．つまり X は単連結である． □

2.3　S^1 の基本群

この節では $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ の基本群を求めよう．前節で述べたように S^1 は円環領域 $A(r_1, r_2)$ (但し $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$) の変位レトラクトであるから，両者はホモトピー同値である．従って S^1 の基本群が求まれば $A(r_1, r_2)$ の基本群も自動的に求まる．

記号を簡単にするために $\mathbb{R}^2$ の代わりに複素平面 $\mathbb{C}$ で考え S^1 の代わりに単位円周 $\partial\mathbb{D} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ の基本群を求める．

写像 $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{it} = \cos t + i \sin t \in \partial\mathbb{D}$ は $\mathbb{R}$ から $\partial\mathbb{D}$ への全射であり，次章で述べる被覆写像の例になっている．従って (これも次章で述べる) 道の一意的持ち上げ定理などが成り立つ．これから基本群の計算に必要な 2 つの結果を述べるが，照明については重複を避けるために次章を参照して欲しい．

Theorem 2.3.1. $t_0 \in \mathbb{R}$ と $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$ は $\zeta_0 = e^{it_0}$ を満たすとする．このとき $\gamma : [0, 1] \to \partial\mathbb{D}$ が ζ_0 を基点とする $\partial\mathbb{D}$ の道ならば，t_0 を基点とする $\mathbb{R}$ の道 $\tilde{\gamma} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ で

$$e^{i\tilde{\gamma}(t)} = \gamma(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

を満たすものが一意的に存在する．

道 $\tilde{\gamma}$ を (t_0 を始点とする) γ の持ち上げと呼ぶ.

Theorem 2.3.2. $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \partial\mathbb{D}$ が ζ_0 を始点とする $\partial\mathbb{D}$ 内の道とし t_0 を始点とする両者の持ち上げを $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ とする．このとき $\gamma_0 \sim_p \gamma_1$ ならば $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1)$ が成り立つ.

閉道 $\gamma \in \Gamma(\partial\mathbb{D}, \zeta_0)$ について持ち上げ $\tilde{\gamma}$ は

$$e^{i\tilde{\gamma}(1)} = \gamma(1) = \zeta_0 = \gamma(0) = e^{i\tilde{\gamma}(0)}$$

を満たすので, ある整数 k について $\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) = 2\pi k$ と表せる．この k を γ の回転数と言い, $\deg\gamma$ で表す.

$$\deg\gamma = \frac{\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)}{2\pi} \tag{2.3.1}$$

$\deg k$ は持ち上げの始点 t_0 に依らず定まる．また Theorem 2.3.2 により $\gamma_0 \sim_p \gamma_1$ ならば $\deg\gamma_0 = \deg\gamma_1$ が成り立つ．よって deg は写像 $\deg : \pi_1(\partial\mathbb{D}, \zeta_0) \to \mathbb{Z}$ とみなすことが出来る.

さて $\zeta_0 = e^{it_0}$ を満たす $t_0 \in \mathbb{R}$ を取り

$$\alpha(t) = e^{i2\pi(t+t_0)}, \quad 0 \le t \le 1 \tag{2.3.2}$$

と置く．ζ_0 を基点とし, $\partial\mathbb{D}$ に沿って半時計回りに 1 周する閉道である．このとき Theorem 2.3.1 より $\tilde{\alpha}(t) = 2\pi(t+t_0)$ である．従って $\deg\alpha = \frac{\tilde{\alpha}(1)-\tilde{\alpha}(0)}{2\pi} = 1$ である.

Theorem 2.3.3. 写像 $\deg : \pi_1(\partial\mathbb{D}, \zeta_0) \to \mathbb{Z}$ は同型であり,

$$\pi_1(\partial\mathbb{D}, \zeta_0) = \{[\alpha^m] : m \in \mathbb{Z}\}$$

が成り立つ.

Proof. まず　$\deg : \pi_1(\partial\mathbb{D}, \zeta_0) \to \mathbb{Z}$ が準同型であることを示そう．$\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$ を基点とする閉道 γ_0, γ_1 について $\tilde{\gamma}_0$, $\tilde{\gamma}_1$ を $t_0 \in \mathbb{R}$ を基点とする持ち上げとする．このとき

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \tilde{\gamma}_0(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \tilde{\gamma}_1(2t-1) + 2\pi\deg\gamma_0, & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

と置くと, $t_0 = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ より

$$\tilde{\gamma}_0(1) = t_0 + 2\pi\deg\gamma_0 = t_0 + \tilde{\gamma}_0(1) - \tilde{\gamma}_0(0) = \tilde{\gamma}_0(1)$$

より $\tilde{\gamma}$ は連続であり, t_0 を始点とする．また

$$\begin{aligned} e^{\tilde{\gamma}_0(1)} &= \begin{cases} e^{\tilde{\gamma}_0(2t)}, & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ e^{\tilde{\gamma}_1(2t-1)+2\pi\deg\gamma_0}, & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^{\tilde{\gamma}_0(2t)}, & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ e^{\tilde{\gamma}_1(2t-1)}, & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \\ &= (\gamma_0 \cdot \gamma_1)(t) \end{aligned}$$

を満たす．従って $\tilde{\gamma}$ は $\gamma_0 \cdot \gamma_1$ の持ち上げであり

$$\deg(\gamma_0 \cdot \gamma_1) = \frac{\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)}{2\pi} = \frac{\tilde{\gamma}_1(1) + 2\pi \deg \gamma_0 - \tilde{\gamma}_0(0)}{2\pi} = \deg \gamma_0 + \deg \gamma_1$$

が成り立つ．よって $\deg : \pi_1(\partial\mathbb{D}, \zeta_0) \to \mathbb{Z}$ は準同型である．

次に全射性を示そう．これは (2.3.2) で定義される α を取れば，任意の $m \in \mathbb{Z}$ について $[\alpha]^m = [\alpha^m] \in \pi_1(\partial\mathbb{D}, \zeta_0)$ は $\deg[\alpha]^m = m \deg[\alpha] = m \deg \alpha = m$ となることより従う．

単射性については $\deg[\gamma] = \deg \gamma = 0$ とすると γ の持ち上げ $\tilde{\gamma}$ は $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}(0)$ を満たす．このとき

$$\tilde{H}(t, s) = (1 - s)\tilde{\gamma}(t) + st_0$$

と置くと $\tilde{H}(t, 0) = \tilde{\gamma}(t)$, $\tilde{H}(t, 1) = t_0$ $\tilde{H}(0, s) = t_0 = \tilde{H}(1, s)$ を満たすので $\tilde{\gamma}$ と 1_{t_0} を結ぶ連続変形である．よって $e^{i\tilde{H}} : [0, 1] \times [0, 1] \to \partial\mathbb{D}$ は $e^{i\tilde{\gamma}} = \gamma$ と 1_{ζ_0} を結ぶ連続変形であり，$\gamma \sim_p 1_{\zeta_0}$．従って $[\gamma]$ は $\pi_1(\partial\mathbb{D}, \zeta_0)$ の単位元である．これで $\deg : \pi_1(\partial\mathbb{D}, \zeta_0) \to \mathbb{Z}$ について

$$\operatorname{Ker} \deg = \{[\gamma] : \gamma \in \pi_1(\partial\mathbb{D}, \zeta_0)\ \deg \gamma = 0\} = \{[1_{\zeta_0}]\}$$

である．よって $\deg : \pi_1(\partial\mathbb{D}, \zeta_0) \to \mathbb{Z}$ は単射である． □

2.4　自由積と融合積

次節で解説するファンカンペンの定理とは，位相空間 X が 2 つの弧状連結な開集合 X_1, X_2 の和であり，共通部分 $X_0 = X_1 \cap X_2$ が空でなく弧状連結であるという状況のもとで，$x_0 \in X_0$ に対し X 全体での基本群 $\pi_1(X, x_0)$ を $\pi_1(X_0, x_0)$, $\pi_1(X_1, x_0)$, $\pi_1(X_2, x_0)$ で表す方法を述べたものである．このファンカンペンの定理によれば $\pi_1(X_0, x_0)$ が自明なとき $\pi_1(X, x_0)$ は $\pi_1(X_1, x_0)$ と $\pi_1(X_2, x_0)$ の自由積，そうでないときは融合積と呼ばれる群と同型になる．この節では 2 つの群の自由積と融合積について解説する．

G, H を群とし，それぞれの単位元を e_G, e_H と表す．G, H の元を任意の順序に有限個並べた列を語 (word) とよぶ．つまり

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \quad (x_i \in G \text{ または } x_i \in H,\ i = 1, 2, \ldots, n)$$

という形の列のことであり，個数 n をこの語の長さと言う．G と H の元を文字とする語の全体を $W(G, H)$ と表すことにしよう．以下では個々の語を w, u, v, ... 等の記号を用いて表す．例えば

$$\begin{aligned} w &= g_1, g_2, h_1, h_2, g_3 \quad (g_i \in G,\ h_j \in H\ w \text{ の長さは } 5) \\ v &= g \quad (g \in G,\ v \text{ の長さ } 1) \end{aligned}$$

である．何も並んでいない列も語とみなし，記号 e で表して空なる語と呼ぶ．勿論 e の長さは 0 である．また $u = x_1, \ldots, x_p$, $v = y_1, \ldots, y_q$ について両者の積 $u \cdot v$ を

$$u \cdot v = x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q$$

と定義する．このとき空なる語 e は任意の語 w について $w \cdot e = e \cdot w = w$ を満たす．さらに結合法則 $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$ をが成り立つことも明らかであろう．(とはいうものの逆元の存在が保証されないので $W(G, H)$ は群になるとは限らない.)

語については次の基本操作を考える．

I　語 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の前, 後, または文字の間に e_G あるいは e_H を挿入する. (このとき語の長さは 1 増える.)

II　語 $x_1, \dots, x_n$ の中の隣り合う x_i, x_{i+1} が共に G の元, またはともに H の元のとき x_i, x_{i+1} の部分を積 $x_i \cdot x_{i+1}$ で置き換える. (このとき語の長さは 1 減る.)

及び, これらの操作の逆の

I^{-1}　語 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の中に e_G あるいは e_H があれば, その中の 1 つを取り除く. (このとき語の長さは 1 減る.)

II^{-1}　語 $x_1, \dots, x_n$ の中の 1 つの x_i が $x = a \cdot b$ と 2 つの G の元の積, または H の元の積で表されるとき x_i を a, b で置き換える. つまり $x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ を $x_1, \dots, x_{i-1}, a, b, x_{i+1}, \dots, x_n$ に置き換えることである. (このとき語の長さは 1 増える.)

である.

$W(G,H)$ の中の 2 つの元の間の関係 $\sim$ を

(2.4.1)　$$u \sim v \iff u \text{ に有限回の操作 I, II, } \mathrm{I}^{-1}, \mathrm{II}^{-1} \text{ を施して } v \text{ に変形できる}$$

例えば

$$\begin{aligned} u &= e_G, h_1, g_1, h_2, h_2^{-1}, g_2 \\ &\sim h_1, g_1, h_2, h_2^{-1}, g_2 \quad (\ e_G \text{ を取り除く } \mathrm{I}^{-1}\ ) \\ &\sim h_1, g_1, e_H, g_2 \quad (h_2, h_2^{-1} \text{ を } e_H = h_2 \cdot h_2^{-1} \text{ で置き換える II}) \\ &\sim h_1, g_1, g_2 = v \quad (\ e_H \text{ を取り除く } \mathrm{I}^{-1}\ ) \end{aligned}$$

となったとき $u \sim v$ である.

さて関係 $\sim$ が同値関係であることは直ちに分かるであろう. このように定義した積と, $W(G,H)$ の関係 $\sim$ は両立する. つまり

$$u \sim u', v \sim v' \implies u \cdot v \sim u' \cdot v'$$

が成り立つ. そこでいつものように元 $u \in W(G,H)$ の同値類を $[u]$ と表すことにして商集合 $W(G,H)/\sim$ に

$$[u] \cdot [v] = [u \cdot v]$$

で積を導入する. このとき $W(G,H)/\sim$ は群になる. 実際, 空なる語の同値類が単位元であるし, $W(G,H)$ の積について結合法則が成り立つことより $W(G,H)/\sim$ についても結合法則が成り立つことが容易に分かる. そして $[x_1, \dots, x_m]$ の逆元が $[x_m^{-1}, \dots, x_1^{-1}]$ で与えられることも

$$\begin{aligned} [x_m^{-1}, \dots, x_1^{-1}][x_1, \dots, x_m] &= [x_m^{-1}, \dots, x_1^{-1} x_1, \dots, x_m] \\ &= [x_m^{-1}, \dots, x_2^{-1} x_2, \dots, x_m] =, \dots, = [x_m^{-1} x_m] = [e] \\ [x_1, \dots, x_m][x_m^{-1}, \dots, x_1^{-1}] &= [x_1, \dots, x_m x_m^{-1}, \dots, x_1^{-1}] \\ &= [x_1, \dots, x_{m-1} x_{m-1}^{-1}, \dots, x_1^{-1}] = \cdots = [x_1^{-1} x_1] = [e] \end{aligned}$$

より従う.

Definition 2.4.1. *$W(G,H)/\sim$ を群 G, H の自由積 (free product) と言い, 記号 $G * H$ で表す. $W(G,H)$ の作り方は, G, H の順番に依存しないので $G * H = H * G$ である.*

さて $w = x_1, \dots, x_m \in W(G,H)$ に対して $x_1, \dots, x_m$ の中で G に属すものを全て選びだし, 並ぶ順序を変えずに G の中で積を取ったものを $P_G(w)$ と表す. ただし $x_1, \dots, x_m$ の中で G に属すものが無いときは $P_G(w) = e_G$ と置

く. 同様に $x_1,\dots,x_m$ の中で H に属すものを全て選びだし, 並ぶ順序を変えずに H の中で積を取ったものを $P_H(w)$ と表す. 勿論 $x_1,\dots,x_m$ の中で H に属すものが無いときは $P_H(w)=e_H$ と置く. 例えば

$$P_G(e_G,g_1,h_1,g_2)=g_1\cdot g_2,\quad P_H(e_G,g_1,h_1,g_2)=h_1$$

である. P_G, P_H はそれぞれ $W(G,H)$ から G, H への写像であるが $u\sim v$ ならば $P_G(u)=P_G(v)$, $P_H(u)=P_H(v)$ が成り立つことは基本操作 I,II, I^{-1}, II^{-1} を行っても $P_G(u)$, $P_H(u)$ が変化しないことをチェックすれば容易に分かる. 従って P_G, P_H は $G*H=W(G,H)/\sim$ から G, H への写像を誘導するが, 記号を節約するために, 同じ記号 P_G, P_H と表すことにする. このとき $P_G:G*H\to G$, $P_H:G*H\to H$ が準同型であることも容易に分かる.

今までは語を表すのに $w=x_1,\dots,x_m$ のように文字の間にコンマを入れて書いたが, これからは $w=x_1\cdots x_m$ のようにコンマを省いて表す. また語 $w\in W(G,H)$ の同値類 $[w]\in G*H$ もカギ括弧を省いて $w\in G*H$ と表す. 従って語 $w=x_1\cdots x_m$ と書いても実際には同値類を意味する. 念の為に今までの事実をまとめておくと群 G, H の自由積とは

$$x_1\cdots x_m\quad (x_i\in G \text{ または } x_i\in H,\ i=1,\dots,m)$$

の形の語 (の同値類) よりなり, 空なる語 (の同値類) e を含む. そして

$$x_1\cdots x_m=y_1\cdots y_n$$

とは $x_1\cdots x_m$ に基本操作 I,II, I^{-1}, II^{-1} を有限回行うと $y_1\cdots y_n$ に変換出来ることである. そして $x_1\cdots x_m$, $y_1\cdots y_n$ の積は

$$x_1\cdots x_m y_1\cdots y_n$$

であり, $x_1\cdots x_m$ の逆元は

$$x_m^{-1}\cdots x_1^{-1}$$

で与えられる. そして語 $w\in G*H$ の中の G に属する元全ての積を取ることにより準同型 $P_G:G*H\to G$ が, 同様に H に属する元全ての積を取ることにより準同型 $P_H:G*H\to H$ が定義される.

自由積 $G*H$ は G, H に同型な部分群を含んでいる. 実際

$$G'=\{g_1\cdots g_n\in G*H : n\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ g_i\in G,\ i=1,\dots,n\} \tag{2.4.2}$$

$$H'=\{h_1\cdots h_n\in G*H : n\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ h_i\in H,\ i=1,\dots,n\} \tag{2.4.3}$$

と置く. ただし $n=0$ の場合は空なる語を表すとする. このとき G', H' はそれぞれ G, H と同型になることが次のようにして分かる. G' に属する 2 つの語の積が G' に属すること及び G' に属する語の逆も G' に属する. 従って G' は $G*H$ の部分群である. 同様に H' も $G*H$ の部分群である.

Lemma 2.4.2. $G'\cap H'=\{e\}$.

Proof. $z\in G'\cap H'$ ならば $z=g_1\cdots g_m=h_1\cdots h_n$, $g_i\in G$, $h_i\in H$ と表せ, $W(G,H)$ の元として $g_1\cdots g_m\sim h_1\cdots h_n$ である. 従って G の元として $g_1\cdots g_m=P_G(z)=P_G(h_1\cdots h_n)=e_G$ と H の元として $h_1\cdots h_n=P_H(z)=P_H(g_1\cdots g_m)=e_H$ が成り立つ. よって $z=g_1\cdots g_m=e_G$ と $z=h_1\cdots h_n=e_H$ が成り立ち, $z=e$ である. □

さて 2 つの写像 $i_G:G\to G*H$, $i_H:H\to G*H$ を

$$i_G(g)=g\in G*H,\quad i_H(h)=h\in G*H \tag{2.4.4}$$

と定義する．勿論, 左辺の g, h はそれぞれ群 G, H の元であり, 右辺の g, h は語とみなしたものである．このとき $i_G(G) \subset G'$, $i_H(H) \subset H'$ である．ここで P_G を G' に制限した写像を P'_G, P_H を H' に制限した写像を P'_H と置くと

$$P'_G \circ i_G = \mathrm{id}_G, \quad i_G \circ P'_G = \mathrm{id}_{G'} \tag{2.4.5}$$
$$P'_H \circ i_H = \mathrm{id}_H, \quad i_H \circ P'_H = \mathrm{id}_{G'} \tag{2.4.6}$$

が成り立つ．従って $i_G : G \to G'$, $i_H : H \to H'$ は同型である．

i_G, i_H を標準的な包含写像と言い, P_G, P_H を射影と呼ぶ.

Lemma 2.4.3. L を群とし, $f_1 : G \to L$, $f_2 : H \to L$ を準同型とすると

$$F \circ i_G = f_1, \quad F \circ i_H = f_2$$

を満たす準同型 $F : H * G \to L$ が一意的に存在する．つまり次の図を可換にする準同型 $F : H * G \to L$ が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "i_G"] \arrow[dr, "f_1"'] & G * H \arrow[d, "F"] & H \arrow[l, "i_H"'] \arrow[dl, "f_2"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

Proof. 語 $w = x_1 \cdots x_n$ について $F(w) \in L$ を

$$F(w) = f(x_1) \cdots f(x_n), \tag{2.4.7}$$

但し

$$f(x_i) = \begin{cases} f_1(x_i), & x_i \in G \\ f_2(x_i), & x_i \in H \end{cases}$$

と置く．ここに (2.4.7) の右辺は $f(x_i) \in L$ の L の中での積を意味する．このとき f_1, f_2 が準同型であることより $w = x_1 \cdots x_n$ に基本変形 I,II, I^{-1}, II^{-1} を施しても右辺が変わらないので F は $G * H$ で定義されているとしてよく, 任意の $g \in G$ について $F \circ i_G(g) = F(g) = f_1(g)$ が成り立つので $F \circ i_G = f_1$ を満たす．全く同様にして $F \circ i_H = f_2$ を満たすことも分かる．また作り方より準同型であることも直ちに従う．

一意性については任意の語 $w \in G * H$ が $w = x_1 \cdots x_n$, $x_i \in G$ または $x_i \in H$ の形に表せ w は 1 文字よりなる語 $x_1, \ldots, x_n$ の積とみなせる．従って

$$i(x) = \begin{cases} i_G(x), & x \in G \\ i_H(x), & x \in H \end{cases}$$

と置けば $F : H * G \to L$ が条件 $F \circ i_G = f_1$, $F \circ i_H = f_2$ を満たす準同型ならば

$$F(x_1 \cdots x_n) = F(i(x_1) \cdots i(x_n)) = f(x_1) \cdots f(x_n)$$

と必ず分解されることより従う． □

次に融合積の説明に入る前に正規部分群について復習をしておこう．群 G の部分集合 S が

$$a, b \in S \quad \Longrightarrow \quad ab \in S$$
$$a \in S \quad \Longrightarrow \quad a^{-1} \in S$$

が成り立つとき, G の部分群であると言い, さらに任意の $g \in G$ について

$$g^{-1}Sg := \{g^{-1}xg : x \in G\} \subset S$$

を満たすとき正規部分群であると言った．G の正規部分群の族の共通部分が再び正規部分群であることは容易に分かる．従って部分集合 $T \subset G$ について

$$|T| := \bigcap_{T \subset S,\ S\ \text{は正規部分群}} S$$

と置けば, G 自身が T を含む正規部分群であるから, 定義式の右辺の族は空ではない．従って右辺は T を含む最小の正規部分群である．$|T|$ を T により生成される正規部分群と呼ぶ．実際には $|T|$ は次のような集合である．

$$|T| = \{(g_1^{-1}t_1^{\varepsilon(1)}g_1)\cdots(g_n^{-1}t_n^{\varepsilon(n)}g_n) : n \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ g_i \in G,\ t_i \in T,\ \varepsilon(i) = \pm 1\}$$

何故ならば, 上式の右辺を T' と置くとき T' が積及び逆元を取る操作について閉じているので群になることを見るのは容易である．また変形

$$g^{-1}\{(g_1^{-1}t_1^{\varepsilon(1)}g_1)\cdots(g_n^{-1}t_n^{\varepsilon(n)}g_n)\}g = \{(g_1g)^{-1}t_1^{\varepsilon(1)}(g_1g)\}\cdots\{(g_ng)^{-1}t_n^{\varepsilon(n)}(g_ng)\}$$

により T' が正規部分群であることが分かる．よって $T \subset T'$ より $|T| \subset T'$ が成り立つことが分かる．逆に $|T|$ は T を含む正規部分群であるから, $g_i \in G$, $t_i \in T$ ならば $g_i^{-1}t_i^{\varepsilon(i)}g_i \in |T|$ が成り立つので $(g_1^{-1}t_1^{\varepsilon(1)}g_1)\cdots(g_n^{-1}t_n^{\varepsilon(n)}g_n) \in |T|$ となり, $T' \subset |T|$ が従う．

Lemma 2.4.4. G, L を群とし $f : G \to L$ を準同型とする．このとき部分集合 $T \subset G$ について $T \subset \operatorname{Ker} f$ ならば $|T| \subset \operatorname{Ker} f$ が成り立つ．さらに $\pi : G \to G/|T|$ を射影とするとき $f' \circ \pi = f$ を満たす $f' : G/|T| \to L$ が一意的に存在する．

Proof. 準同型の核 $\operatorname{Ker} f$ は正規部分群であり T を含むので, $|T|$ の最小生より $|T| \subset \operatorname{Ker} f$ が成り立つ．

$g_1, g_2 \in G$ について

$$\pi(g_1) = \pi(g_2) \Longleftrightarrow \exists h \in |T| \text{ with } g_2 = g_1h \Longrightarrow f(g_2) = f(g_1h) = f(g_1)f(h) = f(g_1)e_L = f(g_1)$$

より, $\pi(g) \in G/|T|$ について $f'(\pi(g))$ を

$$f'(\pi(g)) = f(g)$$

とおいても代表元のとり方に依らず定まる．また明らかに $f' \circ \pi = f$ を満たす．

f' の一意性については準同型 $f'' : G/|T| \to L$ が $f'' \circ \pi = f$ を満たすならば

$$f''(\pi(g)) = f(g) = f'(\pi(g))$$

となるので $f'' = f'$ である．□

Definition 2.4.5. G, H, K を群とし $\varphi : K \to G$, $\psi : K \to H$ を準同型とする．このとき $G * H$ の部分集合を

$$\varphi(K)^{-1}\psi(K) := \{\varphi(k)^{-1}\psi(k) \in G * H : k \in K\}$$

と置く．そして剰余群 $G * H/|\varphi(K)^{-1}\psi(K)|$ を図式

$$
\begin{tikzcd}
 & G \\
K \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \\
 & H
\end{tikzcd}
$$

から導かれた融合積 *(amalgamated free product)* と呼び $G\underset{K}{*}H$ と表す.

任意の $k \in K$ について語 $\varphi^{-1}(k)\psi(k) \in G * H$ の属する $|\varphi(K)^{-1}\psi(K)|$ に関する剰余類は $G\underset{\mathrm{K}}{*}H$ の単位元であるから語と剰余類を区別せず書けば $\varphi^{-1}(k)\psi(k) = e$ と表せる. 従って特に $G\underset{\mathrm{K}}{*}H$ の中では $\varphi(k) = \psi(k)$ が成り立つ.

$i_G : G \to G * H$, $i_H : H \to G * H$ を標準的な包含写像とし, $\pi : G * H \to G\underset{\mathrm{K}}{*}H$ を射影とする. そして $i'_G = \pi \circ i_G : G \to G\underset{\mathrm{K}}{*}H$, $i'_H = \pi \circ i_H : H \to G\underset{\mathrm{K}}{*}H$ と置いて, それぞれ G, H から $G\underset{\mathrm{K}}{*}H$ への標準的な準同型と呼ぶ. これらの写像を用いて上の事実を表せば "$i'_G(\varphi(k)) = i'_H(\psi(k))$ が任意の $k \in K$ について成り立つ" である. これを lemma としてまとめておこう.

Lemma 2.4.6. $i'_G \circ \varphi = i'_H \circ \psi$ が成り立つ. つまり図式

$$
\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dr, "i'_G"] & \\
K \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & G\underset{K}{*}H \\
 & H \arrow[ur, "i'_H"'] &
\end{tikzcd}
$$

は可換である.

Lemma 2.4.7. G, H, K, L を群とし $\varphi : K \to G$, $\psi : K \to H$, $f_1 : G \to L$, $f_2 : H \to L$ を準同型とし, $f_1 \circ \varphi = f_2 \circ \psi$ が成り立つとする. つまり

$$
\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dr, "i_G"] \arrow[rrrd, "f_1"] & & & \\
K \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & G * H \arrow[r, "\pi"] & G\underset{K}{*}H \arrow[r, "f"] & L \\
 & H \arrow[ur, "i_H"'] \arrow[rrru, "f_2"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

このとき準同型 $f : G\underset{K}{*}H \to L$ で $f \circ i'_G = f_1$, $f \circ i'_H = f_2$ を満たすものが一意的に存在する.

この $f : G\underset{\mathrm{K}}{*}H \to L$ を $f_1\underset{\mathrm{K}}{*}f_2$ と表す.

Proof. $x \in G$ または $x \in H$ のとき $\hat{f}(x) \in L$ を

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in G \\ f_2(x), & x \in H \end{cases}$$

と置く．このとき $w = x_1 \cdots x_n \in G * H$ について

$$F(w) = \hat{f}(x_1) \cdots \hat{f}(x_n)$$

と置けば, 右辺は w の表現に依らず定まり $F : G * H \to L$ は準同型である．また $\varphi(K)^{-1}\psi(K) \subset \operatorname{Ker} F$ が成り立つ．実際任意の $k \in G$ について $f_1 \circ \varphi = f_2 \circ \psi$ より

$$F(\varphi(k)^{-1}\psi(k)) = F(\varphi(k)^{-1})F(\psi(k)) = F(\varphi(k))^{-1}F(\psi(k)) = e_L$$

である．よって Lemma 2.4.4 より $F = f \circ \pi$ を満たす準同型 $f : G \underset{\mathrm{K}}{*} H \to L$ が存在する．さらに

$$\begin{aligned} & f \circ \pi \circ i_G(g) \quad (g \in G \text{ とみて}) \\ =& F(g) \quad (g \in G' \subset G * H \text{ とみて}) \\ =& \hat{f}(g) = f_1(g) \end{aligned}$$

より $f \circ \pi \circ i_G = f_1$ が成り立つ．$f \circ \pi \circ i_H = f_2$ も同様である．

一意性を示す為に準同型 $\tilde{f} : G \underset{\mathrm{K}}{*} H \to L$ も $\tilde{f} \circ \pi \circ i_G = f_1$ と $\tilde{f} \circ \pi \circ i_H = f_2$ を満たすとする．ここで $\pi : G * H \to G \underset{\mathrm{K}}{*} H w$ は全射であるから $G \underset{\mathrm{K}}{*} H$ の任意の元はある語 $w = x_1 \cdots x_n \in G * H$ を用いて

$$\pi(x_1 \cdots x_n) = \pi \circ i(x_1) \cdots \pi \circ i(x_n)$$

の形に表せる．但し

$$i(x) = \begin{cases} i_G(x), & x \in G \\ i_H(x), & x \in H \end{cases}$$

と置いた．よって

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\pi(w)) &= \tilde{f} \circ \pi \circ i(x_1) \cdots \tilde{f} \circ \pi \circ i(x_n) \\ &= \hat{f}(x_1) \cdots \hat{f}(x_n) = F(w) = f(\pi(w)) \end{aligned}$$

が成り立ち, $\tilde{f} = f$ である．□

Lemma 2.4.8. *$\varphi : K \to G$, $\psi : K \to H$ が自明な準同型ならば $G \underset{K}{*} H = G * H$ である．特に $K = \{e\}$(自明群) のとき $G \underset{K}{*} H = G * H$ である．*

Proof. 任意の $k \in K$ について $\varphi(k)^{-1}\psi(k) = e_G^{-1}e_H = e$(空語) であるから $|\varphi^{-1}(K)\psi(K)| = |\{e\}| = \{e\}$ である．従って $G \underset{\mathrm{K}}{*} H = G * H / |\varphi^{-1}(K)\psi(K)| = G * H$ である．□

Lemma 2.4.9. *$G = \{e_G\}$ (自明群) の場合, $G \underset{K}{*} H = H / |\psi(K)|$ が成り立つ．*

Proof. $k \in K$ について $\varphi(k)^{-1}\psi(k) = e_G^{-1}\psi(k) = \psi(k)$ であるから $|\varphi^{-1}(K)\psi(K)| = |\psi(k)|$ である．また $G * H = \{e_G\} * H$ は H のアルファベットよりなる語であるから H と一致する．従って $G \underset{\mathrm{K}}{*} H = H / |\psi(K)|$ が成り立つ．□

2.5　ファンカンペンの定理

さて X を弧状連結位相空間とし, X_1, X_2 を X の弧状連結な部分集合で, $X_0 = X_1 \cap X_2$ も空でない弧状連結であるとする. $k = 1, 2$ について $j_k : X_0 \to X_k$, $i_k : X_k \to X$ を包含写像とする. このとき図式

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[dr, "i_1"] & \\
X_0 \arrow[ur, "j_1"] \arrow[dr, "j_2"'] & & X \\
 & X_2 \arrow[ur, "i_2"'] &
\end{tikzcd}$$

図 2.5.1

が出来上がるが, $i_1 \circ j_1$ と $i_1 \circ j_1$ はともに X_0 から X への包含写像であるから一致する. つまり $i_1 \circ j_1 = i_1 \circ j_1$ である. 従って上の図式は可換である. 基点 $p_0 \in X_0$ を任意に 1 つ取り固定するとき, この図式は基本群の間の図式

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(X_1, p_0) \arrow[dr, "i_{1*}"] & \\
\pi_1(X_0, p_0) \arrow[ur, "j_{1*}"] \arrow[dr, "j_{2*}"'] & & \pi_1(X, p_0) \\
 & \pi_1(X_2, p_0) \arrow[ur, "i_{2*}"'] &
\end{tikzcd}$$

図 2.5.2

を誘導するが, $i_1 \circ j_1 = i_2 \circ j_2$ より

$$i_{1*} \circ j_{1*} = (i_1 \circ j_1)_* = (i_2 \circ j_2)_* = i_{2*} \circ j_{2*}$$

が成り立つので, これも可換である. この図式の左側の部分より, 自由積と融合積への準同型の図式

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(X_1, p_0) \arrow[d, "\mathrm{inc}_1"] \arrow[dr, "i_1'"] & \\
\pi_1(X_0, p_0) \arrow[ur, "j_{1*}"] \arrow[dr, "j_{2*}"'] & \pi_1(X_1,p_0)*\pi_1(X_1,p_0) \arrow[r, "\pi"] & \pi_1(X_1,p_0) \underset{\pi_1(X_0,p_0)}{*} \pi_1(X_1,p_0) \\
 & \pi_1(X_2, p_0) \arrow[u, "\mathrm{inc}_2"'] \arrow[ur, "i_2'"'] &
\end{tikzcd}$$

図 2.5.3

が誘導される．但し $k=1,2$ について $\mathrm{inc}_k : \pi_1(X_2,p_0) \to \pi_1(X_1,p_0) * \pi_1(X_1,p_0)$ は標準的な包含写像であり，$\pi : \pi_1(X_1,p_0) * \pi_1(X_1,p_0) \to \pi_1(X_1,p_0) \underset{\pi_1(X_0,p_0)}{*} \pi_1(X_1,p_0)$ は自由積から融合積への射影，そして $i'_k = \pi \circ \mathrm{inc}_k$ である．念の為に $\mathrm{inc}_1 \circ j_{1*} \neq \mathrm{inc}_1 \circ j_{1*}$ が成り立つとは限らないことに注意しておこう．しかしながら融合積の作り方より $i'_1 \circ j_{1*} = i'_2 \circ j_{2*}$ が成り立つことに注意しておこう．

この図式に加えて $i_{1*} \circ j_{1*} = i_{2*} \circ j_{2*}$ より準同型 $f : \pi_1(X_1,p_0) \underset{\pi_1(X_0,p_0)}{*} \pi_1(X_2,p_0) \to \pi_1(X,p_0)$ で $f \circ i'_k = i_{k*}$, $k=1,2$ が成り立つものが一意的に存在する．以上より

$$
\begin{tikzcd}
 & \pi_1(X_1,p_0) \arrow[d, "\mathrm{inc}_1"] \arrow[dr, "i'_1"] \arrow[drr, "i_{1*}"] & & \\
\pi_1(X_0,p_0) \arrow[ur, "j_{1*}"] \arrow[dr, "j_{2*}"'] & \pi_1(X_1,p_0) * \pi_1(X_2,p_0) \arrow[r, "\pi"] & \pi_1(X_1,p_0) \underset{\pi_1(X_0,p_0)}{*} \pi_1(X_2,p_0) \arrow[r, "f"] & \pi_1(X,p_0) \\
 & \pi_1(X_2,p_0) \arrow[u, "\mathrm{inc}_2"'] \arrow[ur, "i'_2"'] \arrow[urr, "i_{2*}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

図 2.5.4

という図式になる．

Theorem 2.5.1 (ファンカンペンの定理)**.** 図式 2.5.4 において，融合積 $\pi_1(X_1,p_0) \underset{\pi_1(X_0,p_0)}{*} \pi_1(X_2,p_0)$ から $\pi_1(X,p_0)$ への準同型 f は全単射であり群同型である．

ファンカンペンの定理に従えば空間 X 全体の基本群 $\pi_1(X,p_0)$ は部分空間の基本群の融合積 $\pi_1(X_1,p_0) \underset{\pi_1(X_0,p_0)}{*} \pi_1(X_1,p_0)$ と同一視出来ることになる．ファンカンペンの定理の証明は長く煩雑なので，もう少し記号を簡略化し，主張の意味を明確にしておこう．

以下では $G=\pi_1(X,p_0)$, $G_k=\pi_1(X_k,p_0)$, $k=0,1,2$ と置き，i_{1*}, i_{2*}, j_{1*}, j_{2*} の $_*$ を省略して単に i_1, j_2 のように表す．このとき図式 2.5.4 は

$$
\begin{tikzcd}
 & G_1 \arrow[d, "\mathrm{inc}_1"] \arrow[dr, "i'_1"] \arrow[drr, "i_1"] & & \\
G_0 \arrow[ur, "j_1"] \arrow[dr, "j_2"'] & G_1 * G_2 \arrow[r, "\pi"] & G_1 \underset{G_0}{*} G_2 \arrow[r, "f"] & G \\
 & G_2 \arrow[u, "\mathrm{inc}_2"'] \arrow[ur, "i'_2"'] \arrow[urr, "i_2"'] & &
\end{tikzcd}
$$

図 2.5.5

また p_0 を基点とする閉道 ℓ について $\Gamma(X,p_0)$ において ℓ の属す同値類を $[\ell] \in G = \pi_1(X,p_0)$ を表し，ℓ が X_k, $k=0,1,2$ に含まれるとき $\Gamma(X_k,p_0)$ において ℓ の属す同値類を $[\ell]_k \in G = \pi_1(X,p_0)$ と表す．このとき $\ell \in \Gamma(X_0,p_0)$

について $j_k([\ell]_0)$ とは X_0 から X_k への包含写像を用いて ℓ を写像した閉道の $\Gamma(X_k, p_0)$ に関する同値類のことであるから

$$j_1([\ell]_0) = [\ell]_1, \quad j_2([\ell]_0) = [\ell]_2$$

同様に $\ell \in \Gamma(X_k, p_0)$ について

$$i_1([\ell]_1) = [\ell], \quad i_2([\ell]_2) = [\ell]$$

が成り立つ．念の為に $\ell \in \Gamma(X_0, p_0)$ について

$$i_k(j_k([\ell]_0)) = i_k([\ell]_k) = [\ell]$$

であるから当然のことながら $i_1 \circ j_1 = i_2 \circ j_2$ が成り立つことに注意しておこう．

G_k, $k = 1, 2$ から自由積 $G_1 * G_2$ への包含写像 inc_k は単に G_k の元を 1 文字よりなる語とみなす写像である．従って $G_1 * G_2$ の元は $n \in \mathbb{N}$ として

$$[\ell_1]_{\varepsilon(1)} \cdots [\ell_n]_{\varepsilon(n)}$$

と表せる語である．但し $\varepsilon(k) = 1, 2$, $k = 1, \dots, n$ であり $\ell_k \in \Gamma(X_{\varepsilon(k)}, p_0)$ とする．従って融合積の個々の元は射影 $\pi : G_1 * G_2 \to G_1 \underset{G_0}{*} G_2$ により

$$\pi([\ell_1]_{\varepsilon(1)} \cdots [\ell_n]_{\varepsilon(n)}) = \pi([\ell_1]_{\varepsilon(1)}) \cdots \pi([\ell_n]_{\varepsilon(n)})$$

と表せる．

さて $G_1 * G_2$ において部分集合 $j_1^{-1}(G_0)j_2(G_2)$ を含む最小の正規部分群を $|j_1^{-1}(G_0)j_2(G_2)|$ とするとき，$G_1 \underset{G_0}{*} G_2$ とは $G_1 * G_2$ の $|j_1^{-1}(G_0)j_2(G_2)|$ による剰余群であった．ここで $\ell \in \Gamma(X_0, p_0)$ について $j_1([\ell]_0)^{-1}{}_2([\ell]_0) = [\ell^{-1}]_1[\ell]_2$ であるから

$$j_1^{-1}(G_0)j_2(G_2) = \{[\ell^{-1}]_1[\ell]_2 \in G_1 * G_2 : \ell \in \Gamma(X_0, p_0)\}$$

と表せる．さて $f \circ i'_k = i_k$, $k = 1, 2$ を満たす f の存在は Lemma 2.4.7 に負うが，その証明の方針は始めに準同型 $i_1 * 1_2 : G_1 * G_2 \to G$ を

$$i_1 * i_2([\ell_1]_{\varepsilon(1)} \cdots [\ell_n]_{\varepsilon(n)}) = i_{\varepsilon(1)}([\ell_1]_{\varepsilon(1)}) \cdot \cdots \cdot i_{\varepsilon(1)}([\ell_n]_{\varepsilon(n)}) = [\ell_1] \cdot \cdots \cdot [\ell_n]$$

により定義するとき，$i_1 \circ j_1 = i_2 \circ j_2$ を用いて $j_1^{-1}(G_0)j_2(G_2) \subset \mathrm{Ker}(i_1 * i_2)$ が成り立つことを示し，$|j_1^{-1}(G_0)j_2(G_2)| \subset \mathrm{Ker}(i_1 * i_2)$ となることから $i_1 * i_2 : G_1 * G_2 \to G$ から準同型 $f : G_1 \underset{G_0}{*} G_2 = G_1 * G_2 / |j_1^{-1}(G_0)j_2(G_2)| \to G$ が誘導されることを示すというものであった．従って

$$\begin{aligned} f(\pi([\ell_1]_{\varepsilon(1)}) \cdots \pi([\ell_n]_{\varepsilon(n)})) &= i_1 * i_2([\ell_1]_{\varepsilon(1)} \cdots [\ell_n]_{\varepsilon(n)}) \\ &= i_{\varepsilon(1)}([\ell_1]_{\varepsilon(1)}) \cdot \cdots \cdot i_{\varepsilon(n)}([\ell_1]_{\varepsilon(n)}) \\ &= [\ell_1] \cdot \cdots \cdot [\ell_n] \end{aligned}$$

である．

以上を踏まえると f が全射であることを示すには $i_1 * i_2$ が全射であることを示せば良い．つまり次の命題を示すことに帰着された．

Proposition 2.5.2. 任意の $\ell \in \Gamma(X, p_0)$ について

$$[\ell] = [\ell_1] \cdot \cdots \cdot [\ell_n], \quad \ell_k \in \Gamma(X_{\varepsilon(k)}, p_0),\ \varepsilon(k) = 1, 2, \quad k = 1, \dots, n \tag{2.5.1}$$

の形の分解が存在する．

また f が単射であることは $|j_1^{-1}(G_0)j_2(G_2)| = \mathrm{Ker}(i_1 * i_2)$ が成り立つことと同値であるが, $|j_1^{-1}(G_0)j_2(G_2)| \subset \mathrm{Ker}(i_1 * i_2)$ 上で述べたように $i_1 \circ j_1 = i_2 \circ j_2$ から直ちに従うので, 逆の包含関係

$$\mathrm{Ker}(i_1 * i_2) \subset |j_1^{-1}(G_0)j_2(G_2)|$$

を示せば十分であるが, これは有限個の閉道 $\ell_k \in \Gamma(X_{\varepsilon(k)}, p_0)$, $\varepsilon(k) = 1, 2$, $k = 1, \dots, n$ が $[\ell_1] \cdot \cdots \cdot [\ell_n] = e_G$ を満たせば $[\ell_1]_{\varepsilon(1)} \cdots [\ell_n]_{\varepsilon(n)} \in |j_1^{-1}(G_0)j_2(G_2)|$ であること, つまり f が単射性は次の命題を示すことに帰着された.

Proposition 2.5.3. 有限個の閉道 $\ell_k \in \Gamma(X_{\varepsilon(k)}, p_0)$, $\varepsilon(k) = 1, 2$, $k = 1, \dots, n$ について

$$\ell_1 \cdot \cdots \cdot \ell_n \sim 1_{p_0} \ \mathit{in}\ \Gamma(X, p_0) \quad \Longrightarrow \quad [\ell_1]_{\varepsilon(1)} \cdots [\ell_n]_{\varepsilon(n)} \in |j_1^{-1}(G_0)j_2(G_2)| \tag{2.5.2}$$

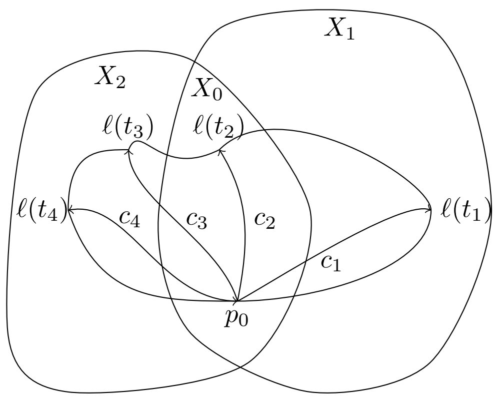
Proof of Proposition 2.5.2. $\ell \in \Gamma(X, p_0)$ が与えられたとする. ℓ は連続写像 $\ell : [0,1] \to X$ であるから $\{\ell^{-1}(X_1), \ell^{-1}(X_2)\}$ は区間 $[0,1]$ の開被覆である. 従って Lebesgue 数の存在定理 (Theorem 1.1.6) より, $[0,1]$ の細分 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = 1$ が十分細ければ, 各 $k = 0, 1, \dots, n$ について $[t_k, t_{k+1}]\ell^{-1}(X_1)$ または $[t_k, t_{k+1}]\ell^{-1}(X_2)$ の少なくとも一方が成り立つ. そこで各 $k = 0, 1, \dots, n$ について $\varepsilon(k) = 1, 2$ を $[t_k, t_{k+1}]\ell^{-1}(X_{\varepsilon(k)})$ が成り立つように取っておく. このとき $\ell([t_k, t_{k+1}]) \subset X_{\varepsilon(k)}$ が成り立つことに注意する.

各 $k = 1, \dots, n$ について $\ell(t_k) \in \ell([t_k, t_{k+1}]) \subset X_{\varepsilon(k)}$ と $\ell(t_k) \in \ell([t_{k-1}, t_k]) \subset X_{\varepsilon(k-1)}$ より $\ell(t_k) \in\subset X_{\varepsilon(k-1)} \cap \subset X_{\varepsilon(k)}$ である. ここで $\varepsilon(k-1)$, $\varepsilon(k)$ について 2 つの場合があり得る

(i) $\varepsilon(k-1) = \varepsilon(k)$ のとき. $\ell(t_k) \in X_{\varepsilon(k)}$ であり, $X_{\varepsilon(k)}$ の弧状連結性より p_0 と $\ell(t_k)$ を結ぶ $X_{\varepsilon(k)}$ 内の道が存在する. その 1 つを $c_k \in \Gamma(X_{\varepsilon(k)}, p_0, \ell(t_k))$ とする.

(ii) $\varepsilon(k-1) \neq \varepsilon(k)$ のとき. この場合は $X_{\varepsilon(k-1)} \cap X_{\varepsilon(k)} = X_0$ であり, X_0 の弧状連結性より p_0 と $\ell(t_k)$ を結ぶ X_0 内の道が存在する. その 1 つを $c_k \in \Gamma(X_0, p_0, \ell(t_k))$ とする.

2 つの場合のどちらについても c_k は p_0 を始点とし $\ell(t_k)$ を終点とする $X_{\varepsilon(k-1)} \cap X_{\varepsilon(k)}$ 内の道である.



p_0 から出発し ℓ の $[t_0, t_1]$ に対応する部分を進み, c_1^{-1} に沿って p_0 へ至る閉道を ℓ_0 と置く. $\ell([t_0, t_1]) \subset X_{\varepsilon(0)}$ と c_1 が $X_{\varepsilon(0)} \cap X_{\varepsilon(1)}$ 内の道であることより ℓ_0 は p_0 を基点とする $X_{\varepsilon(0)}$ の閉道である.

$k = 1, \dots, n-1$ について ℓ_k を p_0 を始点とし c_k に沿って $\ell(t_k)$ に至り, ℓ の $[t_k, t_{k+1}]$ に対応する部分を進み c_{k+1}^{-1} に沿って p_0 へ戻る閉道とする. このとき $X_{\varepsilon(k-1)} \cap X_{\varepsilon(k)}$ 内の道であり $\ell([t_k, t_{k+1}]) \subset X_{\varepsilon(k)}$, また c_{k+1} は $X_{\varepsilon(k)} \cap X_{\varepsilon(k+1)}$ 内の道であるから結局 c_k は $X_{\varepsilon(k)}$ 内の p_0 を基点とする閉道である.

最後に c_n に沿って p_0 から $\ell(t_n)$ に至り, ℓ の $[t_n, t_{n+1}] = [t_n, 1]$ に対応する部分を進んで p_n に戻る閉道とすれば ℓ_n は $X_{\varepsilon(n)}$ 内の p_0 を基点とする閉道である.

以上のように定義した $\ell_0,\ell_1,\ldots,\ell_n$ について $\Gamma(X,p_0)$ 内で $\ell_0\cdot\ell_1\cdot\cdots\cdot\ell_n\sim\ell$ が成り立つので

$$[\ell_0]\cdot[\ell_1]\cdot\cdots\cdot[\ell_n]=[\ell]$$

である． □

Proof of Proposition 2.5.3. 閉道 $\ell_k\in\Gamma(X_{\varepsilon(k)},p_0)$, $\varepsilon(k)=1,2$, $k=0,1,\ldots n$ が空間 X の中で $\ell_0\cdots\cdots\ell_n\sim 1_{p_0}$ となる時に

$$[\ell_0]_{\varepsilon(0)}\cdots[\ell_n]_{\varepsilon(n)}\in|j_1(G_0)^{-1}j_2(G_0)|$$

となることを示そう．まず $\ell_0\cdots\cdots\ell_n\sim 1_{p_0}$ より連続写像 $H:[0,1]\times[0,1]\to X$ で

$$H(t,0)=(\ell_0\cdots\cdots\ell_n)(t),\quad t\in[0,1] \tag{2.5.3}$$

$$H(t,1)=p_0,\quad t\in[0,1] \tag{2.5.4}$$

$$H(0,s)=H(1,s)=p_0,\quad s\in[0,1] \tag{2.5.5}$$

を満たすものが取れる．(2.5.3) より $[0,1]$ の分点 $0=a_0<a_1<\cdots<a_n<a_{n+1}=1$ を ℓ_k が $[a_k,a_{k+1}]$ に対応しているように取れる．

さて $\{H^{-1}(X_1),H^{-1}(X_2)\}$ は compact 距離空間 $[0,1]\times[0,1]$ の開被覆であるから Lebesgue 数 (Theorem 1.1.6) が存在する．また ℓ_k は $X_{\varepsilon(k)}$ の閉道であるから $H([a_k,a_{k+1}],0)\subset X_{\varepsilon(k)}$ が成り立つ．従って $H([a_k,a_{k+1}],[0,\delta_k])\subset X_{\varepsilon(k)}$ となる δ_k が存在する．

さて $[0,1]\times[0,1]$ の細分 $0=t_0<t_1<\cdots<t_m<t_{m+1}=1$, $0=s_0<s_1<\cdots<s_m<s_{m+1}=1$ を $\{a_k\}_{k=1}^n\subset\{t_k\}_{k=1}^m$ であり，かつ

$$\max\{t_{k+1}-t_k,s_{k+1}-s_k:k=0,\ldots,m\}<\min\left\{\delta_0,\ldots,\delta_n,\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right\}$$

が成り立つように取り，

$$I_{ij}=\{(t,s):t_i\le t\le t_{i+1},\ s_j\le s\le s_{j+1}\},\quad i,i=0,\ldots,m$$

と置く． このとき $\mathrm{diam}(I_{ij})<\varepsilon$ より $H(I_{ij})\subset X_1$ または $H(I_{ij})\subset X_2$ の少なくとも一方が成り立つ． また $a_k\le t_i<t_{i+1}\le a_{k+1}$ のとき $H([a_k,a_{k+1}],[0,\delta_k])\subset X_{\varepsilon(k)}$ より $H(I_{i0})\subset X_{\varepsilon(k)}$ が成り立つ．以上より各 $i,j=0,\ldots,m$ について $\varepsilon(i,j)=1,2$ を

$$H(I_{ij})\subset X_{\varepsilon(i,j)} \tag{2.5.6}$$

かつ

$$a_k\le t_i<t_{i+1}\le a_{k+1}\text{ のとき }\varepsilon(i,0)=\varepsilon(k) \tag{2.5.7}$$

が成り立つように取ることが出来る．

それでは格子点 (t_i,s_j), $i,j=0,1,\ldots,m+1$ に対応して p_0 を始点とし $H(t_i,t_j)$ を終点とする X 内の道を次のように取る．

(i) 正方形 $[0,1]\times[0,1]$ の左辺上の格子点 $(t_0,s_j)=(0,s_j)$, 上辺上の格子点 $(t_i,s_{m+1})=(t_i,1)$. そして右辺上の格子点 $(t_{m+1},s_j)=(1,s_j)$ については c_{ij} は自明な道 1_{p_0} とする．これらの場合は格子点が H により p_0 に写像されることに注意しておこう．

(ii) 下辺の格子点 $(t_i, s_0) = (t_i, 0)$, $i = 1, \ldots, m$ については 2 つの場合に分ける．まず $t_i = a_k$ を満たす k が存在する場合．この場合は格子点の像は p_0, つまり $H(t_i, 0) = p_0$ であり, 対応する c_{i0} も自明な道 1_{p_0} とする．$a_k < t_i < a_{k+1}$ の場合．この場合 $\varepsilon(i, 0) = \varepsilon(k)$ であり, c_{i0} は $X_{\varepsilon(i,0)} = X_{\varepsilon(k)}$ 内の p_0 を始点とし, $H(t_i, 0)$ を終点とする道とする．

(iii) (i), (ii) 以外の場合, 格子点 (t_i, s_j) は $[0,1] \times [0,1]$ の内部の格子点である．従って 格子点 (t_i, s_j) を頂点とする 4 つの小長方形 I_{i-1j-1}, I_{ij-1}, I_{i-1j}, I_{ij} が存在する．この場合も 2 つの場合に分ける．$\varepsilon(i-1, j-1) = \varepsilon(i, j-1) = \varepsilon(i-1, j) = \varepsilon(i, j) = 1$, または $\varepsilon(i-1, j-1) = \varepsilon(i, j-1) = \varepsilon(i-1, j) = \varepsilon(i, j) = 2$ の場合．この場合 c_{ij} はそれぞれの場合応じて X_1 または X_2 内の p_0 を始点とし $H(t_i, s_j)$ を終点とする道とする．$\varepsilon(i-1, j-1), \varepsilon(i, j-1), \varepsilon(i-1, j), \varepsilon(i, j)$ の中に 1, 2 の両方が現れる場合．この場合 $H(t_i, s_j) \in X_1 \cap X_2 = X_0$ であるから c_{ij} は X_0 内の p_0 を始点とし $H(t_i, s_j)$ を終点とする道とする．

以上のように $[0,1] \times [0,1]$ の分割に現れる格子点 (t_i, s_j) に対応して, p_0 と $H(t_i, s_j)$ を結ぶ道 $c_{i,j}$ を選ぶことが出来て c_{ij} は格子点 (t_i, s_j) を頂点として含む (高々 4 つの) 全ての小長方形 I_{pq} について $X_{\varepsilon(p.q)}$ 内の道であった．これは視点を変えて小長方形を中心にして見れば, 各 I_{jj} について, p_0 を始点とし 4 つの頂点の像を終点とする $X_{\varepsilon(ij)}$ 内の 4 つの道が取れたことになる．

それでは各 $i = 0, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, m+1$ について x_{ij} を 頂点 (t_i, s_j) から 1 つ右の頂点 (t_{i+1}, s_j) へ向かう線分とし, 写像 H をこの線分に制限して得られる曲線を道とみなしたものを ℓ_{ij} と表す．また各 $i = 0, \ldots, m+1$, $j = 0, \ldots, m_1$ について y_{ij} を 頂点 (t_i, s_j) から 1 つ上の頂点 (t_i, s_{j+1}) へ向かう線分とする．そして写像 H をこの線分に制限して得られる曲線を道とみなしたものを m_{ij} と表す．また ℓ'_{ij} で $c_{ij}\ell_{ij}c_{i+1j}^{-1}$ を結んだ閉道を表すとすれば ℓ'_{ij} は $X_{\varepsilon(i,j)}$ 内の p_0 を基点とする閉道である．同様に m'_{ij} で $c_{ij}m_{ij}c_{ij+1}^{-1}$ を結んだ閉道を表すとすれば m'_{ij} は $X_{\varepsilon(i,j)}$ 内の p_0 を基点とする閉道である．

さて $k = 0, 1, \ldots, n$ について $a_k = t_{i(k)}$ を満たす $i(k)$ を取ると

$$a_k = t_{i(k)} < t_{i(k)+1} < \cdots < t_{i(k+1)-1} = a_{k+1}$$

である．そして $X_{\varepsilon(k)}$ 内の閉道 ℓ_k は $\Gamma(X_{\varepsilon(k)}, p_0)$ 内のホモトピーの意味で

$$\begin{aligned}
&\ell_k \\
&\sim \ell_{i(k),0} \cdot \ell_{i(k)+1,0} \cdot \cdots \cdot \ell_{i(k+1)-1,0} \\
&\sim (c_{i(k),0} \cdot \ell_{i(k),0} \cdot c_{i(k)+1,0}^{-1}) \cdot (c_{i(k)+1,0}^{-1} \cdot \ell_{i(k)+1,0} \cdot c_{i(k)+1,0}^{-1}) \cdot \cdots \cdot (c_{i(k+1)-1,0} \cdot \ell_{i(k+1)-1,0} \cdot c_{i(k+1),0}^{-1}) \\
&\sim \ell'_{i(k),0} \cdot \ell'_{i(k)+1,0} \cdot \cdots \cdot \ell'_{i(k+1)-1,0}
\end{aligned}$$

である．$i(k) \leq i \leq i(k+1) - 1$ を満たす i について $\varepsilon(i, 0) = \varepsilon(k)$ であったから

$$\begin{aligned}
[\ell_k]_{\varepsilon(k)} &= [\ell'_{i(k),0}]_{\varepsilon(k)} \cdot [\ell'_{i(k)+1,0}]_{\varepsilon(k)} \cdot \cdots \cdot [\ell'_{i(k+1)-1,0}]_{\varepsilon(k)} \\
&= [\ell'_{i(k),0}]_{\varepsilon(i(k),0)} \cdot [\ell'_{i(k)+1,0}]_{\varepsilon(i(k)+1,0)} \cdot \cdots \cdot [\ell'_{i(k+1)-1,0}]_{\varepsilon(i(k+1)-1,0)}
\end{aligned}$$

よって自由積 $G_1 * G_2 = \pi_1(X_1, p_0) * \pi_1(X_2, p_0)$ 　の中で

$$[\ell_0]_{\varepsilon(0)}[\ell_1]_{\varepsilon(1)} \cdots [\ell_n]_{\varepsilon(n)} = [\ell'_{0,0}]_{\varepsilon(0,0)}[\ell'_{1,0}]_{\varepsilon(1,0)} \cdots [\ell'_{m,0}]_{\varepsilon(m,0)}$$

である．

次の Lemma は $H(I_{i,j}) \subset X_{\varepsilon(i,j)}$ が成り立つこと及び $I_{i,j}$ の 4 つの頂点に対応する 4 つの道 $c_{i,j}$, $c_{i+1,j}$, $c_{i,j+1}$, $c_{i+1,j+1}$ がやはり $X_{\varepsilon(i,j)}$ に含まれることに注意すれば, 上の図より殆ど明らかであろう．

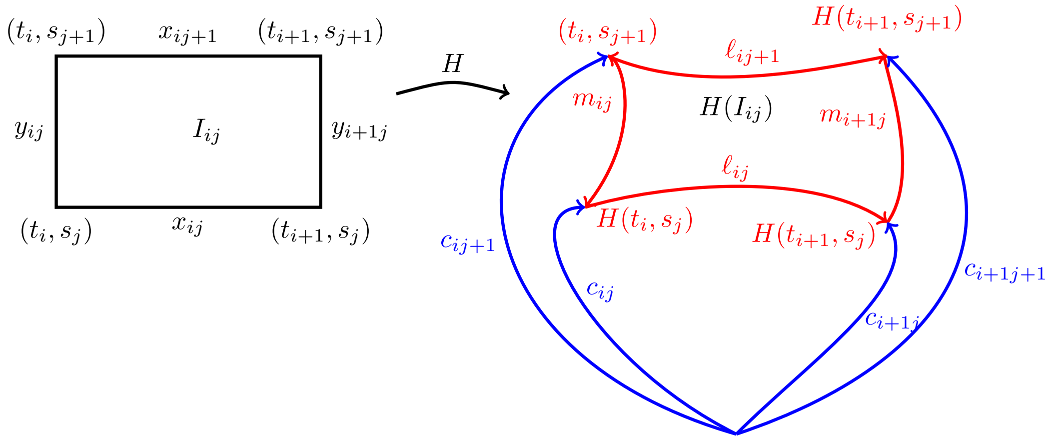


図 2.5.6

Lemma 2.5.4. $0 \le i, j \le m$ について

$$m_{i,j}^{-1} \cdot \ell_{i,j} \sim \ell_{i,j+1} \cdot m_{i+1,j}^{-1} \quad \textit{in } \Gamma(X_{\varepsilon(i,j)}, p_0)$$

が成り立ち，さらに

$$m'_{i,j}{}^{-1} \cdot \ell'_{i,j} \sim \ell'_{i,j+1} \cdot m'_{i+1,j}{}^{-1} \quad \textit{in } \Gamma(X_{\varepsilon(i,j)}, p_0)$$

が成り立つ．

次に一番の鍵となる事実を Lemma として書いておこう．

Lemma 2.5.5. 融合積 $G_1 \underset{G_0}{*} G_2$ において

$$[\ell'_{i,j}]_{\varepsilon(i,j-1)} = [\ell'_{i,j}]_{\varepsilon(i,j)}, \quad 0 \le i \le m, \quad 1 \le i \le m$$
$$[m'_{i,j}]_{\varepsilon(i-1,j)} = [m'_{i,j}]_{\varepsilon(i,j)}, \quad 1 \le i \le m, \quad 0 \le i \le m$$

が成り立つ．

Proof. 下も殆ど同様なので上の等式を示しておこう．$\varepsilon(i, j-1) = \varepsilon(i, j)$ の場合は明らかであるからそうでないと仮定すると，$c_{i,j}, c_{i+1,j}$ の作り方から，ともに $X_0 = X_1 \cap X_2$ の道である．また $\ell_{i,j}$ も X_0 の道であるから $\ell'_{i,j} = c_{i,j}\ell_{ij}c_{i,j+1}^{-1}$ は X_0 の p_0 を基点とする閉道である．従って

$$[\ell'_{i,j}]_{\varepsilon(i,j-1)} = i'_{\varepsilon(i,j-1)}(j_{\varepsilon(i,j-1)}([\ell_{i,j}])_0), \quad [\ell'_{i,j}]_{\varepsilon(i,j)} = i'_{\varepsilon(i,j)}(j_{\varepsilon(i,j)}([\ell_{i,j}])_0),$$

となるが，これらは Lemma 2.4.6 より融合積の中では一致する． □

それでは Proposition 2.5.3 の証明に戻ろう．

$$[\ell'_{0,0}]_{\varepsilon(0,0)}[\ell'_{1,0}]_{\varepsilon(1,0)} \cdots [\ell'_{m,0}]_{\varepsilon(m,0)}$$

が融合積 $G_1 \underset{G_0}{*} G_2$ の単位元に等しいことを示そう．まず $X_{|varepsilon(0,0)}$ の中の ホモトピーの意味で

$$\begin{aligned}
\ell'_{0,0} &\sim c_{0,1} m_{0,0}^{-1} c_{00} \ell_{00} c_{1,0}^{-1} \quad (\ c_{0,1} = m_{0,0} = 1_{p_0} \text{ と } \ell'_{0,0} \text{ の定義より})\\
&\sim c_{0,1} m_{0,0}^{-1} \ell_{00} c_{1,0}^{-1} \quad (\ c_{0,0} = 1_{p_0} \text{ より})\\
&\sim c_{0,1} \ell_{0,1} m_{10}^{-1} c_{1,0}^{-1} \quad (\ \text{Lemma 2.5.4 より})\\
&\sim \ell'_{0,1} m_{1,0}{}'^{-1}
\end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}
[\ell'_{0,0}]_{\varepsilon(0,0)} &= [\ell'_{0,1} {m_{1,0}}'^{-1}]_{\varepsilon(0,0)} \\
&= [\ell'_{0,1}]_{\varepsilon(0,0)} [{m_{1,0}}'^{-1}]_{\varepsilon(0,0)} \\
&= [\ell'_{0,1}]_{\varepsilon(0,1)} [{m_{1,0}}'^{-1}]_{\varepsilon(1,0)} \quad (\text{Lemma 2.5.5 より})
\end{aligned}$$

となり, さらに

$$\begin{aligned}
[\ell'_{0,0}]_{\varepsilon(0,0)} [\ell'_{1,0}]_{\varepsilon(1,0)} &= [\ell'_{0,1}]_{\varepsilon(0,1)} [{m_{1,0}}'^{-1}]_{\varepsilon(1,0)} [\ell'_{1,0}]_{\varepsilon(1,0)} \\
&= [\ell'_{0,1}]_{\varepsilon(0,1)} [\ell'_{1,1}]_{\varepsilon(1,0)} [{m_{2,0}}'^{-1}]_{\varepsilon(1,0)} \\
&= [\ell'_{0,1}]_{\varepsilon(0,1)} [\ell'_{1,1}]_{\varepsilon(1,1)} [{m_{2,0}}'^{-1}]_{\varepsilon(2,0)}
\end{aligned}$$

この操作を続けると

$$\begin{aligned}
&[\ell'_{0,0}]_{\varepsilon(0,0)} [\ell'_{1,0}]_{\varepsilon(1,0)} \cdot [\ell'_{m,0}]_{\varepsilon(1,0)} \\
&= [\ell'_{0,1}]_{\varepsilon(0,1)} [\ell'_{1,1}]_{\varepsilon(1,1)} \cdot [\ell'_{m,1}]_{\varepsilon(m,0)} [{m_{m+1,0}}'^{-1}]_{\varepsilon(m,0)} \\
&= [\ell'_{0,1}]_{\varepsilon(0,1)} [\ell'_{1,1}]_{\varepsilon(1,1)} \cdot [\ell'_{m,1}]_{\varepsilon(m,1)} \quad (\text{Lemma 2.5.5 と } {m_{m+1,0}}' = 1_{p_0} \text{ より})
\end{aligned}$$

となり j について 1 つ上に上がっても融合積の中では等しい. そこで j について次々に上に上がって行けば

$$\begin{aligned}
[\ell'_{0,0}]_{\varepsilon(0,0)} [\ell'_{1,0}]_{\varepsilon(1,0)} \cdot [\ell'_{m,0}]_{\varepsilon(1,0)} &= [\ell'_{0,1}]_{\varepsilon(0,1)} [\ell'_{1,1}]_{\varepsilon(1,1)} \cdot [\ell'_{m,1}]_{\varepsilon(m,1)} \vdots \\
&= [\ell'_{0,m}]_{\varepsilon(0,m)} [\ell'_{1,m}]_{\varepsilon(1,m)} \cdot [\ell'_{m,m}]_{\varepsilon(m,m)}
\end{aligned}$$

となるが, これは $m_{0,m} = m_{m,m+1} = 1_{p_0}$ より融合積の中では

$$[\ell'_{0,m+1}]_{\varepsilon(0,m)} [\ell'_{1,m+1}]_{\varepsilon(1,m)} \cdot [\ell'_{m,m+1}]_{\varepsilon(m,m)}$$

に等しいことが分かる. しかし上式の各項は全て自明な道 1_{p_0} の同値類であるから, 融合積の単位元に等しい. これで証明が完了した. □

2.6　基本群の計算例

2 つの円周を 1 点で合わせた 8 の字の形の図形を 2 つの円周のブーケ (bouquet) と言い, 記号 $S^1 \vee S^1$ で表す.

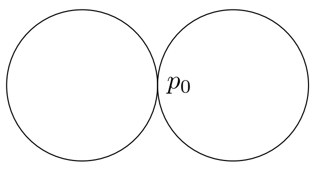


図 2.6.1　$S^1 \vee S^1$

ブーケ $S^1 \vee S^1$ を次の図のように左側の円周にツノが生えた X_1 と右側の円周にツノが生えた X_12 に分解すると, 共通部分は 4 つのツノが p_0 で合わさった図形になる. また左右の円周の共通点 p_0 とし, p_0 を基点とする基本群 $\pi_1(S^1 \vee S^1, p_0)$ を求めよう.

さて p_0 を基点として左の円周を半時計回りに 1 周する閉道を α とし, p_0 を基点として右の円周を半時計回りに 1 周する閉道を β とする. このとき X_1 のツノを p_0 にまで引っ込める連続変形により X_1 は左側の円周を変位レトラクトに持つことが分かり, §2.3 で求めたように $\pi_1(X_1, p_0) = \{[\alpha^m]_1 : m \in \mathbb{Z}\}$ である. 同様に $\pi_1(X_2, p_0) = \{[\beta^m]_2 : m \in \mathbb{Z}\}$

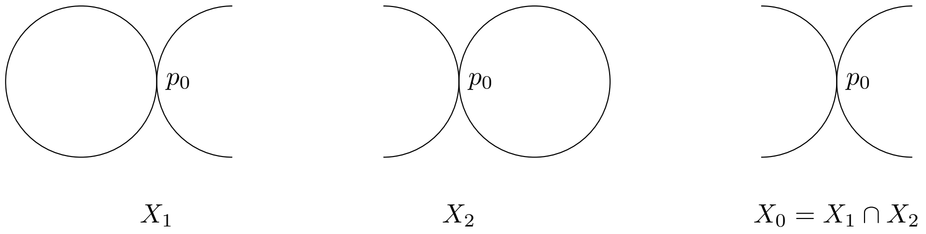


図 2.6.2

である．但し $[]_k$ は X_k における閉道の同値類である．また共通部分 X_0 は可縮であるから $\pi_1(X_0, p_0)$ は単位元のみからなる自明群である．従ってファンカンペンの定理より $\pi_1(S^1 \vee S^1, p_0)$ は $\{[\alpha^m] : m \in \mathbb{Z}\}$ と $\{[\beta^m] : m \in \mathbb{Z}\}$ の自由積である．$x = [\alpha]$, $y = [\beta]$ と置いて文字 x の累乗の全体よりなる群を $\langle x \rangle = \{x^m : m \in \mathbb{Z}\}$ と表し, 無限巡回群と呼ぶ．また同様に $\langle y \rangle = \{y^m : m \in \mathbb{Z}\}$ とするとき $\pi_1(S^1 \vee S^1, p_0) = \langle x \rangle * \langle y \rangle$ である．これを階数 2 の自由群と呼ぶ．

3 つ以上の円周のブーケ $S^1 \vee \cdots \vee S^1$ も同様に考えることができる．

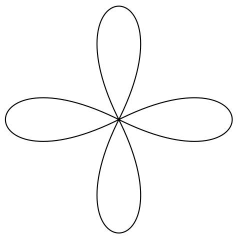


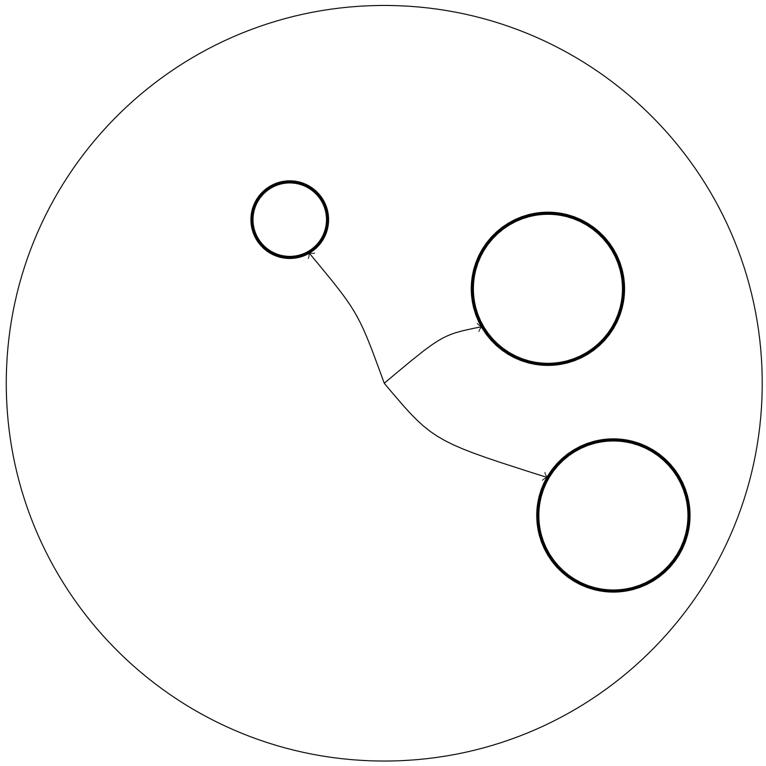
図 2.6.3　$S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1$

例えば $S^1 \vee S^1 \vee S^1$ は $S^1 \vee S^1$ と S^1 に分解して $\langle x_1 \rangle * \langle x_2 \rangle$ と $\langle x_3 \rangle$ の自由積であり, $(\langle x_1 \rangle * \langle x_2 \rangle) * \langle x_3 \rangle$ になる．また r 個の S^1 のブーケ $S^1 \vee \cdots \vee S^1$ の基本群は r 個の無限巡回群の自由積を次々に取ったものになる．

これは結局次のように定義しても同じことになる．$x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_r, x_r^{-1}$ を任意の順序に有限個並べた列を語と呼び．空なる列も語と考えて空なる語と呼び, e で表す．このような語の全体を $W(x_1, \ldots, x_r)$ と表す．$W(x_1, \ldots, x_r)$ には積の演算が自然に定義される．また 2 つの語 u, v について u に $x_i x_i^{-1}$ または $x_i^{-1} x_i$ を挿入したり取り除いたりを有限回繰り返して v に変形できるときに, $u \sim v$ と定義して同値関係を入れると, 積の演算と両立し $W(x_1, \ldots, x_r)/\sim$ は群になる．これを階数 r の自由群と呼び, $F(x_1, \ldots, x_r)$ $F(x_1, \ldots, x_r)$ の生成元と呼ぶ．

以上より r 個の S^1 のブーケ $S^1 \vee \cdots \vee S^1$ の基本群は階数 r の自由群 (と同型) である．

書きかけ項目 以下は、多分成り立つとは思うが、厳密な証明を行うのはかなり大変そう． ブーケの場合と同様に $\mathbb{R}^2$ の円板から r 個の小円板をくり抜いて残った図形は r 個の S^1 のブーケを変位レトラクトとして含むのでその基本群は階数 r の自由群になり, 基点を任意に定めれば, 生成元として, 小円板の周りを反時計まわりに 1 周する閉道が取れる．



第 3 章

被覆空間

3.1 被覆空間

位相空間 X が局所弧状連結とは任意の点 $x \in X$ とその近傍 U について, 弧状連結な x の近傍 V で $x \in V \subset U$ を満たすものが存在することを言うのであった. ただし本書では特に断らない限り近傍という言葉は開集合に限定し開近傍の意味とする.

Definition 3.1.1. *X, A を弧状連結かつ局所弧状連結な Hausdorff 位相空間とし $h : A \to X$ を全射連続写像とする. 組 (A, h, X) が被覆空間 (covering space) であるとは 任意の $x \in X$ について x の弧状連結な近傍 V で次の性質を持つものが存在する時を言う.*

$h^{-1}(V) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ を開集合 $h^{-1}(V)$ の連結 (弧状連結としても同じ) 成分への分解とするとき,
各 $\lambda \in \Lambda$ について $h|_{U_\lambda} : U_\lambda \to V$ は同相写像である.

このとき X を底空間 (base space)　$h : A \to X$ を被覆写像 (covering map) と言う.　また文脈から省略しても意味が通じる場合, 単に A を (X の) 被覆空間ということもある. 上の条件の中の近傍 V を x の均一被覆近傍 (evenly-covered neighborhood) または標準近傍 (canonical neighborhood) と呼び, $h^{-1}(V)$ の各成分 U_λ のことを *slice* と呼ぶ.　$h^{-1}(V)$ は開集合であり, A は局所弧状連結, 従って局所連結であるから $h^{-1}(V)$ の連結成分である *slice* も開集合であり, 互いに交わらない. 各 $a \in h^{-1}(\{x\})$ について $h^{-1}(V)$ の a を含む *slice* は唯ひとつ存在する. これを a を含む $h^{-1}(V)$ の *slice* と呼ぶ. a を含む *slice* U について $h|_U : U \to V$ は同相写像であるから U 中で a 以外に $h^{-1}(\{x\})$ に属す点は存在しない. 従って $h^{-1}(\{x\})$ は離散集合である. 集合 $h^{-1}(\{x\})$ のことを x のファイバー (fibre) と呼ぶ.

集合 G の部分集合 A が a_0 を含む G の道連結成分であるとは $a_0 \in A$ であり a_0 から G 内の道で結べる点 a の全体が A であるときを言うのであった.

Lemma 3.1.2. *G が道連結かつ局所道連結な位相空間 X の開集合で*

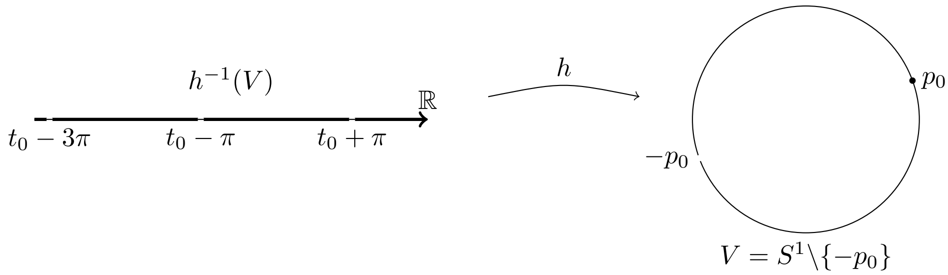
$$G = \bigcup_{i \in I} U_i$$

互いに交わらず空でない道連結開集合の和に表されるとき, U_i は G の道連結成分である.

Proof. 実際 $a_0 \in U_i$ を任意に取ると U_i の全ての点 a は a_0 と道で結べるので $U_i \subset V := a_0$ を含む G の道連結成分が成り立つ. $U_i \subsetneq V$ ならば $a \in V \backslash U_i$ を取り G 内の道で a_0 と a を結ぶとき道の途中である点 $c \in \partial U_i \cap V$ が存在す

る．$c \in U_{i'}$ となる $i' \in I \backslash \{i\}$ を取ると $U_{i'}$ は開集合であるから $c \in W \subset U_{i'}$ を満たす c の近傍が存在する．$c \in \partial U_i$ であるから $\emptyset \neq W \cap U_i \subset U_{i'} \cap U_i$ となり互いに交わらない和であることに矛盾する． □

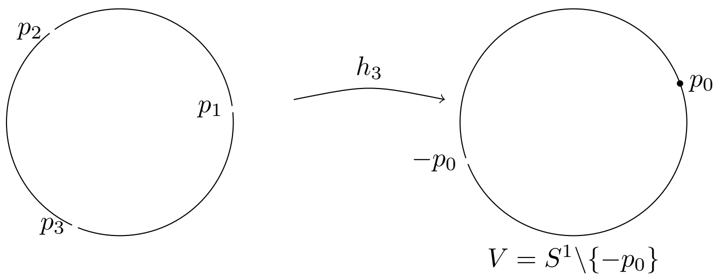
Example 3.1.3. 写像 $h : \mathbb{R} \to S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ を $h(t) = (\cos t, \sin t)$ と置けば，$\mathbb{R}$ は h を被覆写像に持つ S^1 上の被覆空間である． 実際 $p_0 = (\cos t_0, \sin t_0)$ について $V = S^1 \backslash \{-p_0\}$ と置くと $h^{-1}(V) = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (t_0 + (2k-1)\pi, t_0 + (2k+1)\pi)$ であり，右辺の各区間に h を制限した写像は $S^1 \backslash \{-p_0\}$ への同相写像である．



Example 3.1.4. $n \in \mathbb{N}$ とし $h_n : S^1 \to S^1$ を $h_n(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos n\theta, \sin n\theta)$ と置けば，S^1 は被覆写像 $h_n : S^1 \to S^1$ を持つ自身 S^1 上の被覆空間である．実際 $p_0 = (\cos t_0, \sin t_0) \in S^1$ について $V = S^1 \backslash \{p_0\}$ と置くと $h_n^{-1}(V)$ は n 個の円弧よりなり

$$h_n^{-1}(V) = \bigcup_{k=0}^{n-1} \left\{ (\cos\theta, \sin\theta) : \frac{t_0 + (2k-1)\pi}{n} < \theta < \frac{t_0 + (2k+1)\pi}{n} \right\}$$

と表せる．各円弧に h_n を制限した写像は $S^1 \backslash \{p_0\}$ への同相写像である．この被覆空間は S^1 の n 重被覆空間と呼ばれる．



Example 3.1.5. *Example 3.1.3* の $h : \mathbb{R} \to S^1$ を用いて $h \times \mathrm{id}_{X^1} : \mathbb{R} \times S^1 \to S^1 \times S^1$ を定義すると，無限に長い円筒 $\mathbb{R} \times S^1$ からトーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ への被覆写像である．

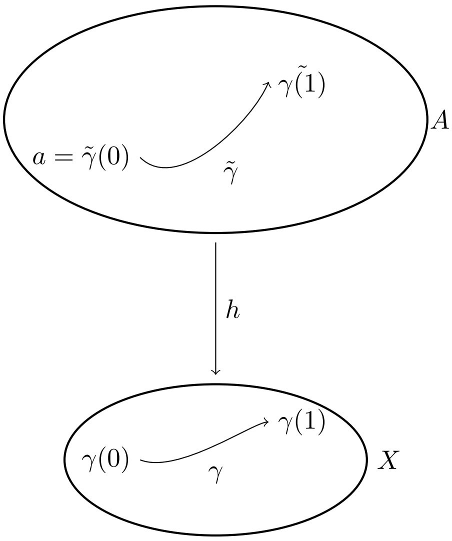
Example 3.1.6. 同様に *Example 3.1.3* の $h : \mathbb{R} \to S^1$ を用いて $h \times h : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$ を定義すると，2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ からトーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ への被覆写像である．

Definition 3.1.7. (A, h, X) を被覆空間とする． 位相空間 W と連続な写像 $f : W \to X$ について連続写像 $\tilde{f} : W \to A$ で $h \circ \tilde{f} = f$ を満たすものを h に関する f の持ち上げ *(lift)* と言う．

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, "h"] \\
W \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}
$$

持ち上げを考えるときに基本的なのは $W = [0,1]$ の場合である．このときの写像 f は, $[0,1]$ から X への連続写像であるから, X の道である．

Theorem 3.1.8 (道の持ち上げ定理)**.** *(A, h, X) を被覆空間 とし, $\gamma : [0,1] \to X$ を道とする．このとき任意の $a \in h^{-1}(\gamma(0))$ について γ の持ち上げ $\tilde{\gamma}$ で $\tilde{\gamma}(0) = a$ を満たすものが一意的に存在する．*



Proof. 各 $t \in [0,1]$ について $\gamma(t) \in X$ の均一被覆近傍を $V(t)$ とすると,

$$[0,1] \subset \bigcup_{0 \le t \le 1} \gamma^{-1}(V(t))$$

は開被覆である．従って Lebesgue 数の存在定理 (Theorem 1.1.6) より, 十分大きな $n \in \mathbb{N}$ について

$$\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] \subset \gamma^{-1}(V(t_k)), \quad k = 1, \ldots, n$$

を満たす $t_1, \ldots, t_n$ が取れる．

始めに $k = 1$ について

$$\gamma\left(\left[0, \frac{1}{n}\right]\right) \subset V(t_1)$$

より $h^{-1}(V(t_1))$ の成分で a を含むものを $\tilde{V}_1$ と置く．このとき $h|_{\tilde{V}_1} : \tilde{V}_1 \to V(t_1)$ は同相ゆえ

$$\tilde{\gamma}(t) = \left(h|_{\tilde{V}_1}\right)^{-1}(\gamma(t)), \quad 0 \le t \le \frac{1}{n}$$

と置けば, $\tilde{\gamma}$ は $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ で連続であり, $h \circ \tilde{\gamma} = \gamma$, $\tilde{\gamma}(0) = a$ を満たす．

次に

$$\gamma\left(\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]\right)\subset V(t_2)$$

より $h^{-1}(V(t_2))$ の成分で $\tilde{\gamma}\left(\frac{1}{n}\right)$ を含むものを $\tilde{V}_2$ と置く．このとき $h|_{\tilde{V}_2}:\tilde{V}_2\to V(t_2)$ は同相ゆえ

$$\tilde{\gamma}(t)=\left(h|_{\tilde{V}_2}\right)^{-1}(\gamma(t)),\quad \frac{1}{n}<t\le\frac{2}{n}$$

と置く．このとき

$$\left(h|_{\tilde{V}_2}\right)^{-1}\left(\gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\tilde{\gamma}\left(\frac{1}{n}\right)$$

より $\tilde{\gamma}$ は $\left[0,\frac{2}{n}\right]$ で連続であり, $h\circ\tilde{\gamma}=\gamma$ を満たす．以上のような短い道をつないでいく操作を n 回行えば, 道 γ の持ち上げである $\tilde{X}$ の道 $\gamma:[0,1]\to\tilde{X}$ が得られる．

$\tilde{\gamma}$ の一意性については, 次に述べるもっと一般的な形の一意性定理から直ちに従う． □

Theorem 3.1.9. (A,h,X) を被覆空間, W を連結位相空間, $f:W\to X$ を連続写像とする．また $\tilde{f}_j:W\to A$, $j=1,2$ を $h:A\to X$ に関する f の持ち上げとする． このとき f_1, f_2 がある点 $w_0\in W$ で一致 *(*つまり $\tilde{f}_1(w_0)=\tilde{f}_2(w_0)$*)* すれば W 上で一致する．

Proof.

$$G=\{w\in W:\tilde{f}_1(w)=\tilde{f}_2(w)\}$$

と置けば閉集合である．実際, 写像 $\tilde{f}_1\times\tilde{f}_2:W\times W\to A\times A$ を $\tilde{f}_1\times\tilde{f}_2(u,v)=(\tilde{f}_1(u),\tilde{f}_2(v))$ で定義すれば連続である．このとき対角線集合を $D=\{(a,a)\in A\times A:a\in A\}$ と置けば $G=(\tilde{f}_1\times\tilde{f}_2)^{-1}(D)$ である．従って D が閉集合であれば G もそうである．この D が閉集合であることを保証するのが A の Hausdorff 性である．

次に各点 $w_1\in G$ が G の内点であることを示そう．これが示されれば閉集合 G は開集合でもあり $w_0\in W$ ゆえ空でない．従って W の連結性より $G=W$ つまり W 上で $\tilde{f}_1=\tilde{f}_2$ が成り立つことになり, 証明は完了する．

まず $f(w_1)$ の均一被覆近傍 V を取り $h^{-1}(V)$ の $a_1:=\tilde{f}_1(w_1)(=\tilde{f}_2(w_1))$ を含む成分を U と置く． このとき $h|_U:U\to V$ は同相写像である．また $\tilde{f}_1^{-1}(U)\cap\tilde{f}_2^{-1}(U)$ は w_1 の開近傍であり, ここで

$$h|_U\circ\tilde{f}_j(w)=h\circ\tilde{f}_j(w)=f(w)$$

を満たすので, $\tilde{f}_j(w)=(h|_U)^{-1}(f(w))$ が成り立つ． 特に $\tilde{f}_1(w)=\tilde{f}_2(w)$ が $\tilde{f}_1^{-1}(U)\cap\tilde{f}_2^{-1}(U)$ で成り立つので, $w_1\in\tilde{f}_1^{-1}(U)\cap\tilde{f}_2^{-1}(U)\subset G$ となり, w_1 は G の内点である． □

底空間の道はいつでも被覆空間の上に始点を指定した上で, 一意的に持ち上げ可能である．道だけではなく, さらにホモトピーまで一意的に持ち上げが可能であることを示そう．

Theorem 3.1.10 (ホモトピーの持ち上げ定理)**.** (A,h,X) を被覆空間とし, $x,y\in X$ とする． また 2 つの道 $\gamma_0,\gamma_1\in\Gamma(X,x,y)$ が *(*両端を留めたまま*)* ホモトピックであり, $H:[0,1]\times[0,1]\to X$ を連続変形, つまり

$$H(t,0)=\gamma_0(t),\quad H(t,1)=\gamma_1(t),\quad H(0,s)=x,\quad H(1,s)=y\quad 0\le t\le 1,\quad 0\le s\le 1$$

を満たす連続写像であるとする． このとき任意の $a\in h^{-1}(x)$ について H の持ち上げ $\tilde{H}:[0,1]\times[0,1]\to A$ で $\tilde{H}(0,0)=a$ を満たすものが一意的に存在し,

$$\tilde{\gamma}_0(t)=\tilde{H}(t,0),\quad \tilde{\gamma}_1(t)=\tilde{H}(t,1)\quad 0\le t\le 1$$

と置けば $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1$ は a を始点とする γ_0, γ_1 それぞれの持ち上げであり 2 つの終点は一致する $(\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1))$. この終点を b と置けば $\tilde{H}$ は道 $\tilde{\gamma}_0$ から道 $\tilde{\gamma}_1$ への両端を留めたままの連続変形である．つまり

$$\tilde{H}(0,s) = a, \quad \tilde{H}(1,s) = b \quad 0 \le s \le 1$$

が成り立つ．

Proof. 道の持ち上げ定理 (Theorem 3.1.8) の証明の時と同様に Lebesgue 数の存在定理 (Theorem 1.1.6) を用いれば, 十分大きな $n \in \mathbb{N}$ について

$$I_{ij} = \left\{ (t,s) \in [0,1] \times [0,1] : \frac{i-1}{n} \le t \le \frac{i}{n}, \ \frac{j-1}{n} \le s \le \frac{j}{n} \right\}, \quad i,j = 1,2,\ldots,n$$

と置くとき $H(I_{ij}) \subset V_{ij}$ を満たす均一被覆近傍が取れる．

まず I_{11} における H_{ij} の持ち上げを以下のように定義する．$h(a) = x = H(0,0)$ より $h^{-1}(V_{11})$ の成分で a を含むものが, ただ 1 つ存在するので, それを $\tilde{V}_{11}$ と置き, 同相写像 $h|_{\tilde{V}_{11}} : \tilde{V}_{11} \to V_{11}$ を用いて

$$\tilde{H}(t,s) = (h|_{\tilde{V}_{11}})^{-1}(H(t,s)), \quad (t,s) \in I_{11}$$

と置く．

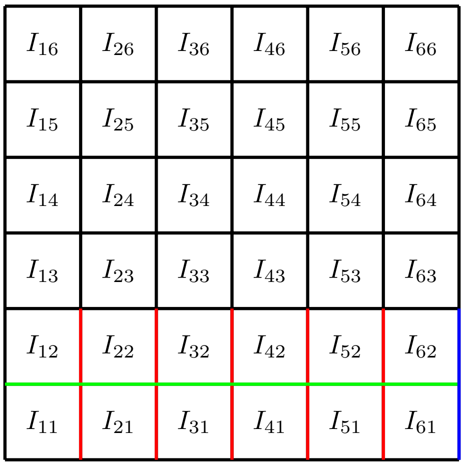


図 3.1.1

次に $(i,j) = (2,1)$ に対応した持ち上げを行う．まず I_{11} の右下の頂点 $(1/n, 0)$ において

$$\tilde{H}(1/n,0) = (h|_{\tilde{V}_{11}})^{-1}(H(1/n,0)) \in h^{-1}(H(1/n,0))$$

であるから $h^{-1}(V_{21})$ の成分で $\tilde{H}(1/n,0)$ を含むものがただ 1 つ存在する．それを $\tilde{V}_{21}$ と置き, 同相写像 $h|_{\tilde{V}_{21}} : \tilde{V}_{21} \to V_{21}$ を用いて

$$\tilde{H}(t,s) = (h|_{\tilde{V}_{21}})^{-1}(H(t,s)), \quad (t,s) \in I_{21}$$

と置く．このとき I_{11} の右の辺と I_{21} の左の辺は一致し両者に共有されるが, この辺上で 2 つの定義が一致することを見ておく必要がある．これは I_{11} で定義した $\tilde{H}$ を共有辺に制限したもの, 及び I_{21} で定義した $\tilde{H}$ を共有辺に制限したものは連続写像 $[0,1/n] \ni s \mapsto H(1/n,s)$ の持ち上げであり, 同じ始点を持つように定義したので, Theorem 3.1.9 より共有辺で一致する．従って特に $\tilde{H}$ は $I_{11} \cup I_{21}$ で連続である．

このような操作を $I_{11},\dots,I_{n1}$ について次々に行い $I_{11}\cup\dots\cup I_{n1}$ において H の持ち上げである連続写像 $\tilde{H}$ が得られたとする．このとき I_{n1} の右の辺に $\tilde{H}$ を制限した写像は, 均一被覆近傍 V_{n1} における定値写像 $[0,1/n]\ni s\mapsto H(1,s)=y$ の持ち上げであるから, やはり定値写像である．従って $b:=\tilde{H}(1,0)$ と置けば $0\le s\le 1/n$ について $\tilde{H}(1,s)\equiv b$ が成り立つ．同様に $0\le s\le 1/n$ について $a\equiv\tilde{H}(0,s)$ が成り立つ．

次に $I_{12},\dots,I_{n2}$ について $\tilde{H}$ を定義していくがこのときは I_{i2} の下辺と I_{i1} の上辺での定義が一致することも見て行く必要がある．この場合も Theorem 3.1.9 より共有辺で一致することが容易に分かる．また $1/n\le s\le 2/n$ について $\tilde{H}(0,s)\equiv a$, $\tilde{H}(1,s)\equiv b$ が成り立つことも同様である．

このように 1 枚の均一被覆近傍で覆える小正方形に分解し, 持ち上げを行っていけば H の持ち上げ $\tilde{H}$ で $\tilde{H}(0,s)\equiv a$, $\tilde{H}(1,s)\equiv b$ を満たすものが得られ, $\tilde{\gamma}_0(t)=\tilde{H}(t,0)$, $\tilde{\gamma}_1(t)=\tilde{H}(t,1)$ で $\tilde{\gamma}_0$, $\tilde{\gamma}_1$ を定義するときそれぞれは γ_0, γ_1 の持ち上げであり, $\tilde{H}$ は (両端を固定した) γ_0 から γ_1 への連続変形である． □

Lemma 3.1.11. *$x, y\in X$ とし γ を x と y を結ぶ道とする．各 $a\in h^{-1}(x)$ について a を始点とする γ の A への持ち上げを $\tilde{\gamma}$ と置けば, $\tilde{\gamma}(1)\in h^{-1}(y)$ である．この, 始点 a に対し終点 $b=\tilde{\gamma}(1)$ を与える対応を写像 $\psi(a)=b$ と置けば, $\psi: h^{-1}(x)\to h^{-1}(y)$ は全単射である．*

Proof. 単射性を示すために $a_1,\ a_2\in h^{-1}(x)$ について $\psi(a_1)=\psi(a_2)$ と仮定しよう．さて $a_1,\ a_2\in h^{-1}(x)$ を, それぞれの始点とする γ の A への持ち上げを $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$ とすると $\psi(a_1)=\tilde{\gamma}_1(1)$, $\psi(a_2)=\tilde{\gamma}_2(1)$ である．そこで $b:=\psi(a_1)=\psi(a_2)\in h^{-1}(x)$ と置くと $\tilde{\gamma}_1^{-1}$, $\tilde{\gamma}_2^{-1}$ は b を始点とする道 γ^{-1} の A への持ち上げである．よって持ち上げの一意性 (Theorem 3.1.9) より $\tilde{\gamma}_1^{-1}=\tilde{\gamma}_2^{-1}$ が成り立つ．従って $\tilde{\gamma}_1=\tilde{\gamma}_2$ となり $a_1=\tilde{\gamma}_1(0)=\tilde{\gamma}_2(0)=a_2$ が従う．

次に全射性を示すために $b=h^{-1}(y)$ を任意に取る．b を始点とする γ^{-1} の A への持ち上げを $\widetilde{\gamma^{-1}}$ と置き, $\widetilde{\gamma^{-1}}(1)=a$ と置くと $a\in h^{-1}(x)$ であり $\tilde{\gamma}:=\widetilde{\gamma^{-1}}^{-1}$ は a を始点とする γ の A への持ち上げである．よって

$$\psi(a)=\tilde{\gamma}(1)=\widetilde{\gamma^{-1}}^{-1}(1)=\widetilde{\gamma^{-1}}(0)=b$$

である． □

Definition 3.1.12. (A,h,X) を被覆空間とする．任意の $x,\ y\in X$ について X の弧状連結性より $x,\ y$ を結ぶ道 γ が存在する．*Lemma 3.1.11* より, $h^{-1}(x)$ と $h^{-1}(y)$ の濃度は等しい．つまりファイバー $h^{-1}(x)$ の濃度は $x\in X$ に依らず一定である．特に $h^{-1}(x)$ の濃度が $n\in\mathbb{N}$ のとき被覆空間 (A,h,X) は n 重であると言う．

3.2　被覆空間と基本群

前節において底空間の道は, 被覆空間へ持ち上げ可能であることを示した．また始点と終点を留めたままホモトピックな 2 つの道 γ_0, γ_1 を共通な始点を有するように被覆空間 A に持ち上げたものをそれぞれ $\tilde{\gamma}_0$, $\tilde{\gamma}_1$ とすれば, 両者の終点は一致し, さらに A 内で始点と終点を留めたままホモトピックになることを示した．この節ではこれらの結果を利用して基本群と被覆空間の関係について調べよう．

位相空間 X から Y への連続写像 $f: X\to Y$ と $x_0\in X$ について $y_0=f(x_0)$ とおくとき $f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ を $\gamma\in\Gamma(X,x_0)$ について $f_*([\gamma])=[f\circ\gamma]$ で定義した．これが well-defined であること, 及び $f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ が準同型になることを思い出しておこう．

Theorem 3.2.1. *(A,h,X) を被覆空間とし $a\in A$, $x=h(a)$ とする．このとき射影 h が誘導する準同型 $h_*:\pi_1(A,a)\to\pi_1(X,x)$ は単射である．*

Proof. 準同型 $h_*: \pi_1(A,a) \to \pi_1(X,x)$ が単射であることを示すには $\mathrm{Ker}\, h_*$ が $\pi_1(A,a)$ の単位元のみからなることを言えばよい．つまり閉道 $\tilde{\gamma} \in \Gamma(A,a)$ の像 $h \circ \tilde{\gamma}$ が X 内で $h \circ \tilde{\gamma} \sim 1_x$ を満たせば A 内で $\tilde{\gamma} \sim 1_a$ となることを示せばよい．これはホモトピーの持ち上げ定理 (Theorem 3.1.10) より, $h \circ \tilde{\gamma}$ と 1_x を a を始点とする A の道に持ち上げると

$$h \circ \tilde{\gamma} \text{ の持ち上げ } \sim 1_x \text{ の持ち上げ}$$

が成り立つが, 持ち上げの一意性 (Theorem 3.1.9) より左辺は $\tilde{\gamma}$ であるし, 右辺は 1_a である． □

さてこの定理より被覆空間 A の基本群 $\pi_1(A,a)$ は底空間 X の基本群 $\pi_1(X,x)$ の部分群 $h_*(\pi_1(A,a))$ に同型である．例えば $h_n: S^1 \to S^1$ を Example 3.1.4 の被覆写像とし $p \in S^1$, $q = h_n(p)$ とする．このとき p を始点として S^1 を 反時計回りに 1 周する閉道の像は q を始点として S^1 を反時計回りに n 周する閉道である．$\pi_1(S^1,p)$, $\pi_1(S^1,q)$ を $\mathbb{Z}$ とみなすとき, 準同型 $h_{n*}: \pi_1(S^1,p) \to \pi_1(S^1,q)$ の像は $n\mathbb{Z}$ となる．

$h(a_1) = h(a_2) = x$ のように x のファイバーに属する 2 点に対応する $\pi_1(A,a_1)$ と $\pi_1(A,a_2)$ の h_* による像はともに $\pi_1(X,x)$ の部分群である．両者の関係について, 次の定理がある．

Theorem 3.2.2. (A,h,X) を被覆空間とし, $x \in X$ とする．

(i) a_1, $a_2 \in h^{-1}(x)$ ならば $h_*(\pi_1(A,a_1))$ と $h_*(\pi_1(A,a_2))$ は $\pi_1(X,x_0)$ の部分群として共役である．
(ii) $a_1 \in h^{-1}(x)$ とする．$\pi_1(X,x)$ の部分群 H が $h_*(\pi_1(A,a_1)$ と共役ならば, ある $a_2 \in h^{-1}(x_0)$ で $H = h_*(\pi_1(A,a_2)$ となるものが存在する．

Proof. (i) a_1, $a_2 \in h^{-1}(x)$ のとき, a_1 と a_2 を結ぶ A 内の道を $\tilde{\ell}$ とすれば $\ell = h \circ \tilde{\ell}$ は x を基点とする閉道である．また

$$\pi_1(A,a_1) \ni [\tilde{\gamma}] \mapsto [\tilde{\ell}]^{-1} \cdot [\tilde{\gamma}] \cdot [\tilde{\ell}] \in \pi_1(A,a_2)$$

は同型写像である (Theorem 2.2.3) ことを思い出そう．これより特に $\pi_1(A,a_2) = [\tilde{\ell}]^{-1}\pi_1(A,a_1)[\tilde{\ell}]$ が成り立つので

$$h_*(\pi_1(A,a_2)) = h_*([\tilde{\ell}]^{-1} \cdot \pi_1(A,a_1) \cdot [\tilde{\ell}]) = [h \circ \tilde{\ell}]^{-1} h_*(\pi_1(A,a_1))[h \circ \tilde{\ell}] = [\ell]^{-1} h_*(\pi_1(A,a_1))[\ell]$$

となるので $h_*(\pi_1(A,a_1))$ と $h_*(\pi_1(A,a_2))$ は共役である．

(ii) $\pi_1(X,x_0)$ の部分群 H が $h_*(\pi_1(A,a_1))$ と共役ならば, x を基点とする, ある閉道 ℓ により

$$H = [\ell]^{-1} h_*(\pi_1(A,a_1))[\ell]$$

と表せる．ℓ の a_1 を始点とする A の道への持ち上げを $\tilde{\ell}$ とし, その終点を $a_2 = \tilde{\ell}(1) \in h^{-1}(x)$ と置けば $\pi_1(A,a_2) = [\tilde{\ell}]^{-1}\pi_1(A,a_2)[\tilde{\ell}]$ であるから (i) と同様に

$$h_*(\pi_1(A,a_2)) = [\ell]^{-1} h_*(\pi_1(A,a_1))[\ell] = H$$

が成り立つので $H = h_*(\pi_1(A,a_2))$ である． □

(A,h,X) を被覆空間とし $f: W \to X$ を連続写像とする．今までは道, つまり $W = [0,1]$ の場合の f の持ち上げについて考えてきたが, 今度は $W = [0,1]$ とは限らない, 一般の場合の持ち上げについて考えよう．道の場合と異なりこの場合は, いつでも持ち上げが可能とは限らない．しかしながら基本群の言葉で, 写像 f が持ち上げ可能であるための必要十分条件を記述できる．

$\Gamma(X,x)$ で位相空間 X における x を基点とする閉道の全体を表したことを思い出しておこう．

Lemma 3.2.3. $\gamma \in \Gamma(X,x)$ について $a \in h^{-1}(x)$ を始点とする γ の持ち上げを $\tilde{\gamma}$ とする．このとき

$$\tilde{\gamma} \text{ が閉道} \iff [\gamma] \in h_*(\pi_1(A,a)) \ .$$

Proof. $\tilde{\gamma}$ が閉道ならば $[\tilde{\gamma}] \in \pi_1(A,a)$ であり

$$[\gamma] = [h \circ \tilde{\gamma}] = h_*([\tilde{\gamma}]) \in h_*(\pi_1(A,a_0))$$

である．

逆に $[\gamma] \in h_*(\pi_1(A,a))$ ならば $\tilde{\gamma}' \in \Gamma(A,a)$ で $[\gamma] = h_*([\tilde{\gamma}']) = [h \circ \tilde{\gamma}']$ を満たすものが存在する．これは X 内で $\gamma \sim h \circ \tilde{\gamma}'$ を意味するが，ホモトピーの持ち上げ定理と一意性定理より

$$\begin{aligned} & \gamma \sim h \circ \tilde{\gamma}' \quad \text{in } X \\ \iff & \gamma \text{ の持ち上げ } \sim \ h \circ \tilde{\gamma}' \text{ の持ち上げ} \quad \text{in } A \\ \iff & \tilde{\gamma} \sim \tilde{\gamma}' \quad \text{in } A \end{aligned}$$

である ($\sim$ は始点と終点を固定してホモトピックの意味である) が，特に両辺の道の終点は一致し，$\tilde{\gamma}$ も $\tilde{\gamma}'$ と同様に閉道である． □

Theorem 3.2.4. (A,h,X) を被覆空間とし，$x,\ y \in X$，$a \in h^{-1}(x)$ とする．また α, β を x を始点，y を終点とする X 上の 2 つの道とし，これらの a を始点とする A 内の道への持ち上げを，それぞれ $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ とする．このとき $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ が成り立つこと，つまり $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ の終点が一致する為の必要十分条件は

$$[\alpha \cdot \beta^{-1}] \in h_*(\pi_1(A,a))$$

である．

Proof. まず $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ ならば $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}^{-1}$ が定義でき a を基点とする閉道であるから

$$[\alpha \cdot \beta^{-1}] = [h \circ \tilde{\alpha} \cdot h \circ \tilde{\beta}^{-1}] = [h \circ (\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}^{-1})] = h_*([\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}^{-1}]) \in h_*(\pi_1(A,a))$$

となる．

逆に $[\alpha \cdot \beta^{-1}] \in h_*(\pi_1(A,a))$ ならば $\alpha \cdot \beta^{-1}$ の a を始点とする A への持ち上げを $\widetilde{\alpha \cdot \beta^{-1}}$ と表すとき，Lemma 3.2.3 より，これは閉道であり

$$\widetilde{\alpha \cdot \beta^{-1}}(0) = \widetilde{\alpha \cdot \beta^{-1}}(1) = a$$

が成り立つ．

それでは $\widetilde{\alpha \cdot \beta^{-1}}$ と $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ の関係を調べよう．$0 \le t \le \frac{1}{2}$ のとき

$$\alpha \cdot \beta^{-1}(t) = \alpha(2t)$$

であるから

$$\alpha \cdot \beta^{-1}\left(\frac{t}{2}\right) = \alpha(t), \quad 0 \le t \le 1$$

が成り立つ．従って

$$\widetilde{\alpha \cdot \beta^{-1}}\left(\frac{t}{2}\right), \quad 0 \le t \le 1$$

も $\tilde{\alpha}$ と同様に α の持ち上げであり，始点も $\widetilde{\alpha \cdot \beta^{-1}}(0) = a = \tilde{\alpha}(0)$ となり一致する．よって両者は一致し

$$\widetilde{\alpha \cdot \beta^{-1}}\left(\frac{t}{2}\right) = \alpha(t), \quad 0 \le t \le 1$$

が成り立つ．よって特に

$$\tilde{\alpha}(1) = \widetilde{\alpha \cdot \beta^{-1}}\left(\frac{1}{2}\right)$$

である．

次に $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ のとき

$$\alpha \cdot \beta^{-1}(t) = \beta^{-1}(2t-1) = \beta(2(1-t))$$

であるから

$$\alpha \cdot \beta^{-1}\left(1 - \frac{t}{2}\right) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

が成り立つ．よって道

$$\widetilde{\alpha \cdot \beta^{-1}}\left(1 - \frac{t}{2}\right), \quad 0 \leq t \leq 1$$

も $\tilde{\beta}$ と同様に β の持ち上げであり，始点は $\widetilde{\alpha \cdot \beta^{-1}}(1) = a$ であるから両者は一致する．つまり

$$\widetilde{\alpha \cdot \beta^{-1}}\left(1 - \frac{t}{2}\right) = \tilde{\beta}(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

が成り立つ．よって特に

$$\tilde{\beta}(1) = \widetilde{\alpha \cdot \beta^{-1}}\left(\frac{1}{2}\right)$$

である．以上より

$$\tilde{\alpha}(1) = \widetilde{\alpha \cdot \beta^{-1}}\left(\frac{1}{2}\right) = \tilde{\beta}(1)$$

が成り立つ． □

Lemma 3.2.3 と Theorem 3.2.4 より底空間への写像が被覆空間に持ち上げ可能であるための必要十分条件が得られる．

Theorem 3.2.5. (A, h, X) を被覆空間とし，W を局所弧状連結な弧状連結空間とする．また $f : W \to X$ を連続写像とし $w_0 \in W$, $x_0 = f(w_0)$, $a_0 \in h^{-1}(x)$ とする．このとき $\tilde{f}(w_0) = a_0$ を満たす f の持ち上げ $\tilde{f} : W \to A$ が存在する為の必要十分条件は

$$f_*(\pi_1(W, w_0)) \subset h_*(\pi_1(A, a_0))$$

が成り立つことである．

上の条件 $f_*(\pi_1(W, w_0)) \subset \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ を Theorem 3.2.4 を用いて道の持ち上げの言葉に翻訳して述べれば，

(3.2.1)　　w_0 を基点とする W の任意の閉道 ℓ の像 $f \circ \ell$ を
a_0 を始点とする A の道への持ち上げると，再び閉道になる

である．

Proof. $\tilde{f}(w_0) = a_0$ を満たす f の持ち上げ $\tilde{f}$ が存在すれば $h \circ \tilde{f} = f$ と $\tilde{f}_*(\pi_1(W, w_0)) \subset \pi_1(A, a_0)$ より

$$f_*(\pi_1(W, w_0)) = (h \circ \tilde{f})_*(\pi_1(W, w_0)) = h_*(\tilde{f}_*(\pi_1(W, w_0))) \subset h_*(\pi_1(A, a_0))$$

が成り立つ．

逆に $f_*(\pi_1(W,w_0)) \subset h_*(\pi_1(A,a_0))$ が成り立つと仮定して，写像 $\tilde{f}$ を以下のように構成する．まず W は弧状連結であるから，各 $w \in W$ について w_0 と w を結ぶ道 $\gamma : [0,1] \to W$ が取れる．そして x_0 を始点とする X の道 $f \circ \gamma$ を a_0 を始点とする A の道 $\tilde{\gamma} : [0,1] \to A$ に持ち上げる．そして

$$\tilde{f}(w) = \tilde{\gamma}(1) \quad (= \ \tilde{\gamma}\text{の終点})$$

と置く．勿論 $\tilde{f}(w)$ が γ のとり方に依らず定まることを示さなければならない．そこで $\delta : [0,1] \to W$ も w_0 と w を結ぶ道とし，$\tilde{\delta} : [0,1] \to A$ を a_0 を始点とする $f \circ \delta$ の持ち上げとする．このとき $f \circ \gamma$ と $f \circ \delta$ はともに x_0 を始点とし，$f(w)$ を終点とする X 内の道であり $\gamma \cdot \delta^{-1}$ は w_0 を基点とする W の閉道であるから

$$[f \circ \gamma \cdot (f \circ \delta)^{-1}] = [f \circ (\gamma \cdot \delta)^{-1}] = f_*([\gamma \cdot \delta)^{-1}]) \in f_*(\pi_1(W,w_0)) \subset h_*(\pi_1(A,a_0))$$

従って Theorem 3.2.4 より $\tilde{\gamma}$ と $\tilde{\delta}$ の終点は一致する．つまり $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\delta}(1)$ である．

さらに $\tilde{f}(w) = \tilde{\gamma}(1)$ より $h(\tilde{f}(w)) = h(\tilde{\gamma}(1)) = f \circ \gamma(1) = f(w)$ が成り立つ．また $w = w_0$ の時は $\gamma = 1_{w_0}$ と取ることができるが，このとき $f \circ \gamma = f \circ 1_{w_0} = 1_{x_0}$ であり，$\tilde{\gamma} = 1_{a_0}$ である．よって $\tilde{f}(w_0) = 1_{a_0}(1) = a_0$ である．

最後に $\tilde{f}$ が連続であることを示せば証明は完了する．これを示すために $w_1 \in W$ を任意に固定して $\tilde{f}$ が w_1 で連続であることを示そう．$x_1 = f(w_1)$ と置いて x_1 の均一被覆近傍 V を取る．また w_0 と w_1 を結ぶ道 $\gamma_1 : [0,1] \to W$ を取り，$f \circ \gamma_1$ の a_0 を始点とする A の道への持ち上げを $\tilde{\gamma}_1$ とする．$a_1 = \tilde{\gamma}_1(1) = \tilde{f}(w_1)$ と置き，$h^{-1}(V)$ の a_1 を含む連結成分を $\tilde{V}$ と置く．このとき $h|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \to V$ は同相である．

さて f の連続性と W の局所弧状連結性より w_1 の弧状連結な近傍 U で $f(U) \subset V$ を満たすものが取れる．このとき

$$\tilde{f}(w) = (h|_{\tilde{V}})^{-1}(f(w)), \quad w \in U \tag{3.2.2}$$

が成り立つことを示そう．これが示されれば $\tilde{f}$ が w_1 において連続であることが直ちに従う．

それでは (3.2.2) が成り立つことを示そう．各 $w \in U$ について w_1 と w を結ぶ道 $\alpha : [0,1] \to U$ を取る．$f \circ \alpha$ は $x_1 = f(w_1)$ と $x := f(w)$ を結ぶ V 内の道であるから，これを a_1 を始点とする A の道 $\tilde{\alpha}$ へ持ち上げる．このとき持ち上げの一意性より

$$\tilde{\alpha} = (h|_{\tilde{V}})^{-1}(f \circ \alpha)$$

が成り立つことに注意する．さて $\tilde{\gamma}_1(1) = \tilde{x}_1 = \tilde{\alpha}(0)$ より道 $\tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\alpha}$ が定義でき

$$h \circ (\tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\alpha}) = (h \circ \tilde{\gamma}_1) \cdot (h \circ \tilde{\alpha}) = f \circ \gamma_1 \cdot f \circ \alpha = f \circ (\gamma_1 \cdot \alpha)$$

である．従って $\tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\alpha}$ は $f \circ (\gamma_1 \cdot \alpha)$ の a_0 を始点とする A への持ち上げ $\widetilde{\gamma_1 \cdot \alpha}$ と一致する．よって

$$\tilde{f}(w) = \widetilde{\gamma_1 \cdot \alpha}(1) = (\tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\alpha})(1) = \tilde{\alpha}(1) = (h|_{\tilde{V}})^{-1}((f \circ \alpha)(1)) = (h|_{\tilde{V}})^{-1}(f(w))$$

が成り立つ． □

Corollary 3.2.6. W が局所弧状連結な単連結空間ならば f はつねに持ち上げ $\tilde{f}$ を持つ．

Proof. 実際 W が単連結のとき基本群 $\pi_1(W,w_0)$ は自明群であるから $f_*(\pi_1(W,w_0)) = [1_{x_0}] \subset h_*(\pi_1(A,a_0))$ が成り立つ． □

3.3　被覆空間の同型

この節では与えられた空間 X についてどのような被覆空間 (A,h,X) が存在し得るかを X の基本群をもとに考えていこう.

Definition 3.3.1. (A,h) , (B,k) を X の被覆空間とする. 連続写像 $\varphi : A \to B$ が $h = k \circ \varphi$ を満たすとき, A から B への準同型 *(homomorphism)* であると言う. ここでは群と群の間の準同型と区別するために, 単に準同型と呼ぶことはやめ, 被覆準同型と言うことにする.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "h"'] & & B \arrow[dl, "k"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

被覆準同型の合成もまた被覆準同型である. つまり (A,h), (B,k), (C,m) が X の被覆空間で, $\varphi : A \to B$, $\psi : B \to C$ が被覆準同型ならば $\psi \circ \varphi : A \to C$ は A から C への被覆準同型である.

後ほど被覆準同型 $\varphi : A \to B$ は必ず全射になり, (A,φ) は B の被覆空間になることを証明する.

Definition 3.3.2. X の被覆空間 (A,h) から同じく X の被覆空間 (B,k) への被覆準同型 φ が全単射であり逆写像も連続なとき φ は *(被覆)* 同型 *(isomorphism)* であると言い, さらに $B = A$, $k = h$ の場合, 自己同型 *(automorphism)* または被覆変換 *(covering transformation* または *deck transformation)* であると言う. また同型 $\varphi : A \to B$ が存在する 2 つの被覆空間 (A,h,X) , (B,k,X) は *(被覆空間として)* 同型であると言う. X の被覆空間 (A,h) の被覆変換の全体は写像の合成を積とし, 恒等写像を単位元, 逆写像を逆元として群をなす. これを $\mathrm{Aut}(A,h)$ で表し, 被覆変換群と呼ぶ.

準同型 $\varphi : A \to B$ とは写像 $h : A \to X$ の被覆空間 (B,k,X) への持ち上げに他ならないことに注意しよう. 従って持ち上げの一意性より次が成り立つ.

Theorem 3.3.3. (A,h) , (B,k) を X の被覆空間とする. このとき 2 つの準同型 $\varphi_j : A \to B$, $j = 1, 2$ が 1 点で一致すれば, A 全体で一致する.

被覆変換 $\varphi \in \mathrm{Aut}(A,h)$ は被覆準同型でもあるから, id_A 以外の被覆変換は不動点を持たない.

Theorem 3.3.4. (A,h,X) を被覆空間とし $\varphi : A \to A$ を被覆変換で $\varphi \neq \mathrm{id}_A$ とすると φ は不動点を持たない.

Proof. 被覆変換 $\varphi : A \to A$ が不動点 a_0 を持てばもう 1 つの被覆変換 id_A と, $\varphi(a_0) = a_0 = \mathrm{id}_A(a_0)$ となるから, Theorem 3.3.3 より A 上で一致する. □

被覆変換群は大変重要なテーマであるから, 1 つの節を設け, 次節で解説する.

基点を固定したときの被覆準同型の存在について Theorem 3.2.5 から直ちに次の定理が得られる.

Theorem 3.3.5. (A,h) と (B,k) を共通の底空間 X を持つ 2 つの被覆空間とし $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ は $h(a_0) = k(b_0)$ を満たすとする. このとき

(i) 被覆準同型 $\varphi : A \to B$ で $\varphi(a_0) = b_0$ を満たすものが存在する為の必要十分条件は

$$h_*(\pi_1(A, a_0)) \subset k_*(\pi_1(B, b_0))$$

が成り立つことである.

(ii) 被覆同型 $\varphi : A \to B$ で $\varphi(a_0) = b_0$ を満たすものが存在する為の必要十分条件は

$$h_*(\pi_1(A, a_0)) = k_*(\pi_1(B, b_0))$$

が成り立つことである.

(iii) $A = B$, $h = k$, a_0, $b_0 = a_1$ の場合, $\varphi(a_0) = a_1$ を満たす被覆変換 $\varphi \in \mathrm{Aut}(A, h)$ が存在する為の必要十分条件は

$$h_*(\pi_1(A, a_0)) = h_*(\pi_1(A, a_1))$$

が成り立つことである.

Thorem 3.3.5 (ii) は共通の底空間を持つ被覆空間 (A, h, X) と (B, k, X) が基点 a_0, b_0 を固定して同値になる条件を与えていると考えることが出来る. それでは基点を固定しない場合はどうなるであろうか? 些か中途半端であるが, 次の定理が答えの 1 つになる

Theorem 3.3.6. 底空間を共有する 2 つの被覆空間 (A, h, X), (B, k, X) について, 次の 3 条件は互いに同値である.

(i) (A, h, X), (B, k, X) は被覆空間として同値. つまり同相写像 $f : A \to B$ で $h = k \circ f$ を満たすものが存在する.

(ii) $h(a_0) = k(b_0)$ を満たす任意の $(a_0, b_0) \in A \times B$ について $h_*(\pi_1(A, a_0))$ と $k_*(\pi_1(B, b_0))$ は $\pi_1(X, h(a_0))$ の部分群として共役.

(iii) $h(a_0) = k(b_0)$ を満たすある $(a_0, b_0) \in A \times B$ について $h_*(\pi_1(A, a_0))$ と $k_*(\pi_1(B, b_0))$ は $\pi_1(X, h(a_0))$ の部分群として共役.

Proof. (i) $\Longrightarrow$ (ii) について. $f : A \to B$ が同相写像で $h = k \circ f$ を満たすとする. $x_0 = h(a_0) = k(b_0)$, $f(a_0) = b_1$ と置けば $k(b_1) = k(f(a_0)) = h(a_0) = k(b_0)$ であるから $b_0, b_1 \in k^{-1}(x_0)$ であり, Theorem 3.2.2(i) より $k_*(\pi_1(A, b_1)))$ と $k_*(\pi_1(A, b_0)))$ は共役である. また f は同相であるから $f_*(\pi_1(A, a_0)) = \pi_1(B, b_1)$ ゆえ

$$h_*(\pi_1(A, a_0)) = k_*(f_*(\pi_1(A, a_0))) = k_*(\pi_1(A, b_1)))$$

となるので, $k_*(\pi_1(A, b_0)))$ と $h_*(\pi_1(A, a_0))$ は共役である.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) は明らかであるから (iii) $\Longrightarrow$ (i) を示そう. $x_0 = h(a_0) = k(b_0)$ と置く Theorem 3.2.2 (ii) より $h_*(\pi_1(A, a_0)) = k_*(\pi_1(A, b_1))$ を満たす $b_1 \in k^{-1}(x_0)$ が存在する. よって Theorem 3.3.5 より $f(a_0) = b_1$, $k \circ f = h$ を満たす同相写像 $f : A \to B$ が存在する. □

それでは被覆準同型はつねに全射であり被覆写像になることを示そう.

Theorem 3.3.7. (A, h), (B, k) を X の被覆空間とし, $\varphi : A \to B$ を被覆準同型とする. このとき φ は全射であり, (A, φ) は B の被覆空間である.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "h"'] & & B \arrow[dl, "k"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Proof. 全射性を示そう．$a_0 \in A$ を任意に取り，$b_0 = \varphi(a_0)$, $x_0 = h(a_0) = k(b_0)$ と置く．任意の $b \in B$ について b_0 を始点として b を終点とする B 内の道 $\beta : [0,1] \to B$ を取る．$\gamma = k \circ \beta$ と置けば γ は x_0 を始点とする X 内の道である．γ を a_0 を始点とする A の道へ持ち上げた道を α と置く．このとき $\varphi \circ \alpha$ は b_0 を始点とする B 内の道であり，$k \circ (\varphi \circ \alpha) = (k \circ \varphi) \circ \alpha = h \circ \alpha = \gamma$ であるから γ の (B,k) に関する持ち上げである．従って持ち上げの一意性より $\varphi \circ \alpha = \beta$ が成り立つ．これより特に $a = \alpha(1)$ と置けば $\varphi(a) = \varphi(\alpha(1)) = \beta(1) = b$ が成り立つ．

次に各点 $b_0 \in B$ について (A,φ) に関する均一被覆近傍が存在することを示そう．$x_0 = k(b_0)$ と置いて U_1 を x_0 の (A,h) に関する均一被覆近傍とし，U_2 を x_0 の (B,k) に関する均一被覆近傍とする．このとき U を x_0 を含む $U_1 \cap U_2$ の連結成分とすれば U は (A,h) と (B,k) の両方に関する均一被覆近傍である．V を $k^{-1}(U)$ の b_0 を含む成分とする．それでは

$$\varphi^{-1}(V) = \bigcup_{W \text{ は } h^{-1}(U) \text{ の成分で } W \cap \varphi^{-1}(b_0) \neq \emptyset} W \tag{3.3.1}$$

となること，そして上式右辺の条件を満たす成分 W は互いに共通部分を持たず $\varphi|_W = (k|_V)^{-1} \circ (h|_W)$ が成り立つことを示そう．これが示されれば $h|_W : W \to U$, $k|_V : V \to U$ の同相性より $\varphi|_W : W \to V$ が同相になり，さらに上式が $\varphi^{-1}(V)$ の連結成分への分解を与えていることが分かる．

$a \in \varphi^{-1}(V)$ と仮定し $b = \varphi(a) \in V$, $x = h(a) = k(\varphi(a)) = k(b)$ と置く．まず $h(a) = k(b) \in k(V) = U$ より $a \in h^{-1}(U)$ である．

そこで W を $h^{-1}(U)$ の a を含む成分とする．このとき同相写像 $h_W : W \to U$, $k_V : V \to U$ を利用して $a_0 = (h_W)^{-1}(k_V(b_0)) = h_W(x_0) \in W_0$ と置く．

Claim. $\varphi(a_0) = b_0$ が成り立つ．実際，α を a を始点とし，a_0 を終点とする W 内の道とすると $h \circ \alpha$ は x を始点とし，x_0 を終点とする U 内の道であり，これを V に持ち上げた道を β とすれば b を始点とし，b_0 を終点とする V 内の道である．一方 $\varphi \circ \alpha$ は B 内の道で $\varphi(a) = b$ を始点とし，$k \circ (\varphi \circ \alpha) = h \circ \alpha$ である．従って持ち上げの一意性より $\varphi \circ \alpha = \beta$ であり，特に $a_0 = \varphi(\alpha(1)) = \beta(1) = b_0$ である．

以上で $a \in \varphi^{-1}(V)$ ならば $h^{-1}(U)$ の成分 W で $a \in W$ かつ $W \cap \varphi^{-1}(b_0) \neq \emptyset$ を満たすものが存在する．

逆に W を $h^{-1}(U)$ の成分 $W \cap \varphi^{-1}(b_0) \neq \emptyset$ を満たすとする．このとき $a_0 \in W \cap \varphi^{-1}(b_0)$ は $h(a_0) = k(\varphi(a_0)) = k(b_0) = x_0$ を満たすので 1 点のみである．$a \in W$ について上と同じ (但し α は始点 a_0 で終点 a とする) 議論を行えば $\varphi(a) \in V$ が従う．よって $\varphi(W) \subset V$ であり上と合わせて (3.3.1) が従う．また

$$\begin{aligned} k \circ \varphi = h \quad &\Longrightarrow \quad k \circ \varphi|_W = h|_W \\ &\Longrightarrow \quad k|_V \circ \varphi|_W = h|_W \\ &\Longrightarrow \quad \varphi|_W = (k|_V)^{-1} \circ h|_W \end{aligned}$$

となる．これより $\varphi|_W : W \to V$ は同相である．$\square$

Theorem 3.3.8. X, Y, A を局所弧状連結な弧状連結位相空間とし (A,h) が X の，(A,k) が Y の被覆空間であるとする．このとき連続写像 $\varphi : X \to Y$ が $k = h \circ \varphi$ を満たせば，全射であり (X,φ) は Y の被覆空間である．

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "k"] & \\ X \arrow[rr, "\varphi"'] & & Y \end{tikzcd}$$

Proof. $k=\varphi\circ h$ において k が全射であるから φ も全射である．$y\in Y$ とし (A,k) に関する y の均一被覆近傍 V を取る．$\varphi^{-1}(V)$ の連結成分への分解を

$$\varphi^{-1}(V)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$$

とする．また各 $\lambda\in\Lambda$ について $h^{-1}(U_\lambda)$ の連結成分への分解を

$$h^{-1}(U_\lambda)=\bigcup_{\mu\in\mathcal{M}_\lambda}W_{\lambda\mu}$$

とすると

$$k^{-1}(V)=h^{-1}(\varphi^{-1}(V))=h^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda\right)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}h^{-1}(U_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcup_{\mu\in\mathcal{M}_\lambda}W_{\lambda\mu}$$

を得る．ここで $W_{\lambda\mu}$, $\lambda\in\Lambda$, $\mu\in\mathcal{M}_\lambda$ は互いに交わらない連結な開集合であるから上式は $k^{-1}(V)$ の連結成分への分解を与えている．V は被覆空間 (A,k) に関する均一被覆近傍であったから $k|_{W_{\lambda\mu}}:W_{\lambda\mu}\to V$ は同相写像である．また U_λ 　は弧状連結であることと (A,h) が X の被覆空間であるから $U_\lambda=h(W_{\lambda\mu})$ が成り立つ．従って $h|_{W_{\lambda\mu}}$ は全射である．さらに $k|_{W_{\lambda\mu}}=\varphi|_{U_\lambda}\circ h|_{W_{\lambda\mu}}$ において $k|_{W_{\lambda\mu}}$ が単射であるから　$h|_{W_{\lambda\mu}}$ は単射である．よって $h|_{W_{\lambda\mu}}:W_{\lambda\mu}\to U_\lambda$ は全単射であり, 開写像 h の開集合 U_λ への制限であるから, やはり開写像である．従って $h|_{W_{\lambda\mu}}:W_{\lambda\mu}\to U_\lambda$ は同相写像であり

$$\varphi|_{U_\lambda}=k|_{W_{\lambda\mu}}\circ(h|_{W_{\lambda\mu}})^{-1}:U_\lambda\to V$$

も同相写像である．

以上より y の近傍 V について, 連結成分への分解 $\varphi^{-1}(V)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ において $\varphi|_{U_\lambda}:U_\lambda\to V$ が同相となることが示された．よって (X,φ) は Y の被覆空間であり, 特に (A,k) に関する被覆近傍 V が, (X,φ) に関する均一被覆近傍でもあることが示された． □

他にある条件のもとで (A,h) が B の被覆空間, (B,k) が X の被覆空間ならば $(A,k\circ h)$ が X の被覆空間となることも証明できるが, これは次節で普遍被覆空間の概念を解説したあとに行う．

$$A\xrightarrow{h}B\xrightarrow{k}X$$

3.4 被覆空間の存在定理

(A,h) を X の被覆空間とし $a_0\in A$ とするとき $h_*(\pi_1(A,a_0))$ は $\pi_1(X,h(a_0))$ の部分群であった．逆に弧状連結かつ局所弧状連結な位相空間 X と $x_0\in X$ が与えられたとき $\pi_1(X,x_0)$ の任意の部分群 H について X の被覆空間 (A,h) と点 $a_0\in A$ を $h(a_0)=x_0$ かつ $h_*(\pi_1(A,a_0))=H$ を満たすように構成することが出来る．これを示すために準備として基本近傍系の定義と, 与えられた基本希望系から位相を構成する方法について復習しておこう．

Definition 3.4.1. 集合 X の各点 $x\in X$ に次の 3 条件を満たす X の部分集合の空でない族 $\mathcal{U}(x)$ が与えられているとき, $\{\mathcal{U}(x):x\in X\}$ を基本近傍系と言い, $\mathcal{U}(x)$ に属する集合を x の基本近傍と言う．

(a) $U\in\mathcal{U}(x)$ ならば $x\in U$.

(b) $U,V\in\mathcal{U}(x)$ ならば $W\subset U\cap V$ を満たす $W\in\mathcal{U}(x)$ が存在する．

(c) $U \in \mathcal{U}(x)$, $y \in U$ ならば $V \subset U$ を満たす $V \in \mathcal{U}(y)$ が存在する.

基本近傍系 $\{\mathcal{U}(x) : x \in X\}$ が与えられたとき X の部分集合 O について, 条件

$$\forall x \in O : \exists U \in \mathcal{U}(x) : U \subset O$$

を考えよう. この条件が成り立つ集合 O の全体を $\mathcal{O}$ と置く. このとき $\mathcal{O}$ について (a), (b) を用いて

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$.
(2) $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ ならば $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.
(3) $O_\lambda \in \mathcal{O}$, $\lambda \in \Lambda$ ならば $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

が成り立つことが容易に分かる. つまり $\mathcal{O}$ は開集合族であり X に位相を定める. また (c) より基本近傍が開集合であることが従う.

Theorem 3.4.2. *X は弧状連結かつ局所単連結な Hausdorff 位相空間であるとし, $x_0 \in X$ とする. このとき $\pi_1(X, x_0)$ の任意の部分群 H について, X の被覆空間 (A, h) と $a_0 \in A$ で $h(a_0) = x_0$, $H = h_*(\pi_1(A, a_0))$ を満たすものが存在する.*

Proof. $\mathcal{P}(X, x_0)$ で x_0 を始点とする X の道の全体

$$\mathcal{P}(X, x_0) = \{\alpha : \alpha \text{ is a continuous mapping on } [0,1] \text{ into } X \text{ with } \alpha(0) = x_0\}.$$

とする. 以下では X において始点と終点を留めたまま homotopic であるという関係を $\sim$ で表し, $[\gamma]$ で道 γ の属する同値類を表そう. つまり $\alpha, \beta \in \mathcal{P}(X, x_0)$ について

$$\alpha \sim \beta \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \alpha(1) = \beta(1) \text{ であり, さらに } \alpha \text{ と } \beta \text{ は homotopic}$$

とする. また $\alpha, \beta \in \mathcal{P}(X, x_0)$ について "$\sim$" と別な同値関係 $\alpha \approx \beta$ を

$$\alpha(1) = \beta(1) \text{ and } [\alpha \cdot \beta^{-1}] \in H$$

が成り立つことと定義する. 但しこれは $\alpha(1) = \beta(1)$ のとき $\alpha \cdot \beta^{-1}$ を定義することが出来て x_0 を基点とする閉道になるので, 同値類 $[\alpha \cdot \beta^{-1}]$ は $\pi_1(X, x_0)$ の元に他ならずこれが部分群 H に属するという意味である.

ここで α, β がともに始点を x_0 とする道で, 終点をも共有し, 始点を終点を留めたままホモトピック $\alpha \sim \beta$ ならば $\alpha \cdot \beta^{-1} \sim 1_{x_0}$ であるから $[\alpha \cdot \beta^{-1}] = [1_{x_0}] \in H$ が成り立つ. つまり 2 つの道 α, $\beta \in \mathcal{P}(X, x_0)$ について

$$\alpha \sim \beta \quad \Longrightarrow \quad \alpha \approx \beta$$

が成り立つことに注意しよう.

さて $[\alpha]$ と区別するために記号 $\{\alpha\}$ で関係 $\approx$ に関する α の属する同値類を表すことにして, 商集合を

$$A = \mathcal{P}(X, x_0)/\approx \tag{3.4.1}$$

と置く. また $h : A \to X$ を

$$h(\{\alpha\}) = \alpha(1) (= \ \alpha \text{ の終点 }) \tag{3.4.2}$$

と置く. このとき $h(\{1_{x_0}\}) = 1_{x_0}(1) = x_0$ であり, X の任意の点 x は x_0 と道で結ぶことが出来るので h は全射である. また

$$a_0 = \{1_{x_0}\} \in A \tag{3.4.3}$$

と置く．証明はかなり長いので, ステップに分けて行う．

(i) 点 $a=\{\alpha\}\in A$ について $x=h(a)=\alpha(1)$ と置き $x\in U$ を満たす開集合 U で単連結なものを取り,

$$U(a)=\{\{\alpha\cdot\sigma\}:\sigma \text{ は } x \text{ を始点とする } U \text{ 内の道 }\} \tag{3.4.4}$$

置く．右辺が代表元 α の選び方に依存しないことを見ておこう．この為に β も x_0 を始点, x を終点とする X の道で $[\alpha\cdot\beta^{-1}]\in H$ を満たすとし, δ を x を始点とし, σ と同じ終点を持つ U 内の道とすると U が単連結であるから $\sigma\cdot\delta^{-1}\sim 1_x$ が成り立つので

$$[(\alpha\cdot\sigma)\cdot(\beta\cdot\delta)^{-1}]=[(\alpha\cdot(\sigma\cdot\delta^{-1}))\beta^{-1})]=[(\alpha\cdot 1_x)\beta^{-1}]=[\alpha\cdot\beta^{-1}]\in H$$

となるから $\{\alpha\cdot\sigma\}=\{\beta\cdot\delta\}$ が成り立つ．

(ii) 各点 $a\in A$ について $x=h(a)$ を含む単連結な開集合 U により $U(a)$ の形で表せる A の部分集合の全体を $\mathcal{U}(a)$ と置く．このとき $\{\mathcal{U}(a):a\in A\}$ が基本近傍系になることを示そう．

(a) については $a\in U(a)$ を確かめれば良い．これは $a=\{\alpha\}$ のとき $x=h(a)=\gamma(1)\in U$ であり $\alpha\sim\alpha\cdot 1_x$ と 1_x が U 内の道であることより $a=\{\alpha\}=\{\alpha\cdot 1_x\}\in U(a)$ が従う．

(b) $U(a)$, $V(a)\in\mathcal{U}(a)$ とすれば $x\in W\subset U\cap V$ を満たす単連結な開集合 W が存在する．このとき $W(a)\subset U(a)\cap V(a)$ が成り立つことことは明らかであろう．

(c) $b\in U(a)$ ならば x を始点とし $h(b)$ を終点とする U 内の, ある道 σ により $b=\{\gamma\cdot\sigma\}$ と表わせる．ここで $\sigma(1)$ を始点とする U 内の任意の道 δ について $(\gamma\cdot\sigma)\delta\sim\gamma\cdot(\sigma\cdot\delta)$ となり $\sigma\cdot\delta$ は x を始点とする U 内の道であるから $\{(\gamma\cdot\sigma)\delta\}=\{\gamma\cdot(\sigma\cdot\delta)\}\in U(a)$ となる．これより $U(b)\subset U(a)$ が分かる．

以上で A に基本近傍系が定義され, A に位相が導入されたことになる．これ以降 A はこの位相のもとで位相空間と考える．

(iii) h が開写像で $h|_{U(a)}:U(a)\to U$ が同相写像であることを示そう．これが示されれば A が局所単連結で, 特に局所弧状連結であることも従う．

さて $U(a)\in\mathcal{U}(a)$ について $h(U(a))\subset U$ が明らかに成り立つが, U の弧状連結性 (U は単連結なので当然弧状連結である) より逆の包含関係が成り立つことも分かるので $h(U(a))=U$ が成り立つ．これより特に $h:A\to U$ は連続な全射開写像であることが分かる．実際, 任意の $x\in X$ について x_0 と x を結ぶ $\alpha\in\mathcal{P}(X,x_0)$ を取る．このとき $x\in U$ を満たす任意の単連結開集合 U について $h(U(a))=U$ より $U\subset h(A)$ が成り立つ．

次に $h|_{U(a)}:U(a)\to U$ は同相写像である．実際, 連続な開写像を開集合上に制限しても連続な開写像であるから, $h|_{U(a)}:U(a)\to U$ は連続な開写像で全射である．よって単射であることが分かれば, 逆写像が存在し, 開写像であることから逆写像の連続性も従う．そこで $b=\{\alpha\cdot\delta\}$, $c=\{\alpha\cdot\sigma\}\in U(a)$ で $h(b)=h(c)$ としよう．このとき δ と σ の終点は $h(b)=h(c)$ であるから一致し U の単連結性より $\delta\cdot\delta^{-1}\sim 1_x$ が成り立つので

$$\begin{aligned}(\alpha\cdot\delta)(\alpha\cdot\sigma)^{-1}&\sim(\alpha\cdot\delta)(\sigma^{-1}\cdot\alpha^{-1})\\&\sim(\alpha\cdot(\delta\cdot\sigma^{-1}))\cdot\alpha^{-1}\\&\sim(\alpha\cdot 1_x)\cdot\alpha^{-1}\\&\sim\alpha\cdot\alpha^{-1}\\&\sim 1_{x_0}\end{aligned}$$

であるから $[(\alpha\cdot\delta)(\alpha\cdot\sigma)^{-1}]=[1_{x_0}]\in H$ が成り立つ．従って $b=\{\alpha\cdot\delta\}=\{\alpha\cdot\sigma\}=c$ となり, $h|_{U(a)}:U(a)\to U$ は単射である．

(iv) $a_1 = \{\gamma_1\}$, $a_2 = \{\gamma_2\}$ が $h(a_1) = h(a_2) = x$ かつ $a_1 \neq a_2$ を満たせば $U(a_1) \cap U(a_2) = \emptyset$ であることを示そう．これは $b \in U(a_1) \cap U(a_2)$ が存在すれば $b = \{\gamma_1 \cdot \delta\} = \{\gamma_2 \cdot \sigma\}$ と表せるが $\gamma_1 \cdot \delta \approx \gamma_2 \cdot \sigma$ より

$$\begin{aligned} H \ni [(\gamma_1 \cdot \delta)(\gamma_2 \cdot \sigma)^{-1}] &= [(\gamma_1 \cdot \delta)(\sigma^{-1} \cdot \gamma_2^{-1})] \\ &= [((\gamma_1 \cdot \delta)\sigma^{-1}) \cdot \gamma_2^{-1})] \\ &= [(\gamma_1 \cdot (\delta \cdot \sigma^{-1})) \cdot \gamma_2^{-1})] \\ &= [(\gamma_1 \cdot 1_x) \cdot \gamma_2^{-1})] \quad (U \text{ は単連結ゆえ閉道 } \delta \cdot \sigma^{-1} \text{ は零ホモトピック}) \\ &= [\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}] \end{aligned}$$

であるから $a_1 = \{\gamma_1\} = \{\gamma_2\} = a_2$ となり矛盾である．

(v) A の Hausdorff 性を示そう．$a_1, a_2 \in A$ で $a_1 \neq a_2$ 満たすものを任意に取る．$h(a_1) \neq h(a_2)$ の場合は X の Hausdorff 性より $h(a_1) \in V_1$, $h(a_2) \in V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ を満たす X の開集合 V_1, V_2 を取れば $a_1 \in h^{-1}(V_1)$, $a_2 \in h^{-1}(V_2)$ で $h^{-1}(V_1) \cap h^{-1}(V_2) = \emptyset$ が成り立つ．次に $h(a_1) = h(a_2)$ の場合は, 単連結な開集合 U で $h(a_1) = h(a_2) \in U$ を満たすものを取れば (iv) で示したように $a_1 \in U(a_1)$, $a_2 \in U(a_2)$ で $U(a_1) \cap U(a_2) = \emptyset$ が成り立つ．

(vi) $x \in X$ と $x \in U$ を満たす単連結な開集合 U について

$$h^{-1}(U) = \bigcup_{a \in h^{-1}(x)} U(a)$$

を示そう．これが示されれば $U(a)$ は U と同相ゆえ A の連結な開集合であり, (iv) より右辺は互いに交わらない集合同士の和であるから $h^{-1}(U)$ の連結成分への分解を与えていることが分かる．

まず $h(U(a)) = U$ であったから

$$h^{-1}(U) \supset \bigcup_{a \in h^{-1}(x)} U(a)$$

が成り立つ．逆に $b \in h^{-1}(U)$ ならば $b = \{\beta\}$, $h(b) = \beta(1) \in U$ を満たす道 β で x_0 を始点とし $h(b)$ を終点とするものが存在する．また $h(b)$ を始点とし x を終点とする U 内の道を δ とすれば $\alpha = \beta \cdot \delta$ は x_0 を始点とし x を終点とする道であるから $a = \{\alpha\}$ と置けば $h(a) = x$ ゆえ $a \in h^{-1}(U)$ である．また $\alpha \cdot \delta^{-1} \sim \beta$ より $b = \{\gamma\} = \{\alpha \cdot \delta^{-1}\} \in U(a)$ である．よって

$$h^{-1}(U) \subset \bigcup_{a \in h^{-1}(x)} U(a)$$

が成り立つ．

(vii) 以上で (A, h) が X の被覆空間であることを示す為に残された条件は A の弧状連結性のみである．これについては $a = \{\alpha\}$ について $a_0 = \{1_{x_0}\}$ を始点とし, a を終点とする道の存在を示せば良い．そこで $s \in [0,1]$ について

$$\alpha_s(t) = \alpha(ts), \quad 0 \leq t \leq 1 \tag{3.4.5}$$

と置いて X の道 α_s を定義し写像 $\tilde{\alpha} : [0,1] \to A$ を

$$\tilde{\alpha}(s) = \{\alpha_s\} \in A$$

と置く．このとき $\tilde{\alpha}(0) = \{\alpha_0\} = \{1_{x_0}\}$, $\tilde{\alpha}(1) = \{\alpha_1\} = \{\alpha\} = a$ が成り立つ．従って $\tilde{\alpha}$ が連続であることを示せば求める道であることが分かる．そこで $s_0 \in [0,1]$ を任意に取り $\alpha(s_0) \in U$ を満たす単連結な開集合 U を取る．$|s - s_0| < \eta$, $s \in [0,1]$ ならば $\alpha(s) \in U$ が成り立つように $\eta > 0$ を取る．$s_0 < s < s_0 + \eta$ ならば $\alpha_s \sim \alpha_{s_0} \cdot \alpha_{s_0 s}$ が成り立つ．但し

$$\alpha_{s_0 s}(t) = \alpha((1-t)s_0 + ts), \quad 0 \leq t \leq 1$$

は α の区間 $[s_0, s]$ に対応する部分を表す道であり $\alpha(s_0)$ を始点, $\alpha(s)$ を終点に持つ U 内の道である．よって

$$\{\alpha_s\} = \{\alpha_{s_0} \cdot \alpha_{s_0 s}\} \in U(\alpha(s_0))$$

が成り立つ．同様に $s_0 - \eta < s < s_0$ ならば

$$\{\alpha_s\} = \{\alpha_{s_0} \cdot \alpha_{s s_0}^{-1}\} \in U(\alpha(s_0))$$

である．よって $|s - s_0| < \eta$ ならば $\{\alpha_s\} \in U(\{\alpha_{s_0}\})$ が成り立つことになる．これは $\tilde{\alpha}$ が s_0 で連続であることを示す．

(viii) 最後に $h_*(\pi_1(A, a_0)) = H$ を示そう．$\tilde{\alpha}$ を $a_0 = \{1_{x_0}\}$ を基点とする A 内の閉道とする．このとき $\alpha = h \circ \tilde{\alpha}$ は x_0 を基点とする X 内の閉道である．(vi) と同様に (3.4.5) を用いて α_s を定義すれば写像 $[0,1] \ni s \mapsto \{\alpha_s\}$ は

$$h(\{\alpha_s\}) = \alpha_s(1) = \alpha(s), \quad 0 \leq s \leq 1$$

を満たし, (vii) で示したように連続であるから α の持ち上げである．また始点は $\{\alpha_0\} = \{1_{x_0}\} = a_0$ であるから持ち上げの一意性より $\tilde{\alpha}$ と一致する．つまり $\tilde{\alpha}(s) = \{\alpha_s\}, 0 \leq s \leq 1$ である．$\tilde{\alpha}$ は閉道であるから

$$\{\alpha\} = \{\alpha_1\} = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}(0) = \{\alpha_0\} = \{1_{x_0}\}$$

である．これは $[\alpha] \in H$ を意味し, $[h(\tilde{\alpha})] = [\alpha] = [\alpha \cdot 1_{x_0}^{-1}] \in H$ が成り立つ．よって $h_*(\pi_1(A, a_0)) \subset H$ が成り立つ．

逆に α を x_0 を基点とする閉道で $[\alpha] \in H$ とする．a_0 を始点とする α の A の道への持ち上げを $\tilde{\alpha}$ としたとき, 前と同様に $\tilde{\alpha}(s) = \{\alpha_s\}, 0 \leq s \leq 1$ が成り立つので $\tilde{\alpha}(1) = \{\alpha_1\} = \{\alpha\}$ であるが, $[\alpha] \in H$ より $\{\alpha\} = \{1_{x_0}\}$ であるから $\tilde{\alpha}(1) = \{\alpha\} = \{1_{x_0}\} = a_0$ となり $\tilde{\alpha}$ は閉道である．よって $[\alpha] = [h(\tilde{\alpha})] \in h_*(\pi_1(A, a_0))$ となり, α の任意性より $H \subset h_*(\pi_1(A, a_0))$ が成り立つ． □

Definition 3.4.3. X) の被覆空間 (A, h) において A が単連結のとき (A, h) を X の普遍被覆空間 *(universal covering space)* であると言う．

X の普遍被覆空間は $(\tilde{X}, p)$ という記号で表されることが多い．さて (A, h) を X の被覆空間, $(\tilde{X}, p)$ を普遍被覆空間とするとき $p(\tilde{x}_0) = h(a_0)$ を満たす任意の $(\tilde{x}_0, a_0) \in \tilde{X} \times A$ について $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})) = [1_{x_0}] \subset h_*(\pi_1(A, a_0))$ であるから, 被覆準同型 $\varphi : \tilde{X} \to A$ が存在する．φ は Theorem 3.3.7 より被覆写像になる．従って $\tilde{X}$ は X の任意の被覆空間を被覆する空間である．言わば X の被覆空間の中で一番上位にあるものである．この事実が" 普遍" という言葉を使う理由である．

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & A \arrow[d, "h"] \\
 & X
\end{tikzcd}$$

また普遍被覆空間について $h_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ はつねに自明群であるから, Theorem 3.3.5 (ii) より 2 つの普遍被覆空間はつねに同型である．つまり X の普遍被覆空間は同型を除いて一意に定まる．

Remark 3.4.4. *Theorem 3.4.2* の証明中で X の局所単連結性を用いたのは *(iii), (iv)* において $\delta\sigma^{-1}$ が U で零ホモトピックであることの根拠として用いたのみである．しかしながら注意深く読めば分かるように U で零ホモトピックである必要は無く, X で零ホモトピックであれば十分である．従って局所単連結という仮定は任意の $x \in X$ につい

て開集合 U で包含写像 $\mathrm{inc}_U : U \to X$ による基本群の像が $\mathrm{inc}_{U*}(\pi_1(U,x))$ $\pi_1(X,x)$ の自明部分群であるという条件に置き換えることが可能である．つまり U 内の x を基点とする閉道が, X 内の *homotopy* により 1_x に連続変形されるという条件である．この条件を満たす X は半局所単連結 *(semi-locally simply connected)* と呼ばれる．今度は逆に X が普遍被覆空間 $(\tilde{X},p)$ を持つとしよう．単連結空間 $\tilde{X}$ は明らかに半局所単連結であり, その被覆写像による像である底空間 X も半局所単連結であることが容易に分かる．以上より局所弧状連結な弧状連結空間 X が普遍被覆空間を持つ為の必要十分条件は X が半局所単連結であることになる．

Theorem 3.4.5. (A,h) が B の被覆空間, (B,k) が X の被覆空間であり, X が普遍被覆空間を持てば $(A,k\circ h)$ は X の被覆空間である．

Proof.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "h"] \\ \tilde{X} \arrow[ur, "\psi"] \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[dr, "p"'] & B \arrow[d, "k"] \\ & X \end{tikzcd}$$

$(\tilde{X},p)$ を X の普遍被覆空間とし $p=k\circ\varphi$ を満たす被覆準同型 $\varphi : \tilde{X} \to B$ をを取る．さらに $\varphi = h\circ\psi$ を満たす被覆準同型 $\psi : \tilde{X} \to A$ を取る．このとき Theorem 3.3.7 より $(\tilde{X},\psi)$ は A の被覆であり, $(\tilde{X},p)$ は X の被覆である．また $k\circ h$ は

$$(k\circ h)\circ\psi = k\circ(h\circ\psi) = k\circ\varphi = p$$

を満たす．よって Theorem 3.3.8 を適用すれば $(A,k\circ h)$ が X の被覆空間であることが従う．

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "p"] & \\ A \arrow[rr, "k\circ h"'] & & X \end{tikzcd}$$

□

3.5　被覆変換と正則被覆空間

始めに基本群 $\pi_1(X,x_0)$ のファイバー $h^{-1}(x_0)$ への作用を見ておこう．(A,h) を X の被覆空間とし $x_0 \in X$ とする．このとき $a \in h^{-1}(x_0)$ と $[\gamma] \in \pi_1(X,x_0)$ について γ の始点を a とする持ち上げを γ として

$$a\cdot[\gamma] = \tilde{\gamma}(1) \tag{3.5.1}$$

と置いて, ファイバー $h^{-1}(x_0)$ への群 $\pi_1(X,x_0)$ の右からの作用を定義する．ホモトピーの持ち上げ定理から $\gamma\sim\gamma'$ ならば $\tilde{\gamma}(1)=\tilde{\gamma}'(1)$ に注意すれば, 上式の右辺が代表元の取り方に依らず定まることが分かる．

Theorem 3.5.1. 単位元 $[1_{x_0}] \in \pi_1(X,x_0)$ の作用, 及び群の積と作用の関係について次が成り立つ．

(i) 任意の $a \in h^{-1}(x_0)$ について $a\cdot[1_{x_0}] = a$

(ii) $(a\cdot[\gamma_1])\cdot[\gamma_2] = a\cdot([\gamma_1]\cdot[\gamma_2])$

(iii) 任意の $a, b\in h^{-1}(x_0)$ について $[\gamma]\in\pi_1(X, x_0)$ で $a\cdot[\gamma] = b$ を満たすものが存在する.

Proof. (i) 1_{x_0} の a を始点とする持ち上げは 1_a に他ならないので $a\cdot[1_{x_0}] = 1_a(1) = a$ である.

(ii) また a を始点とする γ_1 の持ち上げを $\tilde{\gamma}_1$ とし, $b=\tilde{\gamma}_1(1)$ を始点とする γ_2 の持ち上げを $\tilde{\gamma}_2$ とすれば $\tilde{\gamma}_1\cdot\tilde{\gamma}_2$ は $\gamma_1\cdot\gamma_2$ の a を始点とする持ち上げ $\widetilde{\gamma_1\cdot\gamma_2}$ と一致する. よって

$$(a\cdot[\gamma_1])\cdot[\gamma_2] = \tilde{\gamma}_1(1)\cdot[\gamma_2] = b\cdot[\gamma_2] = \tilde{\gamma}_2(1) = \widetilde{\gamma_1\cdot\gamma_2}(1) = a\cdot(\gamma_1\cdot\gamma_2)$$

である.

(iii) については a を始点とし b を終点とする道 $\tilde{\gamma}$ を取り $\gamma = h\circ\tilde{\gamma}$ と置けば γ の a を始点とする持ち上げは $\tilde{\gamma}$ に他ならないので $a\cdot[\gamma] = \tilde{\gamma}(1) = b$ が成り立つ. □

さて $a_0\in h^{-1}(x_0)$ を固定し

$$f([\gamma]) = a_0\cdot[\gamma],\quad \gamma\in\pi_1(X, x_0)$$

で写像 $f:\pi_1(X, x_0)\to h^{-1}(x_0)$ を定義しよう. f の性質を調べるために, 以下の議論で必要になるので, 群の剰余類について復習をしておこう.

群 G の部分群 H が与えられたとき 2 元の間に

$$g_1\sim g_2 \quad\Longrightarrow\quad g_1g_2^{-1}\in H$$

として関係 $\sim$ を定義すれば, 同値関係である. そして $g_1\sim g_2$ を満たす g_2 の全体, つまり g_1 の属す同値類は

$$Hg_1 = \{hg_1 : h\in H\}$$

と表せる. これらの同値類を G の H による左剰余類と呼ぶ.

この左剰余類の議論を $G=\pi_1(X, x_0)$, $H = h_*(\pi_1(A, a_0))$ について適用すれば

$$\begin{aligned} & f([\gamma_1]) = f([\gamma_2]) \\ \Longleftrightarrow\quad & a_0\cdot[\gamma_1] = a_0\cdot[\gamma_2] \\ \Longleftrightarrow\quad & a_0\cdot([\gamma_1]\cdot[\gamma_2]^{-1}) = a_0 \\ \Longleftrightarrow\quad & [\gamma_1]\cdot[\gamma_2]^{-1}\in h_*(\pi_1(A, a_0)) \quad (\because\ \ \text{Lemma 3.2.3 より}) \\ \Longleftrightarrow\quad & h_*(\pi_1(A, a_0))[\gamma_1] = h_*(\pi_1(A, a_0))[\gamma_2] \end{aligned}$$

が成り立つ. また $f:\pi_1(X, x_0)\to h^{-1}(x_0)$ が全射であることは Theorem 3.5.1 (iii) より直ちに従う. 従って次が示されたことになる.

Proposition 3.5.2. $[\alpha], [\beta]\in\pi_1(X, x_0)$ について $a_0\cdot[\alpha] = a_0[\beta]$ となる為の必要十分条件は $[\alpha]\cdot[\beta^{-1}]\in h_*(\pi_1(A, a_0))$ であり, 群 $\pi_1(X, x_0)$ の部分群 $h_*(\pi_1(A, a_0))$ に関する各左剰余類 $h_*(\pi_1(A, a_0))[\gamma]$ に $a_0\cdot[\gamma_1]\in h^{-1}(x_0)$ を対応させる写像が定義可能となり, この写像は全単射である.

さて被覆変換 $\varphi\in\mathrm{Aut}(A, h)$ を $h^{-1}(x_0)$ に制限すると $h^{-1}(x_0)$ から $h^{-1}(x_0)$ への全単射を与える. 被覆変換群の $h^{-1}(x_0)$ への作用については Theorem 3.5.1 の (i) と対応する $\mathrm{id}_A(a) = a$ は自明に成り立つし (ii) に対応するのは $\psi(\varphi(a)) = \psi\circ\varphi(a)$ であるが, これも自明に成り立つ. 重要なのは次が成り立つことである.

Theorem 3.5.3. $a \in h^{-1}(x_0)$, $\varphi \in \mathrm{Aut}(A,h)$, $[\gamma] \in \pi_1(X,x_0)$ について

$$\varphi(a \cdot [\gamma]) = \varphi(a) \cdot [\gamma] \tag{3.5.2}$$

が成り立つ.

Proof. a を始点とする γ の持ち上げを $\tilde{\gamma}$ とし, $\tilde{\gamma}$ の終点を b とすれば, $a \cdot [\gamma] = b$ であるから $\varphi(a \cdot [\gamma]) = \varphi(b)$ である. また $\varphi \circ \tilde{\gamma}$ は $h \circ (\varphi \circ \tilde{\gamma}) = h \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ より γ の持ち上げであり $\varphi(a)$ を始点, $\varphi(b)$ を始点に持つ. よって $\varphi(a) \cdot [\gamma] = \varphi(b)$ となり $\varphi(a \cdot [\gamma]) = \varphi(b) = \varphi(a) \cdot [\gamma]$ が成り立つ. □

残念ながら $h^{-1}(x_0)$ の全単射が与えられても, これの拡張である被覆変換がいつでも存在する訳ではない. 以下では被覆変換が存在する為の条件を求めよう. まずは正規化群の復習をしておこう.

Definition 3.5.4. 群 G の部分群 H について

$$N_G(H) = \{g \in G : gH = Hg\} = \{g \in G : g^{-1}Hg = H\} \tag{3.5.3}$$

と置けば, H を正規部分群として含むような最大の G の部分群である. $N_G(H)$ を H の正規化部分群 *(normalizer)* と言う

さて $a_0 \in h^{-1}(x_0)$ を固定して

$$F_{a_0} = \{a \in h^{-1}(x_0) : \exists\varphi \in \mathrm{Aut}(A,h) \text{ with } \varphi(a_0) = a\}$$

と置く. 被覆変換は 1 点での像が定まれば, 定まる (Theorem 3.3.3 を参照) ので各点 $a \in F_{a_0}$ について $\varphi(a_0) = a$ を満たす $\varphi \in \mathrm{Aut}(A,h)$ は一意的に存在する. 従って $\mathrm{Aut}(A,h)$ を調べるには F_{a_0} を調べればよい. とは言うものの必要な準備は既に終わっている.

まず Theorem 3.3.5 (iii) より $a \in h^{-1}(x_0)$ について

$$a \in F_{a_0} \iff h_*(\pi_1(A,a)) = h_*(\pi_1(A,a_0))$$

であった. $\tilde{\alpha}$ を a_0 を始点 a を終点とする A 内の道とし $\alpha = h \circ \tilde{\alpha}$ と置けば $\pi_1(A,a) = [\tilde{\alpha}^{-1}]\pi_1(A,a_0)[\tilde{\alpha}]$ より

$$h_*(\pi_1(A,a)) = [\alpha^{-1}]h_*(\pi_1(A,a_0))[\alpha]$$

である. 従って $a \in F_{a_0}$ ならば

$$[\alpha^{-1}]h_*(\pi_1(A,a_0))[\alpha] = h_*(\pi_1(A,a_0)) \tag{3.5.4}$$

を満たす $[\alpha] \in \pi_1(X,x_0)$ により $a = a_0 \cdot [\alpha]$ と表せる. つまり群 $\pi_1(X,x_0)$ の部分群 $h_*(\pi_1(A,a_0))$ の正規化部分群を $N_{\pi_1(X,x_0)}(h_*(\pi_1(A,a_0)))$ と表すことにすれば

$$a \in F_{a_0} \implies \exists[\alpha] \in N_{\pi_1(X,x_0)}(h_*(\pi_1(A,a_0))) : a = a_0 \cdot [\alpha]$$

が成り立つ.

逆に $[\alpha] \in N_{\pi_1(X,x_0)}(h_*(\pi_1(A,a_0)))$ について a_0 を始点とする α の持ち上げを $\tilde{\alpha}$ とし $\tilde{\alpha}$ の終点を a とすれば $a \in h^{-1}(x_0)$ で $h_*(\pi_1(A,a)) = h_*(\pi_1(A,a_0))$ が成り立つので $\varphi(a_0) = a$ を満たす $\varphi \in \mathrm{Aut}(A,h)$ が存在し $a \in F_{a_0}$ である.

以上より $a \in h^{-1}(x_0)$ について

$$\exists\varphi \in \mathrm{Aut}(A,h) : \varphi(a_0) = a \iff \exists[\alpha] \in N_{\pi_1(X,x_0)}(h_*(\pi_1(A,a_0))) : a = a_0 \cdot [\alpha]$$

が成り立つ．しかしながら写像 $\pi_1(X,x_0)\ni[\alpha]\mapsto a_0\cdot[\alpha]$ は $h_*(\pi_1(A,a_0))$ に関する左剰余類で決まるので，F_{a_0} は $N_{\pi_1(X,x_0)}(h_*(\pi_1(A,a_0)))$ の正規部分群 $h_*(\pi_1(A,a_0))$ に関する剰余群

$$N_{\pi_1(X,x_0)}(h_*(\pi_1(A,a_0)))/h_*(\pi_1(A,a_0))$$

と全単射で対応がつくことになる．

Theorem 3.5.5. 群 $N_{\pi_1(X,x_0)}(h_*(\pi_1(A,a_0)))/h_*(\pi_1(A,a_0))$ の各元 $h_*(\pi_1(A,a_0))[\alpha]$ について $a=a_0\cdot[\alpha]$ と置いて $\varphi(a_0)=a$ を満たすただ 1 つの $\varphi\in\mathrm{Aut}(A,h)$ を対応させる写像は群同型である．

Proof. 既にこの写像が全単射であることは示したので，準同型であることを示せば十分である． これは剰余類 $h_*(\pi_1(A,a_0))[\alpha]$, $h_*(\pi_1(A,a_0))[\beta]$ のそれぞれに φ, $\psi\in\mathrm{Aut}(A,h)$ が対応しているとする．つまり a_0 を始点とする α の持ち上げを $\tilde{\alpha}$ として終点 を $a=\tilde{\alpha}$ と置いて $\varphi(a_0)=a$ を満たす $\varphi\in\mathrm{Aut}(A,h)$ が対応しているということであり，同様に a_0 を始点とする β の持ち上げを $\tilde{\beta}$ として終点 を $b=\tilde{\beta}$ と置いて $\psi(a_0)=b$ を満たす $\psi\in\mathrm{Aut}(A,h)$ が対応している．このとき $\varphi\circ\tilde{\beta}$ の始点は $\varphi(a_0)=a$ であり，終点は $\varphi(b)$ である．$\varphi\circ\tilde{\beta}$ は β の持ち上げであるから道 $\tilde{\alpha}\cdot\varphi\circ\tilde{\beta}$ が定義でき $\alpha\cdot\beta$ の持ち上げである．よって

$$a_0\cdot([\alpha]\cdot[\beta])=\varphi(\tilde{\beta}(1))=\varphi(b)=\varphi\circ\psi(a_0)$$

となる．従って剰余類 $h_*(\pi_1(A,a_0))[\alpha]$, $h_*(\pi_1(A,a_0))[\beta]$ の積の剰余類 $h_*(\pi_1(A,a_0))[\alpha]\cdot[\beta]$ に $\varphi\circ\psi\in\mathrm{Aut}(A,h)$ が対応する．よってこの対応は群準同型である． □

Proposition 3.5.6. (A,h,X) を被覆空間とする．このとき，ある $a_0\in A$ において $h_*(\pi_1(A,a_0))$ が $\pi_1(X,h(a_0))$ の正規部分群であれば全ての $a\in A$ において $h_*(\pi_1(A,a))$ は $\pi_1(X,h(a))$ の正規部分群である．

Proof. $\tilde{\alpha}$ を a_0 を始点とし，a を終点とする A 内の道とする．そして $\alpha=h\circ\tilde{\alpha}$ と置くとこれは $h(a_0)$ を始点とし，$h(a)$ を終点とする X 内の道である．このとき

$$\pi_1(A,a)=[\tilde{\alpha}]^{-1}\pi_1(A,a_0)[\tilde{\alpha}],\quad \pi_1(X,h(a))=[\alpha]^{-1}\pi_1(X,h(a_0))[\alpha]$$

が成り立つ．$[\gamma]\in\pi_1(X,h(a))$ を任意に取り $\gamma_0=\alpha\cdot\gamma\cdot\alpha^{-1}$ と置けば γ_0 は $h(a_0)$ を基点とする閉道であり $[\gamma]=[\alpha]^{-1}[\gamma_0][\alpha]$ と表せるので

$$\begin{aligned}
[\gamma]^{-1}h_*(\pi_1(A,a))[\gamma]&=([\alpha]^{-1}[\gamma_0][\alpha])^{-1}h_*([\tilde{\alpha}]^{-1}\pi_1(A,a_0)[\tilde{\alpha}])[\alpha]^{-1}[\gamma_0][\alpha]\\
&=[\alpha]^{-1}[\gamma_0]^{-1}[\alpha][\alpha]^{-1}h_*(\pi_1(A,a_0))[\alpha][\alpha]^{-1}[\gamma_0][\alpha]\\
&=[\alpha]^{-1}([\gamma_0]^{-1}h_*(\pi_1(A,a_0))[\gamma_0])[\alpha]\\
&=[\alpha]^{-1}h_*(\pi_1(A,a_0))[\alpha]\quad(\because\ \text{正規性を用いた})\\
&=h_*([\tilde{\alpha}]^{-1}\pi_1(A,a_0)[\tilde{\alpha}])\\
&=h_*(\pi_1(A,a))
\end{aligned}$$

となる． □

Definition 3.5.7. (A,h) を X の被覆空間とする．ある $a_0\in A$ において $h_*(\pi_1(A,a_0))$ が $\pi_1(X,h(a_0))$ の正規部分群であれば全ての $a\in A$ において $h_*(\pi_1(A,a))$ は $\pi_1(X,h(a))$ の正規部分群である．このとき (A,h) は X の正則被覆空間 *(regular covering space)* であると言う．

さて群 G の部分群 H が正規部分群ならば正規化部分群 $N_G(H)$ は G となる．従って Theorem 3.5.5 より直ちに次の定理が成り立つことが分かる．

Theorem 3.5.8. (A,h) が X の正則被覆空間ならば任意の $a_0 \in A$ について被覆変換群 $\mathrm{Aut}(A,h)$ は剰余群 $\pi_1(X,h(a_0))/h_*(\pi_1(A,a_0))$ に同型である.

また同型対応は $h(a_0)$ を基点とする閉道 γ について $a = a_0 \cdot [\gamma]$ と置くとき $\varphi \in \mathrm{Aut}(A,h)$ で $\varphi(a_0) = a$ となるものが対応する.

正則空間の重要性は次の定理より分かるであろう.

Theorem 3.5.9. 被覆空間 (A,h,X) について次の 4 条件は互いに同値.

(i) (A,h,X) は正則.

(ii) ある点 *(任意の点としても同値な条件が得られる)* $x \in X$ において $h_*(\pi_1(A,a))$ は $a \in h^{-1}(x)$ に依らず一定である.

(iii) ある点 *(任意の点としても同値な条件が得られる)* $x \in X$ において x を基点とする X 内の任意の閉道 γ を各 $a \in h^{-1}(x)$ を始点として持ち上げるとき, 全ての a について一斉に閉道になるか, 一斉にそうでないか, のどちらかが成り立つこと.

(iv) ある点 *(任意の点としても同値な条件が得られる)* $x \in X$ において任意の $a,b \in h^{-1}(x)$ について $\varphi(a) = b$ を満たす $\varphi \in \mathrm{Aut}(A,h)$ が存在する.

Proof. (i) と (ii) が同値であることを示そう. (A,h,X) を正則被覆空間とする. $x \in X$ を任意に取る. $a,b \in h^{-1}(x)$ について $\tilde{\gamma}$ を a, b をそれぞれ始点, 終点とする A 内の道とすると, $\gamma = h \circ \tilde{\gamma}$ は x を基点とする X の閉道であるから

$$\begin{aligned} h_*(\pi_1(A,b)) &= h_*([\tilde{\gamma}]^{-1}\pi_1(A,a)[\tilde{\gamma}]) \\ &= [\gamma]^{-1}h_*(\pi_1(A,a))[\gamma] \\ &= h_*(\pi_1(A,a)) \quad (\because h_*(\pi_1(A,a)) \text{ の正規性を用いた}) \end{aligned}$$

となり, $h_*(\pi_1(A,a))$ は $a \in h^{-1}(x)$ に依らず一定である.

今度はある $x \in X$ において $h_*(\pi_1(A,a))$ が $a \in h^{-1}(x)$ に依らず一定であるとする. γ を x を基点とする閉道とし, $\tilde{\gamma}$ を (任意に取った) $a \in h^{-1}(x)$ を始点とする γ の持ち上げとし, b を $\tilde{\gamma}$ の終点とする. このとき

$$\begin{aligned} [\gamma]^{-1}h_*(\pi_1(A,a))[\gamma] &= h_*([\tilde{\gamma}]^{-1}\pi_1(A,a)[\tilde{\gamma}]) \\ &= h_*(\pi_1(A,b)) = h_*(\pi_1(A,a)) \end{aligned}$$

が成り立つので $h_*(\pi_1(A,a))$ は $\pi_1(X,x)$ の正規部分群である. よって (A,h,X) は正則である.

(ii) と (iii) の同値性を示そう. $h_*(\pi_1(A,a))$ が $a \in h^{-1}(x)$ に依らず一定であれば, 各 $[\gamma] \in \pi_1(X,x)$ について

$$\begin{aligned} &\forall a \in h^{-1}(x) : [\gamma] \in h_*(\pi_1(A,a)) \\ &\forall a \in h^{-1}(x) : [\gamma] \notin h_*(\pi_1(A,a)) \end{aligned}$$

のどちらかが成り立つ. これは Lemma 3.2.3 より γ を a を始点として持ち上げたときに一斉に閉道になるか, またはそうでないかが起こることを意味する.

逆にある点 $x \in X$ において, x を基点とする閉道 γ を $a \in h^{-1}(x)$ を始点として持ち上げたときに a に関わりなく一斉に閉道になるか, または一斉にそうでないかが起こるならば上の論理式のどちらかが成り立つということであり, これは $[\gamma] \in h_*(\pi_1(A,a))$ ならば他の $b \in h^{-1}(x)$ についても $[\gamma] \in h_*(\pi_1(A,b))$ となることを意味する. これは $h_*(\pi_1(A,b)) = h_*(\pi_1(A,a))$ を意味するので, $h_*(\pi_1(A,a))$ は $a \in h^{-1}(x)$ に依らず一定である.

最後に Theorem 3.3.5 (iii) より $a,b \in h^{-1}(x)$ について $\varphi(a) = b$ を満たす $\varphi \in \mathrm{Aut}(A,h)$ が存在する為の必要十分条件は $h_*(\pi(A,a)) = h_*(\pi(A,b))$ である. これより (ii) と (iv) の同値性は直ちに従う. □

3.6　不連続群と被覆空間

さて §3.4 において道連結かつ局所道連結な Hausdorff 空間 X が局所単連結ならば $\pi_1(X,x)$ の任意の部分群 H について $h_*(\pi_1(A,a)) = H$, $h(a) = x$ を満たす被覆空間 (A,h) が存在することを示した．この節では, 逆に A を与えて X を構成することを目標とする．

Definition 3.6.1. *A を位相空間とし G を A から自身への自己同相写像よりなる群とする．このとき $a,b \in A$ について同値関係を*

$$a \sim b \quad \overset{def}{\iff} \quad \exists\varphi \in G : \varphi(a) = b$$

で定義する．また $a \in A$ の属す同値類を z の軌道 (orbit) と呼び, A をこの同値関係で割った商集合を A/G と表し, 軌道空間 (orbit space) と呼ぶ．

Definition 3.6.2. *A を位相空間とし G を A から自身への自己同相写像よりなる群とする．このとき G の A への作用が真性不連続 (または) 固有に不連続 (prperly discontinuous) であるとは, 各 $a \in A$ について開近傍 U で, 任意の $\varphi \in G$, $\varphi \neq \mathrm{id}_A$ について $\varphi(U) \cap U = \emptyset$ が成り立つものが存在する時を言う．　このとき $\varphi, \psi \in G$ が $\varphi \neq \psi$ ならば $\varphi(U) \cap \psi(U) = \emptyset$ が成り立つことに注意しよう．*

Theorem 3.6.3. *A を道連結かつ局所道連結な Hausdorff 位相空間とする．G を X から自身への自己同相写像よりなる群とし $p : A \to X = A/G$ を自然な射影とする．このとき $(A, p, A/G)$ が被覆空間であるための必要十分条件は G の A への作用が真性不連続であることである．またこの場合, 被覆空間 $(A, p, A/G)$ は正則であり, G がこの被覆空間の被覆変換群である．*

Proof. $p : A \to A/G$ は明らかに全射である．また商空間 A/G の部分集合 H が開集合であるとは $p^{-1}(H)$ が開集合であることと定義されることを思い出しておこう．従って p は連続である．これより特に A/G の道連結性が従う．

$p : A \to A/G$ が開写像であることを示そう．さて A の部分集合 U について

$$\begin{aligned} a \in p^{-1}(p(U)) \quad &\iff \quad p(a) \in p(U) \\ &\iff \quad \exists b \in U : p(a) = p(b) \\ &\iff \quad \exists b \in U : \exists\varphi \in G : a = \varphi(b) \\ &\iff \quad \exists\varphi \in G : a \in \varphi(U) \end{aligned}$$

成り立つ．よって

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{\varphi \in G} \varphi(U)$$

が成り立つ．特に U が A の開集合ならば $\varphi(U)$ も開集合であるから $p^{-1}(p(U))$ も開集合である．これは商位相の定義より $p(U)$ が A/G の開集合であることを意味する．従って $p : A \to A/G$ は開写像である．

Step 1. G の A への作用が固有に不連続であるとする．このとき $\xi \in X/G$ について $p(x) = \xi$ となる $x \in X$ を取り x の道連結な開近傍 U を $\varphi, \psi \in G$ が $\varphi \neq \psi$ ならば $\varphi(U) \cap \psi(U) = emptyset$ が成り立つように取る．このとき $V = p(U)$ は X/G の開集合であり $\xi \in V$ ゆえ V の近傍である．また上で見たように

$$p^{-1}(V) = p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{\varphi \in G} \varphi(U)$$

であるが, 最右辺の和において $\{\varphi(U)\}_{\varphi \in G}$ は互いに素であり, 各 $\varphi(U)$ は道連結であるから, これは連結成分への分解を与えている．

次に $p|_U : U \to V = p(U)$ は全射であり, U の取り方より単射である．また連続な開写像であるから同相写像である．また $p|_{\varphi(U)} : \varphi(U) \to V$ は $p|_{\varphi(U)} = p|_U \circ (\varphi|_U)^{-1}$ と表せるので, やはり同相写像である．これで V が ξ の均一被覆近傍であることが分かったことになる．これから X/G が局所道連結であること, 及び X/G が Hausdorff 空間であることも従う．以上で $(X, p, X/G)$ が被覆空間であることが示された．

Step 2. 今度は $(X, p, X/G)$ が被覆空間であるとする．$x \in X$ について $\xi = p(x)$ とおいて $\xi \in X/G$ について, 均一被覆近傍 V を取る．

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

を $p^{-1}(V)$ の連結成分への分解とすれば, 各 $\lambda \in \Lambda$ について $p|_{U_\lambda} : U_\lambda \to V$ は同相である．$x \in U_{\lambda_0}$ を満たす $\lambda_0 \in \Lambda$ を取る．このとき $\varphi \in G, \varphi \neq \mathrm{id}_X$ について $\varphi(U_{\lambda_0}) \cap U_{\lambda_0} = \emptyset$ である．実際, もし $y \in \varphi(U_{\lambda_0}) \cap U_{\lambda_0}$ が存在したとして $y = \varphi(y_0)$ を満たす $y_0 \in U_{\lambda_0}$ を取る．このとき φ は被覆変換であり, $\varphi \neq \mathrm{id}_X$ であるから固定点を持たないので $y_0 \neq y$ である．一方 $p(y_0) = p(\varphi^{-1}(y)) = p(y)$ であるが, これは $p|_{U_{\lambda_0}}$ の単射性に矛盾する．

Step 3. 最後に $(X, p, X/G)$ が被覆空間であると仮定し, 正則性や G が被覆変換群を与えることを示そう．まず各 $\varphi \in G$ は $p \circ \varphi = p$ を満たすので被覆変換である．よって $G \subset \mathrm{Aut}(X, p)$ である．逆に $f \in \mathrm{Aut}(X, p)$ として $x_1 \in X$ を任意に取り $x_2 = f(x_1)$ とおく．このとき $p(x_2) = p(f(x_1)) = p(x_1)$ であるから, ある $\varphi \in G$ で $\varphi(x_1) = x_2$ を満たすものが存在する．φ は既に見たように被覆変換であるが f と同様に x_1 を x_2 に写像する．従って $\varphi = f$ が成り立つ． □

3.7 局所同相写像と被覆写像

Definition 3.7.1. 位相空間 X から Y への写像 $f : X \to Y$ が局所同相写像であるとは任意の $x \in X$ について x の開近傍 V で $f(V)$ が Y の開集合であり $f|_V : V \to f(V)$ が同相写像となるものが存在するときを言う．

局所同相写像は全単射ならば同相写像である．実際, 局所同相写像は定義より直ちに連続であり, さらに開写像であるから f^{-1} も連続である．また定義より直ちに同相写像は局所同相写像であることが分かる．さらに被覆写像も局所同相写像である．

局所同相写像は必ずしも被覆写像を与えない．例えば開区間 $(0, 4\pi)$ から $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ への写像 $(0, 4\pi) \ni t \mapsto (\cot t, \sin t) \in S^1$ は全射で局所同相写像であるが, $(1, 0) \in S^1$ の均一被覆近傍は存在しない．

Definition 3.7.2. 位相空間 X から Y への写像 $f : X \to Y$ が固有写像写像であるとは Y の任意の *compact* 部分集合 C について $f^{-1}(C)$ が X の *compact* 部分集合であるときを言う．

Theorem 3.7.3. *X, Y を弧状連結かつ局所弧状連結な Hausdorff 位相空間とし, Y は局所コンパクトとする．また $f : X \to Y$ を局所同相写像とする．このとき f が全射かつ固有写像ならば f は被覆写像である．*

Proof. $y_0 \in Y$ を任意に取る．$\{y_0\}$ は明らかに Y の compact 部分集合であり, f は固有写像であるから $f^{-1}(\{y_0\})$ は X の compact 部分集合である．各 $x \in f^{-1}(\{y_0\})$ についてその近傍 V_x を $f(V_x)$ が開集合で $f|_{V_x} : V_x \to f(V_x)$ が同相写像になるように取る．このとき開被覆

$$f^{-1}(\{y_0\}) \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(\{y_0\})} V_x$$

を考えよう．$f^{-1}(\{y_0\})$ は compact であるから有限個の相異なる $x_1, \ldots, x_n$ を

$$f^{-1}(\{y_0\}) \subset V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}$$

を満たすように取れる．ここで $x_1,\dots,x_n$ が相異なることと X が Hausdorff 空間であることより, 必要ならば小さく取り直すことにより $V_{x_1},\dots,V_{x_n}$ は互いに交わらないとしてよい．ここで $y_0\in f(V_{x_1})\cap\cdots\cap f(V_{x_n})$ であり, $f(V_{x_1})\cap\cdots\cap f(V_{x_n})$ は開集合である．よって Y の局所 compact 性より y_0 の開近傍 W で $\overline{W}$ は compact かつ $\overline{W}\subset f(V_{x_1})\cap\cdots\cap f(V_{x_n})$ を満たすものが存在する．このような y_0 の近傍を 1 つ取り W^* と置く．そして y_0 の開近傍 W で

(*)　　W は弧状連結 かつ $\overline{W}\subset W^*$

を満たすものを考えよう．Y の局所 compact 性と局所弧状連結性より, このような W は存在する．実際, Y の局所 compact 性より y_0 の近傍 W_1 で $\overline{W_1}$ が compact で $\overline{W_1}\subset W^*$ を満たすものが取れる．続いて Y の局所弧状連結性より $W\subset W_1$ を満たす弧状連結な y_0 の近傍 W を取れば $\overline{W}\subset\overline{W_1}\subset W^*$ が成り立つ．

Claim. y_0 の弧状連結な開近傍 W_0 で $\overline{W_0}\subset W^*$, $f^{-1}(\overline{W_0})\subset V_{x_1}\cup\cdots\cup V_{x_n}$ を満たすものが存在する．

$\because$　背理法により示そう．このような y_0 の近傍が存在しないと仮定すると (*) を満たす y_0 の任意の近傍 W について

$$f^{-1}(\overline{W})\backslash\{V_{x_1}\cup\cdots\cup V_{x_n}\}\neq\emptyset$$

が成り立つ．ここで (*) を満たす y_0 の近傍の任意有限個 $W_1,\dots,W_m$ について考えよう．$W_1\cap\cdots\cap W_m$ も y_0 の開近傍であるから y_0 の弧状連結な開近傍 W' を $W'\subset W_1\cap\cdots\cap W_m$ を満たすように取れば

$$\overline{W'}\subset\overline{W_1}\subset W^*$$

が成り立つ．よって背理法の仮定より

$$\bigcap_{k=1}^{m}\{f^{-1}(\overline{W_k})\backslash(V_{x_1}\cup\cdots\cup V_{x_n})\}=\left\{\bigcap_{k=1}^{m}f^{-1}(\overline{W_k})\right\}\backslash(V_{x_1}\cup\cdots\cup V_{x_n})\supset f^{-1}(\overline{W'})\backslash(V_{x_1}\cup\cdots\cup V_{x_n})\neq\emptyset$$

が成り立つ．つまり (*) を満たす y_0 の開近傍 W により $f^{-1}(\overline{W})\backslash(V_{x_1}\cup\cdots\cup V_{x_n})$ と表される集合のすべてがなす族は空でなく, 有限交差性を持つ．$f^{-1}(\overline{W})$ は Hausdorff 空間 X の compact 集合であるから閉集合であり, $f^{-1}(\overline{W})\backslash(V_{x_1}\cup\cdots\cup V_{x_n})$ も閉集合である．同様に $f^{-1}(\overline{W^*})\backslash(V_{x_1}\cup\cdots\cup V_{x_n})$ も閉集合であり, compact 集合 $f^{-1}(\overline{W^*})$ の部分集合ゆえ compact である．

以上より compact 集合 $f^{-1}(\overline{W^*})\backslash(V_{x_1}\cup\cdots\cup V_{x_n})$ の部分閉集合の族

$$f^{-1}(\overline{W})\backslash(V_{x_1}\cup\cdots\cup V_{x_n}),\quad W \text{ は (*) を満たす } y_0 \text{ の開近傍}$$

が有限交差性を持つことが示された．よってこの族の共通部分は空でない．そこで

$$x_0\in\bigcap_{W\text{ は (*) を満たす }y_0\text{ の開近傍}}f^{-1}(\overline{W})\backslash(V_{x_1}\cup\cdots\cup V_{x_n}),$$

を取れば (*) を満たす任意の y_0 の開近傍 W について $f(x_0)\in W$ が成り立つ．Y の Hausdorff 性と局所弧状連結を用いれば $f(x_0)=y_0$ を背理法で示すことは容易である．しかしながら $x_0\notin V_{x_1}\cup\cdots\cup V_{x_n}$ であるから x_0 は $\{x_1,\dots,x_n\}=f^{-1}(\{y_0\})$ に属さない．これは矛盾である．

Claim の弧状連結な y_0 の開近傍 W_0 について $W_0\subset f(V_{x_j})$ $(j=1,\dots,n)$ より $V_j:=f|_{V_{x_j}}^{-1}(W_0)$ と置けば $f|_{V_j}:V_j\to W_0$ は同相写像であり, $f^{-1}(W_0)\subset V_{x_1}\cup\cdots\cup V_{x_n}$ より

$$f^{-1}(W_0)=\bigcup_{j=1}^{n}V_j,\quad V_1,\dots,V_n \text{ は互いに素であり } f|_{v_j}\to W_0 \text{ は同相}$$

が成り立つ．つまり W_0 は y_0 の均一被覆近傍である．　□

Corollary 3.7.4. 球面 S^n, $n \geq 2$ から自身への局所同相写像 $f : S^n \to S^n$ は同相写像である．

Proof. 明らかに S^n は局所 compact, 弧状連結かつ局所弧状連結な Haudorff 空間である．従って局所同相写像 $f : S^n \to S^n$ が全射かつ固有写像であることを示せば, Theorem 3.7.3 より被覆写像であることが分かる．加えて S^n は単連結であるから $f : S^n \to S^n$ は同相写像である．これは前節までの被覆空間の知識があれば直ちに了解されるであろうし, $q_0 = f(p_0)$ を満たす p_0, q_0 を取り, q_0 から任意の点 $q \in S^n$ へ向かう道を p_0 を始点として持ち上げれば, S^n の単連結性より, その終点 p は道に依らず定まる (一価性の定理)．そこで $p = g(q)$ と置いて写像 $g : S^n \to S^n$ を定める．このとき持ち上げの性質より $f(g(q)) = q$ が成り立ち, 持ち上げの一意性より $g(f(p)) = p$ が成り立つ．また g の作り方より g は局所同相写像であり連続である．よって f は連続な逆写像を持つので同相写像である．

全射性. S^n は compact ゆえ, 連続像 $f(S^n)$ も compact であり, 特に閉集合である．また f の局所同相性より $f(S^n)$ は開集合である．よって互いに素な和

$$S^n = f(S^n) \cup (S^n \backslash f(S^n))$$

において $f(S^n)$, $S^n \backslash f(S^n)$ ともに開集合である．$f(S^n)$ は空でなく, S^n は連結であるから $f(S^n) = S^n$ でなければならない．つまり f は全射である．

固有性. $C \subset S^n$ を compact 集合とすると, C は閉集合であるから $f^{-1}(C)$ も閉集合である．$f^{-1}(C)$ は compact 集合 S^n の閉部分集合であるから compact である．従って f は固有写像である． □

Corollary 3.7.4 は $n = 1$ の場合には成り立たない．Theorem 3.7.3 を用いると局所同相写像 $f : S^1 \to S^1$ は被覆写像であることを結論できるが, S^1 は単連結ではないので普遍被覆写像となるかどうかは分からない．実際 n 重の被覆写像 $S^1 \ni (\cos t, \sin t) \mapsto (\cos nt, \sin nt) \in S^1$, $n \geq 2$ は局所同相であるが, 同相写像ではない．しかしながら仮定を変更し, $f : S^1 \to S^1$ が連続な単射ならば同相写像になることが証明できる．証明のあらすじは, まず連続性と中間値の定理を用いて局所同相写像であることが示され, これより $f(S^1)$ が開かつ閉となるので $f(S^1) = S^1$ が従う．従って f は連続な全単射になり, 局所同相性と合わせて同相写像であることが分かる．

第 II 部

平面の幾何

第 4 章

Jordan の曲線定理

この章では 1984 年に発表された, 琉球大学の前原先生の論文 [15] “The Jordan curve Theorem via the Brouwer fixed point theorem”, American Mathematical Monthly **91** (1984), 641-643. による Jordan の曲線定理の証明を解説する．この論文は Moise [18] による Jordan の曲線定理の証明をできるだけ簡略化したものだそうである．題名から分かるように Brouwer の不動点定理を用いるというところが新機軸である．とは言うものの, よく読めば平面内の閉曲線の回転数の概念と Tietze の拡張定理さえ知っていれば十分であり Brouwer の不動点定理は必要がない．前原先生の証明を理解するのに必要なのは,

(i) $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ が単純曲線, つまり γ が連続な単射である時に, その像の補集合 $\mathbb{C}\backslash\gamma([0, 1])$ が連結であること．

(ii) 長方形の垂直な 2 辺を結ぶ閉長方形内の曲線と, 水平な垂直な 2 辺を結ぶ閉長方形内の曲線は必ず交わる．

という 2 つの結果である．(i) は Tietze の拡張定理を用いて証明される．(ii) は Jordan の曲線定理以上に直観的には肯定しやすい結果であるが, 証明を行うのはそれほど容易でない．この冊子では Milnor [**?**] に従い閉曲線の回転数を用いて, 連続写像 $\varphi : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ が $\varphi(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$ を満たせば全射であるという事実を証明し, そこから (ii) を導く．またおまけとして Brouwer の不動点定理を証明しておく．

一応, 準備的な節 §4.1, 4.2, 4.3 を設け Tietze の拡張定理や, 平面内の曲線の回転数について初学者にも分かるように解説を行ったが, 既に学習済みで必要としない読者も多いであろう．§4.4 において紹介する Jordan の曲線定理の証明は実質 1,2 ページで終わる．これだけ短い証明は他に見たことがない．この証明のおまけとして, Jordan 曲線の内部の点に関し, 回転数が ± 1 となることも解説しておいた．最後の §4.5 は Jordan の曲線定理から直ちに従う結果や横断線についての解説である．

4.1 Tietze の拡張定理

集合 S を距離 d を持つ距離空間とし, 点 $p \in S$ と空でない部分集合 $A \subset S$ について p と A 間の距離を

$$d(p, A) = \inf\{d(q, p) : q \in A\}$$

で定義する．このとき $d(p, A)$ は $p \in S$ の函数とみなして Lipschitz 連続である．実際, 任意の p_0, $p_1 \in S$ と $q \in A$ について

$$d(p_0, A) \leq d(p_0, q) \leq d(p_0, p_1) + d(p_1, q)$$

が成り立つので, $d(p_0, A) \leq d(p_0, p_1) + d(p_1, A)$ を得る．同様に $d(p_1, A) \leq d(p_1, p_0) + d(p_0, A)$ も成り立つので,

$$|d(p_0, A) - d(p_1, A)| \leq d(p_0, p_1)$$

が得られる．よって $d(p,A)$ は Lipschitz 定数 1 の Lipschitz 連続函数である．

さて $p \in A$ ならば $d(p,A)=0$ であるが, $d(p,A)=0$ であっても $p \in A$ とは限らない．しかしながら A が閉集合のときは

$$d(p,A)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad p \in A$$

及び, これの対偶である命題

$$d(p,A)>0 \quad \Longleftrightarrow \quad p \notin A$$

が成り立つ．

Definition 4.1.1. 位相空間 S が *Hausdorff* 空間であるとは，任意の相異なる 2 点 $p,q \in S$ について, 共通部分を持たない 2 つの開集合 $U,\ V$ で $p \in U,\ q \in V$ を満たすものが存在することであった．同様に S が正規空間であるとは

(i) 任意の $p \in S$ について 1 点よりなる集合 $\{p\}$ は閉集合である．
(ii) 共通部分を持たない 2 つの閉集合 $F_1,\ F_2$ について, 共通部分を持たない 2 つの開集合 $G_1,\ G_2$ で $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$ を満たすものが存在する．

の 2 条件が成り立つときを言う．

位相空間 S が正規空間ならば Hausdorff 空間であることは明らかであろう．また S が距離空間ならば正規空間であることも容易に分かる．実際 S が距離 d を持つとき, 任意の $p \in S$ について $S\backslash\{p\}=\{q \in S : d(q,p)>0\}$ であるから $S\backslash\{p\}$ は開集合であり, 従って $\{p\}$ は閉集合である．また F_1, F_2 が共通部分を持たない 2 つの閉集合であれば

$$G_1=\{p \in S : d(p,F_1)<d(p,F_2)\}, \qquad G_2=\{p \in S : d(p,F_2)<d(p,F_1)\},$$

と置けば G_1, G_2 は共通部分を持たず, ともに開集合であり, 明らかに $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$ を満たす．

Tietze-Urysohn の定理とは Hausdorff 空間 S が正規空間であるためには, 次の定理の結論が成り立つことが必要十分であることを主張するものである．一般の場合の証明は難しくないが少々手間がかかるので, ここでは距離空間に限定し, 必要条件であることのみを示しておく．後に応用する際には, この形で十分である．

Theorem 4.1.2 (Tietze-Urysohn の定理)**.** $F_0,\ F_1$ を距離空間 S 内の空でない閉集合で $F_0 \cap F_1=\emptyset$ とする．このとき連続関数 $f : S \to [0,1]$ で F_0 上で $f(p)=0$, F_1 上で $f(p)=1$ となるものが存在する．

Proof. $F_0 \cap F_1=\emptyset$ より $d(p,F_0)+d(p,F_1)>0$ が S 上で成り立つ．また $d(p,F_0)+d(p,F_1)$ は p の函数とみなして S で連続である．そこで

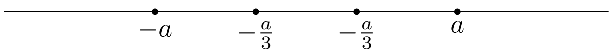
$$f(p)=\frac{d(p,F_0)}{d(p,F_0)+d(p,F_1)}$$

と置けば良い． □

次に述べる Tietze の拡張定理も Hausdorff 空間 S が正規空間であるためには, 次の定理の結論が成り立つことが必要十分であることを主張するものである．今度も距離空間に限定し, 必要性のみを示そう．

Theorem 4.1.3 (Tietze の拡張定理)**.** 距離空間 S 内の空でない閉集合 F 上の連続函数 $g : F \to [-a,a]$ について, 連続函数 $f : S \to [-a,a]$ で $f|_F=g$ を満たすものが存在する．

Proof. まず区間 $[-a,a]$ を 3 等分すると $[-a,-\frac{a}{3}]$, $(-\frac{a}{3},\frac{a}{3})$, $[\frac{a}{3},a]$ のように 2 つの閉区間と 1 つの開区間に分けることが出来る．このとき集合 $g^{-1}([-a,-\frac{a}{3}])$ と $g([\frac{a}{3},a])$ は, ともに S の閉集合であり, 共通部分を持たない．したがって



区間 $[-a, a]$ を 3 等分

Theorem 4.1.2 より連続函数 $f_0 : S \to [-\frac{a}{3}, \frac{a}{3}]$ で, それぞれの閉集合上, 値 $-\frac{a}{3}$ と $\frac{a}{3}$ を取るものが存在する. ここで $F = g^{-1}([-a, -\frac{a}{3}]) \cup g^{-1}((-\frac{a}{3}, \frac{a}{3})) \cup g^{-1}([\frac{a}{3}, a])$ と分解し, それぞれの集合上で g と f_0 の値を比較すれば

$$|g(p) - f_0(p)| \leq \frac{2a}{3} \quad \text{on } F$$

が成り立つ.

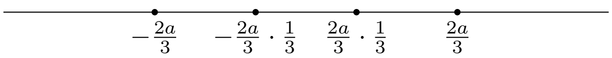
次に $g_1(p) = g(p) - f_0(p)$ と置き $g_1 : F \to [-\frac{2a}{3}, \frac{2a}{3}]$ に同じ操作を行えば S 上の連続函数 f_1 で

$$|f_1(p)| \leq \frac{2a}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

かつ

$$|g_1(p) - f_1(p)| \leq \frac{2a}{3} \cdot \frac{2}{3} = a\left(\frac{2}{3}\right)^2 \quad \text{on } F$$

を満たすものが存在する.



区間 $\left[-\frac{2a}{3}, \frac{2a}{3}\right]$ を 3 等分

以上の操作を順次繰り返せば S 上の連続函数列 $\{f_n\}$ と F 上の連続函数列 $\{g_n\}$ で, F 上 $g_n = g_{n-1} - f_{n-1}$

$$|f_n(p)| \leq a\left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{3} \text{ on } S$$

かつ

$$|g(p) - f_0(p) - \cdots - f_n(p)| = |g_n(p) - f_n(p)| \leq a\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \quad \text{on } F$$

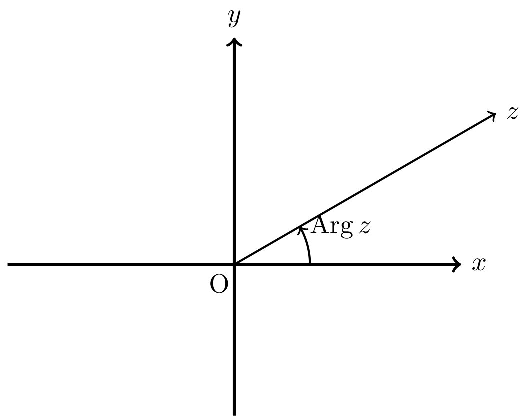
を満たすものが取れる. このとき $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ は S 上で連続な函数列の一様収束極限であるから S で連続であり, $|f(p)| \leq \frac{a}{3}\frac{1}{1-2/3} = a$ を満たす. また F 上で g と f は一致する. □

4.2　曲線の回転数

区間 $I(\subset \mathbb{R})$ から位相空間 X への連続写像 $\gamma : I \to X$ のことを曲線 (curve) と呼ぶ. 以下では $X = \mathbb{C}$ とし, 複素平面内の曲線を考えることにする. 本来 I の形については閉区間 $[a, b]$, 開区間 (a, b), 半開区間 $(a, b]$, $[a, b)$ など区間 (= $\mathbb{R}$ の連結部分集合) であれば何でもよいのであるが, 本書では主に有界閉区間 $[a, b]$ の場を合考える. 勿論 $-\infty < a < b < \infty$ を満たす a, b とする. 写像 γ が単射 (1 対 1) のとき γ は単純曲線 (simple curve) であると言う.

曲線 γ の定義域 I が有界閉区間 $[a, b]$ のとき $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ をそれぞれ曲線 γ の始点 (initial point), 終点と言い, 両方を合わせて端点と呼ぶ. このとき $\gamma(a) = \gamma(b)$ が成り立つならば γ は閉曲線 (closed curve) であると言う. 閉曲線 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ が単純であるとは $a \leq s < t < b$ を満たす任意の s, t に対し $\gamma(s) \neq \gamma(t)$ が成り立つときを言う. つまり始点 = 終点以外では自己交叉を持たないことである. 単純閉曲線 (simple closed curve) は Jordan 曲線 (Jordan curve) と呼ばれ, 本書の主題である. 閉曲線の場合, 有界閉区間ではなく単位円周 $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ を定義域として採用することも多い. 例えばこの場合, 閉曲線 $\gamma : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ が単純であるとは単に単射であることになる.

$z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ について原点から出発し z を通る半直線と正の実軸のなす角を z の偏角を $\operatorname{Arg} z$ と表す．但し $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲に制限したものとする．このとき $\operatorname{Arg} z$ は複素平面から負の実軸を除いた領域で連続である．また $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$ は成り立つとは限らないが $e^{i \operatorname{Arg}(z_1 z_2)} = e^{i \operatorname{Arg} z_1 + i \operatorname{Arg} z_2}$ は成り立つ．つまり適当



な整数 k により $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + 2\pi k$ が成り立つ．同様に $z_1, \dots z_n \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ についてある整数 k で

$$\operatorname{Arg}(z_1 \cdots z_n) = \operatorname{Arg} z_1 + \cdots + \operatorname{Arg} z_n + 2\pi k \tag{4.2.1}$$

を満たすものが存在する．

曲線 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ が与えられたとし $z_0 \notin \gamma([a, b])$ とする．このとき z_0 における γ の回転角 (winding number) と呼ばれる数を以下のように定義する．

回転角の定義の仕方． まず $0 < d < d_0 := \inf\{|\gamma(t) - z_0| : a \leq t \leq b\}$ を満たす d を取る．このとき γ の一様連続性より, ある $\delta > 0$ を

$$s, t \in [a, b], \quad |s - t| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad |\gamma(s) - \gamma(t)| \leq d$$

が成り立つように取れる．$[a, b]$ の分割 $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ で

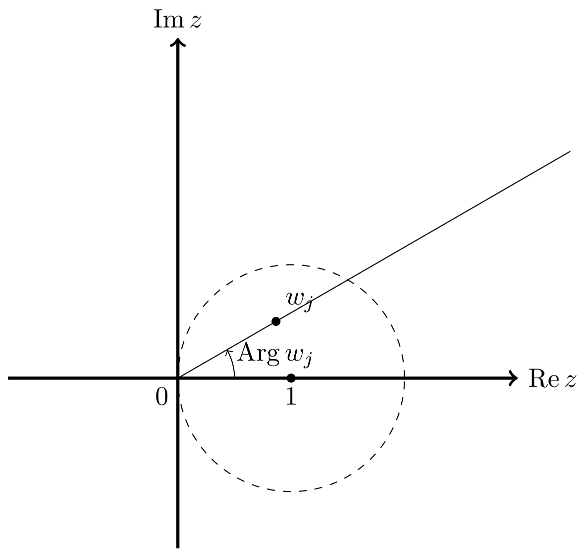
$$\max\{|t_j - t_{j-1}| : j = 1, 2, \dots, n\} \leq \delta \tag{4.2.2}$$

を満たすものについて $|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \leq d$ であるから

$$w_j = \frac{\gamma(t_j) - z_0}{\gamma(t_{j-1}) - z_0}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

と置けば

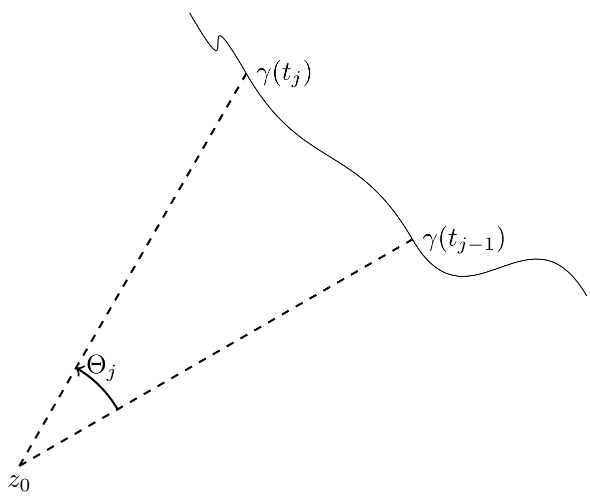
$$|w_j - 1| = \left| \frac{\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})}{\gamma(t_{j-1}) - z_0} \right| \leq \frac{d}{d_0} < 1$$



より $1 - \operatorname{Re} w_j \leq |w_j - 1| < 1$ となり $\operatorname{Re} w_j > 0$ が成り立つ．従って偏角 $\Theta_j = \operatorname{Arg} w_j \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ は一意に定まる．そこで

$$\Theta(\gamma, z_0) := \sum_{j=1}^{n} \Theta_j = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Arg}\left(\frac{\gamma(t_j) - z_0}{\gamma(t_{j-1}) - z_0}\right) \tag{4.2.3}$$

と置く．右辺は区間 $[a, b]$ の分割に依存せず定まる量であることが後の議論で分かるので，これを曲線 γ の z_0 における回転角と呼ぶ．すなわち曲線が $\gamma(t_{j-1})$ から $\gamma(t_j)$ に進むときに点 z_0 から見込んだ角度の増分を $j = 1, \ldots, n$ について総和したものである．



それでは (4.2.3) の右辺が $[a, b]$ の分割に依らないことを示そう．それには (4.2.2) を満たす 2 つの分割について右辺が一致することを示そう．それには一方の分割の分点に，もう一方の分割の分点を 1 つづつ追加していく操作を行っても，右辺が変わらないことを言えばよい．従ってある $j \in \{1, \ldots, n\}$ について $\tau \in (t_{j-1}, t_j)$ とし，$[t_{j-1}, t_j]$ が $[t_{j-1}, \tau]$ と $[\tau, t_j]$ に細分される時，Θ_j と対応する

$$\Theta'_j = \operatorname{Arg}\left(\frac{\gamma(\tau) - z_0}{\gamma(t_{j-1}) - z_0}\right), \quad \Theta''_j = \operatorname{Arg}\left(\frac{\gamma(t_j) - z_0}{\gamma(\tau) - z_0}\right)$$

について $\Theta_j = \Theta'_j + \Theta''_j$ を示すことに帰着される．これは

$$\frac{\gamma(t_j)-z_0}{\gamma(t_{j-1})-z_0} = \frac{\gamma(\tau)-z_0}{\gamma(t_{j-1})-z_0}\cdot\frac{\gamma(t_j)-z_0}{\gamma(\tau)-z_0}$$

より，ある整数 k により

$$\Theta_j = \Theta'_j + \Theta''_j + 2\pi k$$

が成り立つが，

$$|\Theta_j|,\ |\Theta'_j|,\ |\Theta''_j| \le \frac{\pi}{2}$$

であるから $|\Theta_j - (\Theta'_j + \Theta''_j)| \le \frac{3\pi}{2}$ である．従って $k = 0$ でなければならず $\Theta_j = \Theta'_j + \Theta''_j$ が成り立つ． □

Theorem 4.2.1. 曲線 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ の回転角 $\Theta(\gamma, z)$ は z の函数として，曲線の像の補集合 $\mathbb{C}\backslash\gamma([a, b])$ で連続である．

Proof. 回転角を導入したときの記号を用いる．

$$|\gamma(t) - z'| \ge |\gamma(t) - z| - |z - z'| \ge d_0 - |z - z'|$$

より $|z - z'| < d_0 - d$ ならば $|\gamma(t) - z'| > d$ が成り立つので，$\Theta(\gamma, z')$ を定義するときの分割として $\Theta(\gamma, z)$ を定義したときの分割と同じものを採用してよい．このとき

$$\Theta_j = \mathrm{Arg}\left(\frac{\gamma(t_j)-z}{\gamma(t_{j-1})-z}\right), \quad \text{and} \quad \Theta'_j = \mathrm{Arg}\left(\frac{\gamma(t_j)-z'}{\gamma(t_{j-1})-z'}\right) \qquad j = 1, \ldots, n$$

は Arg の連続性より任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を $|z_0 - z'_0| < \delta$ ならば

$$|\Theta_j - \Theta'_j|\frac{\varepsilon}{n} \qquad j = 1, \ldots, n$$

が成り立つように取れる．このとき容易に分かるように $|z - z'| < \delta$ ならば

$$|\Theta(\gamma, z) - \Theta(\gamma, z')| \le \sum_{j=1}^{n} |\Theta_j - \Theta'_j| < \varepsilon$$

が成り立つ．よって $\Theta(\gamma, z)$ は z について連続である． □

Definition 4.2.2 (回転数の定義)**.** 曲線 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ が閉曲線の場合には $\gamma(t_0) = \gamma(a) = \gamma(b) = \gamma(t_n)$ であるから

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{\gamma(t_j)-z_0}{\gamma(t_{j-1})-z_0} = \frac{\gamma(t_n)-z_0}{\gamma(t_0)-z_0} = 1$$

であるから *(4.2.1)* を用いて $\sum_{j=1}^{n} \Theta_j$ は 2π の整数倍であることが分かる．そこで

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Arg}\,\frac{\gamma(t_j)-z_0}{\gamma(t_{j-1})-z_0} \tag{4.2.4}$$

と置いて，曲線 γ の点 $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\gamma([0, 1])$ に関する回転数 *(winding number)* と呼ぶ．

例えば単位円周を反時計回りに 1 周する曲線 $\gamma : [0, 1] \to e^{2\pi i t} = \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t$ について $n(\gamma, 0) = 1$, $n(\gamma, 2) = 0$ となることは容易に分かるであろう．

さて $\gamma([a, b])$ はコンパクトであるからある正の数 R で $\gamma([a, b]) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \le R\}$ を満たすものが存在する．よって 補集合 $\mathbb{C}\backslash\gamma([a, b])$ は $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ を含む．従って補集合 $\mathbb{C}\backslash\gamma([a, b])$ の成分で ∞ の近傍 $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ を含むものが唯一つ存在する．これを $\mathbb{C}\backslash\gamma([a, b])$ の非有界成分と呼ぶ．勿論，他の成分は (もし存在すれば) 有界である．

Theorem 4.2.3. 閉曲線 γ の回転数 $n(\gamma, z)$ は z の函数として, 閉曲線の像の補集合 $\mathbb{C}\backslash\gamma([a,b])$ の各成分上で定数であり, 特に非有界成分上で 0 である.

Proof. $n(\gamma, z)$ は整数値であり, Theorem 4.2.1 より z について連続である. 従って $\mathbb{C}\backslash\gamma([a,b])$ の各成分上で一定値である. これを示すために Ω を $\mathbb{C}\backslash\gamma([a,b])$ の成分とし, $z_0 \in \Omega$ を任意に 1 つ取る. このとき

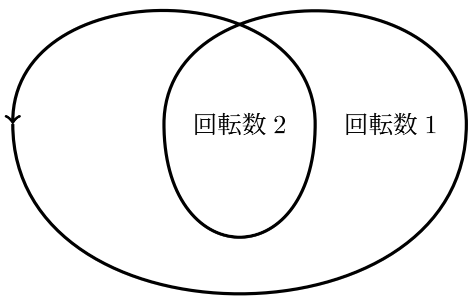
$$\Omega_0 = \{z \in \Omega : n(\gamma, z) = n(\gamma, z_0)\},$$
$$\Omega_1 = \{z \in \Omega : n(\gamma, z) \neq n(\gamma, z_0)\}$$

と置けば, ともに開集合であり $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$ かつ $\Omega_0 \cap \Omega_1 = \emptyset$ が成り立つ. また $z_0 \in \Omega_0$ より $\Omega_0 \neq \emptyset$ である. ここで $\Omega_1 \neq \emptyset$ と仮定すると Ω_0, Ω_1 が Ω の分割を与えることになり, Ω の連結性に反する. 従って $\Omega_1 = \emptyset$ であり, $\Omega = \Omega_0$ が成り立つ. これは $n(\gamma, z)$ が Ω 上で一定値 $n(\gamma, z_0)$ に等しいことを示す.

補集合 $\mathbb{C}\backslash\gamma([a,b])$ の非有界成分を Ω_∞ と置き $\{w \in \mathbb{C} : |w| > R\} \subset \Omega_\infty$ を満たす $R > 0$ を取る. ここで $|z_0| > 3R$ ならば $|\gamma(t) - z_0| \geq 3R - R = 2R$ が成り立ち, $|\gamma(s) - \gamma(t)| \leq 2R$ であるから $n(\gamma, z_0)$ を定義するときの分割として "$n = 1$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$" を採用してよい. よって

$$\Theta_1 = \operatorname{Arg}\left(\frac{\gamma(1) - z_0}{\gamma(0) - z_0}\right) = \operatorname{Arg} 1 = 0$$

となるので $n(\gamma, z_0) = 0$ である. 回転数は各成分上で一定値であるから Ω_∞ 上で 0 である. □



次に回転角と回転数は曲線を連続的に変形しても変化しないことを示そう.

Theorem 4.2.4. 2 つの曲線 $\gamma_0 : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ について始点と終点が一致, つまり $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ かつ $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ が成り立っているとする. また $F : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ を γ_0 と γ_1 を結ぶ連続変形とする. つまり写像 F は連続で

$$F(t,0) = \gamma_0(t),\ F(t,1) = \gamma_1(t),\ F(a,s) = \gamma_0(a)\ \mathit{and}\ F(b,s) = \gamma_0(b) \quad (t,s) \in [a,b] \times [0,1]$$

を満たすとする. このとき $z_0 \notin F([a,b] \times [0,1])$ について $\Theta(\gamma_0, z_0) = \Theta(\gamma_1, z_0)$ が成り立つ. また γ_0, γ_1 が閉曲線の場合は $n(\gamma_0, z_0) = n(\gamma_1, z_0)$ が成り立つ.

Proof. 各 $s \in (0,1)$ について

$$\gamma_s(t) = F(t,s), \quad 0 \leq t \leq 1$$

と置く. (γ_s は $\gamma_0(0)$ を始点と終点とする閉曲線であり, s が 0 から 1 まで動く間に γ_s は γ_0 から γ_1 に連続的に動くと考えられる.)

$$d_0 = \inf\{|F(t,s) - z_0| : (t,s) \in [a,b] \times [0,1]\} > 0$$

と置き, $d \in (0, d_0)$ を取る．そして $\delta > 0$ を $|t-t'| < \delta$, $|s-s'| < \delta$ ならば

$$|F(t,s) - F(t',s')| < d$$

が成り立つように取る．このとき分割 $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = b$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ で $\max\{s_1 - s_0, \dots, s_n - s_{m-1}, t_1 - t_0, \dots, t_n - t_{n-1}\} < \delta$ を満たすものについて

$$\Theta(\gamma_{s_j}, z_0) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arg}\left(\frac{\gamma_{s_j}(t_k) - z_0}{\gamma_{s_j}(t_{k-1}) - z_0}\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arg}\left(\frac{F(t_k, s_j) - z_0}{F(t_{k-1}, s_j) - z_0}\right)$$

が j に依らず一定であることを示せばよい．各 $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, n$ に対しある整数 k を用いて

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Arg}\left(\frac{F(t_k, s_j) - z_0}{F(t_{k-1}, s_j) - z_0}\right) - \operatorname{Arg}\left(\frac{F(t_k, s_{j-1}) - z_0}{F(t_{k-1}, s_{j-1}) - z_0}\right) \\
&= \operatorname{Arg}\left(\frac{F(t_k, s_j) - z_0}{F(t_k, s_{j-1}) - z_0}\right) - \operatorname{Arg}\left(\frac{F(t_{k-1}, s_j) - z_0}{F(t_{k-1}, s_{j-1}) - z_0}\right) + 2\pi k
\end{aligned}$$

と表せるが, 偏角に関する 4 つの項の絶対値が全て $< \frac{\pi}{2}$ であることより $k = 0$ が従う．よって

$$\begin{aligned}
&\Theta(\gamma_{s_j}, z_0) - \Theta(\gamma_{s_{j-1}}, z_0) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arg}\left(\frac{F(t_k, s_j) - z_0}{F(t_{k-1}, s_j) - z_0}\right) - \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arg}\left(\frac{F(t_k, s_{j-1}) - z_0}{F(t_{k-1}, s_{j-1}) - z_0}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \operatorname{Arg}\left(\frac{F(t_k, s_j) - z_0}{F(t_k, s_{j-1}) - z_0}\right) - \operatorname{Arg}\left(\frac{F(t_{k-1}, s_j) - z_0}{F(t_{k-1}, s_{j-1}) - z_0}\right) \right\} \\
&= \operatorname{Arg}\left(\frac{F(t_n, s_j) - z_0}{F(t_n, s_{j-1}) - z_0}\right) - \operatorname{Arg}\left(\frac{F(t_0, s_j) - z_0}{F(t_0, s_{j-1}) - z_0}\right) \\
&= \operatorname{Arg}\left(\frac{F(b, s_j) - z_0}{F(b, s_{j-1}) - z_0}\right) - \operatorname{Arg}\left(\frac{F(a, s_j) - z_0}{F(a, s_{j-1}) - z_0}\right) \\
&= \operatorname{Arg}\left(\frac{\gamma_0(b) - z_0}{\gamma_0(b) - z_0}\right) - \operatorname{Arg}\left(\frac{\gamma_0(a) - z_0}{\gamma_0(a) - z_0}\right) = \operatorname{Arg} 1 - \operatorname{Arg} 1 = 0
\end{aligned}$$

□

Definition 4.2.5. 写像 $\varphi : [a', b'] \to [a, b]$ を向きを保つ $[a', b']$ から $[a, b]$ への同相写像とする．つまり φ は狭義増加で連続であり, $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$ を満たすとする．このとき φ^{-1} も同じように狭義増加で連続であり, $\varphi^{-1}(a) = a'$, $\varphi^{-1}(b) = b'$ を満たすことに注意しよう．曲線 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ について合成写像 $\gamma \circ \varphi : [a', b'] \to \mathbb{C}$ のことを γ のパラメータを取り替えて出来る曲線と呼ぶ.

パラメータを取り替えても γ の回転角は変わらないこと示そう.

Theorem 4.2.6. $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ を曲線とし, $\varphi : [a', b'] \to [a, b]$ をパラメータの取り替えの写像とすると

$$\Theta(\gamma \circ \varphi, z) = \Theta(\gamma, z), \quad z \in \mathbb{C} \backslash \gamma([a, b])$$

が成り立つ．また γ が閉曲線の場合は $n(\gamma \circ \varphi, z_0) = n(\gamma, z_0)$ が成り立つ.

Proof. はじめに $\psi : [a, b] \to [a', b']$ を

$$\psi(t) = \frac{b' - a'}{b - a}(t - a) + b, \qquad a \le t \le b$$

と置く．ψ は一次函数であり $[a, b]$ から $[a', b']$ への向きを保つ同相写像である．このような写像を合成しても任意の曲線 $\gamma' : [a', b'] \to \mathbb{C}$ について等式 $\Theta(\gamma' \circ \psi, z_0) = \Theta(\gamma', z_0)$ が成り立つことは, 回転角の導入の仕方から容易に分かる.

従って $\Theta(\gamma\circ\varphi\circ\psi, z) = \Theta(\gamma\circ\varphi, z)$ が成り立つ．よってはじめから $a' = a$, $b' = b$ の場合に定理を示せば十分である．このとき

$$F(t,s) = \gamma((1-s)t + s\varphi(t)), \quad a \le t \le b,\ 0 \le s \le 1$$

と置けば, γ から $\gamma\circ\varphi$ への連続変形であるから Theorem 4.2.4 より $\Theta(\gamma, z) = \Theta(\gamma\circ, z)$ が $z \in \mathbb{C}\backslash\gamma([a,b])$ について成り立つことが分かる． □

Remark 4.2.7. 今までは "曲線 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$" のように, 曲線については定義域を明記してきたが, 本書で考えるのは *Jordan* の曲線定理のように像 $\gamma([a,b])$ にのみ依存する性質や, 回転角, 回転数のようにパラメータの取り換えで変わらない性質であるから, これからは"曲線 γ"のように定義域を明示しない表記も許容し, 適当な有界閉区間上で定義されているとする．また紛らわしいようであるが γ の像もまた γ と表すことにする．さらに γ が閉曲線の場合は $\partial\mathbb{D}$ を定義域として持つ場合も許容することにしよう．

曲線の和. 2 つの曲線 γ_0, γ_1 について γ_0 の終点と γ_1 の始点が一致していれば曲線をつなぐ操作が行える．話を簡単にするために γ_0, γ_1 の定義域はともに $[0,1]$ とし $\gamma_0(1) = \gamma_1(0)$ が成り立っているとする．このとき曲線 $\gamma_0 + \gamma_1$ を

$$(\gamma_0 + \gamma_1)(t) = \begin{cases} \gamma_0(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma_1(2t-1), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

で定義する．$\gamma_0 + \gamma_1$ と和の形で表しているが, 可換でないどころか $\gamma_1 + \gamma_0$ が定義出来るかどうかさえ分からないことに注意しよう．また結合則

$$(\gamma_0 + \gamma_1) + \gamma_2 = \gamma_0 + (\gamma_1 + \gamma_2)$$

も一般には成り立たない．しかしながら $(\gamma_0 + \gamma_1) + \gamma_2$ と $\gamma_0 + (\gamma_1 + \gamma_2)$ はパラメータの取り替えで互いに移り変わることが出来る．(本当かどうか考えて見よ.)

曲線 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ と $\gamma' : [a',b'] \to \mathbb{C}$ がパラメータの取り替えで互いに移り変わることが出来るとき $\gamma \sim \gamma'$ と書き表すことにすれば, 関係 "$\sim$" は同値関係になる．そこで単独の写像 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ を曲線と呼ぶのではなく γ と同値な写像の全体がなす集合 (= 同値類) を曲線と呼ぶことにすれば, 上の結合則が成り立つことになる．本書ではこの" 曲線とは同値類である" との立場を積極的に採用することは控えるが, これからところどころで, この考え方が顔を出すことがあることを注意しておこう． □

Theorem 4.2.8. 2 つの曲線 γ_0, γ_1 について γ_0 の終点と γ_1 の始点が一致すれば

$$\Theta(\gamma_0 + \gamma_1, z) = \Theta(\gamma_0, z) + \Theta(\gamma_1, z), \qquad z \in \mathbb{C}\backslash(\gamma_0 \cup \gamma_1)$$

が成り立つ．また γ_0, γ_1 が閉曲線の場合は $n(\gamma_0 + \gamma_1, z) = n(\gamma_0, z) + n(\gamma_1, z)$ が成り立つ．

この定理が成り立つことは回転角の導入の仕方から容易に分かるであろう．$\mathbb{C}\backslash(\gamma_0 \cup \gamma_1)$ における γ_0, γ_1 とは曲線の像を表していることを注意しておこう．

4.3 境界を保つ閉円板から自身への連続写像の全射性

複素平面内の単位円板と単位円周をそれぞれ $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ と表してきた．同様に閉単位円板を $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ と表す．

さて閉曲線 γ_0 を

$$\gamma_0(t) = e^{2\pi it} = \cos 2\pi t + i\sin 2\pi t, \quad t \in [0,1]$$

と置こう．つまり γ_0 は 1 から出発し，単位円周 $\partial\mathbb{D}$ を反時計回りに 1 周する閉曲線である．また $w_0 \in \mathbb{C}$ について $1_{w_0}(t) \equiv w_0,\ t \in [0,1]$ と置く．つまり w_0 に留まったまま動かない閉曲線である．

Theorem 4.3.1. 連続写像 $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ が $f(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}$ を満たすとする．このとき閉曲線 $f \circ \gamma_0$ の回転数は $\mathbb{D}$ 上で一定値であり，この値が 0 で無ければ $\mathbb{D} \subset f(\mathbb{D})$ が成り立ち，$f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ は全射である．

Proof. $f \circ \gamma_0([0,1]) = f(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}$ より $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}\backslash f \circ \gamma_0([0,1])$ が成り立つ．よって補集合 $\mathbb{C}\backslash f \circ \gamma_0([0,1])$ の成分で $\mathbb{D}$ を含むものが存在する．従って $n(f \circ \gamma_0, z)$ は $z \in \mathbb{D}$ について一定の整数である．

仮に $\mathbb{D} \subset f(\mathbb{D})$ が成り立たないと仮定すると $z_0 \in \mathbb{D}\backslash f(\mathbb{D})$ が存在する．ここで

$$F(t,s) = (1-s)e^{2\pi it} + s \in \overline{\mathbb{D}}, \quad s,t \in [0,1]$$

と置けば，γ_0 と 1_1 を結ぶ連続変形である．従って $f \circ F$ は閉曲線 $f \circ \gamma_0$ と $f \circ 1_1 = 1_{f(1)}$ を結ぶ連続変形である．ここで $f(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}$ より $z_0 \notin f(\partial\mathbb{D})$．従って $z_0 \notin f(\mathbb{D})$ と合わせて $z_0 \notin f(\overline{\mathbb{D}})$ が成り立つので $z_0 \notin f \circ F([0,1] \times [0,1])$ である．よって Theorem 4.2.4 より

$$n(z_0, f \circ \gamma_0) = n(z_0, 1_{f(1)}) = 0$$

を得るが，これは $n(z_0, f \circ \gamma_0) \neq 0$ に矛盾する．

最後に f が全射であることを示そう．これには $\mathbb{D} \subset f(\mathbb{D})$ であったから $\partial\mathbb{D} \subset f(\overline{\mathbb{D}})$ を示せば十分である．任意の $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ について $\mathbb{D} \ni w_n \to \zeta$ を満たす点列 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ を取り，さらに $f(z_n) = w_n$ を満たす点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を取る．このとき $\overline{\mathbb{D}}$ はコンパクトであるから収束する部分列 $\{z_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ が存在する．このとき

$$f(\lim_{j\to\infty} z_{n_j}) = \lim_{j\to\infty} f(z_{n_j}) = \lim_{j\to\infty} w_{n_j} = \zeta$$

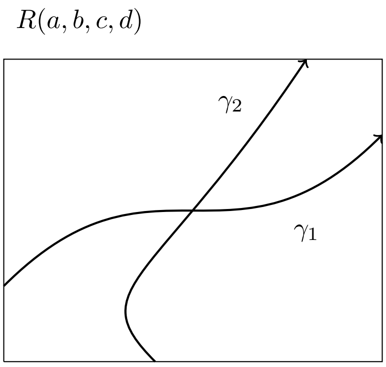
であるから $\zeta \in f(\overline{\mathbb{D}})$ である． □

実数 a,b,c,d $(a < b,\ c < d)$ について閉長方形 $R(a,b,c,d)$ を

$$R(a,b,c,d) = \{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Re} z \leq b,\ c \leq \operatorname{Im} z \leq d\}$$

で定義する．

Theorem 4.3.2. 閉長方形 $R(a,b,c,d)$ 内の 2 つの連続曲線 $\gamma_i : [0,1] \to R(a,b,c,d)$, $i = 1,2$ が $\operatorname{Re}\gamma_1(0) = a$, $\operatorname{Re}\gamma_1(1) = b$, $\operatorname{Im}\gamma_2(0) = c$, $\operatorname{Im}\gamma_2(1) = d$ を満たすとき γ_1 と γ_2 の像は交わる．すなわち $\gamma_1(s) = \gamma_2(t)$ を満たす $s,t \in [0,1]$ が存在する．



横の 2 辺を結ぶ曲線と縦の 2 辺を結ぶ 2 曲線は交点を持つ

Proof. 単位円周を 4 等分し

$$A_k = \left\{ e^{it} : \frac{2k-1}{4}\pi \le t \le \frac{2k+1}{4}\pi \right\}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

と置く．閉長方形 $R(a,b,c,d)$ から閉単位円板 $\overline{\mathbb{D}}$ への適当な位相写像を合成することにより γ_i, $i = 1,\ 2$ は $\overline{\mathbb{D}}$ 内の閉曲線であり, $\gamma_1(0) \in A_2$, $\gamma_1(1) \in A_0$, $\gamma_2(0) \in A_3$, $\gamma_2(1) \in A_1$ を満たすとしてよい．そしてこのとき $\gamma_1(s_0) = \gamma_2(t_0)$ となる $(s_0, t_0) \in [0,1] \times [0,1]$ が存在することを示せば良い．背理法により証明することにして，このような (s_0, t_0) が存在しないと仮定しよう．このとき

$$f(s,t) = \frac{\overline{\gamma_1(s) - \gamma_2(t)}}{|\gamma_1(s) - \gamma_2(t)|}, \quad (s,t) \in [0,1] \times [0,1]$$

を定義することができ, $f(z,t)$ は $[0,1] \times [0,1]$ で連続であり $f([0,1] \times [0,1]) \subset \partial\mathbb{D}$ が成り立つ．

以下では点 (s,t) が $(0,0)$ から出発して $[0,1] \times [0,1]$ の境界を反時計回りに一周するとき, $f(s,t)$ は $f(0,0)$ から出発し, 単位円周上を (単調とは限らないが) 反時計回りに 1 周することを確かめよう．下の図 4.3.1 のように $[0,1] \times [0,1]$ の境界を分解し $\ell_0 = \{s : 0 \le s \le 1\}$, $\ell_1 = \{1 + it : 0 \le t \le 1\}$, $\ell_2 = \{s + i : 0 \le s \le 1\}$, $\ell_3 = \{it : 0 \le t \le 1\}$ と置く．

点 $(0,0)$ から出発して ℓ_0 に沿い右に向かって $(1,0)$ まで 点 $z = s + i0$ を動かすとき, 偏角 arg の 1 価連続な分枝を適当にとれば $\arg(\gamma_1(s) - \gamma_2(0))$ は , $\arg(\gamma_1(0) - \gamma_2(0)) \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ から , $\arg(\gamma_1(1) - \gamma_2(0)) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ までを (単調とは限らないが) 動く．

続いて点 $1 + it$ が ℓ_1 を下から上へ動くとき $\arg(\gamma_1(1) - \gamma_2(t))$ は $\arg(\gamma_1(1) - \gamma_2(0)) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ から $\arg(\gamma_1(1) - \gamma_2(1)) \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ までを動く．

次に 点 $s + i$ が ℓ_2 を右から左に動くとき $\arg(\gamma_1(s) - \gamma_2(1))$ は $\arg(\gamma_1(1) - \gamma_2(1)) \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ から $\arg(\gamma_1(0) - \gamma_2(1)) \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ を動く．

最後に 点 $0 + it$ が ℓ_3 に沿い上から下に動くとき $\arg(\gamma_1(0) - \gamma_2(t))$ は $\arg(\gamma_1(0) - \gamma_2(1)) \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ から $\arg(\gamma_1(0) - \gamma_2(0)) \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right]$ を動く．

以上より $[0,1] \times [0,1]$ の境界上を点 (s,t) が反時計回りに 1 周動くあいだに, $\arg(\gamma_1(s) - \gamma_2(t))$ は -2π だけ変化する．従って $f(s,t) = e^{-i\arg(\gamma_1(s) - \gamma_2(t))}$ は $\partial\mathbb{D}$ を反時計回りに 1 周動く．従ってこの曲線の原点に関する回転数は 1 である．このような連続写像 $f : [0,1] \times [0,1] \to \partial\mathbb{D}$ は Theorem 4.3.1 によれば存在しないので矛盾である．

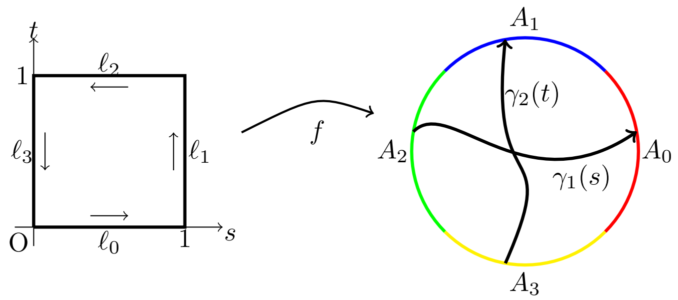


図 4.3.1　$f(s,t)$ の境界対応

□

次節の Jordan の曲線定理の証明には必要ないが, おまけとして Brouwer の不動点定理の 2 次元版を証明しておこう. 後章とは関係がない議論が続くので興味のない読者はとばして読んでも差し支えない. このように後章を読むのに必要でない箇所は青字で書くことにする.

Theorem 4.3.3 (The Brouwer Fixed Point Theorem)**.** 連続写像 $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ は不動点を持つ. つまり $f(z_0) = z_0$ を満たす $z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ が存在する.

Proof. もし存在しないとすれば, $f(z) \neq z$ が任意の $z \in \overline{\mathbb{D}}$ について成立する. そこで各点 $z \in \overline{\mathbb{D}}$ について $f(z)$ から z へ延びる半直線と $\partial\mathbb{D}$ との交点を $g(z)$ と置く. $g(z)$ の表示式を実際に求めよう. これには

$$|f(z) + tu(z)| = 1, \quad u(z) := \frac{z - f(z)}{|z - f(z)|}$$

を満たす $t > 0$ を求めれば良いが, 左の等式を自乗して

$$t^2 + 2\mathrm{Re}\,(\overline{f(z)}u(z))t + |f(z)|^2 - 1 = 0$$

より

$$t = -\mathrm{Re}\,(\overline{f(z)}u(z)) \pm \sqrt{(\mathrm{Re}\,(\overline{f(z)}u(z)))^2 + 1 - |f(z)|^2}$$

となるが, $t > 0$ であるから $+$ の方を取ればよい.

$$g(z) = f(z) + u(z)(-\mathrm{Re}\,(\overline{f(z)}u(z)) + \sqrt{(\mathrm{Re}\,(\overline{f(z)}u(z)))^2 + 1 - |f(z)|^2})$$

である. この式表示と $u(z)$ が仮定より $z \in \overline{\mathbb{D}}$ について連続であることより $g(z)$ も $\overline{\mathbb{D}}$ において連続であることが分かる. また作り方から $z \in \partial\mathbb{D}$ について $g(z) = z$ であり, $g(\overline{\mathbb{D}}) \subset \partial\mathbb{D}$ である. しかしながらこのような性質を持つ連続写像は, 前定理より存在しない. □

4.4 前原による Jordan の曲線定理の証明

それでは前原 ([15]) による Jordan の曲線定理の証明を紹介しよう.

§4.2 に於いて閉曲線の定義域を $[0,1]$ から, 単位円周 $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ に変更したほうが都合が良いことがあることに触れた. 例えば単純曲線 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ においてその像は連結であるが, 像から始点と終点以外の任意の 1 点を除いた集合 $\gamma([0,1]) \backslash \{\gamma(t)\}$, $0 < t < 1$ は最早連結でない. しかしながら始点と終点 (または両方) を除いても連結性は保たれる. このように単純曲線において 2 つの端点は特別な点であり, これは区間 $[0,1]$ の同様な性質が反映していると考えることが出来る. しかしながら単純閉曲線においては, その像から任意の 1 点を除いても連結性は保たれるので, このような特別な点は存在しない. 従って単純閉曲線の定義域としては $[0,1]$ (もしくは有界閉区間) よりも $\partial\mathbb{D}$ の方が同じ性質を持つので相応しい. また定義域として $\partial\mathbb{D}$ を採用した場合, 閉曲線の像上の任意の相異なる 2 点 a_1, a_2 について $\partial\mathbb{D}$ 上の適当な 2 点 ζ_1, ζ_2 が対応するようにパラメータを取り替えて $\gamma(\zeta_1) = a_1$, $\gamma(\zeta_2) = a_2$ が成り立つように出来ることなども直ちに了解できるであろう. とは言っても $0 \leq t \leq 1$ という分かりやすいパラメータを使うという利点も捨てがたいものがある. 中途半端で申し訳ないが, 本書では以後 2 つの定義域を適宜使い分けることにする.

さて単純曲線 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ の値域を像に制限し, $\gamma : [0,1] \to \gamma([0,1])$ とみれば全単射になり, 逆写像が存在する. また $\gamma([0,1])$ に $\mathbb{C}$ の位相からの相対位相 ($\mathbb{C}$ の距離を用いた距離空間とみてもよい) を導入すれば, コンパクト空間から Hausdorff 空間への全単射連続な写像であるから, 逆写像も連続である. これは単純閉曲線 $\gamma : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ についても同様である. (定義域として $[0,1]$ に採用した場合は, 逆写像が連続にならないことに注意.)

Lemma 4.4.1. A が閉集合ならば $\mathbb{C}\backslash A$ の任意の成分 V について $\partial V \subset A$ が成り立つ.

Proof. $z_0 \in \partial V$ とし, $\mathbb{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$, $r > 0$ を z_0 の円近傍とする. このとき $\mathbb{D}(z_0, r) \cap A \neq \emptyset$ が成り立つ. 実際 $\mathbb{D}(z_0, r) \cap A = \emptyset$ ならば $\mathbb{D}(z_0, r) \subset \mathbb{C}\backslash A$ であり

$$V \subsetneq V \cup \mathbb{D}(z_0, r) \subset \mathbb{C}\backslash A$$

が成り立つ. ここで V, $\mathbb{D}(z_0, r)$ はともに連結であり $V \cap \mathbb{D}(z_0, r) \neq \emptyset$ であるから $V \cup \mathbb{D}(z_0, r)$ も連結である. これは V が成分 A の成分であること, つまり $\mathbb{C}\backslash A$ に含まれる最大の連結集合であることに反する. 以上より $z_0 \in \overline{A} = A$ が従うので $\partial V \subset A$ である. □

Theorem 4.4.2. $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ が単純曲線ならば $\mathbb{C}\backslash\gamma([0, 1])$ は領域, つまり連結開集合である.

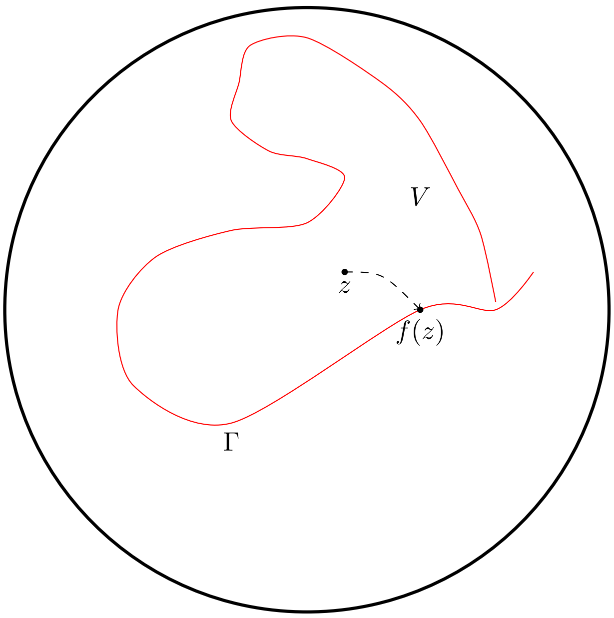
Proof. $\Gamma = \gamma([0, 1])$ と置く. $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ が連結でないと仮定して矛盾を導こう. Γ はコンパクトであるから $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ には非有界成分 (Theorem 4.2.3 の直前の段落を参照) が存在するので, それを V_∞ と置く. また背理法の仮定より $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ には V_∞ 以外の成分が存在するので, その 1 つを V と置く. このとき Lemma 4.4.1 より $\partial V \subset \Gamma$ が成り立つ.

$R > 0$ を $\Gamma \subset \mathbb{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ となるように取る. このとき $\mathbb{C}\backslash\mathbb{D}(0, R)$ は連結で, Γ と交わらないから $\mathbb{C}\backslash\mathbb{D}(0, R) \subset V_\infty$ であり, これより $V \subset \mathbb{D}(0, R)$ が分かる.

写像 $\gamma : [0, 1] \to \Gamma$ の逆写像 γ^{-1} は閉集合 Γ 上で連続であるから Tietze の拡張定理よりある連続写像 $\varphi : \overline{\mathbb{D}}(0, R) \to [0, 1]$ で $\varphi|_\gamma = \gamma^{-1}$ を満たすものが存在する. このとき合成写像 $\gamma \circ \varphi : \overline{\mathbb{D}}(0, R) \to \Gamma$ は連続で Γ 上, 恒等写像に等しい. そこで

$$f(z) = \begin{cases} z, & z \in \overline{\mathbb{D}}(0, R)\backslash V \\ \gamma \circ \varphi(z), & z \in V \end{cases}$$

と置く. このとき 各 $z \in \partial V \subset \Gamma$ について $\gamma \circ \varphi(z) = z$ であるから f は $\overline{\mathbb{D}}(0, R)$ で連続である. また $\partial\mathbb{D}(0, R)$ 上で恒等写像である. しかしながら f の値域は $(\overline{\mathbb{D}}(0, R)\backslash V) \cup \Gamma$ であり, $\Gamma \cap V = \emptyset$ であるから, V の任意の点は f の値域に属さない. このような連続写像は Theorem 4.3.1 によれば存在しないので矛盾である.



□

Lemma 4.4.3. $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ を *Jordan* 曲線とし, $J = \gamma([0,1])$ とする．このとき $\mathbb{C}\backslash J$ が連結でなければ各成分の境界は J である．

Proof. 像 J はコンパクトであるから, 開集合 $\mathbb{C}\backslash J$ は非有界成分をただ 1 つ持つので, それを V_∞ と置く．また仮定より V_∞ 以外の成分も存在するので, それらの中の任意の 1 つを V と置く．Lemma 4.4.1 より $\partial V_\infty \subset J$ と $\partial V \subset J$ が成り立つ．ここで $\partial V \subsetneq J$ と仮定しよう．このとき必要ならばパラメータを適当に取り替えることにより $\gamma(0) = \gamma(1) \in J\backslash\partial V$ としてよい．従って $0 < a < b < 1$ を満たす a を 0 に, b を 1 に十分近く取れば, $\partial V \subset \Gamma_0 := \gamma([a,b])$ が成り立つように出来る．Theorem 4.4.2 より $\mathbb{C}\backslash\Gamma_0$ は連結であるから, 任意の 2 点 $z_0 \in V$, $z_1 \in V_\infty$ を結ぶ $\mathbb{C}\backslash\Gamma_0$ 内の曲線が存在する．この曲線は V と $V_\infty(\subset \mathbb{C}\backslash V)$ の 2 点を結ぶにも関わらず $\partial V(\subset \Gamma_0)$ と交わらない．これは V が連結であることに反する．従って $\partial V = J$ が成り立つ．$\partial V_\infty = J$ についても同様である．　□

それでは Jordan の曲線定理を述べ, 証明しよう．本論に入る前の最後の注意であるが, 以後慣用に従い曲線 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ の像 $\gamma([0,1])$ を単に γ と書き表すことを許容する．これは次から始まる本論において $\gamma([0,1])$ の方式で書き直すことを試みれば了解されると思うが, 甚だしく煩雑になるのである．また以後の話は写像としての γ と言うよりはパラメータの取り方に関係のない, その像 $\gamma([0,1])$ だけに依存する性質を議論するので, このような書き方をしても混乱を生じ難いと言う言い訳も出来る．

Theorem 4.4.4 (Jordan の曲線定理)**.** γ を $\mathbb{C}$ 内の *Jordan* 曲線とする．このとき開集合 $\mathbb{C}\backslash\gamma$ の連結成分は非有界なものと有界なものの丁度 2 つよりなる．またそれぞれの成分を V_∞, V_b と置けば

$$\partial V_\infty = \partial V_b = \gamma$$

が成り立つ．

Proof. 開集合 $\mathbb{C}\backslash\gamma$ の非有界成分はただ一つ存在するので V_∞ と置く．このとき V_∞ 以外に有界な成分がただ 1 つ存在することを示せばよい．実際, これが示されたとして有界な成分を V_b と置けば Lemma 4.4.3 より $\partial V_\infty = J = \partial V_b$ が成り立つ．

以下では $[z,w]$, (z,w) で, それぞれ z, w を結ぶ閉線分, 開線分を表すとし, $(1-t)z + tw$ というパラメータ表示を持つ曲線とも考える．但し, 閉線分の場合は $0 \le t \le 1$ とし, 開線分の場合は $0 < t < 1$ とする．また $(z,w]$, $[z,w)$ についても同様とする．

さて像 γ はコンパクトであるから, $\max_{\zeta_1,\zeta_2\in\gamma} |\zeta_1 - \zeta_2| = |z_1 - z_2|$ を満たす $z_1, z_2 \in \gamma$ が存在する．必要ならば像に回転と拡大を施すことにより $z_1 = -1$, $z_2 = 1$ と仮定してよい．このとき

$$\gamma \subset E := \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, z| \le 1,\ |\mathrm{Im}\, z| \le 2\}$$

であり,

$$\gamma \cap \partial E = \{\pm 1\}$$

が成り立つ．γ の (単純) 部分曲線で -1 と 1 を端点とするものは 2 つあり (γ の定義域を $\partial\mathbb{D}$ とすると考えやすい), それぞれは R の左右の 2 辺を結ぶ．従って Theorem 4.3.2 より, それぞれと上下の 2 辺を結ぶ線分 $[-2i, 2i]$ は交点を持つ．そこで交点の中で y 座標が最大になるものを考え

$$\ell = \max\{y \in [-2,2] : yi \in \gamma\}$$

とおく．このとき

(i) 線分 $[2i, \ell i)$ は γ と交わらない．

± 1 は γ を 2 つの単純曲線に分解するが, $i\ell$ が属す方を γ_+ と置き, もう一方を γ_- と置く. そして

$$m = \min\{y \in [-2, 2] : yi \in \gamma_+\}$$

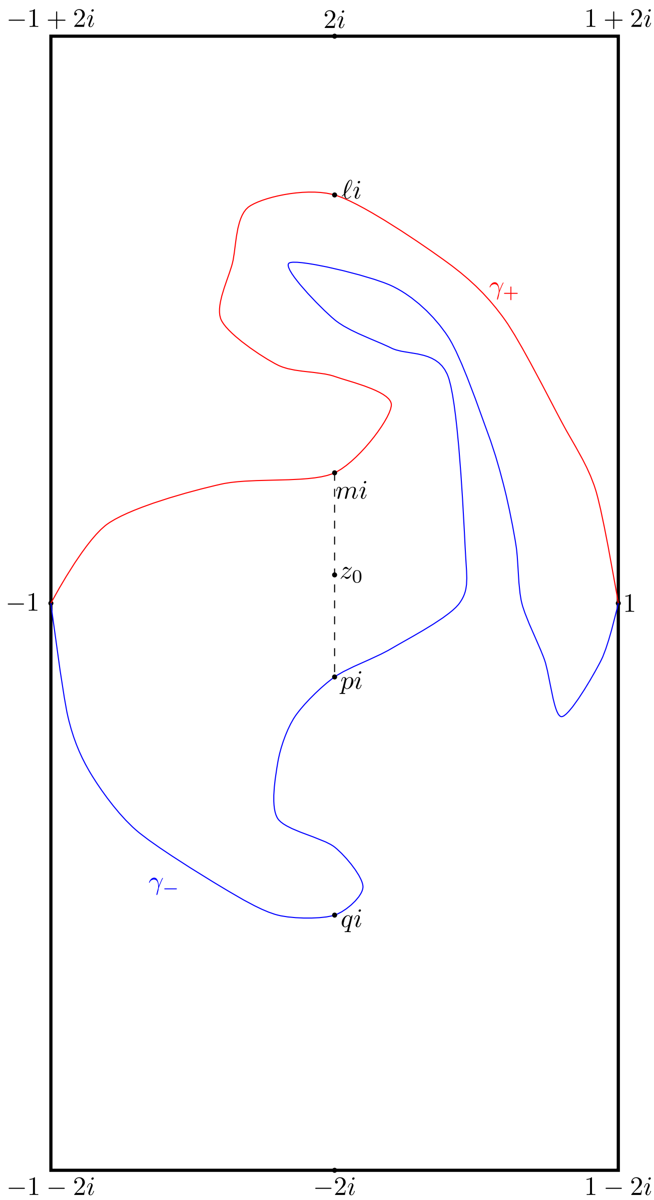
とおく. ℓ と m は一致することもあり得ることに注意しておこう. このとき

(ii) 線分 $(mi, -2i]$ は γ_+ と交わらない.

さて記号 $\widehat{\ell i, mi}$ で γ_+ の部分曲線で ℓi と mi を結ぶものを表す. このとき線分 $(mi, -2i]$ と γ_- は交わることを示そう. 実際 $+$ で曲線をつなぐ操作を表すことにすると $[2i, \ell i] + \widehat{\ell i, mi} + [mi, -2i]$ の像と γ_- は Theorem 4.3.2 により交わるが, $[2i, \ell i)$ は γ と交わららないので, 当然 γ_- とは交わらない. また $\widehat{\ell i, mi}$ は γ_+ の部分曲線であり端点 ± 1 を含まないので γ_- とは交わらない. (γ_+ と γ_- の交点は ± 1 のみであることに注意.) 従って $[2i, \ell i] + \widehat{\ell i, mi} + [mi, -2i]$ の像と γ_- の交点は線分 $(mi, -2i]$ 上にのみ存在する. 従って

$$p = \max\{y : yi \in \gamma_- \cap [mi, -2i]\}, \quad q = \min\{y : yi \in \gamma_- \cap [mi, -2i]\}$$

と置けば $m > p$ であり, 開線分 (mi, pi) は γ と交わることはない. そこで $z_0 = \frac{m+p}{2} i$ と置けば, $z_0 \notin \gamma$ である.



z_0 の属す $\mathbb{C}\backslash\gamma$ の連結成分は V_∞ ではないことを示そう．実際もし $z_0 \in V_\infty$ ならば z_0 から出発して E の外部の任意の 1 点で終わる曲線 $\alpha : [0,1] \to V_\infty$ が存在する．

$$t_0 = \inf\{t \in [0,1] : \alpha(t) \notin \operatorname{Int} E\}, \quad w_0 = \alpha(t_0) \in \partial E$$

と置き, $\alpha_0 = \alpha|_{[0,t_0]}$ と置く．ここで $w_0 \in V_\infty$ より $w_0 \neq \pm 1$ であるから $\operatorname{Im} w_0 \neq 0$ である．$\operatorname{Im} w_0 < 0$ のときは w_0 から出発して ± 1 を通らずに $-2i$ に至る ∂E 内の曲線 $\widehat{w_0, -2i}$ が取れる．このとき

$$[2i, \ell i] + \widehat{\ell i, mi} + [mi, z_0] + \alpha_0 + \widehat{w_0, -2i}$$

は γ_- と交わらないことになり矛盾である．$\operatorname{Im} w_0 > 0$ のときは w_0 から出発して ± 1 を通らずに $2i$ に至る ∂E 内の曲線 $\widehat{w_0, 2i}$ が取れる．このとき

$$[-2i, z_0] + \alpha_0 + \widehat{w_0, 2i}$$

は γ_+ と交わらないことになり矛盾である．以上より z_0 の属す $\mathbb{C}\backslash\gamma$ の連結成分を V と置けば $V \cap V_\infty = \emptyset$ である．

最後に V,V_∞ 以外の成分が存在しないことを背理法で示そう．そこでもう 1 つの成分 W が存在すると仮定すれば W は有界であり, $W \subset E$ が成り立つ.

$$\beta = [2i, \ell i] + \widehat{\ell i, mi} + [mi, pi] + \widehat{pi, qi} + [qi, -2i]$$

は $2i$ と $-2i$ を結び, $V_\infty \cup V \cup \gamma$ に含まれるので $\beta \cap W = \emptyset$ である．β は ± 1 を通らないので, それぞれ ± 1 を中心とする円板 D_+, D_- を

$$D_+ \cap \beta = \emptyset = D_- \cap \beta$$

を満たすように取れる．ここで Lemma 4.4.1 より $\partial W = \gamma$ ゆえ $a \in W \cap D_-$, $b \in W \cap D_+$ が存在する．$\widehat{a, b}$ で a から出発して b に終わる W 内の曲線とすると

$$[-1, a] + \widehat{a, b} + [a, 1]$$

は -1 と 1 を結ぶ E 内の曲線であるが β と交わらないので矛盾である． □

Jordan 曲線 γ について $\mathbb{C}\backslash\gamma$ の ∞ のある近傍を含む非有界な成分を, γ の外側の領域と呼び, 有界な成分を γ の内側の領域または γ で囲まれた領域と呼ぶ.

次の系の証明を読むと, 前原先生の議論が回転数の議論と大変相性が良いことが分かるであろう.

Corollary 4.4.5. *γ を $\mathbb{C}$ 内の Jordan 曲線とすると, γ の内側の領域上で恒等的に $n(\gamma, z) \equiv 1$ または $n(\gamma, z) \equiv -1$ のどちらかが成立する．また γ の外側の領域上では $n(\gamma, z) \equiv 0$ が成立する.*

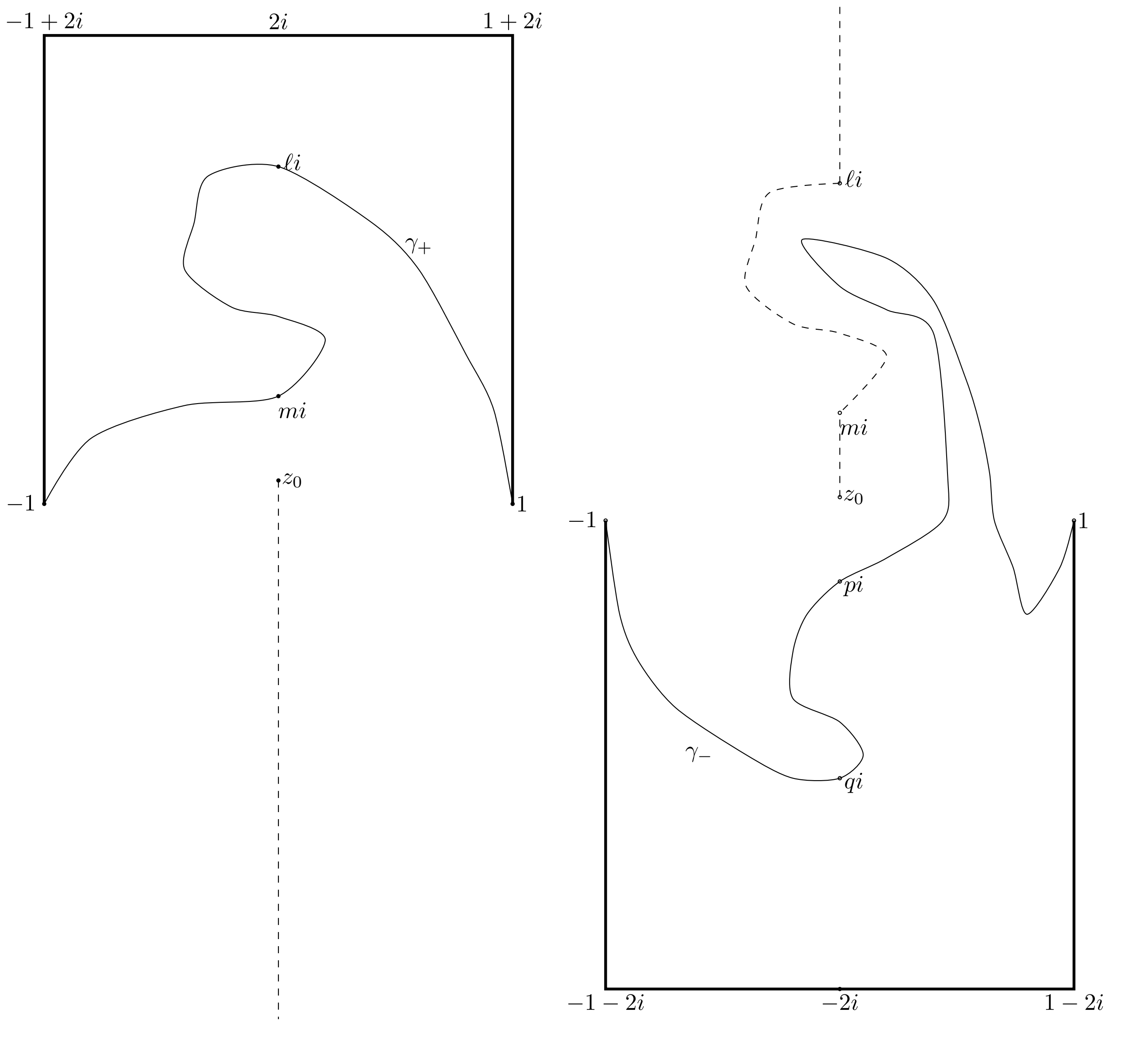
Proof. Theorem 4.2.3 より, 閉曲線 γ について回転数 $n(\gamma, z)$ は $\mathbb{C}\backslash\gamma$ で定義され, $\mathbb{C}\backslash\gamma$ の各成分上で定整数値函数であり, 非有界な成分上で 0 となることに注意する.

以下では Theorem 4.4.4 の証明中の記号を用いる．そして γ は $\partial\mathbb{D}$ 上で定義され $\gamma(1) = 1$ かつ $\gamma(-1) = -1$ が成り立ち, 1 から出発して -1 へ向かう反時計回りの上半円周に γ_+ が対応し (このとき γ_+ の始点は 1 で終点は -1 になる), -1 から出発して 11 へ向かう反時計回りの下半円周に γ_- が対応する (このとき γ_- の始点は -11 で終点は 1 になる) と仮定して $n(z_0, \gamma) = 1$ となることを証明する. (対応が逆の場合は $n(z_0, \gamma) = -1$ となる.)

まず δ_+ で線分 $[-1, -1+2i]$, $[-1+2i, 1+2i]$, $[1+2i, 1]$ よりなる, -1 と 1 を結ぶ折れ線とする．このとき $\gamma_+ + \delta_+$ は Jordan 曲線であり, z_0 から $z_0 - i\infty$ へ向かう半直線 (下図の点線部) と交わらない．従って z_0 は $\mathbb{C}\backslash(\gamma_+ + \delta_+)$ の非有界成分 $V_\infty(\gamma_+ + \delta_+)$ に属す．よって $n(\gamma_+ + \delta_+, z_0) = 0$ である．次に δ_- を $[1, 1-2i]$, $[1-2i, -1-2i]$, $[-1-2i, -1]$ よりなる, 1 と -1 を結ぶ折れ線とする．このとき γ_+ の部分曲線で mi と ℓi を結ぶものを $\widehat{mi, \ell i}$ とし, $[\ell i, \ell i + i\infty)$ で ℓi から真上にのびる半直線を表せば, $[z_0, mi] + \widehat{mi, \ell i} + [\ell i, \ell i + i\infty)$ は, Jordan 曲線 $\gamma_- + \delta_-$ と交わらない．よって $n(\gamma_- + \delta_-, z_0) = 0$ である．以上と Theorem 4.2.8 より

$$0 = n(\gamma_+ + \delta_+, z_0) + n(\gamma_- + \delta_-, z_0) = n(\gamma, z_0) + n(\delta_+ + \delta_-, z_0)$$

となるが, $n(\delta_+ + \delta_-, z_0) = -1$ であるから $n(\gamma, z_0) = 1$ となる． □



Definition 4.4.6 (Jordan 曲線の向き)**.** *Jordan* 曲線 γ について γ で囲まれた領域上で $n(\gamma, z) \equiv 1$ が成り立つとき, γ は正の向きを持つと言い, $n(\gamma, z) \equiv -1$ が成り立つとき, γ は負の向きを持つと言う.

4.5 Jordan 曲線の内, 外部と横断線

この節でも曲線 γ とその像を区別せず, γ で写像とその像の両方を表す.

Definition 4.5.1. *Jordan* 曲線 $\gamma : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ に対し $\mathbb{C}\backslash\gamma$ の 2 つの成分のうち, 非有界な方を γ の外側 *(*または外部*)* と呼び記号 $D_o(\gamma)$ で表す. また有界な方を γ の内側 *(*または内部*)* と呼び $D_i(\gamma)$ と表すことにする. $D_i(\gamma)$ は γ で囲まれた *Jordan* 領域 *(Jordan domain)* と呼ばれることも多い.

Theorem 4.5.2. 2 つの *Jordan* 曲線 $\gamma_j : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $j = 1, 2$ について $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ ならば (a) $\gamma_1 \subset D_i(\gamma_2)$, (b) $\gamma_2 \subset D_i(\gamma_1)$ または (c) "$\gamma_1 \subset D_o(\gamma_2)$ かつ $\gamma_2 \subset D_o(\gamma_1)$" のどれか 1 つ, そして 1 つのみが必ず成り立つ. さらに

(i) (a) $\gamma_1 \subset D_i(\gamma_2)$ ならば

$$D_i(\gamma_1) \subset D_i(\gamma_2), \quad D_o(\gamma_2) \subset D_o(\gamma_1), \quad \gamma_2 \subset D_o(\gamma_1)$$

が成り立つ.

(ii) (b) $\gamma_2 \subset D_i(\gamma_1)$ ならば

$$D_i(\gamma_2) \subset D_i(\gamma_1), \quad D_o(\gamma_1) \subset D_o(\gamma_2), \quad \gamma_1 \subset D_o(\gamma_2)$$

が成り立つ.

(iii) (c) $\gamma_1 \subset D_o(\gamma_2)$ かつ $\gamma_2 \subset D_o(\gamma_1)$ ならば

$$D_i(\gamma_1) \cap D_i(\gamma_2) = \emptyset, \quad D_i(\gamma_1) \subset D_o(\gamma_2), \quad D_i(\gamma_2) \subset D_o(\gamma_1)$$

が成り立つ.

Proof. $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ より $\gamma_1 \subset \mathbb{C} \backslash \gamma_2 = D_i(\gamma_2) \cup D_o(\gamma_2)$ であるが, γ_1 の連結性より $\gamma_1 \subset D_i(\gamma_2)$ または $\gamma_1 \subset D_o(\gamma_2)$ のどちらか一方が成り立つ. 同様に $\gamma_2 \subset D_i(\gamma_2)$ または $\gamma_2 \subset D_o(\gamma_2)$ のどちらか一方が成り立つので, 論理的には次の 4 つの可能性がある.

	$\gamma_1 \subset D_i(\gamma_2)$	$\gamma_1 \subset D_o(\gamma_2)$
$\gamma_2 \subset D_i(\gamma_1)$	(d)	(b')
$\gamma_2 \subset D_o(\gamma_1)$	(a')	(c)

手始めに (i) を示そう. これが示されれば $(a) \Longleftrightarrow (a')$ も従うことに注意しよう. $\gamma_1 \subset D_i(\gamma_2)$ ならば

$$\gamma_1 \cap D_o(\gamma_2) \subset D_i(\gamma_2) \cap D_o(\gamma_2) = \emptyset$$

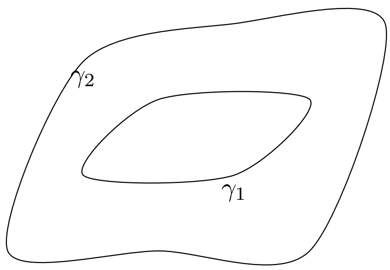
より $D_o(\gamma_2) \subset \mathbb{C} \backslash \gamma_1 = D_i(\gamma_1) \cup D_o(\gamma_1)$ が成り立つ. ここで $D_o(\gamma_2)$ は連結であるから $D_o(\gamma_2) \subset D_i(\gamma_1)$ または $D_o(\gamma_2) \subset D_o(\gamma_1)$ のどちらか一方が成り立つことになるが $D_o(\gamma_2)$ は非有界で $D_i(\gamma_1)$ は有界であるから前者は成り立たない. よって

$$D_o(\gamma_2) \subset D_o(\gamma_1)$$

が成り立つ. 両辺の閉包を取ると

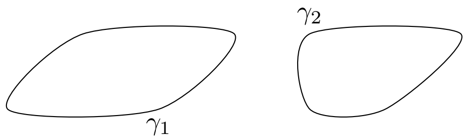
$$\gamma_2 \cup D_o(\gamma_2) = \overline{D_o(\gamma_2)} \subset \overline{D_o(\gamma_1)} = \gamma_1 \cup D_o(\gamma_1) \tag{4.5.1}$$

である. これと $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ より $\gamma_2 \subset D_o(\gamma_1)$ が成り立つことが分かる. また (4.5.1) の両辺の補集合を取ると $D_i(\gamma_1) \subset D_i(\gamma_2)$ が従う.



(ii) が成り立つことも殆ど同様に示されるので省略するが $(b) \Longleftrightarrow (b')$ が成り立つことに注意しておこう.

(iii) を示そう．$\gamma_1 \subset D_o(\gamma_2)$ より
$$\gamma_1 \cap D_i(\gamma_2) \subset D_o(\gamma_2) \cap D_i(\gamma_2) = \emptyset$$
より $D_i(\gamma_2) \subset \mathbb{C}\backslash\gamma_1 = D_i(\gamma_1) \cup D_o(\gamma_1)$ が成り立つが，$D_i(\gamma_2)$ の連結性より $D_i(\gamma_2) \subset D_i(\gamma_1)$ または $D_i(\gamma_2) \subset D_o(\gamma_1)$ のどちらか一方が成り立つ．仮に $D_i(\gamma_2) \subset D_i(\gamma_1)$ が成り立つとすると
$$\gamma_2 \cup D_i(\gamma_2) = \overline{D_i(\gamma_2)} \subset \overline{D_i(\gamma_1)} = \gamma_1 \cup D_i(\gamma_1)$$
となるが，これと $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ より $\gamma_2 \subset D_i(\gamma_1)$ を得る．これは $\gamma_2 \subset D_o(\gamma_1)$ に反する．よって $D_i(\gamma_2) \subset D_o(\gamma_1)$ が成り立つ．同様に $\gamma_2 \subset D_o(\gamma_1)$ より $D_i(\gamma_1) \subset D_o(\gamma_2)$ が導かれる．

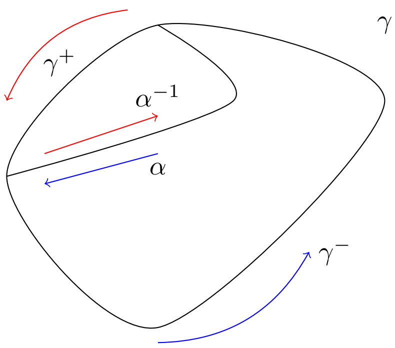


最後に (d) が起き得ないことを示そう．これは (i) の証明より $\gamma_1 \subset D_i(\gamma_2)$ から $D_i(\gamma_1) \subset D_i(\gamma_2)$ が従うことと，$\gamma_2 \subset D_i(\gamma_1)$ から $D_i(\gamma_2) \subset D_i(\gamma_1)$ が従うことを合わせて $D_i(\gamma_1) = D_i(\gamma_2)$ となるが，これより $\gamma_1 = \partial D_i(\gamma_1) = \partial D_i(\gamma_2) = \gamma_2$ となり矛盾を生じる．□

Definition 4.5.3 (横断線)**.** Ω を $\mathbb{C}$ 内の領域，$\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}$ を単純曲線とする．α の 2 つの端点が両方とも $\partial\Omega$ に属し，残りの点が全て Ω に属す，つまり $\alpha(0), \alpha(1) \in \partial\Omega$ かつ $\alpha((0,1)) \subset \Omega$ が成り立つとき α は Ω の横断線 *(cross cut)* であると言う．

Theorem 4.5.4. $\gamma : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ を *Jordan* 曲線とし，$\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}$ を γ で囲まれた領域 $D_i(\gamma)$ の横断線とし，$\alpha(0) \neq \alpha(1)$ とする．このとき $\alpha(0) = \gamma(e^{it_0})$, $\alpha(1) = \gamma(e^{it_1})$, $0 \le t_0 < t_1 < 2\pi$ となる t_0, t_1 を取り γ^+ を $\gamma(e^{it})$, $t_0 \le t \le t_1$ と α^{-1}, $0 \le t \le 1$ をつないで得られる *Jordan* 曲線とし，γ^- を α と $\gamma(e^{it})$, $t_1 \le t \le t_0 + 2\pi$ とをつないで得られる *Jordan* 曲線とすれば，$D_i(\gamma)\backslash\alpha([0,1])$ の連結成分への分解は
$$D_i(\gamma)\backslash\alpha([0,1]) = D_i(\gamma^+) \cup D_i(\gamma^-)$$
で与えられる．

上の定理は横断線 α の始点と終点が相異なる場合を取り扱っているが，始点と終点が一致する場合は (このとき α は単純閉曲線になる) $D_i(\gamma)\backslash\alpha$ の連結成分への分解は $D_i(\alpha)$ $D_i(\gamma)\backslash\overline{D_i(\alpha)}$ で与えられる．証明もほぼ同様である．



Proof. まず
$$\gamma^\pm \cap D_o(\gamma) \subset (\gamma \cup D_i(\gamma)) \cap D_o(\gamma) = \emptyset$$

であるから $D_o(\gamma) \subset \mathbb{C}\backslash\gamma^{\pm} = D_i(\gamma^{\pm}) \cup D_o(\gamma^{\pm})$ が成り立つが $D_o(\gamma)$ は連結であるから, $D_i(\gamma^{\pm})$ または $D_o(\gamma^{\pm})$ のどちらか一方に含まれる．しかしながら $D_o(\gamma)$ と $D_o(\gamma^{\pm})$ は ∞ の近傍を共有するので $D_o(\gamma) \subset D_o(\gamma^{\pm})$ が成り立つ．よって

$$D_o(\gamma) \cup \gamma = \overline{D_o(\gamma)} \subset \overline{D_o(\gamma^{\pm})} = D_o(\gamma^{\pm}) \cup \gamma^{\pm}$$

であるが, 両辺の補集合を取れば

$$D_i(\gamma^{\pm}) \subset D_i(\gamma)$$

が従う．よって $D_i(\gamma^+) \cup D_i(\gamma^-) \subset D_i(\gamma)\backslash\alpha$ が成り立つ．

次に $z \in D_i(\gamma)\backslash\alpha$ を取ると $n(\gamma, z) = 1$ または $n(\gamma, z) = -1$ である．また γ^+, γ^- はともに α に対応する部分を含むが, 向きが逆であるから

$$n(\gamma, z) = n(\gamma^+, z) + n(\gamma^-, z)$$

が成り立つ． $n(z, \gamma^+)$, $n(z, \gamma^-)$ も 0, ± 1 のいずれかであるから, 結局 $n(z, \gamma^+)$ または $n(z, \gamma^-)$ のどちらか一方は ± 1 であり, もう一方は 0 である． 従って $z \in D_i(\gamma^+)$, $z \in D_i(\gamma^-)$ のどちらか一方が成り立つ． よって $D_i(\gamma)\backslash\alpha \subset D_i(\gamma^+) \cup D_i(\gamma^-)$ が成り立つ．

以上で

$$D_i(\gamma)\backslash\alpha = D_i(\gamma^+) \cup D_i(\gamma^-)$$

となることが分かった．右辺の 2 つの集合はともに連結開集合である．従って共通部分が空であることを示せば連結成分への分解を与えていることが分かる．

$z \in D_i(\gamma^+) \cap D_i(\gamma^-)$ が存在するとすると, $n(\gamma^+, z) = \pm 1$, $n(\gamma^-, z) = \pm 1$ であるから $n(\gamma, z) = n(\gamma^+, z) + n(\gamma^-, z)$ は ± 2 または 0 である．(γ は Jordan 曲線であるから $n(\gamma, z) = 2$ となることはない.) どの場合も $z \in D_i(\gamma)$ に矛盾する． □

第 5 章

単純多角形に関する Schönflies の定理

前章で前原 ([15]) による Jordan の曲線定理の証明を紹介した．他にも $\mathbb{C}$ または $\hat{\mathbb{C}}$ の部分集合の位相について知っておくべき事項はまだある．例えば "Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 内の領域 Ω が単連結であるための必要十分条件は, 補集合 $\hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ が空集合であるかまたは連結であること" などがそうである．このような結果を証明するには, Jordan の曲線定理の精密化である, Schönflies の定理が重要な役割を果たす．Schönflies の定理とは, "与えられた Jordan 曲線 $\gamma : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ に対し位相写像 $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ で $\phi(\partial\mathbb{D}) = \gamma(\partial\mathbb{D})$ を満たすものが存在する" という定理である．これを (連続性と単射性のみ仮定する) 一般の γ について証明するのは, この冊子の程度を越える．しかしながら応用上 γ が単純多角形の場合に限定しても差し支えないことが多い．そこで手始めに §5.1 において γ が折れ線よりなる場合に Jordan の曲線定理が成り立つことを, 前章と独立に, より簡明な方法で証明する．このときに導入される単純多角形に関する交点数などの様々な手法や考え方は, この章のみならず, 第 6 章でも応用される．

§5.2 において, γ が単純多角形の場合に多角形の頂点の個数に関する帰納法を用いて Schönflies の定理を証明する．これには単純多角形には対角線や耳が存在すること, そして対角線や耳の部分で分解できることが, 帰納法のサイクルを回す上で重要である．この節の内容は [8] を参考にさせて頂いた §5.3 では単純曲線, Jordan 曲線 (= 単純閉曲線) は, それぞれ単純折れ線, 単純多角形で補間することにより近似ができることを [3] に従って示す．

Jordan の曲線定理や Schönflies の定理の歴史については [8] の Chapter 1 が詳しい．一読をお勧めする．

5.1 単純多角形に関する Jordan の定理

以下では $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ について $[z_0, z_1]$ で a, b を端点とする (閉) 線分を表す．つまり

$$[z_0, z_1] = \{(1-t)z_0 + tz_1 : 0 \le t \le 1\}$$

である．また開線分

$$(z_0, z_1) = \{(1-t)z_0 + tz_1 : 0 < t < 1\}$$

を $[z_0, z_1]$ の内部と言う．

Jordan 曲線 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ が単純多角形 (simple polygon) であるとは，区間 $[0,1]$ の分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots t_{n-1} < t_n = 1$, と複素定数 $\alpha_k \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\beta_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \ldots, n$ により

$$\gamma(t) = \alpha_k t + \beta_k,\ t_{k-1} \le t \le t_k, \quad k = 1, \ldots, n$$

と表せる時を言う．つまり有限個の線分をつないでできる Jordan 曲線が単純多角形である．単純多角形のことを

Jordan 多角形と呼ぶこともある．以下では

$$z_k = \gamma(t_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$
$$E_k = \{\gamma(t) : t_{k-1} \le t \le t_k\} = [z_{k-1}, z_k], \quad k = 1, \ldots, n$$

と置く．$z_n = z_0$ に注意しよう．また

$$z_{n+1} = z_1, \quad E_0 = E_n, \quad E_{n+1} = E_1$$

と置く．各 z_k, E_k はそれぞれ γ の頂点, 辺と呼ばれる．混乱が生じない限り像 $\gamma(\partial\mathbb{D})$ を γ で表して, 曲線とその像を区別せずに書き表すことは, 前章と同様である

Theorem 5.1.1 (多角形版 Jordan の曲線定理)**.** *$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ を単純多角形とすれば, 開集合 $\mathbb{C}\backslash\gamma$ の連結成分は非有界なものが 1 つと, 有界なものが 1 つの 2 つよりなる．また成分のそれぞれを U_0, U_1 と置けば $\partial U_0 = \partial U_1 = \gamma$ が成り立つ.*

Proof. 点 $z \in \mathbb{C}\backslash\gamma$ より伸び, 実軸の正の向きと角 θ をなす半直線を $r(z,\theta)$ と置く．また $r(z,\theta)$ と γ の交点の個数を $n(z,\theta)$ と表し, 交点数と呼ぶ．但し交点数の数え方は次のようにする．

(a) $r(z,\theta)$ が辺 E_k を内部の点 (頂点で無い点) において横切るときは 1 と数える．
(b) $r(z,\theta)$ が頂点 z_k を通り, z_k を共有する 2 つの辺 E_k, E_{k+1} が $r(z,\theta)$ の左右の同じ側にあるときは 2 と数え, 左右異なる側にあるときは 1 と数える．
(c) $r(z,\theta)$ が辺 E_k を含む場合, E_k の前後の 2 つの辺 E_{k-1}, E_{k+1} が $r(z,\theta)$ の左右の同じ側にあるときは 2 と数え, 左右異なる側にあるときは 1 と数える．

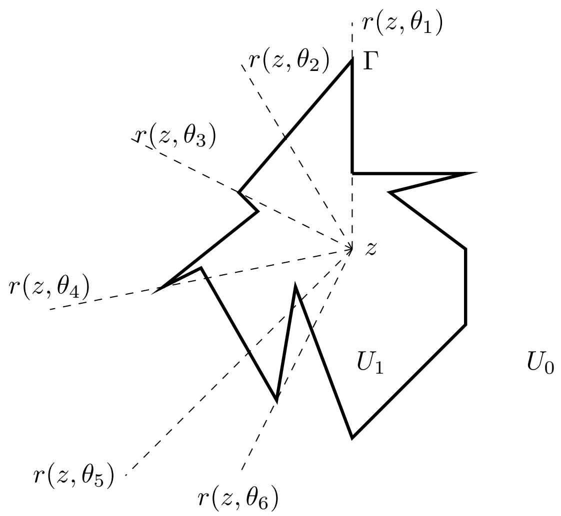


図 5.1.1　$r(z,\theta_1) = 1$, $r(z,\theta_2) = 1$, $r(z,\theta_3) = 1$, $r(z,\theta_4) = 3$, $r(z,\theta_5) = 3$, $r(z,\theta_6) = 3$

$n(z,\theta)$ は非負整数値を取る．また z を固定し $n(z,\theta)$ を $\theta \in \mathbb{R}$ の函数と考えると, θ が動く時, 取る値 $n(z,\theta)$ は変化するかも知れないが, 偶数か奇数かは一定である．そこで, 各 $z \in \mathbb{C}\backslash\gamma$ について $n(z,\theta)$ が偶数のとき $n(z) = 0$, $n(z,\theta)$ が奇数のとき $n(z) = 1$ と定義する．このとき $n(z)$ は $z \in \mathbb{C}\backslash\gamma$ の函数とみなして連続である．実際 $z \in \mathbb{C}\backslash\gamma$ について半直線 $r(z,\theta)$ が頂点 $z_1, \ldots, z_n$ を通らないように θ を取れば, z の十分小さな近傍 V で $n(z^*,\theta) = n(z,\theta)$,

$z^* \in V$ となるものが存在する．以上より

$$U_0 = \{z \in \mathbb{C}\backslash\gamma : n(z) = 0\}, \quad U_1 = \{z \in \mathbb{C}\backslash\gamma : n(z) = 1\}$$

と置けば, U_0, U_1 は開集合であり

$$\mathbb{C}\backslash\gamma = U_0 \cup U_1, \quad U_0 \cap U_1 = \emptyset$$

が成り立つ．特に

(5.1.1) $\mathbb{C}\backslash\gamma$ 内の曲線 α は U_0, U_1 のどちらか一方に含まれる．

が成り立つ．何故ならば, もしそうでないと仮定すれば $\alpha \cap U_0$, $\alpha \cap U_2$ が α の分割を与えることになり α の連結性に矛盾する．従って $\mathbb{C}\backslash\gamma$ の成分は U_0, U_1 のどちらか一方に含まれる．

次に U_0, U_1 がともに空でない連結集合であることを示すために, 辺 E_k の適当 (都合の良い) な近傍を考えよう．はじめに $n = 3$ のときは δ を 3 頂点の最短距離とする, つまり

$$\delta = \min\{|z_0 - z_1|, |z_1 - z_2|, |z_2 - z_0|\}$$

と置く．$n \geq 4$ のときは δ を隣り合わない辺同士の最短距離とする．つまり

$$\delta = \min\{\mathrm{dist}(E_k, E_\ell) : 2 \leq \ell - k \leq n - 2\}$$

と置く．$n = 3$ のときは $0 < \rho < \frac{\delta}{3}$ を満たす ρ を, そして $n \geq 4$ のときは $0 < \rho < \frac{\delta}{2}$ を満たす ρ について

$$N = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{dist}(z, \gamma) < \rho\},$$
$$N_k = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{dist}(z, E_k) < \rho\}, \quad k = 1, \ldots, n$$

と置く．($n = 3$ のとき $\rho < \frac{\delta}{3}$ とする理由は, $\frac{z_1+z_2+z_3}{3} \notin N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$ のように三角形の内部に N に属さない点があることを保証するためである.)

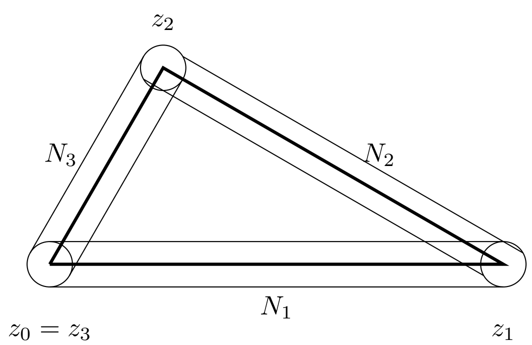


図 5.1.2　$n = 3$ の場合

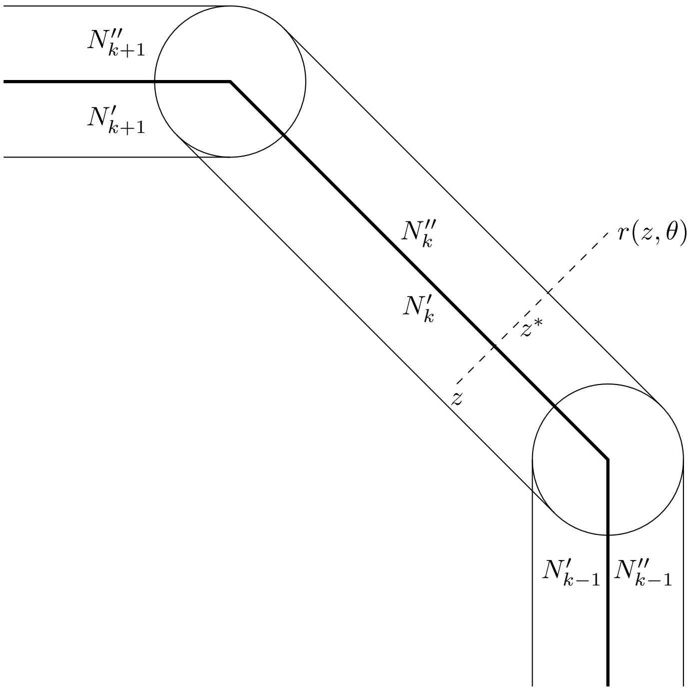
このとき $k = 1, 2, \ldots, n$ について N_k は N_{k-1}, N_{k+1} とのみ交わり, 他の N_ℓ とは交わらない．そして

$$N_k \cap \gamma \subset E_{k-1} \cup E_k \cup E_{k+1}, \quad k = 1, \ldots, n \quad (E_0 = E_n,\ E_{n+1} = E_1 \text{ に注意})$$

であり $N_k\backslash\Gamma$ は 2 つの成分よりなる．そこでこれらの成分を N'_k, N''_k と置くが, 各 $k = 1, 2, \ldots, n$ について

$$N'_k \cap N'_{k+1} \neq \emptyset, \quad N''_k \cap N''_{k+1} \neq \emptyset, \quad k = 1, \ldots, n-1$$

となるように取っておく．



さて空でない共通部分を持つ 2 つの連結集号の和集合は再び連結であることに注意すれば N'_k, N''_k のとり方より

$$N' := N'_1 \cup \cdots N'_n, \quad N'' := N''_1 \cup \cdots N''_n$$

は連結な開集合である.

この段階では論理的に 2 つの可能性がある.

(i) $N'_n \cap N'_1 \neq \emptyset$ かつ $N''_n \cap N''_1 \neq \emptyset$.
(ii) $N'_n \cap N''_1 \neq \emptyset$ かつ $N''_n \cap N'_1 \neq \emptyset$.

(ii) の場合が起こりえないことを示そう. N' の任意の 2 点は N' 内の曲線で結べ, N'' の任意の 2 点も N'' 内の曲線で結べるので (ii) が起こると仮定すれば $N' \cup N''$ の 任意の 2 点も $N' \cup N''$ 内の曲線で結べることになり, 前半で示したことにより $N' \cup N'' \subset U_0$ または $N' \cup N'' \subset U_1$ のどちらか一方が成り立つ. しかしながら $r(z,\theta)$ が頂点を通らずに辺 E_k を横切るように $z \in N'_k$ を取り, この $r(z,\theta)$ 上で N''_k 内にある点 z^* を取れば $n(z,\theta) = n(z^*,\theta) + 1$ である. 従って “$z \in U_0$ かつ $z^* \in U_1$” または “$z \in U_1$ かつ $z^* \in U_0$” のどちらか一方が起こる. それぞれの場合について “$N' \subset U_0$ かつ $N'' \subset U_1$” または “$N' \subset U_1$ かつ $N'' \subset U_0$” となるので, 矛盾である.

これで U_0, U_1 はともに空でないことが分かった. 必要ならば $'$ と $''$ を取り替えることにより $N' \subset U_1$, $N'' \subset U_0$ が成り立つと仮定してよい.

U_0, U_1 がともに連結であることを示そう. これは任意の $\zeta_0 \in U_0$ について ζ_0 と γ の任意の点とを線分で結べば, ζ_0 から出発し, この線分上を進めば γ の点とぶつかる前に N' または N'' のどちらかの点 ζ とぶつかる. しかしながら (5.1.1) より $[\zeta_0, \zeta]$ は U_0 に含まれるので $\zeta \in N''$ である. 以上より U_0 の任意の点は U_0 の中の曲線で N'' の点と結べることになり, これより U_0 が連結であることが分かる. U_1 の連結性も全く同様な議論により示される. これで U_0, U_1 はともに空でない連結な開集合であり $\mathbb{C} \backslash \gamma = U_0 \cup U_1$ が成分への分解を与えることが分かった.

最後に $\partial U_0 = \partial U_1 = \gamma$ を示そう. まず γ の任意の点の任意の近傍内に N' と N'' の点が必ず含まれるので $\gamma \subset \partial U_0$, $\gamma \subset \partial U_1$ が成り立つ. 逆に $U_0 \cap U_1 = \emptyset$ より $U_0 \subset U_1^c$ であり U_1^c が閉集合であることより $\overline{U}_0 \subset U_1^c$ が成り立つ. よっ

て $\partial U_0 \subset \overline{U}_0 \subset U_1^c$ であるから $\partial U_0 \cap U_1 = \emptyset$ である．全く同様に $\partial U_1 \cap U_0 = \emptyset$ である．そして U_0, U_1 は開集合であるから $\partial U_0 \cap U_0 = \emptyset$, $\partial U_1 \cap U_1 = \emptyset$ が成り立つ．これらと

$$\mathbb{C} = (\mathbb{C}\backslash\gamma) \cup \gamma = U_1 \cup U_2 \cup \gamma$$

の右辺が互いに共通部分を持たない 3 つの集号の和であることより $\partial U_0 \subset \gamma$, $\partial U_1 \subset \gamma$ が成り立つ． □

単純多角形 γ について $\mathbb{C}\backslash\gamma$ の非有界な成分を $D_o(\gamma)$ で表し, 有界な成分を $D_i(\gamma)$ で表す．$D_i(\gamma)$ のことを γ で囲まれた領域と呼ぶ.

Corollary 5.1.2. $z \in \mathbb{C}\backslash\gamma$ について

$$\begin{aligned} z \in D_i(\gamma) \quad &\Longleftrightarrow \quad n(z,\theta) \text{ が奇数} \\ z \in D_o(\gamma) \quad &\Longleftrightarrow \quad n(z,\theta) \text{ が偶数} \end{aligned}$$

が成り立つ.

Proof. $\gamma \subset \mathbb{D}(0,R)$ となる $R > 0$ を取る．このとき各 $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{D}(0,R)$ について $r(z,\theta)$ が γ と交わらないように θ を取ることが出来るので $n(z,\theta) = 0$ である．よって $n(z) = 0$ となる．従って $\mathbb{C}\backslash\mathbb{D}(0,R) \subset U_0$ である．従って U_0 は非有界な成分であるので $D_o(\gamma) = U_0$ が成り立つ． □

5.2 単純多角形に関する Schönflies の定理

“Jordan 曲線 $\gamma : \partial\mathbb{D}$ について位相同型 $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ で $\varphi(\partial\mathbb{D}) = \gamma(\partial\mathbb{D})$ を満たすものが存在する” ということを主張するのが Schönflies の定理である． この定理をこのままの形で証明するのは本書の程度を超えるので, この節では γ が単純多角形の場合に限定して証明を行う．後章での応用にはこのような限定を行っても差し支えない.

前節まで単純多角形とは区分的に線形な単射連続写像 $\gamma : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ としてきたが, この節ではこれに加えて次の見方も行う．n 個の相異なる点

$$p_1,\ p_2,\ \ldots, p_n \in \mathbb{C}$$

が次の条件を満たすとき, これらの点をこの順につないで, 最後に p_n と p_1 をつないで, できる曲線が単純閉曲線となるので, これを $p_1, \ldots, p_n$ により定まる単純多角形と言い $P = P(p_1, \ldots, p_n)$ と表す.

その条件とは

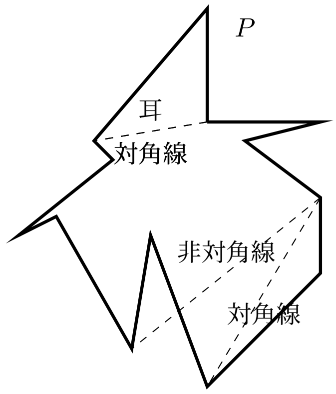
$$E_1 = [p_0, p_1],\ E_2 = [p_1, p_2],\ \ldots,\ E_n = [p_{n-1}, p_n],\ E_0 = E_1,\ E_{n+1} = E_1$$

と置いて,

(i) “E_1 と E_2”, “E_2 と E_3”, …, “E_n と $E_{n+1}(= E_1)$ のように番号が連続する線分が平行でない．(このとき特に, 番号が連続する線分同士は 1 頂点のみを共有する)

(ii) E_k, E_ℓ を番号が連続しない 2 線分とすれば $E_k \cap E_\ell = \emptyset$

これらの条件を満たすとき $E_1, \ldots, E_n$ をつないで得られる曲線が単純曲線になることは容易に分かる．これが $P = P(p_1, \ldots, p_n)$ である．各 p_k, E_k を P の頂点と辺と呼ぶのは前節と同様である．P の頂点が 3 つで三角形をなすときは $P(p,q,r)$ の代わりに $T(p,q,r)$ と表すことにする.



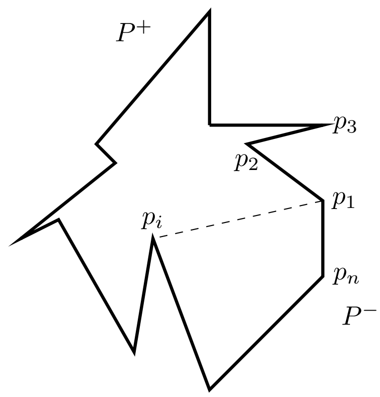
Definition 5.2.1. 単純多角形 $P(p_1, \ldots, p_n)$ の対角線 *(diagonal)* とは P の 2 つの頂点を端点とする線分で, 端点以外は P で囲まれた領域 $D_i(P)$ に含まれるものを言う. また p, q, r が P の番号が連続する 3 頂点であり, $[p, r]$ が対角線であるならば p, q, r を 3 頂点に持つ三角形 $T(p, q, r)$ *(*これも *Jordan* 多角形である*)* のことを $P(p_1, \ldots, p_n)$ の耳 *(ear)* と言う.

Theorem 5.2.2. $p_1, \ldots, p_n$ を頂点とする単純多角形 P について線分 $[p_1, p_i]$ が P の対角線であるとする. このとき P^+ を $p_1, \ldots, p_i$ を頂点に持つ単純多角形とし, P^- を $p_1, p_i, \ldots, p_n$ を頂点に持つ単純多角形とすれば

$$D_i(P) = D_i(P^+) \cup [p_1, p_i] \cup D_i(P^-)$$

と分解される.

証明は Theorem 4.5.4 の証明と全く同様であり, Jordan の曲線定理を使っている所を多角形版の Jordan の曲線定理である Theorem 5.1.1 に置き換え, 回転数に関する所を交点数に置き換えて Corollary 5.1.2 を用いればよい. とは言うものの, 念の為に証明しておこう.



Proof. 仮定より $(p_1, p_i) \subset D_i(P)$ であるから $P^\pm$ ともに単純多角形になる. (P^+ が単純であることは容易に分かるが, $[p_i, p_1]$ と $[p_1, p_2]$ が平行になることはあり得る. その場合は p_1 を除いて $[p_i, p_2]$ を辺とすること. P^- についても同じである.) また $(p_1, p_i) \cap D_o(P) = \emptyset$ が成り立つ. よって

$$P^\pm \cap D_o(P) = \emptyset$$

となり, 従って

$$D_o(P) \subset D_i(P^\pm) \cup D_o(P^\pm) \quad (\text{複合同順})$$

となるが $D_o(P)$ の連結性より $D_o(P) \subset D_i(P^{\pm})$ または $D_o(P) \subset D_o(P^{\pm})$ のどちらか一方が成り立つ．$D_O(P)$ は非有界で, $D_i(P^{\pm})$ は有界であるから $D_o(P) \subset D_o(P^{\pm})$ が成り立つ．両辺の閉包を取ると

$$D_o(P) \cup P = \overline{D_o(P^{\pm})} \subset \overline{D_o(P^{\pm})} = D_o(P^{\pm}) \cup P^{\pm} \quad (\text{複合同順})$$

が成り立つ．両辺の補集合を取れば $D_i(P^{\pm}) \subset D_i(P)$ が従う．以上より $D_i(P^+) \cup (p_1, p_i) \cup D_i(P^-) \subset D_i(P)$ が成り立つ．

逆の包含関係を示すために $z \in D_i(P) \backslash (p_1, p_i)$ とする．そして P, P^+, P^- に関する交点数を $n(z,\theta)$, $n^+(z,\theta)$, $n^-(z,\theta)$ とし, $r(z,\theta)$ と (p_1, p_i) の共有点の個数 (0 または 1 である) を $n_0(z,\theta)$ と置く．このとき半直線 $r(z,\theta)$ が P のいかなる頂点も通らないような θ について (頂点の個数は n 個であるから, このような θ は明らかに存在する)

$$n(z,\theta) = n^+(z,\theta) + n^-(z,\theta) - 2n_0(z,\theta)$$

が成り立つ．$z \in D_i(P)$ であるから Corollary 5.1.2 より $n(z,\theta)$ は奇数であるが, この場合上式より $n^+(z,\theta)$, $n^-(z,\theta)$ のどちらか一方, そして一方のみが奇数である．従って再び Corollary 5.1.2 より $z \in D_i(P^+)$ か $z \in D_i(P^-)$ のどちらか一方が成り立つ．よって $D_i(P) \backslash (p_1, p_i) \subset D_i(P^+) \cup D_i(P^-)$ が成り立つ．両辺に (p_1, p_i) を加えれば $D_i(P) \subset D_i(P^+) \cup (p_1, p_i) \cup D_i(P^-)$ が成り立つ． □

Corollary 5.2.3. $T = T(p,q,r)$ が単純多角形 P の耳ならば $D_i(T) \subset D_i(P)$ が成り立つ．

Lemma 5.2.4. 頂点を 4 つ以上持つ単純多角形は対角線を持つ．

Proof. q を単純多角形 P の最も右にある頂点 (複数あればその中の最も上) とし, 直前の番号の頂点を p, 直後の番号の頂点を r とする．また T を p, q, r を頂点に持つ (単純) 三角形とする．

(I)　はじめに線分 $[p,r]$ が端点以外で P と交わらないと仮定する．このとき開線分 (p,r) は連結集合で P と交わらないから, "$(p,r) \subset D_i(P)$" または "$(p,r) \subset D_o(P)$" のどちらか一方が成り立つ．

(I-i)　$(p,r) \subset D_i(P)$ の場合は, $[p,r]$ は対角線であり, $T(p,q,r)$ は P の耳である．

(I-ii)　次に $(p,r) \subset D_o(P)$ のときを考えよう．$(p,r) \cap D_i(P) = \emptyset$ であり

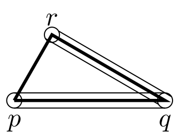
$$([p,q] \cup [q,r]) \cap D_i(P) \subset P \cap D_i(P) = \emptyset$$

より $T \cap D_i(P) = \emptyset$ である．よって

$$D_i(P) \subset D_i(T) \cup D_o(T)$$

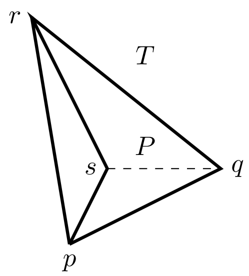
となるが $D_i(P)$ の連結性より "$D_i(P) \subset D_i(T)$" または "$D_i(P) \subset D_o(T)$" のどちらか一方が成り立つ．

$D_i(P) \subset D_o(T)$ は起き得ない．実際 q が最も右にある頂点なので図のように q の少し左側に $D_i(T) \cap D_i(P)$ に属する点が存在する．



$D_i(P) \subset D_i(T)$ の場合は P の頂点の個数は 4 以上であるから p, q, r 以外の頂点で $\overline{D_i(T)} = D_i(T) \cup T$ 内にあるものが少なくとも 1 つ存在する．P は単純多角形であるから, このような頂点は $[p,q] \cup [q,r]$ 上にはないので (p,r) 上または $D_i(T)$ 内にある．s をこのような頂点の中で最も右にあるもの (の 1 つ) とする．s から q へ伸びる半直線を取

ると, この半直線上の (s,q) の部分には P の点は存在せず, q から先にも P の点は存在しない. 従って $z \in (s,q)$ に対し, $n(z)=1$ であり $(s,q) \subset D_i(P)$ である. よって $[s,q]$ は P の対角線である.



(II)　最後に 線分 $[p,r]$ が端点以外で P と交わる場合を考えよう. この場合も p, q, r 以外の頂点で $D_i(T) \cup (p,r)$ 内にあるものが少なくとも 1 つ存在するので, その中の最も右にあるものを s とすれば上と同様に $[s,q]$ が対角線を与える. □

Theorem 5.2.5. 頂点を 4 つ以上持つ単純多角形は P の辺を共有しない 2 つの耳を持つ.

Proof. 頂点の個数 n に関する帰納法を用いて証明する. $n=4$ の場合 P は Lemma 5.2 より対角線 $[p,r]$ を持つので, そこで P を分解すれば 2 つの三角形に分解でき, それぞれが P の耳であり, P の辺を共有しない. (勿論 $[p,r]$ は 2 つの三角形に共有されるが, これは P の辺ではない.)

次に $n-1$ まで正しいと仮定し P を n 個の頂点よりなる単純多角形とし, $[p,q]$ が対角線とする. このとき Theorem 5.2.2 で行ったように P を 2 つの Jordan 多角形 P^+, P^- で 1 つの辺 $[p,q]$ を共有するものに分解できる. P^+ が三角形ならば, P^+ 自身が P の耳である. P^+ が三角形でないとする. このとき P^+ の耳で $[p,q]$ を辺に持つものは高々 2 つであるが, 帰納法の仮定より, これ以外の P^+ の耳で $[p,q]$ を辺に持たないものが少なくとも 1 つ存在する. これは P の耳になる. 以上どちらの場合でも P^+ の耳で P の耳でもあるものが存在する. P^- についても同様であるから, 結局 P には P の辺を共有しない 2 つの耳が存在する. □

これで単純多角形に関する Schönflies の定理を証明する準備が 1 つのトピックを除いて整った. 最後の 1 つはアファイン写像に関するものである.

p, q を相異なる 2 点とし, これらをこの順に, 相異なる 2 点 p', q' に写像するアファイン写像は一意ではないが, 線分 $[p,q]$ から 線分 $[p',q']$ への写像に制限すれば一意である. 実際そのようなアファイン写像が線形写像 φ と点 r_0 により $\varphi + r_0$ と表されたとすると

$$\varphi((1-t)p+tq)+r_0 = (1-t)\{\varphi(p)+r_0\} + t\{\varphi(q)+r_0\}, \quad 0 \le t \le 1$$

となるからである.

次に 2 つの三角形 $T(p,q,r)$, $T(p',q',r')$ について p, q, r をこの順に p', q', r' に写像するアファイン写像は一意に定まり, $\mathbb{C}$ から自身への位相写像である. この写像は上で述べたことから $[p,q]$, $[q,r]$, $[r,p]$ を対応する $[p',q']$, $[q',r']$, $[r',p']$ の上に $1:1$ に写像する. さらに $T(p,q,r)$ の内側の領域を $T(p',q',r')$ の内側の領域の上に $1:1$ に写像する. これは $T(p,q,r)$ と $T(p,q,r)$ で囲まれた領域の和集合が

$$z = t_1 p + t_2 q + t_3 r, \quad t_1+t_2+t_3 = 1,\ t_1,t_2,t_3 \in [0,1]$$

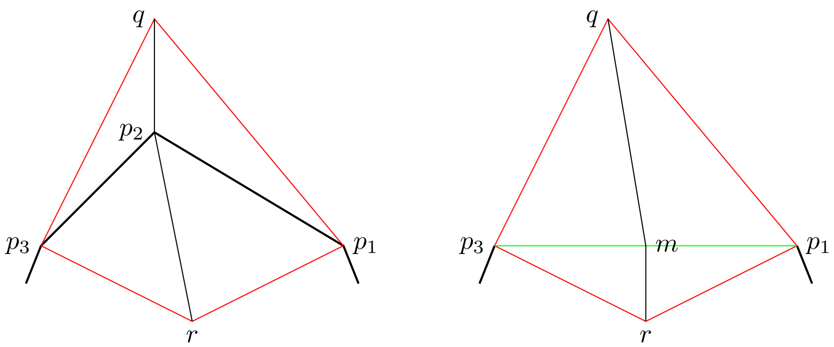
と表されることと, 上と同様な考察より従う. (t_1,t_2,t_3) を z の重心座標 (barycentric coordinate) と呼ぶ.

$$z \in D_i(T(p,q,r)) \quad \Longleftrightarrow \quad t_1,t_2,t_3 \in (0,1)$$

であることに注意する．

Theorem 5.2.6. $P = P(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ を単純多角形とすれば位相写像 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ で P をある三角形の上に，そして P で囲まれた領域を三角形で囲まれた領域の上に写像するものが存在する．

Proof. 頂点の個数 n に関する帰納法を用いて証明する．$n = 3$ の場合は明らかであるから $n \geq 4$ とする．一般性を失うことなくまた $T(p_1, p_2, p_3)$ が P の耳であると仮定してよい．このとき $P(p_1, p_3, \ldots, p_n)$ もまた単純多角形になる．



頂点 p_2 の近くに点 q を P の外側にあるように取る．また $[p_1, p_3]$ の中点を m とし，m の近くに点 r を $T(p_1, p_2, p_3)$ の外側でかつ P の内側にあるように取る．このとき p_1, q, p_3, r を 4 頂点として持つ四角形を Q とし，写像 $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を以下のように定義する．まず Q 及び Q の外側では ψ は恒等写像とし，$\overline{Q}$ の各三角形において

$T(p_2, q, p_3)$ を $T(m, q, p_3)$ にうつすアファイン写像,
$T(p_2, p_1, q)$ を $T(m, p_1, q)$ にうつすアファイン写像,
$T(p_2, p_3, r)$ を $T(m, p_3, r)$ にうつすアファイン写像,
$T(p_2, r, p_1)$ を $T(m, r, p_1)$ にうつすアファイン写像

をつないで写像を作る．定理の主張の直前に述べた注意により，このようなアファイン写像達は各三角形の共有辺上で一致し，特に Q 上では恒等写像に一致するので，ψ は位相写像である．そして ψ は P を $P' = P(p_1, p_3, \ldots, p_n)$ の上に写像し，また P の内側の領域を $P' = P(p_1, p_3, \ldots, p_n)$ の内側の領域の上に写像する．

帰納法の仮定より P' を三角形の上に，そして P' の内側の領域を，その三角形の内側の領域の上にうつす位相写像 $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が存在する．このとき合成写像 $h \circ \psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が要求される性質を持つ位相写像である．□

5.3　単純多角形による単純曲線の近似

この節では Riemann 多様体上の単純曲線に関する [3] の内容を，(複素) 平面に限定して紹介する．

はじめに単純曲線が補間的な単純折れ線により近似が出来ることを示そう．

Theorem 5.3.1. $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ を単純曲線 とし，$\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ とする．このとき区間 $[0, 1]$ の分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ で次の性質を持つものが存在する．

(i) $\max\{t_k - t_{k-1} : k = 1, \ldots, n\} \leq \delta$.

$\gamma(t_0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n)$ を結ぶ折れ線 $\hat{\gamma}:[0,1]\to\mathbb{C}$ を

$$\hat{\gamma}(t)=\left(1-\frac{t-t_{k-1}}{t_k-t_{k-1}}\right)\gamma(t_{k-1})+\frac{t-t_{k-1}}{t_k-t_{k-1}}\gamma(t_k),\quad t_{k-1}\le t\le t_k,\ k=1,\ldots,n \tag{5.3.1}$$

と置くとき,

(ii) $|\hat{\gamma}(t)-\gamma(t)|\le\varepsilon,\ 0\le t\le 1$.
(ii) $\hat{\gamma}$ は単純.

Proof. 必要ならば δ を小さく取り直すことにより

$$|t-s|\le\delta \quad\Longrightarrow\quad |\gamma(t)-\gamma(s)|\le\frac{\varepsilon}{2} \tag{5.3.2}$$

が成り立つと仮定する. $\gamma:[0,1]\to\gamma([0,1])(\subset\mathbb{C})$ はコンパクト空間から Hausdorff 空間の上への連続な単射であるから, 逆写像も連続である. 従って $\eta\in(0,\varepsilon)$ を

$$|\gamma(t)-\gamma(s)|\le\eta \quad\Longrightarrow\quad |t-s|\le\delta \tag{5.3.3}$$

が成り立つように取れる. 次に $t_0=0$ とおいて帰納的に

$$t_k=\sup\left\{t\in[t_{k-1},1]:|\gamma(t)-\gamma(t_{k-1})|\le\frac{\eta}{2}\right\}$$

と定義する. このとき $t_{k-1}<1$ ならば γ の連続性より $t_{k-1}<t_k\le 1$ が成り立ち, 特に $t_k<1$ ならば $|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})|=\frac{\eta}{2}$ が成り立つ. ここで $t_k<1$ を満たす t_k が有限個であり, 従ってある $n\in\mathbb{N}$ について

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=t_{n+1}=\cdots=1$$

となることを示そう. これは γ の一様連続性より

$$|t-s|<\rho \quad\Longrightarrow\quad |\gamma(t)-\gamma(s)|<\frac{\eta}{2}$$

を満たす $\rho>0$ が取れる. $t_k<1$ ならば $|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})|=\frac{\eta}{2}$ であるから $t_k-t_{k-1}\ge\rho$ が成り立つ. よって $t_k<1$ を満たす k について $t_k\ge k\rho$ が成り立つので結局 $t_k<1$ となる k は有限個である.

このとき

$$\begin{aligned}&|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})|=\frac{\eta}{2},\quad |\gamma(t)-\gamma(t_{k-1})|>\frac{\eta}{2}\ \text{ for } t\in(t_{k-1},1],\qquad k=1,\ldots,n-1,\\&|\gamma(t_n)-\gamma(t_{n-1})|\le\frac{\eta}{2}\end{aligned}$$

が成り立つことに注意しよう.

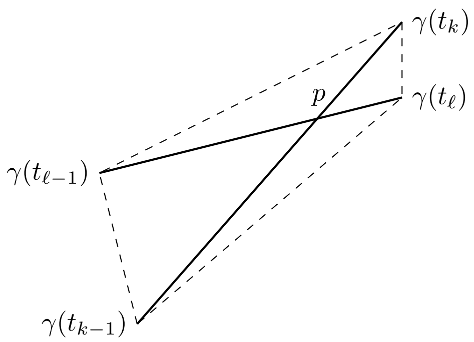
このように取った分割 $0=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=1$ が (i) を満たすことは上の評価式と (5.3.3) より従う. また $t\in[0,1]$ について $t_{k-1}\le t\le t_k$ を満たす k を取れば (5.3.2) より

$$\begin{aligned}|\hat{\gamma}(t)-\gamma(t)|&\le|\hat{\gamma}(t)-\gamma(t_{k-1})|+|\gamma(t)-\gamma(t_k)|\\&\le\frac{t-t_{k-1}}{t_k-t_{k-1}}|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})|+|\gamma(t)-\gamma(t_{k-1})|\le\frac{\eta}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\end{aligned}$$

となるので (ii) が成り立つ.

残るは (iii) $\hat{\gamma}$ の単射性である. まず折れ線 $\hat{\gamma}$ において隣り合う 2 つの線分 $[\gamma(t_{k-1}),\gamma(t_k)]$, $[\gamma(t_k),\gamma(t_{k+1})]$ の共有点は $\gamma(t_k)$ のみである. 実際もし $\gamma(t_k)$ 以外に共有点を持てば $k\le n-2$ のときは $|\gamma(t_{k-1})-\gamma(t_k)|=|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k+1})|=$

$\frac{\eta}{2}$ より 2 つの線分は一致し, $\gamma(t_{k-1}) = \gamma(t_{k+1})$ が成り立つ. これは γ の単射性に矛盾する. $k = n-1$ のときは ($t_n = 1$ に注意) $|\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})| \le \frac{\eta}{2} \le |\gamma(t_{n-1}) - \gamma(t_{n-2})|$ より $[\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)] \subset [\gamma(t_{n-2}), \gamma(t_{n-1})]$ が成り立つが, これより $|\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-2})| \le \frac{\eta}{2}$ を得る. 一方 t_{n-1} の定義より $t \in (t_{n-1}, 1]$ について $|\gamma(t) - \gamma(t_{n-2})| > \frac{\eta}{2}$ が成り立つので矛盾を生じる.



最後に隣り合わない 2 つの線分 $[\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)]$, $[\gamma(t_{\ell-1}), \gamma(t_\ell)]$, $1 \le k < k+2 \le \ell \le n$, $\ell - n \le n-1$ が共有点を持たないことを背理法で示そう. そこで 2 つの線分 $[\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)]$ と $[\gamma(t_{\ell-1}), \gamma(t_\ell)]$ が交わると仮定する. このとき図のような $\gamma(t_{k-1})$, $\gamma(t_k)$, $\gamma(t_{\ell-1})$, $\gamma(t_\ell)$ を頂点に持つ四角形を考えると, 2 本の対角線の長さは $\frac{\eta}{2}$ 以下であるから 4 つの辺の中で長さが $\frac{\eta}{2}$ より小さいものが存在する. 実際, 対角線の交点を p とおけば,

$$\min\{|\gamma(t_{k-1}) - p|, |\gamma(t_k) - p|\} \le \frac{\eta}{4}, \quad \min\{|\gamma(t_{\ell-1}) - p|, |\gamma(t_\ell) - p|\} \le \frac{\eta}{4}$$

が成り立つ. 例えば $|\gamma(t_k) - p| \le \frac{\eta}{4}$, $|\gamma(t_\ell) - p| \le \frac{\eta}{4}$ の場合は三角不等式より $|\gamma(t_k) - \gamma(t_\ell)| < \frac{\eta}{2}$ を得る. しかしながら $t_\ell > t_k$ であるからこれは $t \in (t_{k+1}, 1]$ において $|\gamma(t) - \gamma(t_k)| > \frac{\eta}{2}$ が成り立つことに反する. 他の 3 つの場合も同様に矛盾を導くことが出来る. □

Theorem 5.3.2. $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ を *Jordan* 閉曲線とし, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ とする. このとき区間 $[0,1]$ の分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ で, $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n)$ を結ぶ折れ線 $\hat{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{C}$ を

$$\hat{\gamma}(t) = \left(1 - \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\right)\gamma(t_{k-1}) + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\gamma(t_k), \quad t_{k-1} \le t \le t_k,\ k = 1, \ldots, n$$

と置くとき次の性質を持つものが存在する.

(i) $\max\{t_k - t_{k-1} : k = 1, \ldots, n\} < \delta$.

(ii) $|\hat{\gamma}(t) - \gamma(t)| < \varepsilon$, $0 \le t \le 1$.

(ii) $\hat{\gamma}$ は単純多角形.

Proof. $\delta_1 > 0$ を

$$|t - s| < \delta_1 \implies |\gamma(t) - \gamma(s)| < \varepsilon \tag{5.3.4}$$

が成り立つように取り, $\eta_1 \in (0, \varepsilon)$ を

$$|\gamma(t) - \gamma(s)| < \eta_1 \implies |t - s| < \min\{\delta, \delta_1\} \tag{5.3.5}$$

が成り立つように取る.

$$M = \max_{0 \le t \le 1} |\gamma(t) - \gamma(0)|$$

と置いて $M = |\gamma(s_0) - \gamma(0)|$ を満たす点 $s_0 \in (0,1)$ を取り

$$0 < \eta < \min\left\{\eta_1, \frac{\varepsilon}{2}, \frac{M}{2}\right\}$$

を取る.

以上の準備のもとで

$$\begin{aligned} t_1 &= \sup\{t \in [0, s_0] : |\gamma(t) - \gamma(0)| \le \eta\} \\ t^* &= \inf\{t \in [s_0, 1] : |\gamma(t) - \gamma(0)| \le \eta\} \end{aligned}$$

と置けば $0 < t_1 < s_0 < t^* < 1$ が成り立つ. また $\eta \le \eta_1 < \varepsilon$ であるから $t_1 < \delta$, $1 - t^* < \delta$ が成り立つ. さらに

$$|\gamma(t) - \gamma(0)| > \eta, \quad t_1 < t < t^*, \quad |\gamma(t_1) - \gamma(0)| = |\gamma(t^*) - \gamma(0)| = \eta \tag{5.3.6}$$

が成り立つ.

さて $\gamma|_{[t_1,t^*]}$ は単純曲線であるから帰納的に

$$t_k = \sup\left\{t \in [t_{k-1}, 1] : |\gamma(t) - \gamma(t_{k-1})| \le \frac{\eta}{2}\right\}, \quad k \ge 2$$

と定義すれば, Theorem 5.3.1 の証明と同様にして有限回で t^* に達し, 以降の全ての番号について $t_k = t^*$ となる. そこで

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-2} < t_{n-1} = t^*$$

が成り立つように $n \ge 2$ を取りあらためて $t_n = 1$ と置く. このとき

$$|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = \frac{\eta}{2}, \quad k = 2, \dots, n-2 \quad |\gamma(t_{n-1}) - \gamma(t_{n-2})| \le \frac{\eta}{2}, \tag{5.3.7}$$

$$|\gamma(t_1) - \gamma(t_0)| = \eta, \quad |\gamma(t_{n-1}) - \gamma(t_0)| = \eta \tag{5.3.8}$$

が成り立つ. また $\eta < \eta_1$ より

$$\max\{t_1 - t_0, t_2 - t_1, \dots, t_{n-1} - t_{n-2}, t_n - t_{n-1}\} < \min\{\delta, \delta_1\} \le \delta \tag{5.3.9}$$

が成り立つ. 特に $2 \le k \le n-2$ ならば

$$|\gamma(t) - \gamma(t_{k-1})| > \frac{\eta}{2}, \quad t_k < t < t_{n-1} = t^* \tag{5.3.10}$$

が成り立つ. このように取った区間 $[0,1]$ の分割 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} = t^* < t_n = 1$ について $\gamma(t_0)$, $\gamma(t_1)$, $\gamma(t_2)$, …, $\gamma(t_{n-1})$, $\gamma(t_n) = \gamma(t_0)$, を結ぶ閉じた折れ線を

$$\hat{\gamma}(t) = \left(1 - \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\right)\gamma(t_{k-1}) + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\gamma(t_k), \quad t_{k-1} \le t \le t_k,\ k = 1, \dots, n$$

と定義する.

このとき (5.3.9) より (i) が成り立つ. また $t \in [0,1]$ について $t_{k-1} \le t \le t_k$ を満たす k を取れば

$$\begin{aligned} |\hat{\gamma}(t) - \gamma(t)| &\le |\hat{\gamma}(t) - \gamma(t_{k-1})| + |\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_k)| \\ &\le \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| + |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \le 2\eta < \varepsilon \end{aligned}$$

より (ii) が成り立つ.

最後に $\hat{\gamma}$ が単純であることを背理法で示そう．作り方から区間 $[t_1, t_{n-1}]$ と $[0, t_1] \cup [t_{n-1}, t_n]$ のそれぞれで単射である．また (5.3.6) より $[\gamma(t_0), \gamma(t_1)]$ と $[\gamma(t_1), \gamma(t_1)]$ は $\gamma(t_1)$ 以外に共有点を持たない．同様に $[\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)]$ と $[\gamma(t_{n-2}), \gamma(t_{n-1})]$ は $\gamma(t_{n-1})$ 以外に共有点を持たない．従って $\hat{\gamma}$ が単純でないとすると，次の少なくとも一方が起こる．

(I) ある $k \in \{3, \ldots, n-1\}$ について 2 線分 $[\gamma(0), \gamma(t_1)]$,$[\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)]$ は共有点を持つ

(II) ある $k \in \{2, \ldots, n-2\}$ について 2 線分 $[\gamma(0), \gamma(t_{n-1})]$, $[\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)]$ は共有点を持つ

(I) が起きたとして 2 線分の交点を p と置く．$\min\{|\gamma(t_k) - p|, |\gamma(t_{k-1}) - p|\} \leq = \frac{1}{2}|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = \frac{\eta}{4}$ である．そこで $|\gamma(t_k) - p| \leq \frac{\eta}{4}$ と仮定して証明を進めよう．($|\gamma(t_{k-1}) - p| \leq \frac{\eta}{4}$ の場合も同様である.) まず $|\gamma(t_0) - p| > \frac{3\eta}{4}$ が成り立つ．実際そうでないとし $|\gamma(t_0) - p| \leq \frac{3\eta}{4}$ が成り立つならば

$$\eta < |\gamma(t_0) - \gamma(t_k)| \leq |\gamma(t_0) - p| + \| p - \gamma(t_k)| \leq \frac{3\eta}{4} + \frac{\eta}{4} = \eta$$

となり矛盾を生じる．従って $|\gamma(t_0) - p| > \frac{3\eta}{4}$ が成り立つ．これより $|\gamma(t_1) - p| < \frac{\eta}{4}$ が成り立ち，さらに

$$|\gamma(t_k) - \gamma(t_1)| \leq |\gamma(t_k) - p| + |p - \gamma(t_1)| < \frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{4} = \frac{\eta}{2}$$

が成り立つことになるが，これは (5.3.10) より得られる

$$|\gamma(t) - \gamma(t_1)| \geq \frac{\eta}{2}, \quad t_2 \leq t \leq t_{n-1}$$

に反する．$|\gamma(t_{k-1}) - p| \leq \frac{\eta}{4}$ の場合も同様な議論により

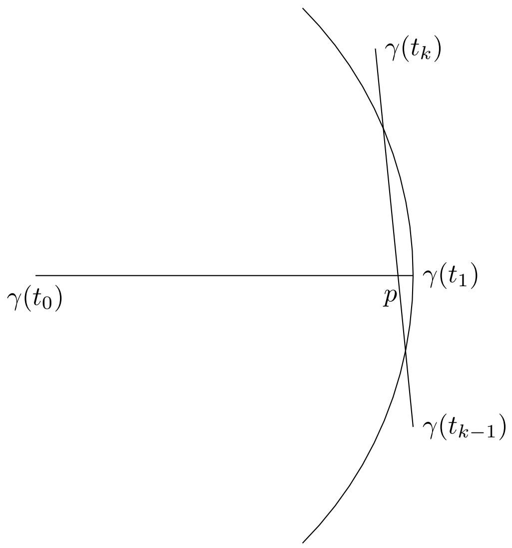
$$|\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_1)| < \frac{\eta}{2}$$

が成り立つことが示されるので，やはり矛盾を生じる，

(II) が起きた場合も同様に

$$|\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_{n-1})| < |\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_k)| = \frac{\eta}{2} \quad \text{または} \quad |\gamma(t_k) - \gamma(t_{n-1})| < |\gamma(t_k) - \gamma(t_k)| = \frac{\eta}{2}$$

が成り立つので矛盾を生じる．



□

第 6 章

単連結領域

函数論の学習の初等的な段階では Jordan の曲線定理を知っておけば十分であるが, 等角写像論などに進むと単連結領域についての知識も要求される. 領域 Ω が単連結であることの位相的な定義は "Ω 内の任意の閉曲線が, 始点に留まったままで動かない曲線に Ω 内で連続変形出来る" である. しかしながら教科書に依っては "Ω 内の任意の Jordan 曲線 γ について $D_i(\gamma) \subset \Omega$" という定義を採用したり, "$\hat{\mathbb{C}} \backslash \Omega$ が連結であること" を採用するものもある. そこでこの章では, $\mathbb{C}$ 内の領域に関して, これら 3 つの定義が同値であることを証明する.

6.1 単連結性

Definition 6.1.1. 複素平面 $\mathbb{C}$ または *Riemann* 球面 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 内の領域 Ω が単連結であるとは, Ω 内の任意の閉曲線 $\gamma : [0,1] \to \Omega$ が連続的に始点 $a = \gamma(0)(= \gamma(1))$ に変形出来ること, つまり連続写像 $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ で

$$\Gamma(0,s) = \Gamma(1,s) = a, \quad 0 \le s \le 1$$

かつ

$$\begin{cases} \Gamma(t,0) = \gamma(t), & 0 \le t \le 1 \\ \Gamma(t,1) = a, & 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

を満たすものが存在するときをいう.

例えば凸領域は単連結である. 実際 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}$ が閉曲線ならば

$$\Gamma(t,s) = (1-s)\gamma(t) + s\gamma(0)$$

と置けば良い. 従って $\mathbb{C}$, $\hat{\mathbb{C}}$, 円板 $\mathbb{D}(c,r)$ や半平面などは単連結である.

点 a に留まったまま動かない閉曲線 1_a を $1_a(t) = a$, $0 \le t \le 1$ と定義する.

Theorem 6.1.2. $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ を領域とする. このとき次の 2 条件は互いに同値である.

(i) Ω は単連結である.
(ii) $\hat{\mathbb{C}} \backslash \Omega$ は空であるか, または連結.

さらに $\infty \notin \Omega$ のときは次の条件とも同値である.

(iii) Ω 内の任意の単純閉曲線 γ について γ で囲まれた領域は Ω に含まれる. つまり $D_i(\gamma) \subset \Omega$.

条件 (iii) は Ω の内部に穴が開いていないことを Jordan の曲線定理を利用して述べていると考えられる．そして Ω に穴が開いていなければ, 閉曲線を始点に留まったままの曲線 $1_{\gamma(0)}$ に連続変形出来るということは直観的に頷けるであろう．また穴が開いていれば, その穴のまわりを回る閉曲線は $1_{\gamma(0)}$ に連続変形できないということも直観的に頷けるであろう．従って $\infty \notin \Omega$ ならば (i) と (iii) が同値になる筈であるが, これを論理的に示すのはそれほど簡単ではない．

条件 (ii) については若干の注意が必要である．例えば

$$\Omega = \mathbb{C} \backslash \{0 + it : |t| \geq 1\}$$

と置けば, Ω は複素平面から 2 本の半直線を除いた領域である．従って補集合 $\mathbb{C}\backslash\Omega$ は 2 本の半直線で, $\mathbb{C}$ で考えると連結成分は 2 つの半直線のそれぞれである．しかし $\hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega = (\mathbb{C}\backslash\Omega) \cup \{\infty\}$ であり, 2 本の半直線は ∞ でつながっているので $\hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ は連結である．このように $\mathbb{C}\backslash\Omega$ と $\hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ の連結成分は必ずしも一致しないことに注意する．

Theorem 6.1.2 の証明は長いので, この節では一部を証明するのみに止める．

Proposition 6.1.3. $\infty \notin \Omega$ ならば (i) $\Longrightarrow$ (iii) 及び (ii) $\Longrightarrow$ (iii) が成り立つ．

Proof. “(i) $\Longrightarrow$ (iii)” を背理法で示そう．(iii) を否定すると, 単純閉曲線 $\gamma : [0,1] \to \Omega$ と点 $a \in D_i(\gamma)\backslash\Omega$ が存在する． このとき Corollary 4.4.5 より $n(\gamma, a) = \pm 1$ であるが γ は $1_{\gamma(0)}$ に Ω で連続的に変形できるので $n(\gamma, a) = n(1_{\gamma(0)}, a) = 0$ となり矛盾を生じる．

今度は “(ii) $\Longrightarrow$ (iii)” を示そう．(ii) を仮定すると $F = \hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ は連結であり, $\infty \in F$ である． さて単純閉曲線 $\gamma : [0,1] \to \Omega$ について $\gamma \cap F = \emptyset$ と F の連結性より $F \subset D_i(\gamma)$ または $F \subset (D_o(\gamma) \cup \{\infty\})$ のどちらか一方が成り立つが, $\infty \in F$ であるから $F \subset (D_o(\gamma) \cup \{\infty\})$ が成り立つことになる． よって $D_i(\gamma) \cap F = \emptyset$ であり $D_i(\gamma) \subset \hat{\mathbb{C}}\backslash F = \Omega$ が成り立つ． □

6.2 ε-連結性

この節では X を距離 d を持つ距離空間とし, 点 $x \in X$ について

$$N_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$$

と置く．つまり x の ε-近傍である．同様に集合 $E \subset X$ について

$$N_\varepsilon(E) = \{y \in X : \exists x \in E \text{ with } d(x, y) < \varepsilon\}$$

と置く．また集合 $E, F \subset X$ について

$$d(E, F) = \inf\{d(x, y) : x \in E,\ y \in F\}$$

と置く．

Definition 6.2.1. $\varepsilon > 0$ とする．集合 $E(\subset X)$ 内の 2 点 x, y が E 内の ε-鎖 (ε*-chain*) で結べるとは $x = a_0$, $y = a_n$ を満たす有限個の点の列 $\{a_k\}_{k=0}^n \subset E$ で

$$d(a_{k-1}, a_k) \leq \varepsilon, \quad k = 1, \ldots, n$$

を満たすものが存在するときを言う． 全ての x, $y \in E$ が E 内の ε-鎖で結べるとき X は ε-連結であると言う．

Theorem 6.2.2. *X を距離空間とし, $E \subset X$ とする．*

(i) E が連結ならば, 全ての $\varepsilon > 0$ について ε-連結である.

(ii) E がコンパクトならば

$$E \text{ は連結} \iff \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ について } E \text{ は } \varepsilon\text{-連結}$$

が成り立つ.

Proof. $x_0 \in X$ を任意に取り固定し,

$$E_\varepsilon = \{x \in E : x \text{ は } x_0 \text{ と } E \text{ 内の } \varepsilon\text{-鎖で結べる}\}, \quad \varepsilon > 0$$

と置く. このとき任意の $x \in E_\varepsilon$ について $N_\varepsilon(x) \cap E \subset E_\varepsilon$ が成り立つので E_ε は E の開集合である. また $E \backslash E_\varepsilon$ も同様に E の開集合である. $E = E_\varepsilon \cup (E \backslash E_\varepsilon)$ であるから E の連結性より $E = E_\varepsilon$ または $E = E \backslash E_\varepsilon$ のどちらか一方が成り立つことになるが $x_0 \in E_\varepsilon$ より前者が成り立つことが従う.

(ii) の"$\Longleftarrow$" の部分については対偶を証明する. E がコンパクトであると仮定する. もし E が連結でなければ $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ を満たす 2 つの空でない閉集合 H_1, H_2 で共通部分を持たないものにより $X = H_1 \cup H_2$ と分解される. このとき H_1, H_2 もコンパクトであるから $d(H_1, H_2) > 0$ が成り立つ. このとき任意の $x \in H_1$, $y \in H_2$ について $0 < \varepsilon < d(H_1, H_2)$ ならば x, y が E 内の ε-鎖で結ぶことが出来ないことは明らかである. □

Lemma 6.2.3. $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ を距離空間 X の空でないコンパクトな集合の減少列とする. このとき $F = \bigcap_{n=1}^\infty F_n$ は空でない.

Proof. もし空ならば開被覆 $F_1 \subset \bigcup_{n=1}^\infty F_n^c$ が得られるが, F_1 はコンパクトゆえ, 十分大きな全ての N について $F_1 \subset \bigcup_{n=1}^N F_n^c = F_N^c$ となる. よって $F_N \subset F_1^c$ となるが, これと $F_N \subset F_1$ を合わせて $F_N \subset F_1 \cap F_1^c = \emptyset$ となり矛盾を生じる. □

Theorem 6.2.4. $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ を距離空間 X の ε-連結かつ空でないコンパクトな集合の減少列とする. このとき $F = \bigcap_{n=1}^\infty F_n$ も ε-連結である.

Proof. Lemma 6.2.3 より $F = \bigcap_{n=1}^\infty F_n$ は空でないことに注意する. $x_0 \in F$ を任意に取り固定し

$$F_0 = \{x \in F : x \text{ は } x_0 \text{ と } F \text{ 内の } \varepsilon\text{-鎖で結べる}\}$$

と置く. 勿論 $x_0 \in F_0$ であるから F_0 は空でない.

それでは $F \backslash F_0 \neq \emptyset$ と仮定し矛盾を導こう. Theorem 6.2.2 の証明中で示したように F_0 及び $F \backslash F_0$ はコンパクト集合 F 内の開かつ閉部分集合であり, 共通部分を持たない. 従ってともにコンパクトであり $\delta = d(F_0, F \backslash F_0) > 0$ であり, $d(a, b) = \delta$ を満たす $a \in F_0$, $b \in F \backslash F_0$ が存在する.

もし $\delta \leq \varepsilon$ ならば a と b は F 内の ε-鎖で結べることになり, 従って x_0 と b も F 内の ε-鎖で結べる. これは $b \notin F_0$ に矛盾する. よって $\delta > \varepsilon$ が成り立つ. そこで

$$F_n \subset N_{\frac{\delta-\varepsilon}{2}}(F) := \left\{ y \in X : \text{ある } x \in F \text{ について } d(x, y) < \frac{\delta - \varepsilon}{2} \right\}$$

を満たす番号 n を取る. このような番号が存在することは次のようにして分かる. もし存在しないと仮定すれば, 全ての $n \in \mathbb{N}$ について $F_n \not\subset N_\eta(F)$ ($\eta = \frac{\delta-\varepsilon}{2}$ と置いた) であるから $F_n \backslash N_\eta(F)$ は空でない. さらに $F_n \backslash N_\eta(F)$ はコンパクトであり n について減少列であるから Lemma 6.2.3 より

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^\infty (F_n \backslash N_\eta(F)) = \left(\bigcap_{n=1}^\infty F_n \right) \backslash N_\eta(F) = F \backslash N_\eta(F) = \emptyset$$

となり矛盾を生じる．

ここで任意の $p \in F_0$, $q \in F \backslash F_0$ について $p, q \in F_n$ より p, q を結ぶ F_n 内の ε-鎖 $p = a_0, \ldots, a_n = q$ が存在する．これら $\{a_k\}$ の各点と $F = F_0 \cup (F \backslash F_0)$ との距離は $\frac{\delta-\varepsilon}{2}$ より小であるから，各 a_k について $d(a_k, F_0) < \frac{\delta-\varepsilon}{2}$ または $d(a_k, F \backslash F_0) < \frac{\delta-\varepsilon}{2}$ の少なくとも一方が成り立つが，両方成り立つことはない．実際，両方成り立てば $d(F_0, F \backslash F_0) \leq d(a_k, F_0) + d(a_k, F \backslash F_0) < \delta - \varepsilon$ となり矛盾を生じる．

さて $a_0 = p \in F_0$, $a_n = q \in F \backslash F_0$ であるから $d(a_0, F_0) = 0 < \frac{\delta-\varepsilon}{2}$, $d(a_n, F \backslash F_0) = 0 < \frac{\delta-\varepsilon}{2}$ が成り立つ．従って $k = 1, \ldots, n$ の中に

$$d(a_{k-1}, F_0) < \frac{\delta-\varepsilon}{2}, \quad d(a_k, F \backslash F_0) < \frac{\delta-\varepsilon}{2}$$

が成り立つものが存在する．これと $d(a_{k-1}, a_k) < \varepsilon$ を合わせて

$$d(F_0, F \backslash F_0) \leq d(a_{k-1}, F_0) + d(a_{k-1}, a_k) + d(a_k, F \backslash F_0) < \frac{\delta-\varepsilon}{2} + \varepsilon + \frac{\delta-\varepsilon}{2} = \delta$$

となり矛盾を生じる． □

さて連続体とは 2 点以上を含むコンパクトかつ連結な集合のことであった．

Theorem 6.2.5. X を距離空間とし，$\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の連続体の減少列とする．このとき $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ は連続体であるか，1 点である．

Proof. $F \neq \emptyset$ は Lemma 6.2.3 より従う．そして F は閉集合の列の共通部分ゆえ閉集合であり，コンパクト集合 F_1 に含まれるのでコンパクトである．また任意の $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ について F_n は ε-連結であるから F もそうであり，ε の任意性より F は連結である．よって F は 1 点よりなるか，さもなければ連続体である． □

Theorem 6.2.6. 距離空間 X のコンパクト部分集合 F と $x \in F$ について x を含む F の連結成分 C は

$$C = \{y \in F : \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ について } x \text{ と } y \text{ は } F \text{ 内の } \varepsilon\text{-鎖で結ばれる }\}$$

と表せる．これより特に $y \in F$ について x, y が F の同一の成分に含まれる為の必要十分条件は x, y が任意の $\varepsilon > 0$ について F 内の ε-鎖で結ばれることである．

Proof. "$\subset$" を示そう．$y \in C$ ならば C の連結性と Theorem 6.2.2 より任意の $\varepsilon > 0$ について x と y は C 内の ε-鎖で結ばれる．従って F 内の ε-鎖で結ばれる．

"$\supset$" を示そう．

$$F_n = \left\{y \in F : \ y \text{ は } x \text{ と } F \text{ 内の } \tfrac{1}{n}\text{-鎖で結べる}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

と置くと，

$$\{y \in F : \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ について } x \text{ と } y \text{ は } F \text{ 内の } \varepsilon\text{-鎖で結ばれる }\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

であるから，$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subset C$ を示せばよい．Theorem 6.2.2 の証明中で示したように F_n は閉集合であり，コンパクト集合 F に含まれるので F_n はコンパクトである．また明らかに $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ は減少列であり任意の $k \in \mathbb{N}$ について

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=k}^{\infty} F_n$$

が成り立つ．ここで上式の右辺はコンパクトかつ $\frac{1}{k}$-連結集合の減少列の共通部分ゆえ Theorem 6.2.4 よりコンパクトかつ $\frac{1}{k}$-連結である．さらに $k \in \mathbb{N}$ の任意性より $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ は連結であり $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subset F$ が成り立つ．C は x を含み F に含まれる最大の連結集合であったから $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subset C$ が成り立つ． □

Theorem 6.2.7. X を距離空間とし, F を X のコンパクト部分集合とする. このとき 2 点 $x, y \in F$ が F の異なる成分に属せば $x \in H_1$, $y \in H_2$ を満たす F の分割 H_1, H_2 が存在する.

Proof. $x, y \in F$ は F の異なる成分に属すので, ある $\varepsilon > 0$ について F 内の ε-鎖で結ばれない. そこで

$$H_1 = \{a \in F:\ x \text{ と } a \text{ は } F \text{ 内の } \varepsilon\text{-鎖で結ばれる }\}, \quad H_2 = F \backslash H_1$$

と置く. このとき Theorem 6.2.2 の証明中で示したように H_1, H_2 はともに開集合であり, 明らかに共通部分を持たない. また $x \in H_1$, $y \in H_2$ であるから, ともに空でない. よって H_1, H_2 は F の分割である. □

Theorem 6.2.7 は次のように一般化できる.

Theorem 6.2.8. F を距離空間 X のコンパクト部分集合とする. また E_1, E_2 を F の空でない閉部分集合とし, F の任意の成分は E_1, E_2 と同時に交わらないとする. このとき $E_1 \subset H_1$, $E_2 \subset H_2$ を満たす F の分割 H_1, H_2 が存在する.

Proof. $\eta > 0$ で E_1 の任意の点と E_2 の任意の点が F 内の η-鎖で結べないようなものが存在することを示そう. これが示されれば

$$H_1 = \{x \in F : x \text{ はある } a \in E_1 \text{ と } F \text{ 内の } \varepsilon\text{-鎖で結べる }\}, \quad H_2 = F \backslash H_1$$

と置けば Theorem 6.2.2 で示したように H_1, H_2 はともに F の開集合である. そして $E_1 \cap H_1$ が成り立ち, 上で述べた η の性質より $E_2 \subset H_2$ が成り立つ.

さてもしこのような $\eta > 0$ が存在しないとすると $x_n \in C$, $y_n \in E$ で F 内の $\frac{1}{n}$-鎖で結べるものが存在する. このとき C, E のコンパクト性より $x_{n_k} \to x_0 \in C$, $y_{n_k} \to y_0 \in E$ となる部分列が取れる. 任意の $\varepsilon > 0$ について

$$\frac{1}{n_k} < \varepsilon, \quad d(x_0, x_{n_k}) < \varepsilon, \quad d(y_0, y_{n_k}) < \varepsilon$$

を満たすように十分大きな k を取れば, x_{n_k} と y_{n_k} は $\frac{1}{n_k}$-鎖, 従って ε-鎖で結べるので, x と y も F 内の ε-鎖で結べることになる. よって Theorem 6.2.6 より x, y は同一の F の成分に属すことになり仮定に反する. □

Theorem 6.2.8 において E_1, E_2 として, F の成分や, 成分の有限和などとすることができる.

Theorem 6.2.9. X を距離空間とし, F を X のコンパクト部分集合とする. また $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ を F 内の収束点列とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し x_n, y_n は F の同一の成分に属すとする. このとき $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$, $y_0 = \lim_{n\to\infty} y_n$ も F の同一の成分に属す.

Proof. 任意の $\varepsilon > 0$ について $d(x_0, x_n) < \varepsilon$, $d(y_0, y_n) < \varepsilon$ を満たす n を取る. x_n, y_n は F の同一の成分に属すので ε-鎖 $a_1 = x_n, \ldots, a_k = y_n$ が取れる. これに x_0, y_0 を追加すれば $a_0 = x_0, a_1 = x_n, \ldots, a_k = y_n, a_{k+1} = y_0$ は x_0, y_0 を結ぶ F 内の ε-鎖である. よって x_0, y_0 は任意の $\varepsilon > 0$ に対し F 内の ε-鎖で結ばれるので, F の同一の成分に属す. □

6.3 Jordan 曲線による分離定理

Definition 6.3.1. $a < b$, $c < d$ を満たす実数 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ について辺が座標軸に平行な閉長方形 $S = \{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Re} z \leq b,\ c \leq \operatorname{Im} z \leq d\}$ と置く. そして S の分割 $G : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ のことを長方形格子 *(rectangular grating)* と言い, ∂S のことを枠 *(frame)* と言う. ただし分割を行わない $(m = n = 1)$

場合も長方形格子であると考える．以下では長方形格子を略して単に格子と言うことにする．長方形 S に関する格子 G について細分された個々の閉長方形 $\{z \in \mathbb{C} : x_{i-1} \le \operatorname{Re} z \le x_i,\ y_{j-1} \le \operatorname{Im} z \le y_j\}$ を 2-胞体と言う．また S の外側の領域と周の和集合 *(*非有界である*)* も G の 2-胞体とみなすことにし, 非有界な 2-胞体と言う．ただし 非有界な 2-胞体は ∞ を含むとし, $\hat{\mathbb{C}}$ で考える．2-胞体の辺を G の辺と言い, 2-胞体の頂点を G の頂点と呼ぶ．

Definition 6.3.2. G の 2-胞体の有限個の和集合を 2-複体と呼ぶ．2-複体 K について ∂K は G の辺で, “その辺を介して隣り合う 2 つの 2-胞体の一方が K に含まれ, 他方は K に含まれない” もの全ての和集合である．K の頂点 p が非正則であるとは, $p \in \partial K$ であり,

(i) $p \in \partial S$ であるかまたは
(ii) $p \notin \partial S$ であり, p を頂点として持つ 4 つの 2-胞体で対角の位置にある 2 つが K に含まれ, 残りの 2 つが K に含まれない

時を言う．2-複体 K が正則であるとは, K が非正則頂点を持たない時を言う．

図 6.3.1　非正則頂点

2-複体 K の (連結) 成分は, 2-胞体の連結性より, やはり 2-複体であることに注意しよう．

Lemma 6.3.3. 2-胞体 A と B が 2-複体 K の同じ *(*連結*)* 成分に含まれる為の必要十分条件は

$$A = A_1, A_2, \ldots, A_n = B$$

のように A から出発し, 前後の 2-胞体と点を共有する 2-胞体で K に含まれるものを並べ B まで到達できることである．特に 2-複体 K の 2-胞体 A を含む成分とは上のように隣り合うもの同志が交わりを持ち K に含まれる 2-胞体の列で到達することができる 2-胞体 B の全ての和よりなる 2-複体である．

Proof. C を A を含む K の成分とする．さて点を共有する 2 つの連結集合の和は連結であることに注意すれば, A と B を結ぶ上記のような列が存在するとき $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ も連結であることが分かる．C_1 を A と上記のような列で結べる K の 2-胞体の全ての和よりなる 2-複体とすれば, 先に示したことより $C_1 \subset C$ が成り立つ．

次に C_2 を A と上記のような列で結べない K の 2-胞体 の全ての和よりなる 2-複体とすれば,

$$C_1 \cap C_2 = \emptyset, \quad C_1 \cup C_2 = K$$

が成り立つ．また C_1, C_2 は, どちらも閉集合であるから, K の相対位相のもとで開集合である．従って連結集合 C について $C \subset C_1$ または $C \subset C_2$ のどちらか一方のみが成り立つ．しかしながら $A \subset C \cap C_1$ であるから $C \subset C_1$ が成り立つ．

以上より $C = C_1$, つまり Lemma の後半の主張が成り立つ．前半の主張は後半より直ちに従う．　□

Lemma 6.3.4. K が正則ならば K の *(*連結*)* 成分も正則である．

Proof. p が K の成分 C の非正則頂点であるとする．$p \in \partial S$ ならば p は K の頂点でもあるから，K の正則性に矛盾する．

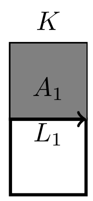
次に $p \notin \partial S$ の場合を考える．図 6.3.1 において影のついた 2-胞体が C の含まれ，影がつかない 2-胞体が C に含まれないとする．影のつかない 2-胞体 A が K に含まれるとすると，A は C と点を共有する連結集合であるから $C \cup A$ も連結であり $C \cup A \subset K$ を満たす．これは成分 C の最大性に反する．よって A が K に含まれない．従って p は K の非正則頂点となり K の正則性に反する．□

Lemma 6.3.5. 2-複体 K が正則で連結ならば $\mathrm{Int}\, K$ も連結である．

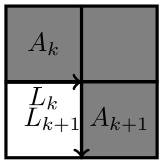
Proof. 点 $p, q \in \mathrm{Int}\, K$ について $p \in A \subset K$, $q \in B \subset K$ を満たす 2-複体 A, B を取る．このとき $p \in \mathrm{Int}\, K$ より p と A の中心を結ぶ閉線分も $\mathrm{Int}\, K$ に含まれる．同様に q と B の中心を結ぶ閉線分も $\mathrm{Int}\, K$ に含まれる．K の連結性より $A = A_1, \ldots, A_n = B$ を A から出発し，前後の 2-胞体と点を共有する 2-胞体で K に含まれるものの列が存在する．K は正則であるから，必要ならば 2-複体を追加することにより隣り合う 2-胞体は辺を共有すると仮定してよい．このとき，各 2-胞体の中心を線分で結び，つないでゆけば A の中心と B の中心を結ぶ折れ線が出来る．そしてこの折れ線は $\mathrm{Int}\, K$ に含まれる．以上の 2 線分と折れ線をつなげば p と q を結ぶ $\mathrm{Int}\, K$ 内の折れ線が出来上がる．よって $\mathrm{Int}\, K$ は (弧状) 連結である．□

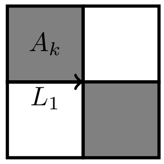
Theorem 6.3.6. *K が有界，正則かつ連結な 2-複体ならば ∂K を構成する G の辺 (の一部) をつないでできる単純多角形 γ で $\gamma \subset \partial K$, $\mathrm{Int}\, K \subset D_i(\gamma)$ を満たすものが存在する．*

Proof. K の最も下にある辺の中で一番左にあるものを取り L_1 と置けば L_1 の上部の 2-胞体 A_1 は K に含まれ，下側の 2-胞体は K に含まれない．L_1 には A_1 の内側が左側に見える向きを付けておく．

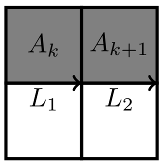


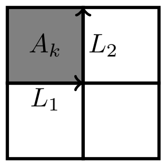
このような辺を帰納的に取っていき辺 L_k で進行方向の左側の 2-胞体が K に含まれ，右側の 2-胞体が K に含まれないものが取れた時，同じ性質をもつ辺 L_{k+1} が 1 意的に存在する．実際，L_k が左から右へ向かう辺で A_k が L_k の左側の 2-胞体とする．K に含まれる 2-胞体に影をつけて表せば，下図のように，4 つの場合がある．K が正則であることより下図の右上の場合は起こらず，この場合以外は L_{k+1} が一意的に取れることは図から了解できる．





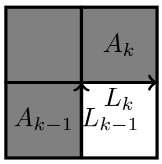
起こらない

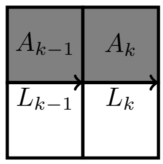


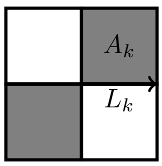


$A_k = A_{k+1}$

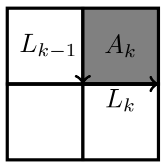
逆に L_k の前の辺 L_{k-1} も一意的に取れることは, 同様に下図より分かる.







起こらない



$A_{k-1} = A_k$

さて L_1 から出発し, ∂K に含まれる辺で進行方向の左側の 2-胞体が K に含まれるものを 1 意的に次々に取っていけば, ∂K に含まれる辺は有限個しかないから, いつかは重複が起こる．そこで

$$L_1, L_2, \ldots, L_n, L_{n+1}$$

に於いて, $L_1, \ldots, L_n$ が相異なり, L_{n+1} が $L_1, \ldots, L_n$ のどれかに一致するとしよう．もし $L_j = L_{n+1}$, $2 \leq j \leq n$ ならば L_{j-1} と L_n が一致することになるので矛盾である．従って $L_{n+1} = L_1$ であり γ を折れ線 $L_1, L_2, \ldots, L_n$ よりなる閉曲線と置けば, γ は単純多角形である．実際, 単純であることは次のように示される．

$L_1, L_2, \ldots, L_n$ の中に隣り合う辺以外に共有点を持つ 2 つの辺があるとする．適当に辺の番号をずらせば L_1 と L_j, $3 \leq j \leq n-1$ が L_1 の終点を共有すると仮定して一般性を失わない．しかしながら K は非正則頂点を持たないので L_2 以外に, $\partial\mathcal{R}_0$ の辺で L_1 の終点を共有する ∂K の辺は存在しない．

以上より $L_1, L_2, \ldots, L_n$ をつないでできた曲線を γ とおけば γ は単純多角形であり $\gamma \subset \partial K$ より $\mathrm{Int}\, K \cap \gamma = \emptyset$ である．よって

$$\mathrm{Int}\, K \subset D_i(\gamma), \quad \mathrm{Int}\, K \subset D_o(\gamma) \quad \text{のどちらか一方のみが成り立つ}$$

ここで L_1 より下の 2-胞体を B と置けば $\mathrm{Int}\, B \subset D_o(\gamma)$ が成り立つ．実際 L_1 を含む水平線より下側に, K に含まれる 2-胞体はない．従って B の任意の内点 a から下方に垂直の半直線を引けば, この半直線は K を通らない．従って

$\gamma(\subset \partial K \subset K)$ も通らない．よって単純多角形に関する交点数の議論を思い出せば, $a \in D_o(\gamma)$ であることが分かる．よって $\mathrm{Int}\, B \subset D_o(\gamma)$ であり, $\mathrm{Int}\, A_1 \subset D_i(\gamma)$ であることも同様に交点数の議論より分かる．$\mathrm{Int}\, A_1 \subset \mathrm{Int}\, K$ であるから上式において $\mathrm{Int}\, K \subset D_i(\gamma)$ の方が成り立つことが分かる． □

Theorem 6.3.6 を精密化すれば次が得られる．

Theorem 6.3.7. *K が有界, 正則かつ連結な 2-複体ならば境界 ∂K は有限個の互いに交わらない Jordan 多角形 (格子の辺をつないでできる Jordan 曲線のこと) $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$, $p \in \mathbb{N}$ よりなり, γ_j の向きは, その辺を含み K に含まれる 2-胞体の周 (4 つの辺) の正の向き (反時計回りのこと) と一致する．さらに*

(i) *$p = 1$ の時, K は γ_1 が囲む Jordan 閉領域 (Jordan 曲線と, それが囲む領域の和のこと) である．*

(ii) *$p \geq 2$ の時, $\gamma_2, \ldots, \gamma_p$ は全て γ_1 の内側にあり, かつ互いに他の外側にある．そして K は γ_1 が囲む Jordan 閉領域から $\gamma_2, \ldots, \gamma_{j_p}$ が囲む領域を取り除いたもの．*

が成り立つ．

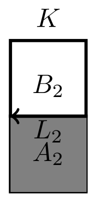
Proof. Theorem 6.3.6 の証明のように K を構成する 2-胞体で, 一番下のものの中で一番左のもの A_1 を考えよう．そして A_1 の下の辺に A_1 の内部が左に見える向きを与え, 次々に辺をつないで行って出来る Jordan 多角形を γ_1 とする．このとき $\gamma_1 \subset \partial K$ であり Theorem 6.3.6 の証明と同様に交点数の議論より $A_1 \subset D_i(\gamma_1) \cup \gamma_1$ が成り立ち K は γ_1 の囲む Jordan 閉領域に含まれる．

$\partial K = \gamma_1$ の場合 2 つの領域 $\mathrm{Int}\, K$ と $D_i(\gamma_1)$ の境界は一致し, $\mathrm{Int}\, A_1 \subset \mathrm{Int}\, K \cap D_i(\gamma_1)$ が成り立つので $D_i(\gamma_1) = \mathrm{Int}\, K$ が成り立ち, 両辺の閉包を取れば $K = D_i(\gamma_1) \cup \gamma_1$ が成り立つ．

∂K を構成する辺の中で γ_1 に含まれないものがある場合を考えよう．このような辺 (γ_1 の内側にある) を介して隣あう左右または上下の 2 つの 2-胞体のうち一方は K に含まれもう一方は K に含まれない．従って γ_1 の囲む閉領域の中に K に含まれない 2-胞体が存在する．このような 2-胞体の中で一番下で一番左のものを B_2 と置く．B_2 の下の 2-胞体を A_2 と置けば A_2 は K に含まれる．A_2 と B_2 が共有する辺を L_2 と置き L_2 には A_2 の内部が左側に見える向きを付ける．そして L_2 から出発して ∂K に含まれる辺を一意的につないで行って Jordan 多角形 γ_2 を作る．$\gamma_2 \subset \partial K$ より $D_i(\gamma_2) \cap \partial K = \emptyset$ が成り立つので $D_i(\gamma_2) \subset \mathrm{Int}\, K$ または $D_i(\gamma_2) \subset \mathrm{Ext}\, K$ のどちらか一方が成り立つが, 交点数の議論から $\mathrm{Int}\, A_2 \subset D_o(\gamma_2)$ が分かるので $D_i(\gamma_2) \subset \mathrm{Ext}\, K$ が成り立つ．両辺の補集合を取れば $K \subset D_o(\gamma_2) \cup \gamma_2$ が従い,

$$K \subset (D_i(\gamma_1) \cup \gamma_1) \cap (D_o(\gamma_2) \cup \gamma_2)$$

が成り立つ．



$\partial K = \gamma_1 \cup \gamma_2$ の場合, 2 つの領域 $\mathrm{Int}\, K$ と $D_i(\gamma_1) \cap D_o(\gamma_2)$ の境界は一致し, $\mathrm{Int}\, A_2 \subset \mathrm{Int}\, K \cap (D_i(\gamma_1) \cap D_o(\gamma_2))$ であるから $\mathrm{Int}\, K = D_i(\gamma_1) \cap D_o(\gamma_2)$ が成り立つ．よって $K = (D_i(\gamma_1) \cup \gamma_1) \cap (D_o(\gamma_2) \cup \gamma_2)$ が成り立つ．

∂K を構成する辺の中で $\gamma_1 \cup \gamma_2$ に含まれないものがある場合を考えよう．このような辺 (γ_1 の内側にあり, かつ γ_2 の外側にある) を介して隣りあう左右または上下の 2 つの 2-胞体のうち一方は K に含まれもう一方は K に含まれない．従って $(D_i(\gamma_1) \cup \gamma_1) \cap (D_o(\gamma_2) \cup \gamma_2)$ の中に K に含まれない 2-胞体が存在する．このような 2-胞体の中で一番下で一番左のものを B_3 と置く．B_3 の下の 2-胞体を A_3 置いて, 前と同じ手順で $D_i(\gamma_1) \cap D_o(\gamma_2)$ 内の Jordan 多角形 γ_3 を作る．

以下同様な手順で $\partial K \backslash (\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_{q-1}) \neq \emptyset$ なる限りこのような操作を続け, 最後に $\partial K = \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_q$ となり, この操作が終わったとしよう．作り方から $\gamma_2, \ldots, \gamma_q$ は全て γ_1 の内側にあり, かつ互いに他の外側にある．また

$$K = (D_i(\gamma_1) \cup \gamma_1) \cap (D_o(\gamma_2) \cup \gamma_2) \cap \cdots \cap (D_q(\gamma_2) \cup \gamma_q)$$

が成り立つこと作り方から従う． □

Corollary 6.3.8. *K が有界, 正則かつ連結な 2-複体のときに ∂K を Theorem 6.3.7 における有限個の Jordan 多角形 $\gamma_1, \ldots, \gamma_q$ に分解すると*

$$f(z) = \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \operatorname{Int} K$$

が成り立つ．

それでは Jordan 曲線による分離定理を幾つか述べよう．はじめの定理が, 最も状況が複雑な場合である．

Theorem 6.3.9. *Ω を $\hat{\mathbb{C}}$ 内の領域とし C_1, C_2 を補集合 $\hat{\mathbb{C}} \backslash \Omega$ の相異なる成分とする．このとき Ω 内の単純閉曲線 γ で C_1 と C_2 を分離する, つまり $\hat{\mathbb{C}} \backslash \gamma$ の 2 つの成分の一方に C_1 が含まれ, もう一方に C_2 が含まれるものが存在する．*

Proof. $\hat{\mathbb{C}}$ はコンパクト距離空間であるから, Theorem 6.2.8 及び, その証明の後の注意より $C_1 \subset H_1$, $C_2 \subset H_2$ を満たす $\hat{\mathbb{C}} \backslash \Omega$ の分割 H_1, H_2 が存在する．すなわち H_1, H_2 はともに空でない閉集合で $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, $H_1 \cup H_2 = \hat{\mathbb{C}} \backslash \gamma$ を満たす．ここで必要ならば適当な同相写像を合成すればよいので, $\infty \in C_2$ と仮定する．このとき H_1 は閉集合で $\infty \notin H_1$ であるから $\mathbb{C}$ のコンパクト部分集合である．これと $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ より

$$d(H_1, H_2) = \inf\{|z - w| : z \in H_1,\ w \in H_2\} > 0$$

である．$d(H_1, H_2) = \infty$ となるのは $H_2 = \{\infty\}$ の場合で, この場合に定理が成り立つのは明らかであるから, $0 < d(H_1, H_2) < \infty$ と仮定する．

辺が座標軸に平行で 1 辺の長さが ℓ の閉正方形 S を $H_1 \subset \operatorname{Int} S$ が成り立つように取る．そして $n \in \mathbb{N}$ を

$$\frac{\ell}{n} < \min\{\frac{1}{2\sqrt{2}} d(H_1, H_2), d(H_1, \partial S)\}$$

を満たすように取り, S を上下左右にそれぞれ n 等分して格子 G を作る．このとき G の各 2-胞体は

$$\frac{\sqrt{2}\ell}{n} < \frac{1}{2} d(H_1, H_2) < d(H_1, H_2)$$

より H_1, H_2 と同時に交わることはない．

さて K を H_1 と交わる 2-胞体全てよりなる 2-複体とする．2-胞体 A が K に含まれる, つまり H_1 と交われば

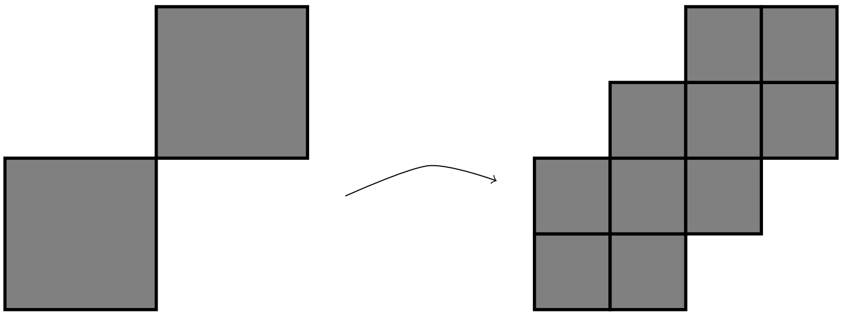
$$\frac{\ell}{n} < d(H_1, \partial S)$$

より A は ∂S から内側に向かって 1 列めにはない．また

$$\frac{2\sqrt{2}\ell}{n} < d(H_1, H_2)$$

より A 及び A と交わる周囲の 2-胞体 (全部で 8 個) も H_2 とは交わらない．さらに $H_1 \subset \operatorname{Int} K$ となることに注意しよう．

2-複体 K は正則とは限らない．そこで K に非正則頂点 p が存在すれば下図のように p を頂点に持ち, K に含まれない 2 つの 2-胞体を上下, 左右にそれぞれ 2 等分し, 得られた 8 つの閉小正方形の中で p を頂点に持つものを K に追加する．この操作を K の非正則頂点全てについて行って得られる 2-複体 を K^* と置く．K から K^* を作る操作を肥厚 (thickening) と呼ぶ．K^* は G ではなく S の上下, 左右をそれぞれ $2n$ 等分して得られる格子の上の 2-複体である．



さて K^* は $K^* \cap \partial S = \emptyset$ を満たし, 非正則頂点を持たないので正則な複体であり, 作り方から $H_1 \subset \operatorname{Int} K \subset \operatorname{Int} K^*$, $H_2 \cap K^* = \emptyset$ が成り立つ．これより特に $\partial K^* \cap (H_1 \cup H_2) = \emptyset$ が成り立つので $\partial K^* \subset \hat{\mathbb{C}} \backslash (H_1 \cup H_2) = \Omega$ である．K_1^* を C_1 を含む K^* の成分とすれば K_1^* は連結な正則 2-複体であり $\partial K_1^* \subset \partial K^* \subset \Omega$ が成り立つ．ここで Lemma 6.3.6 より $\gamma \subset \partial K_1^* \subset \Omega$, $C_1 \subset \operatorname{Int} K_1^* \subset D_i(\gamma)$ を満たす単純多角形 γ が存在する．$\gamma \cap H_2 = \emptyset$ が成り立つので, 特に $\gamma \cap C_2 = \emptyset$ であり, C_2 の連結性より $C_2 \subset D_i(\gamma)$ または $C_2 \subset D_o(\gamma)$ のどちらか一方が成り立つ．しかしながら $\infty \in C_2$ であるから $C_2 \subset D_o(\gamma)$ が成り立つ．

以上で C_1, C_2 を分離する Ω 内の単純多角形 γ が存在することが示された．□

Theorem 6.3.10. *F_1, F_2 がともに $\hat{\mathbb{C}}$ 内の空でない連結閉集合で $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ならば F_1, F_2 を分離する単純閉曲線が存在する．*

Proof. 必要ならば適当な同相写像を合成すればよいので, $\infty \in F_2$ と仮定する．このとき F_1 は閉集合で $\infty \notin H_1$ であるから $\mathbb{C}$ のコンパクト部分集合である．これと $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ より

$$d(F_1, F_2) = \inf\{|z-w| : z \in F_1,\ w \in F_2\} > 0$$

である．$d(F_1, F_2) = \infty$ となるのは $F_2 = \{\infty\}$ の場合であり, この場合に定理が成り立つのは明らかである．従って $0 < d(F_1, F_2) < \infty$ と仮定する．

辺が座標軸に平行で 1 辺の長さが ℓ の閉正方形 S を $F_1 \subset \operatorname{Int} S$ が成り立つように取る．そして $n \in \mathbb{N}$ を

$$\frac{\ell}{n} < \min\{\frac{1}{2\sqrt{2}} d(F_1, F_2), d(F_1, \partial S)\}$$

を満たすように取り, S を上下左右にそれぞれ n 等分して格子 G を作る．K を F_1 と交わる 2-胞体全てよりなる 2-複体とすれば, K は正則な 2-複体で F_1 の連結性より, K も連結である．K^* を K の肥厚とすれば K^* は連結な正則 2-複体であり Lemma 6.3.6 より $\gamma \subset \partial K^* \subset \hat{\mathbb{C}} \backslash (F_1 \cup F_2)$, $F_1 \subset \operatorname{Int} K^* \subset D_i(\gamma)$ を満たす単純多角形 γ が存在する

ことが分かる．また $\gamma\cap(F_1\cup F_2)=\infty$ と F_2 の連結性より $F_2\subset D_i(\gamma)$, $F_2\subset D_o(\gamma)$ のどちらか一方が成り立つが $\infty\in F_2$ より 後者が成り立つ． □

Theorem 6.3.11. Ω を $\hat{\mathbb{C}}$ 内の領域とし F は閉集合で $\infty\notin F\subset\Omega$ を満たすとする．このとき $\Omega\backslash\{\infty\}$ 内の単純多角形 γ で $F\subset D_i(\gamma)$ を満たすものが存在する．

Proof. F は $\hat{\mathbb{C}}$ の閉集合で $\infty\notin F$ を満たすので $\mathbb{C}$ のコンパクト部分集合である．$\Omega=\hat{\mathbb{C}}$ または $\Omega=\mathbb{C}$ のとき Theorem は明らかに成り立つのでそうでない, つまり $\hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ は ∞ 以外の点を少なくとも 1 つ含むと仮定する．このとき $0<d(F,\hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega)<\infty$ である．

辺が座標軸に平行で 1 辺の長さが ℓ の閉正方形 S を $F\subset\operatorname{Int}S$ が成り立つように取る．そして $n\in\mathbb{N}$ を

$$\frac{\ell}{n}<\min\{\frac{1}{2\sqrt{2}}d(F,\hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega),d(F,\partial S)\}$$

を満たすように取り, S を上下左右にそれぞれ n 等分して格子 G を作る．K を F と交わる 2-胞体全てよりなる 2-複体とすれば, K は正則な 2-複体で F の連結性より, K も連結である．K^* を K の肥厚とすれば K^* は連結な正則 2-複体であり $K^*\subset\Omega$ を満たす．Lemma 6.3.6 より $\gamma\subset\partial K^*\subset\Omega$, $F\subset\operatorname{Int}K^*\subset D_i(\gamma)$ を満たす単純多角形 γ が存在することが分かる． □

6.4 単連結性の条件

それでは領域 $\Omega\subset\hat{\mathbb{C}}$ について, 3 条件

(i) Ω は単連結である．
(ii) $\hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ は空であるかまたは連結．
(iii) Ω 内の任意の単純閉曲線 γ で ∞ を通らないものについて γ で囲まれた領域は Ω に含まれる．つまり $D_i(\gamma)\subset\Omega$.

の中で (i), (ii) が同値であること, そして $\infty\notin\Omega$ のときは (i), (ii),(iii) が同値になること証明の続きを述べよう．

Proposition 6.4.1. $\infty\notin\Omega$ のとき "(iii) $\Longrightarrow$ (i)" が成り立つ．

Proof. $F=\hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ と置く．$F=\{\infty\}$, 換言すれば $\Omega=\mathbb{C}$ のときに主張が成り立つのは明らかなので, そうでないと仮定する．つまり F は ∞ 以外の点を少なくとも 1 つ含むとする．$\gamma:[0,1]\to\Omega$ を Ω 内の閉曲線とすれば, 像 γ は Ω に含まれる $\hat{\mathbb{C}}$ の連結なコンパクト集合である．$F\cap\gamma=\emptyset$ であるから Theorem 6.3.11 より Ω 内の単純多角形 $\tilde{\gamma}$ で $\gamma\subset D_i(\tilde{\gamma})$ を満たすものが存在する．

ここで Theorem 5.2.6 より同相写像 $\varphi:D_i(\tilde{\gamma})\to\mathbb{D}$ が存在する．$\mathbb{D}$ の単連結性より $\varphi\circ\gamma$ から $1_{\varphi(\gamma(0))}$ への $\mathbb{D}$ における連続変形が存在する．これを φ^{-1} で引き戻せば γ から $1_{\gamma(0)}$ への $D_i(\tilde{\gamma})$ における連続変形である．そして $D_i(\tilde{\gamma})\subset\Omega$ であるから, この変形は Ω における連続変形でもある．以上で Ω が単連結であることが示された． □

Proposition 6.4.2. $\infty\notin\Omega$ のとき "(iii) $\Longrightarrow$ (ii)" が成り立つ．

Proof. $\infty\in\hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ であるから $\hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ が連結であることを示せばよい．そこでそうでないと仮定すれば, 相異なる 2 つの成分 C_1, C_2 が存在する．これらに Theorem 6.3.9 を適用すれば Ω 内の単純閉曲線で $D_i(\gamma)$ に C_1, C_2 のどちらか一方を含み, $D_o(\gamma)$ に残りのもう一方を含むものが存在する． □

Proposition 6.4.3. “(i) $\Longrightarrow$ (ii)”

Proof. 領域 $\Omega(\subset \hat{\mathbb{C}})$ が (位相的に) 単連結であるとする．$\Omega = \hat{\mathbb{C}}$ またはある $a \in \hat{\mathbb{C}}$ により $\Omega = \hat{\mathbb{C}}\backslash\{a\}$ と表される場合, (ii) が成り立つことは明らかであるから, そうでないと仮定する．つまり $\hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ が 2 点以上を含む連結集合であるとする．このとき適当な同相写像を用いて変換することにより $\infty \in \hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ と仮定してよい．この場合 Proposition 6.1.3 より (iii) が成り立ち, 次に Proposition 6.4.2 より (ii) が成り立つ． □

Proposition 6.4.4. “(ii) $\Longrightarrow$ (i)”

Proof. $\Omega = \hat{\mathbb{C}}$ のとき (i) が成り立つことは明らかであるから, $\hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ は空でないと仮定してよい．このとき適当な同相写像を用いて変換することにより $\infty \in \hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ と仮定してよい．この場合 Proposition 6.1.3 より (iii) が成り立ち, 次に Proposition 6.4.1 より (i) が成り立つ． □

以上で Theorem 6.1.2 の証明は完結した．

Theorem 6.1.2 の応用は数多いが, ここでは次の定理とその系に触れるに止める．

Theorem 6.4.5. *F が $\hat{\mathbb{C}}$ の連結閉部分集合ならば補集合 $F^c = \hat{\mathbb{C}}\backslash F$ の連結成分は ($\hat{\mathbb{C}}$ の位相のもとで) 単連結である．*

Proof. Ω を $F^c = \hat{\mathbb{C}}\backslash F$ の連結成分とする．必要ならば適当な一次変換を施すことにより $\infty \in F$ と仮定してよい．このとき $\Omega \subset \mathbb{C}$ となる．従って Ω の単連結性を示すには Ω 内の Jordan 曲線についての内側の領域が再び Ω に含まれることを示せばよい．

Ω 内の任意の Jordan 閉曲線 γ について $\gamma \cap F \subset \Omega \cap F \subset F^c \cap F = \emptyset$ より $F \subset D_i(\gamma) \cup (D_o(\gamma) \cup \{\infty\})$ が成り立つ．これと F が連結であることから $F \subset D_i(\gamma)$ または $F \subset \cup(D_o(\gamma) \cup \{\infty\})$ のどちらか一方のみが成り立つが $\infty \in F$ より $F \subset \cup(D_o(\gamma) \cup \{\infty\})$ が成り立つ．よって特に $F \cap D_i(\gamma) = \emptyset$ であり, $D_i(\gamma) \subset F^c$ が成り立つ．ここで $D_i(\gamma)$ は連結であり $\gamma \subset \Omega$ より $\Omega \cap D_i(\gamma) \neq \emptyset$ であるから $D_i(\gamma) \subset \Omega$ が成り立つ． □

6.5 Jordan 曲線による分離定理 II

それでは最後に Theorem 6.3.9 の一般化である次の定理を証明しよう．成分は閉集合であることに注意すれば, 次の定理の主張の F として, C と異なる $\hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ 成分の有限個の和集合を取ることが出来る．従って $\hat{\mathbb{C}}$ 内の領域 Ω について 1 つの成分 C と C と異なる成分の有限個を分かつ Ω 内の単純閉曲線の存在が分かる．

Theorem 6.5.1. *Ω を $\hat{\mathbb{C}}$ 内の領域とし, C を $\hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ の成分, F を $\hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ に含まれる閉集合で $F \cap C = \emptyset$ とする．このとき Ω 内の単純閉曲線で C と F を分離するものが存在する．*

Proof. Theorem 6.2.8 より $C \subset H_1$, $F \subset H_2$ を満たす $\hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ の分割が存在する．必要ならば適当な同相写像を施すことにより $\infty \in F$ と仮定してよい．また $H_2 = \{\infty\}$ のとき, 定理の主張は明らかに成り立つので H_2 は ∞ 以外の点を少なくとも 1 つ含むとする．このとき H_1 はコンパクトであるから $0 < d(H_1, H_2) < \infty$ である．また $H_1 \subset \mathrm{Int}\, S$ を満たす辺が座標軸に平行で 1 辺の長さが ℓ の閉正方形 S を取る．そして $n \in \mathbb{N}$ を

$$\frac{\ell}{n} < \min\{\frac{1}{2\sqrt{2}} d(H_1, H_2), d(H_1, \partial S)\}$$

を満たすように取り, S を上下左右にそれぞれ n 等分して格子 G を作る．このとき G のどの 2-胞体も H_1, H_2 と同時に交わらないことに注意しよう．

K を H_2 と交わる 2-胞体全てよりなる 2-複体とする．$\infty \in H_2$ より K は非有界 2-胞体を含むことに注意する．また $H_2 \subset \operatorname{Int} K$ であり, $\partial K \subset \Omega$ が成り立つ．そこで K の非有界 2-胞体を含む成分を K_0 とし, K_0 以外の各成分 K' (有限個である) を Ω 内の曲線で結ぶ．これは $\partial K_0 \subset \partial K \subset \Omega$, $\partial K' \subset \partial K \subset \Omega$ と Ω の弧状連結性より可能である．このようにして K に有限個の曲線を付け加えて出来る連結閉集合を $\tilde{F}$ と置けば $H_2 \subset \tilde{F}$ であり, $H_1 \cap \tilde{F} = \emptyset$ である．

$\hat{\mathbb{C}} \backslash \tilde{F}$ の C を含む成分を Ω_0 とすれば Ω_0 は Theorem 6.4.5 より単連結である．また $H_1 \cap \Omega_0$ は $\hat{\mathbb{C}}$ の閉部分集合である．実際 $H_1 \cap \Omega_0$ の点列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ が c_0 に収束すれば, H_1 は閉集合であるから $c_0 \in H_1$ である．また $c_0 \in \overline{\Omega_0}$ であるが, もし $c_0 \in \partial\Omega_0$ とすると $\partial\Omega_0 \subset \partial\tilde{F} \subset \Omega$ より $c_0 \in \Omega$ となるが, これは $c_0 \in H_1 \subset \hat{\mathbb{C}} \backslash \Omega$ に反する．従って $c_0 \in \Omega_0$ も成り立つので $c_0 \in H_1 \subset \Omega_0$ となり, $H_1 \subset \Omega_0$ は閉集合である．よって Theorem 6.3.11 より $H_1 \subset D_i(\gamma)$ を満たす Ω_0 内の単純閉曲線 γ が存在する．$\gamma \subset \Omega_0$ より $\gamma \cap \tilde{F} = \emptyset$ であり, これと $\tilde{F}$ の連結性と $\infty \in \tilde{F}$ を合わせて $(F \subset H_2 \subset)\tilde{F} \subset D_o(\gamma)$ が従う．最後に γ は Ω_0 に含まれ $H_1 \cap \Omega_0$ と交わらないので H_1 とも交わらない．よって γ は $H_1 \cup H_2 = \hat{\mathbb{C}} \backslash \Omega$ と交わらないので $\gamma \subset \Omega$ が成り立つ． □

第 7 章

平面曲線の曲率

この章は 1 節のみからなり, 後章での応用の為に平面曲線の曲率を表す公式を導くことが目標である. 前の章とは独立した内容であるが納まりが良いので, ここで解説しておくことにした.

7.1 平面曲線の曲率

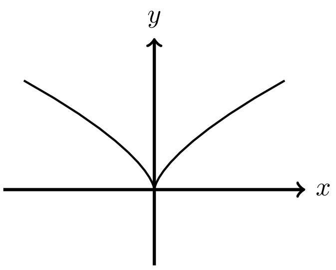
この節では xy 平面内のパラメーター表示された曲線 $C : \mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $a \le t \le b$ について考える. ただし C は C^2 級であるとする. つまり $x(t)$, $y(t)$ は t について 2 回微分可能で 2 階までの導函数は全て連続であるとする. また $\dot{x}(t) = \dfrac{dx}{dt}(t)$, $\ddot{x}(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2}(t)$ のように t に関する微分を $\dot{}$ や $\ddot{}$ で表す. このとき

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

は C の点 $(x(t), y(t))$ における接ベクトルであるが, t が時間を表す変数である場合は速度ベクトルである.

以下では 各点で $\dot{\mathbf{p}}(t) \neq 0$ を仮定して議論を進めよう. これは次のような曲線を除外するためである.

Example 7.1.1. $x(t) = t^3$, $y(t) = x^2$



さて $\dot{\mathbf{p}}(t)$ が速度ベクトルであったように 2 次微分

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix}$$

は加速度ベクトルである. また

$$s = \varphi(t) = \int_a^t |\dot{\mathbf{p}}|\, dt = \int_a^t \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$$

と置けば, s は C の区間 $[a, t]$ に対応する部分の弧長である. 以下では $[a, b]$ 上で $\dot{\mathbf{p}}(t) \neq 0$ が成り立つと仮定する. こ

のとき写像

$$\varphi : [a,b] \to [0,L], \quad L = \int_a^b |\dot{\mathbf{p}}|\,dt$$

は C^2 級の可微分同相写像, つまり全単射かつ C^2 級であり, 逆写像 $\psi = \varphi^{-1}$ も C^2 級である．従って t の代わりに弧長パラメーターと呼ばれる s を変数として用いて $\mathbf{p}(\psi(s))$ を考えることが出来る．しかしながら表現が煩雑になるので, 混乱を生じない限り, これを $\mathbf{p}(s)$ と書くことにする．同様に $x(s) = x(\varphi^{-1}(s))$, $y(s) = y(\varphi^{-1}(s))$ と表し, s に関する微分を

$$x'(s) = \frac{dx}{ds}, \quad y'(s) = \frac{dy}{ds} \quad \text{and} \quad \mathbf{p}'(s) = \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(x) \end{pmatrix}$$

と表す.

具体的な曲線の表示が与えられたときに φ や φ^{-1} を計算することは困難または事実上不可能であることが多い．計算ができる例を挙げておこう.

Example 7.1.2. $a > 0$ を定数とし懸垂線 $y = a\cosh\dfrac{x}{a}$ について弧長パラメータを求めてみよう.

計算. この場合は $\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} t \\ a\cosh\frac{t}{a} \end{pmatrix}$ という表示になるので $\dot{\mathbf{p}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh\frac{t}{a} \end{pmatrix}$ となり

$$|\dot{\mathbf{p}}(t)| = \sqrt{1 + \sinh^2\frac{t}{a}} = \cosh\frac{t}{a}$$

であるから

$$s = \int_0^t |\dot{\mathbf{p}}(t|\,dt = \int_0^t \cosh\frac{t}{a}\,dt = a\sinh\frac{t}{a}$$

である．従って $t = \sinh^{-1}\frac{s}{a}$ であるが, ここで $u = \sinh t = (e^t - e^{-t})/2$ と置くと $e^{2t} - 2ue^t - 1 = 0$ を満たすので 2 次方程式を解いて $e^t = u \pm \sqrt{u^2+1}$ であるが, $e^t > 0$ より $e^t = u + \sqrt{u^2+1}$ である．つまり $\sinh^{-1} u = \log(\sqrt{u^2+1} + u) = \log\frac{1}{\sqrt{u^2+1}-u}$ である．以上より

$$t = a\sinh^{-1}\frac{s}{a} = a\log\frac{\sqrt{s^2+a^2}+s}{a} = a\log\frac{a}{\sqrt{s^2+a^2}-s}$$

であり, $\cosh(\sinh^{-1} u) = \sqrt{u^2+1}$ と合わせて

$$\mathbf{p}(s) = \begin{pmatrix} a\sinh^{-1}\dfrac{s}{a} \\ \sqrt{s^2+a^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\log\dfrac{\sqrt{s^2+a^2}+s}{a} \\ \sqrt{s^2+a^2} \end{pmatrix}$$

を得る. □

さて弧長パラメータの利点は $|\mathbf{p}'(s)| \equiv 1$ が成り立つことにある．実際この等式は $s = \varphi(t)$ について $\psi = \varphi^{-1}$ と置くと

$$\mathbf{p}'(s) = \frac{d\mathbf{p}}{ds}(s) = \frac{d}{ds}\{\mathbf{p}(\psi(s))\} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}(\psi(s))\frac{d\psi}{ds}(s) = \frac{\frac{d\mathbf{p}}{dt}(\psi(s))}{\frac{d\varphi}{dt}(\psi(s))} = \frac{\dot{p}(\psi(s))}{|\dot{p}(\psi(s))|} \tag{7.1.1}$$

より従う.

$|\mathbf{p}'(s)| \equiv 1$ とは, 弧長パラメータのもとでは速さが一定値 1 であることを意味する．従って $\mathbf{p}'(s)$ をもう一度 s で微分した $\mathbf{p}''(s)$ は曲線の曲がり方を表す量であると考えられる．ここで $|\mathbf{p}'(s)|^2 = \mathbf{p}'(s)\cdot\mathbf{p}'(s) \equiv 1$ の両辺を微分すると

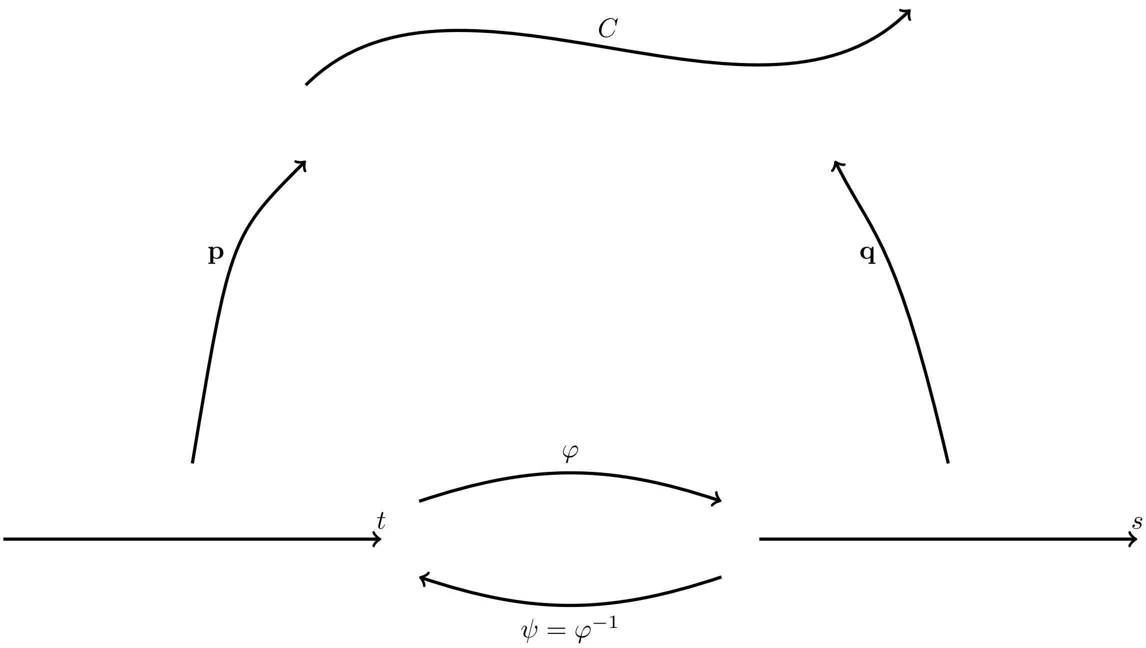
$$\mathbf{p}''(s)\cdot\mathbf{p}'(s) + \mathbf{p}'(s)\cdot\mathbf{p}''(s) = 2\mathbf{p}''(s)\cdot\mathbf{p}'(s) \equiv 0$$

となるので $\mathbf{p}''(s)$ と $\mathbf{p}'(s)$ は直交する．そこで $\mathbf{p}'(s)$ を反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ 回転したベクトルを $\mathbf{n}(s)$ と置けば, $\mathbf{p}''(s)$ は $\mathbf{n}(s)$ と平行であるから

$$\mathbf{p}''(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$$

と表される．$\mathbf{p}''(s)$ を曲率ベクトル, 係数 $\kappa(s)$ を曲率と呼ぶ．また曲率の逆数 $\rho(s) = \dfrac{1}{\kappa(s)} \in (0, \infty]$ を曲率半径と言う．

それでは単位接ベクトル, 曲率ベクトルを弧長パラメーターとは限らない一般の変数 t に関する表示を求めよう．これには具体的な $\varphi(t) = \int_a^t |\dot{\mathbf{p}}(t)|\, dt$ の計算は不要である．



曲線 $C : \mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ について, 変数の変換 $s = \varphi(t)$, $\psi = \varphi^{-1}$ により $\mathbf{q}(s) = \mathbf{p}(\psi(s))$, $\mathbf{p}(t) = \mathbf{q}(\varphi(t))$ となっているとする．このとき合成函数の微分の公式より

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{q}}{ds}(s) &= \frac{d\mathbf{p}}{dt}(\psi(s))\frac{d\psi}{ds}(s) \\ \frac{d^2\mathbf{q}}{ds^2}(s) &= \frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2}(\psi(s))\left(\frac{d\psi}{ds}(s)\right)^2 + \frac{d\mathbf{p}}{dt}(\psi(s))\frac{d^2\psi}{ds^2}(s) \end{aligned}$$

となるが

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{ds}(s) &= \frac{1}{\frac{d\varphi}{dt}(\psi(s))}, \\ \frac{d^2\psi}{ds^2}(s) &= \frac{d\psi}{ds}\left\{\frac{1}{\frac{d\varphi}{dt}(\psi(s))}\right\} = -\frac{\frac{d^2\varphi}{dt^2}(\psi(s))\frac{d\psi}{ds}(s)}{\left(\frac{d\varphi}{dt}(\psi(s))\right)^2} = -\frac{\frac{d^2\varphi}{dt^2}(\psi(s))}{\left(\frac{d\varphi}{dt}(\psi(s))\right)^3} \end{aligned}$$

であるから

$$\frac{d\mathbf{q}}{ds}(s) = \frac{1}{\frac{d\varphi}{dt}(\psi(s))}\frac{d\mathbf{p}}{dt}(\psi(s))$$
$$\frac{d^2\mathbf{q}}{ds^2}(s) = \frac{1}{\left(\frac{d\varphi}{dt}(\psi(s))\right)^2}\frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2}(\psi(s)) - \frac{\frac{d^2\varphi}{dt^2}(\psi(s))}{\left(\frac{d\varphi}{dt}(\psi(s))\right)^3}\frac{d\mathbf{p}}{dt}(\psi(s))$$

ここで

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \frac{d\mathbf{p}}{dt}(t), \quad \ddot{\mathbf{p}}(t) = \frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2}(t)$$
$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} = |\dot{\mathbf{p}}(t)|,$$
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{x}(t) + \dot{y}(t)\ddot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} = \frac{\dot{\mathbf{p}}(t)\cdot\ddot{\mathbf{p}}(t)}{|\dot{\mathbf{p}}(t)|}$$

を代入すると

$$\frac{d\mathbf{q}}{ds}(s) = \frac{1}{|\dot{\mathbf{p}}(\psi(s))|}\dot{\mathbf{p}}(\psi(s))$$
$$\frac{d^2\mathbf{q}}{ds^2}(s) = \frac{1}{|\dot{\mathbf{p}}(\psi(s))|^2}\ddot{\mathbf{p}}(\psi(s)) - \frac{\dot{\mathbf{p}}(\psi(s))\cdot\ddot{\mathbf{p}}(\psi(s))}{|\dot{\mathbf{p}}(\psi(s))|^4}\dot{\mathbf{p}}(\psi(s))$$

となる.

さて接ベクトル $\dot{\mathbf{p}}(t)$ については大きさ 1 となるように正規化し

(7.1.2) $$\mathbf{e}(t) = \frac{1}{|\dot{\mathbf{p}}(t)|}\dot{\mathbf{p}}(t)$$

と置くと

$$\frac{d\mathbf{q}}{ds}(s) = \mathbf{e}(\psi(s)) \quad \text{and} \quad \mathbf{e}(t) = \frac{\mathbf{p}}{ds}(\varphi(t))$$

が成り立つ. また $\mathbf{n}(t)$ を $\mathbf{e}(t)$ を反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転したベクトルと置き

(7.1.3) $$\boldsymbol{\kappa}(t) = \frac{1}{|\dot{\mathbf{p}}(t)|^2}\ddot{\mathbf{p}}(t) - \frac{\dot{\mathbf{p}}(t)\cdot\ddot{\mathbf{p}}(t)}{|\dot{\mathbf{p}}(t)|^4}\dot{\mathbf{p}}(t)$$

と置くと

$$\frac{d^2\mathbf{q}}{ds^2}(s) = \boldsymbol{\kappa}(\psi(s)) \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\kappa}(t) = \frac{d^2\mathbf{q}}{ds^2}(\varphi(t))$$

が成り立つ. ここで $\boldsymbol{\kappa}(t)\cdot\dot{\mathbf{p}}(t) = 0$ が容易に分かるので

$$\boldsymbol{\kappa}(t) = \kappa(t)\mathbf{n}(t)$$

の形に表すことが出来る. $\boldsymbol{\kappa}(t)$ ががそれぞれ, 弧長パラメーターとは限らない一般のパラメータに関する曲率ベクトルの表示である. 曲率 $\kappa(t)$ については

(7.1.4) $$\kappa(t) = \boldsymbol{\kappa}(t)\cdot\mathbf{n}(t) = \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t)\cdot\mathbf{n}(t)}{|\dot{\mathbf{p}}(t)|^2}$$

であるが

(7.1.5) $$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}\begin{pmatrix}-\dot{y}(t)\\ \dot{x}(t)\end{pmatrix}$$

であるので

$$\kappa(t) = \frac{\ddot{x}(t)\dot{x}(t) - \ddot{y}(t)\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}^3} \tag{7.1.6}$$

という公式を得る.

曲線 C が極座標により $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ の形で表されている時, $x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta$, $x = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$ を変数 θ に関するパラメーター表示であるから, (7.1.4) より曲率は

$$\kappa(\theta) = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \tag{7.1.7}$$

で与えられる.

Example 7.1.3. 直角双曲線 $y^2 - x^2 = 1$ の右半分のパラメーター表示として $\begin{pmatrix} x = \cosh t \\ y = \sinh t \end{pmatrix}$ がある. $\dot{x}(t) = \sinh t$, $\dot{y}(t) = \cosh t$ より $\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = \cosh 2t$ となり $\ddot{x}(t) = \cosh t$, $\ddot{y}(t) = \sinh t$ と合わせて *(7.1.4)* より

$$\kappa(t) = \frac{\sinh^2 t - \cosh^2 t}{(\cosh 2t)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{(\cosh 2t)^{\frac{3}{2}}}$$

この節の最後に与えられた連続函数を曲率に持つ平面曲線が一意的に存在することを示そう. 但し一般のパラメーターではなく, 弧長パラメーターを用いて考える.

Proposition 7.1.4. *$\kappa(s)$, $a \leq s \leq b$ を (実数値) 連続函数とし, $s_0 \in [a, b]$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ を平面ベクトルで $|\mathbf{b}| = 1$ を満たすとする. このとき s を弧長パラメーターとし, $\kappa(s)$ を曲率に持つ平面曲線 $\mathbf{p}(s)$ で $\mathbf{p}(s_0) = \mathbf{a}$, $\mathbf{p}'(s_0) = \mathbf{b}$ を満たすものが一意的に存在する.*

この Propostion から 2 つの C^2 級の平面曲線の曲率が一致すればお互いがもう一方の回転と平行移動となることが分かる.

Proof. 2 次正方行列 R を

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と置く. 2 階の常微分方程式 $\ddot{\mathbf{p}}(s) = \kappa(s)R\dot{\kappa}(s)$ を解で初期条件 $\mathbf{p}(s_0) = \mathbf{a}$, $\mathbf{p}'(s_0) = \mathbf{b}$ を満たすものが一意的に存在し $|\dot{\kappa}(s)| \equiv |\mathbf{b}|$ を満たすことを示せばよい.

$\mathbf{y} = \dot{\mathbf{p}}$ と置けば 2 階の常微分方程式は 1 階の常微分方程式

$$\dot{\mathbf{y}}(s) = \kappa(s)R\mathbf{y}(s)$$

に変換され, $\mathbf{p}'(s_0) = \mathbf{b}$ は $\mathbf{y}(s_0) = \mathbf{b}$ となるので, これを解くと一意解

$$\mathbf{y}(s) = \exp\left[\int_{s_0}^{s} \kappa(s)R\right]\mathbf{b}$$

を得る. 但し正方行列に関する指数関数 $\exp A$ は

$$\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$$

で定義される．このときまた A, B が可換の時に $\exp A \exp B = \exp(A+B)$ が成り立つこと，及び ${}^tR = -R$ より

$$
{}^t\exp\left[\int_{s_0}^{s}\kappa(s)R\right] = \exp\left[\int_{s_0}^{s}\kappa(s){}^tR\right] = \exp\left[-\int_{s_0}^{s}\kappa(s)R\right] = \left(\exp\left[\int_{s_0}^{s}\kappa(s)R\right]\right)^{-1}
$$

が成り立つ．従って $\exp\left[\int_{s_0}^{s}\kappa(s)R\right]$ は直交行列であり，$|\mathbf{y}(s)| = |\mathbf{b}| = 1$ が成り立つ．後は $\mathbf{p}(s) = \int_{s_0}^{s}\mathbf{y}(s)\,ds + \mathbf{a}$ と置けば，求める $\mathbf{p}(s)$ が得られる．$\square$

第 III 部

等角写像論

この章では, 前章までの位相的な結果の複素解析への応用を解説する. 第 II 部では複素平面 $\mathbb{C}$ 内の領域で定義された (複素) 解析函数や調和函数などの性質を後で必要になる範囲で解説する. 複素変数 $z = x + iy$ の複素数値函数を $w = f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ のように z や $w = f(z)$ を実部と虚部に分解したり, 実 2 変数の函数のように表したりすることは断りなく行う. また解析函数に関する初等的な結果はある程度仮定して議論を進める. そして後章で使用する訳ではないが, 言わば常識として知っておいてが良いかと思う事項については青字で表記し, 本筋と関係ないのでトバして読んで差し支えないように解説を行った.

第 I 部でも使用したが $\mathbb{C}$ で複素平面 (= 複素数の全体) を表す. また $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ で Riemann 球面を表す. $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ について z_0 中心で半径 r の開円板と閉円板を

$$\mathbb{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}, \quad \overline{\mathbb{D}}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

で表す.

第 8 章

等角写像

8.1　1 価性の定理

Theorem 8.1.1. Ω を $\mathbb{C}$ 内の単連結領域とし f を Ω 上の解析函数とする．このとき f の 原始函数 F つまり $F' = f$ を満たす Ω 上の解析函数 F が存在する．

書きかけ対数函数の存在

第 9 章

正則函数の族と Riemann の写像定理

9.1 正規族と Vitali の収束定理

まずは正規族の復習から始めよう．

d 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ の点 $x = (x_1, \ldots, x_d)$ について x のノルムを $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$ と表す．以下, 次元の異なる場合でも同じ記号 $|\cdot|$ と用いるまた複素数についても, その絶対値を $|\cdot|$ と表すことにするが, 特に混乱はおきないであろう．

Definition 9.1.1. *p 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^p$ 内の集合 D 上で定義された函数族 $\mathcal{F}$ が同程度 (一様) 連続であるとは, 次が成り立つ時を言う．任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を十分小さく取れば*

$$x, y \in D \text{ with } |x - y| \le \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

が成立する．また $\mathcal{F}$ が一様有界であるとは, 定数 $M > 0$ を任意の $f \in \mathcal{F}$, $x \in D$ について

$$|f(x)| \le M$$

が成り立つように取れる時を言う．但し, 考える函数は実数値, 複素数値のどちらでも構わない．さらに $\mathbb{R}^q$, $q \in \mathbb{N}$ に値を持つ場合でも以下の議論には差し支えない．

Theorem 9.1.2 (Arzelà-Ascoli の選出定理)**.** *p 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^p$ 内の compact 集合 E で定義された $\mathbb{R}^q$ に値を持つ函数の列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が同程度連続かつ一様有界ならば, E で一様収束する部分列が存在する．*

Proof. E 内の点列 $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ で, E に於いて稠密なものを取る．このとき $\{f_n(a_1)\}_{n=1}^\infty$ は有界ゆえ Bolzano-Weierstrass の定理により, その部分列 $\{f_{1n}(a_1)\}_{n=1}^\infty$ で収束するものが取れる． また $\{f_{1n}(a_2)\}_{n=1}^\infty$ も有界であるから, 再び Bolzano-Weierstrass の定理により, その部分列 $\{f_{2n}(a_2)\}_{n=1}^\infty$ で収束するものが取れる．順次このようにして函数列の列

$$\begin{array}{llll}
f_{11}, & f_{12}, & \ldots, & f_{1n}, \ldots \\
f_{21}, & f_{22}, & \ldots, & f_{2n}, \ldots \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
f_{n1}, & f_{n2}, & \ldots, & f_{nn}, \ldots \\
\vdots & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

を得る．ここで第 k 行の函数列 $\{f_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$ は第 $k-1$ 行の函数列 $\{f_{k-1n}\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列であるので $x=a_1,a_2,\ldots,a_k$ で収束する．従って函数列 $\{f_{kk}\}_{k=1}^{\infty}$ は全ての i について $x=a_i$ で収束する．

函数列 $\{f_{kk}\}_{k=1}^{\infty}$ が E 上で一様収束することを示そう．任意の $\varepsilon>0$ について $\delta>0$ を

$$x,y\in E \text{ with } |x-y|\le\delta \Longrightarrow |f_n(x)-f_n(y)|\le\frac{\varepsilon}{3}$$

が任意の n について成り立つように取る．$\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ は E で稠密であるから，a_i の δ 近傍の i に関する和は E の開被覆であり，E の compact 性より，E はそれらの有限個で覆われる．それらを $V_1,V_2,\ldots,V_{i_0}$ とし，中心は $a_1,a_2,\ldots,a_{i_0}$ であるとする．任意の $x\in E$ について $x\in V_i$ となる i を取れば任意の自然数 k,ℓ について

$$|f_{kk}(x)-f_{kk}(a_i)|<\frac{\varepsilon}{3},\quad |f_{\ell\ell}(x)-f_{\ell\ell}(a_i)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ．ここで $\{f_{kk}(a_i)\}_{k=1}^{\infty}$, $i=1,\ldots,i_0$ は収束するから $K\in\mathbb{N}$ を

$$|f_{kk}(a_i)-f_{\ell\ell}(a_i)|<\frac{\varepsilon}{3},\quad k,\ell\ge K$$

が成り立つように取れる．以上より $k,\ell\ge K$ ならば

$$\begin{aligned}|f_{kk}(x)-f_{\ell\ell}(x)|&\le|f_{kk}(x)-f_{kk}(a_i)|+|f_{kk}(a_i)-f_{\ell\ell}(a_i)|+|f_{\ell\ell}(a_i)-f_{\ell\ell}(x)|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

となるので E で一様収束する． □

Corollary 9.1.3. $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ を $\mathbb{R}^p$ 内の *compact* 集合の増加列とし，$E=\cup_{i=1}^{\infty}E_i$ とする．また $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を E 上の $\mathbb{R}^q$ に値を持つ函数の列で，各 E_i 上で一様有界かつ同程度連続とする．このとき $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列で E において局所一様収束するものが存在する．

Proof. Theorem 9.1.2 を用いて $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ から E_1 において一様収束する部分列 $f_{11},f_{1,2},\ldots,f_{1n},\ldots$ を選び，さらにこの中から E_2 上において一様収束する部分列 $f_{21},f_{22},\ldots,f_{2n},\ldots$ を選ぶ．このようにして次々に部分列を取って行けば $\{f_{kk}\}_{k=1}$ が求めるものである． □

Definition 9.1.4. $\mathbb{C}$ 内の領域 Ω 上の正則函数の族 $\mathcal{F}$ が正規族 *(normal family)* であるとは，$\mathcal{F}$ の函数よりなる任意の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ について Ω 上，局所一様 *(locally uniformly)* に収束する部分列が取れることを云う．

領域 Ω 上の正則函数の全体を $\mathcal{A}(\Omega)$ と置いて，局所一様収束の位相を入れる．実際には Ω の開集合の列 $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ を

$$V_1\subset\overline{V_1}\subset V_2\subset\overline{V_2}\subset\cdots\subset\Omega,\quad \bigcup_{i=1}^{\infty}V_i=\Omega$$

かつ，各 $i\in\mathbb{N}$ について $\overline{V_i}$ は Ω の compact 部分集合であるように取る．そして $f,g\in\mathcal{A}(\Omega)$ について $\rho_n(f,g)=\max_{z\in\overline{V_n}}|f(z)-g(z)|$ と置いて

$$d(f,g)=\sum_{n=1}\frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)}$$

と置く．このとき $d(f,g)$ は距離になる．そして $d(f,g)$ の導入する $\mathcal{A}(\Omega)$ の位相は，$\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ の取り方に依らず定まる．これを $\mathcal{A}(\Omega)$ の局所一様収束の位相と呼ぶ．詳細は [1] などを参照して欲しい．

Proposition 9.1.5. 函数族 $\mathcal{F}\subset\mathcal{A}(\Omega)$ について $\mathcal{F}$ が正規族であることと *precompact* であること，つまり $\overline{\mathcal{F}}$ が *compact* であることは同値である．

Proof. $\mathcal{F}$ が正規族であると仮定し, precompact であることを示そう. $\mathcal{A}(\Omega)$ は距離空間であるから compact 性は点列 compact 性と同値である. 従って $\overline{\mathcal{F}}$ が点列 compact であることを示せば十分である. そこで $\overline{\mathcal{F}}$ 内の任意の可算列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が局所一様収束する部分列を含むことを示そう.

各 $n \in \mathbb{N}$ について $d(f_n, g_n) < \frac{1}{n}$ を満たす $g_n \in \mathcal{F}$ を取る. $\mathcal{F}$ は正規族であるから収束する部分列 $\{g_{n_k}\}$ を取り極限函数を $g = \lim_{k\to\infty} g_{n_k}$ と置けば, $g \in \overline{\mathcal{F}}$ であり $k \to \infty$ の時 $d(f_{n_k}, g) \leq d(f_{n_k}, g_{n_k}) + d(g_{n_k}, g) \to 0$ であるから $\{f_{n_k}\}$ は収束する.

今度は $\mathcal{F}$ が precompact であるとする. このとき $\mathcal{F}$ 内の任意の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は距離空間 $\mathcal{A}(\Omega)$ の compact 部分集合 $\overline{\mathcal{F}}$ 内の列でもあるから収束する部分列 $\{f_{n_k}\}$ が取れる. 従って $\mathcal{F}$ は正規族である. □

Theorem 9.1.6 (Montel の定理)**.** $\mathbb{C}$ 内の領域 Ω 上の族 $\mathcal{F}(\subset \mathcal{A}(\Omega))$ は, 局所一様有界ならば正規族をなす.

Proof. Ω の部分領域の列 $\{\Omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ を以下の性質を持つように取ることが出来る.

$$\overline{\Omega_i} \text{ は compact}, \ \overline{\Omega_i} \subset \Omega_{i+1}, \ i = 1, 2, \ldots \text{ and } \Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i.$$

このとき各 $\overline{\Omega_i}$ において $\mathcal{F}$ が同程度連続であることを示せば, Corollary 9.1.3 より $\mathcal{F}$ が正規族であることが従う.

さて $d_i = \min\{|z - w| : z \in \overline{\Omega_i},\ w \in \partial\Omega\}$ と置くと $d_i > 0$ である. また集合

$$E_i = \{z \in \mathbb{C} : \exists z_0 \in \overline{\Omega_i} \text{ with } |z - z_0| \leq 2^{-1} d_i\}$$

は compact であり Ω に含まれる. よって局所一様有会性の仮定より, 定数 $M_i > 0$ を $|f(z)| \leq M_i\ \forall f \in \mathcal{F}$ が成り立つように取れる. このとき任意の $z_0, z_1 \in \overline{\Omega_i}$ with $|z_1 - z_0| \leq d/4$ について

$$z_1 \in \overline{\mathbb{D}}(z_0, d/4) \subset \overline{\mathbb{D}}(z_0, d/2) \subset E_i \subset \Omega$$

より

$$\begin{aligned}
|f(z_1) - f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}(z_0,d/2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}(z_0,d/2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}(z_0,d/2)} \frac{f(\zeta)(z_1 - z_0)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_0)}\, d\zeta \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi \frac{d}{2} \frac{M_i |z_1 - z_0|}{\{(d/2) - (d/4)\}(d/2)} = \frac{4M}{d} |z_1 - z_0|
\end{aligned}$$

これより E_i に於ける同程度連続性が従う. □

Theorem 9.1.7 (Vitali の収束定理 I)**.** Ω を複素平面内の領域とし $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を Ω 上の正則函数の列で局所一様有界とする. また $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ を Ω 内の点列で, $z_0 = \lim_{i\to\infty} z_i \in \Omega$ とする. このとき $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が各 z_i で収束すれば, Ω 上で広義一様収束する.

Proof. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が広義一様収束しないと仮定しよう. そうするとある compact 集合 $E(\subset \Omega)$ と $\varepsilon > 0$ で, 任意の $N \in \mathbb{N}$ について番号 $m, n \geq N$ と $a \in E$ を $|f_m(a) - f_n(a)| > \varepsilon$ を満たすように取れるものが存在する. 従って E の compact 性より E の点列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ と自然数の狭義増加列 $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ を $\lim_{k\to\infty} a_k = a_0 \in E$ $|f_{m_k}(a_k) - f_{n_k}(a_k)| > \varepsilon$ が成り立つように取れる. このとき Montel の定理より, $\{f_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ より Ω 上広義一様収束する部分列が取れるので, はじめから $\{f_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 自身が Ω 上広義一様収束するとして良い. $f = \lim_{k\to\infty} f_{m_k}$, $g = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}$ と置けば $|f(a_0) - g(a_0)| = \lim_{k\to\infty} |f_{m_k}(a_k) - f_{n_k}(a_k)| \geq \varepsilon$ より $f(a_0) \neq g(a_0)$ である.

しかし各 i について $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が z_i で収束することより, その部分列である $\{f_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ も同じ極限に収束するので $f(z_i)=g(z_i)$, $i=1,2,\dots$ が成り立つ. 従って一致の定理より $f=g$ であるが, これは $f(a_0)\neq g(a_0)$ に反する. □

次章以降では連続変数を parameter に持つ函数族の極限を扱うことが多いので, この場合の Vitali の定理を述べておく.

Theorem 9.1.8 (Vitali の収束定理 II)**.** *$\varepsilon>0$, Ω を複素平面内の領域とする. また $\{f_t\}_{0<|t|<\varepsilon}$ を Ω 上の正則函数族で局所一様有界とし, $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ を Ω 内の収束する点列で, $z_0=\lim_{i\to\infty} z_i\in\Omega$ とする. このとき各 i について $t\to 0$ の時 $f_t(z_i)$ が収束すれば, $\{f_t\}_{0<|t|<\varepsilon}$ は Ω 上で局所一様に収束する.*

Proof. 仮定より $n\to\infty$ のとき $0\neq t_n\to 0$ を満たす任意の列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ と, 各 i について $\{f_{t_n}(z_i)\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する. 従って Vitali の収束定理 I より任意の $z\in\Omega$ について $\{f_{t_n}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する. この極限函数を $f(z)=\lim_{n\to\infty} f_{t_n}(z)$ と置けば f は列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ には依存しない. 実際もう 1 つの列 $\{t'_n\}_{n=1}^{\infty}$ について $g(z)=\lim_{n\to\infty} f_{t'_n}(z)$ と置けば, 仮定より $z=z_i$ に於いて $g(z_i)=f(z_i)$ であるから, 一致の定理より $g=f$ である.

以上より $z\in\Omega$ を固定するとき $0\neq t_n\to 0$ を満たす任意の列 $\{t\}_{n=1}^{\infty}$ と $z\in\Omega$ について $\lim_{n\to\infty} f_{t_n}(z)=f(z)$ である. よって任意の $z\in\Omega$ について $\lim_{t\to 0} f_t(z)=f(z)$ が従う.

次に収束が局所一様であることを背理法で示そう. 結論を否定すると

$$\begin{aligned}&\overline{\forall E\subset\Omega,\ \text{compact and }\varepsilon>0:\exists\delta>0:\forall t,\ 0<|t|<\delta\text{ and }z\in E:|f_t(z)-f(z)|<\varepsilon}\\ \iff&\exists E\subset\Omega,\ \text{compact and }\varepsilon>0:\forall\delta>0:\exists t,\ 0<|t|<\delta\text{ and }\ :|f_t(z)-f(z)|\geq\varepsilon\end{aligned}$$

従ってある compact 集合 $E\subset\Omega$ と $\varepsilon>0$ について $0\neq t_i\to 0$ を満たす列 $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ と E 内の点列 $\{\zeta_i\}_{i=1}^{\infty}$ で $|f_{t_i}(\zeta_i)-f(\zeta_i)|\geq\varepsilon$ を満たすものが存在する. しかしながら $\{f_{t_n}\}_{n=1}^{\infty}$ は Vitali の収束定理 I より Ω で局所一様に収束する. これは矛盾である. □

9.2 Riemann の写像定理

Ω を Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 内の単連結領域とし, $E=\hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ と置く. E が含む点の個数により Ω を分類しよう. $E=\emptyset$ のときは $\Omega=\hat{\mathbb{C}}$ であり, 確かに単連結である. また E が 1 点よりなる集合で $E=\{a\}$ のときは 1 次変換 $f(z)=\frac{1}{z-a}$ を考えよう. これは $\hat{\mathbb{C}}$ から自身への等角写像, つまり解析的な全単射 (逆写像も解析的であることに注意) である. であり, これの Ω への制限を再び f で表すと $f:\Omega\to\mathbb{C}$ は等角写像であり, この場合も確かに単連結である. 次に E が 2 点以上を含むときも $a\in E$ を任意に 1 つ取り, 前と同様に 1 次変換 $f(z)=\frac{1}{z-a}$ を考え, これの Ω への制限を再び f で表せば $f:\Omega\to f(\Omega)(\subset\mathbb{C})$ は等角写像である. 従って像領域 $f(\Omega)$ は $\mathbb{C}$ 内の単連結領域であるから Theorem 6.1.2 より $\hat{\mathbb{C}}\backslash f(\Omega)=f(E)$ は ∞ を含む連結閉集合である. 2 点以上を含む連結な閉集合を連続体 (continuum) と呼ぶことに注意しよう.

Riemann の写像定理とは $E=\hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ が連続体である単連結領域 Ω は単位円板 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ と等角同値 (conformally equivalent), つまり Ω から $\mathbb{D}$ への等角写像が存在することを主張するものである. これが証明されたとすれば Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 内の単連結領域 Ω は

(i) 楕円型: $\Omega=\hat{\mathbb{C}}$.

(ii) 方物型: ある $a\in\hat{\mathbb{C}}$ により $\Omega=\hat{\mathbb{C}}\backslash\{a\}$ と表せ, 複素平面 $\mathbb{C}$ と等角同値.

(iii) 双曲型: ある連続体 $E\subset\hat{\mathbb{C}}$ により $\Omega=\hat{\mathbb{C}}\backslash E$ と表せ, 単位円板 $\mathbb{D}$ と等角同値.

これら 3 つの標準的な領域 $\hat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ の中のどの 2 も，もはや互いに等角同値ではない．実際 $\hat{\mathbb{C}}$ は compact であるが，$\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ はそうではない．従って $\hat{\mathbb{C}}$ と $\mathbb{C}$ また $\hat{\mathbb{C}}$ と $\mathbb{D}$ は等角同値でない．また $\mathbb{C}$ と $\mathbb{D}$ が等角同値ならば等角写像 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ が存在することになるが，これは Liouville の定理 (有界な整函数は定数に限る) により，定数函数となってしまうので矛盾を生じる．

Riemann の写像定理にとりかかる前に連続体 E は連続濃度の点を含むことを注意しておこう．実際 $a, b \in E$, $a \neq b$ とすると，少なくとも一方は ∞ ではないので，仮に $a \neq \infty$ としよう．このとき $0 < r < |a-b|$ を満たす r について $E \cap \partial\mathbb{D}(a,r)$ は空ではない．もし空であるとすると

$$E = (E \cap \mathbb{D}(a,r)) \cup (E \cap (\hat{\mathbb{C}} \backslash \overline{\mathbb{D}(a,r)}))$$

が E の共通部分を持たない 2 つの (相対位相に関する) 開集合への分解を与えることになり連結性に矛盾する．

Theorem 9.2.1 (Riemann の写像定理)**.** Ω が $\hat{\mathbb{C}}$ 内の単連結領域で補集合 $\hat{\mathbb{C}} \backslash \Omega$ が 2 点以上を含めば等角写像 $f : \Omega \to \mathbb{D}$ が存在する．

Proof. まず Ω が非有界の場合に，Ω から有界領域への等角写像が存在することを示そう．これが示されれば，Ω は有界領域と仮定して差し支えないことになる．

$a, b \in \mathbb{C} \backslash \Omega$, $a \neq b$ を取る．Ω は単連結であるから $g(z) = \sqrt{\dfrac{z-b}{z-a}}$, $z \in \Omega$ の 1 価な分枝が存在する．このとき g は単射である．実際 $g(z_1) = g(z_2)$ より，両辺を自乗すれば $\dfrac{z_1 - b}{z_2 - a} = \dfrac{z_1 - b}{z_2 - a}$ となり，これより直ちに $z_1 = z_2$ を得る．また同様にして $g(z_2) = -g(z_1)$ を満たす $z_1, z_2 \in \Omega$ で $z_1 \neq z_2$ となるものは存在しないことが分かる．よって $\mathbb{D}(w_0, r) \subset g(\Omega)$ を満たす $w_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ を取れば $\mathbb{D}(-w_0, r) \cap g(\Omega) = \emptyset$ が成り立つ．よって $h(z) = \dfrac{1}{g(z) + w_0}$ は $|h(z)| \leq \frac{1}{r}$ を満たす，よって $\Omega' = h(\Omega)$ と置けば，Ω' は有界領域であり，$h : \Omega \to \Omega'$ は等角写像である．

以下では Ω は有界な単連結領域であるとし，$z_0 \in \Omega$ を任意の取る．このとき

$$\mathcal{F} = \{f : \ f \text{ は } \Omega \text{ 上の単射解析函数で } f(z_0) = 0 \text{ かつ } \Omega \text{ 上 } |f(z)| \leq 1 \text{ を満たす}\}$$

と置く．$R = \sup_{z \in \Omega} |z - z_0|$ について函数 $k(z) = \dfrac{z - z_0}{R}$ は函数族 $\mathcal{F}$ に属するので $\mathcal{F}$ は空でない．ここで

$$S = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(z_0)|$$

と置けば，$k'(z_0) = \frac{1}{R} > 0$ より $0 < S$ である．また $\rho = \inf_{z \in \mathbb{C} \backslash \Omega} |z - z_0|$ と置くと各 $f \in \mathcal{F}$ について $f(z_0 + \rho z)$, $z \in \mathbb{D}$ は原点 0 を固定する $\mathbb{D}$ から自身への解析函数であるから Schwarz の補題により $\rho|f'(z_0)| \leq 1$ が成り立つ．よって $S \leq \dfrac{1}{\rho}$ である．

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathcal{F}$ 内の函数列で $|f_n'(z_0)| \to S$, $n \to \infty$ を満たすものとする．$\mathcal{F}$ は一様有界であるから正規族をなすので，必要ならば部分列を取ることにより $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Ω 上，局所一様収束すると仮定してよい．このとき極限函数 $f_0 = \lim_{n\to\infty} f_n$ が Ω から $\mathbb{D}$ への等角写像であることを示そう．

f_0 は単葉函数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ であるから単葉または定数であるが，$|f'(z_0)| = \lim_{n\to\infty} |f_n'(z_0)| = S$ であるから定数函数ではあり得ず，従って単葉である． さらに $f_0(z_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = 0$ であり，$|f_n(z)| < 1$ より $|f_0(z)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(z_0)| \leq 1$ であるが，最大値の原理より $|f_0(z)| < 1$ が成り立ち，$f_0 \in \mathcal{F}$ が従う．

最後に背理法により f_0 が全射であることを示そう．これが示されれば証明は完了する．そこで $a \notin f_0(\Omega)$ と仮定する．このとき

書きかけ

□

Riemann の写像定理により存在の保証された単位円板から単連結領域 $\Omega(\subsetneq \mathbb{C})$ への等角写像は Ω への写像函数 (mapping function) と呼ばれることがある．Ω が Jordan 領域ならば, 写像函数は $\overline{\mathbb{D}}$ から $\overline{\Omega}$ への同相写像に拡張できる．この事実は Carathéodory の拡張定理と呼ばれ, 以下で証明を行うが, それには領域の cross cut に関する知識が必要がある．§4.5 で解説をしているが, 冗長を厭わずもう一度説明をしておこう．

始点 z_0, 終点 z_1 を持つ単純曲線 γ が領域 Ω の cross cut であるとは $z_0, z_1 \in \partial\Omega$ かつ γ の両端点以外の点は全て Ω に属すときを言う．同様に z_0 を始点 (= 終点) に持つ単純閉曲線 γ が領域 Ω の cross cut であるとは $z_0 \in \partial\Omega$ かつ γ の z_0 以外の点は全て Ω に属すときを言う．

Theorem 4.5.4 単純閉曲線が正の向きを持つとは, それが囲む領域内で回転数が 1 となるときと定義したことを思い出しておこう．また曲線 γ, γ_1, γ_2 について $-\gamma$ で γ と逆向きの曲線を表し, γ_1 の終点と γ_2 の始点が一致するとき $\gamma_1 + \gamma_2$ で γ_1 と γ_2 をつないで出来る曲線とする．γ が単純閉曲線のとき $D_i(\gamma)$, $D_o(\gamma)$ で, それぞれ γ の内側の領域 (= γ が囲む領域), γ の外側の領域を表す．最後に曲線 γ とその像を, 同じ記号 γ で表す．

Lemma 9.2.2. Γ を正の向きを持つ単純閉曲線とし Ω を Γ で囲まれた領域とする．また単純曲線 γ は始点 ζ_1, 終点 ζ_2 *(ただし* $\zeta_1 \neq \zeta_2$*)* を持つ Ω の *cross cut* であるとし, ζ_2 から ζ_1 へ向かう Γ の部分曲線で Γ と同じ向きを持つものを Γ_1 とし同様に ζ_1 から ζ_2 へ向かう Γ の部分曲線で Γ と同じ向きを持つものを Γ_2 とする．このとき開集合 $\Omega\backslash\gamma$ の成分は丁度 2 つで, 一方は閉曲線 $\gamma + \Gamma_1$ の囲む *Jordan* 領域であり, もう一方は閉曲線 $-\gamma + \Gamma_2$ の囲む *Jordan* 領域である．

Proof. まず単純閉曲線 $\gamma + \Gamma_1$, $-\gamma + \Gamma_2$ それぞれの内側の領域を $\Omega_1 = D_i(\gamma + \Gamma_1)$, $\Omega_2 = D_i(-\gamma + \Gamma_2)$ と置く．これらの領域の境界 $\gamma \cup \Gamma_j$ は $\Omega \cup \Gamma$ に含まれるので Γ の外側の領域 $D_o(\Gamma)$ と交わらない．従って $D_o(\Gamma) \subset \Omega_j$ または $D_o(\Gamma) \subset \mathbb{C}\backslash\overline{\Omega_j}$ のどちらか一方が成り立つが, $D_0(\Gamma)$ は非有界で Ω_j は有界であるから $D_o(\Gamma) \subset \mathbb{C}\backslash\overline{\Omega_j}$ が成り立つ．従って両辺の補集合を取れば

$$\overline{\Omega_j} \subset \Omega \cup \Gamma \tag{9.2.1}$$

が成り立つ．ここで $\Omega_j \cap \Gamma = \emptyset$ が成り立つことに注意しよう．何故ならば $z_0 \in \Omega_j \cap \Gamma$ が存在すれば $\partial D_o(\Gamma) = \Gamma$ より z_0 の近傍 Ω_j 内に $D_o(\Gamma)$ の点が存在するので $\Omega_j \cap D_o(\Gamma) \neq \emptyset$ となり (9.2.1) に反するからである．再び (9.2.1) と $\Omega_j \cap \gamma = \emptyset$ を合わせて $\Omega_j \subset \Omega$ が成り立つことが分かり, さらに $\Omega_j \cap \gamma \subset \Omega_j \cap \partial\Omega_j = \emptyset$ より $\Omega_j \subset \Omega\backslash\gamma$ が成り立つ．

さて $z \in \Omega\backslash\gamma$ に対して

$$1 = n(z, \Gamma) = n(z, \Gamma_1) + n(z, \Gamma_2) = n(z, \gamma + \Gamma_1) + n(z, -\gamma + \Gamma_2)$$

が成り立つが $n(z, \gamma + \Gamma_1)$ と $n(z, -\gamma + \Gamma_2)$ の値は 0, -1, 1 のどれかしか取りえないから, 結局

$$n(z, \gamma_1 + \Gamma_1) = 1 \text{ かつ } n(z, -\gamma + \Gamma_2) = 0$$

または

$$n(z, \gamma_1 + \Gamma_1) = 0 \text{ かつ } n(z, -\gamma + \Gamma_2) = 1$$

のどちらかである．前者の場合は $z \in \Omega_1$ であるし後者の場合は $z \in \Omega_1$ である．よって $\Omega\backslash\gamma \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ が成り立つ．前段で示した逆の包含関係と合わせて $\Omega\backslash\gamma = \Omega_1 \cup \Omega_2$ が成り立つ．また 上の回転数の等式より $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \emptyset$ も従う．

最後に Theorem 1.2.19 より $\Omega\backslash\gamma = D_i(\gamma_1) \cup D_i(\gamma_2)$ が成分への分解を与えていることが従う． □

Lemma 9.2.2 において $\zeta_1 = \zeta_2$ つまり γ が単純閉曲線よりなる Ω の cross cut の場合も，ほぼ同様な結論が成り立つ．

Lemma 9.2.3. *Γ を正の向きを持つ単純閉曲線とし Ω を Γ で囲まれた領域とする．また単純閉曲線 γ は始点 (= 終点) ζ_0 を持つ Ω の cross cut であるとする．このとき $\Omega \cap D_o(\gamma)$ は単連結領域であり，さらに開集合 $\Omega\backslash\gamma$ の成分は丁度 2 つで，一方は 閉曲線 γ の囲む Jordan 領域であり，もう一方は $\Omega \cap D_o(\gamma)$ である．*

Proof. $\Omega_1 = D_i(\gamma)$, $\Omega_2 = \Omega \cap D_o(\gamma)$ と置く．Ω_1 は明らかに単連結領域であるが，Ω_2 がそうであることは自明ではない．これは Ω_2 の $\hat{\mathbb{C}}$ における補集合が連結であることより，Theorem 6.1.2 を用いて示される．実際

$$\hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega_2 = D_0(\Gamma) \cup \{\infty\} \cup \Gamma \cup D_i(\gamma) \cup \gamma$$

であり，$\hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega_2$ は 2 つの連結集合 $D_0(\Gamma) \cup \{\infty\} \cup \Gamma$ $D_i(\gamma) \cup \gamma$ の和であり共通部分として $\{\zeta_1\}$ を持つので連結である．

さて $\Omega_1 \subset \Omega\backslash\gamma$ については，上の Lemma 9.2.2 と同じ議論により示される．また $\Omega_2 \subset \Omega\backslash\gamma$ は $\Omega_2 = \Omega \cap D_o(\gamma)$ より明らかであり，$\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \Omega\backslash\gamma$ が成り立つ．また $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ も定義から明らかであろう．逆の包含関係も明らかである．従って $\Omega\backslash\gamma$ は共通部分を持たない 2 つの領域 Ω_1, Ω_2 の和であるから Theorem 1.2.19 により $\Omega\backslash\gamma = \Omega_1 \cup \Omega_2$ が成分への分解を与えていることが分かる． $\square$

Theorem 9.2.4 (Carathéodory の拡張定理)**.** *Ω は $\mathbb{C}$ 内の Jordan 曲線の像 Γ で囲まれた単連結領域とし，$f : \mathbb{D} \to \Omega$ は等角写像とする．このとき f は $\overline{\mathbb{D}}$ での連続な拡張を持ち，この拡張は $\overline{\mathbb{D}}$ から $\overline{\Omega}$ への位相写像である．*

Proof. 示すのに技巧を必要とする次の主張
Claim: "各点 $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ において $\lim_{\mathbb{D}\ni z\to\zeta} f(z)$ が存在する"
を一旦認めた上で，f が $\overline{\mathbb{D}}$ から $\overline{\Omega}$ への同相写像に拡張されることを示そう．

まず Claim が成り立つことを仮定し，残りの部分を示そう．各 $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ に対して $f(\zeta) = \lim_{\mathbb{D}\ni z\to\zeta} f(z)$ と置いて f を $\overline{\mathbb{D}}$ に拡張すれば f は $\overline{\mathbb{D}}$ で連続である．実際 $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$ について $\delta > 0$ を $z \in \Omega \cap \mathbb{D}(\zeta, \delta)$ ならば $|f(z) - f(\zeta_0)| < \varepsilon$ となるように取れば $\zeta \in \partial\Omega \cap \mathbb{D}(\zeta_0, \delta)$ について $f(\zeta) = \lim_{\Omega\cap\mathbb{D}(\zeta_0,\delta)\ni z\to\zeta} f(z)$ と合わせて $|f(\zeta) - f(\zeta_0)| \le \varepsilon$ が成り立つ．従って任意の $z \in \overline{\Omega} \cap \mathbb{D}(\zeta, \delta)$ について $|f(z) - f(\zeta_0)| \le \varepsilon$ が成り立つことになる．これは拡張された f が ζ_0 で連続であることを示す．もとより f は $\mathbb{D}$ で連続であるから $\mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D} = \overline{\mathbb{D}}$ で連続である．

次に $f(\partial\mathbb{D}) \in \Gamma$ が成り立つことを示そう．$\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$ について $w_0 := f(\zeta_0) = \lim_{\mathbb{D}\ni z\to\zeta_0} f(z) \in \overline{\Omega}$ であるが，もし $w_0 = f(\zeta_0) \in \Omega$ ならば，$f : \mathbb{D} \to \Omega$ の全射性より $f(z_0) = w_0$ を満たす $z_0 \in \mathbb{D}$ が存在する．そこで $r \in (0, 1 - |z_0|)$ を $\mathbb{D}(z_0, r) \cap \mathbb{D}(\zeta_0, r) = \emptyset$ が成り立つように取る．さて $f(\mathbb{D}(z_0, r))$ は $w_0 = f(z_0)$ の近傍であるから，$\delta > 0$ を $z \in \mathbb{D} \cap \mathbb{D}(\zeta_0, \delta)$ ならば $f(z) \in f(\mathbb{D}(z_0, r))$ が成り立つように取れる．従って任意の $z \in \mathbb{D} \cap \mathbb{D}(\zeta_0, \delta)$ について $f(z) = f(z')$ を満たす $z' \in \mathbb{D}(z_0, r)$ が存在することになるが，明らかに $z \neq z'$, $z, z' \in \mathbb{D}$ であるから f の $\mathbb{D}$ における単射性に矛盾する．これで $f(\zeta_0) \in \Gamma$ が示された．

それでは $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\Omega}$ が単射であることを示そう．単射性を否定すると $f(\zeta_1) = f(\zeta_2)$ を満たす，相異なる 2 点 $\zeta_1, \zeta_2 \in \overline{\mathbb{D}}$ が存在する．f は $\mathbb{D}$ から Ω への単射であるから ζ_1, ζ_2 の少なくとも一方は $\partial\mathbb{D}$ 内の点である．また $\zeta_1 \in \partial\mathbb{D}$, $\zeta_2 \in \mathbb{D}$ ならば $f(\zeta_1) \in \Gamma$, $f(\zeta_2) \in \Omega$ となり矛盾を生じる．同様に $\zeta_1 \in \mathbb{D}$, $\zeta_2 \in \partial\mathbb{D}$ も矛盾を生じるので，結局 $\zeta_1, \zeta_2 \in \partial\mathbb{D}$ である．ここで 2 つの線分 $[\zeta_1, 0]$ と $[0, \zeta_2]$ をつないで出来る折れ線 γ_0 の f による像 γ を考えよう．γ は f が $\mathbb{D}$ から Ω への等角写像であること及び $f(\zeta_1) = f(\zeta_2) \in \Gamma$ より単純閉曲線であり，始点 (= 終点) である $f(\zeta_1) (= f(\zeta_2))$ 以外は Ω 内にある，つまり Ω の cross cut である．γ の囲む領域を Ω_0 と置く．

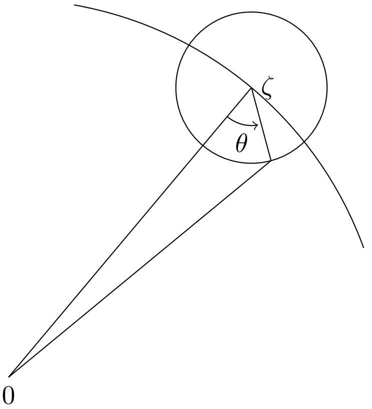
さて $\mathbb{D}\backslash\gamma_0$ の 2 つの成分はともに扇形であり，D_1, D_2 と置こう．各 $w \in \gamma\backslash\{f(\zeta_1)\}$ について $f(\mathbb{D})$ は w の近傍であり，$\gamma_0 = \partial D_i(\gamma_0)$ であるから $D_i(\gamma_0) \cap f(D_1) \neq \emptyset$ または $D_i(\gamma_0) \cap f(D_2) \neq \emptyset$ の少なくとも一方が成り立つ．ここ

では

$$D_i(\gamma_0) \cap f(D_1) \neq \emptyset$$

と仮定して話を進めよう．$f(D_j)$, $j = 1,2$ は γ_0 と交わらない連結集合であるから $f(D_1) \subset D_i(\gamma_0)$ または $f(D_2) \subset D_o(\gamma_0)$ のどちらか一方が成り立つはずであるが上式を考えに入れれば $f(D_1) \subset D_i(\gamma_0)$ が成り立つことになる．ここで $\zeta \in \partial D_1 \cap \partial\mathbb{D}$ について $f(\zeta) \in \overline{f(D_1)} \subset \overline{D_i(\gamma_0)}$ であるが, 前段で示したように $f(\zeta) \in \Gamma$ であるから $f(\zeta) = f(\zeta_1)$ が成り立つ．従って円弧 $\partial D_1 \cap \partial\mathbb{D}$ 上で $f(\zeta) \equiv f(\zeta_1)$ が成り立つ．ここで Schwarz の鏡像の原理を用いれば, f が定数函数となってしまい, 矛盾を生じる．

それでは Claim の証明に取り掛かろう．$\zeta \in \partial\mathbb{D}$ を任意に 1 つ取り固定し, 極限 $\lim_{\mathbb{D}\ni z\to\zeta} f(z)$ の存在を示そう．$\delta \in (0,1)$ について $\gamma_\delta := \mathbb{D} \cap \partial\mathbb{D}(\zeta,\delta)$ と置くと, 円弧であり $z_\delta(\theta) = \zeta - \zeta\delta e^{i\theta}$, $|\theta| < \cos^{-1}\frac{\delta}{2}$ とパラメータ表示さ



れる．

像曲線 $f(\gamma_\delta)$ の長さを $L(\delta)$ と置くと

$$L(\delta) = \int_{|\theta|<\cos^{-1}\frac{\delta}{2}} |f'(z_\delta(\theta))|\delta d\theta$$

が成り立つ．よって Cauchy-Schwarz の不等式より

$$L(\delta)^2 \le \int_{|\theta|<\cos^{-1}\frac{\delta}{2}} |f'(z_\delta(\theta))|^2\delta\, d\theta \int_{|\theta|<\cos^{-1}\frac{\delta}{2}} \delta\, d\theta = \pi\delta \int_{|\theta|<\cos^{-1}\frac{\delta}{2}} |f'(z_\delta(\theta))|^2\delta\, d\theta$$

が成り立つ．よって両辺を δ で割り, 0 から $\rho \in (0,1)$ まで (広義) 積分すれば

$$\begin{aligned}\int_0^\rho \frac{L(\delta)^2}{\delta}\, d\delta \le& \int_0^\rho \left\{ \int_{|\theta|<\cos^{-1}\frac{\delta}{2}} |f'(z_\delta(\theta))|^2\delta\, d\theta \right\} d\delta \\ =& \pi \mathrm{Area}(f(\mathbb{D}\cap\mathbb{D}(\zeta,\rho))) < \infty\end{aligned}$$

が成り立つ．よって $\liminf_{\delta\searrow 0} \frac{L(\delta)^2}{\delta} = 0$ が従い, 列 $\{\delta_n\}$ を $\delta_n \searrow 0$ と $L(\delta_n) \to 0$ が成り立つように取れる．

さて像曲線 $f(\gamma_{\delta_n})$ の長さ $L(\delta_n)$ は有限であるから, 極限 $w_1^{(n)} := \lim_{\theta\searrow -\cos^{-1}\delta_n/2} f(z_{\delta_n}(\theta)) \in \overline{\Omega}$, $w_2^{(n)} := \lim_{\theta\nearrow \cos^{-1}\delta_n/2} f(z_{\delta_n}(\theta)) \in \overline{\Omega}$ が存在するが, 前半において f の単射性を用いて示したように $w_j^{(n)} \in \Gamma$, $j = 1,2$ が成り立つ．従って $f(\gamma_{\delta_n})$ は Ω の cross cut である．また $L(\delta_n) \to 0$ より $|w_1^{(n)} - w_2^{(n)}| \to 0$ が成り立つ．

$h : \partial\mathbb{D} \to \Gamma$ を Jordan 曲線 Γ のパラメータ表示とする．写像 h は compact 空間 $\partial\mathbb{D}$ から Hausdorf 空間 $\Gamma(\subset \mathbb{C}$ への連続な全単射であるから h^{-1} も連続であり, 特に compact 集合 Γ 上で一様連続である．よって $|h^{-1}(w_1^{(n)}) - h^{-1}(w_2^{(n)})| \to 0$ が成り立つ．従って十分大きな全ての n について $h^{-1}(w_1^{(n)})$ と $h^{-1}(w_2^{(n)})$ を結ぶ $\partial\mathbb{D}$ 内の 2 つの部分円弧のうちの短い方を取ることが可能である．この短い方の円弧に対応する Γ の部分弧を σ_n と置き $f(\gamma_{\delta_n}) \cup \sigma_n$ で囲まれた有界領域を U_n と置けば,

$$\operatorname{diam} U_n = \operatorname{diam} \partial U_n = \operatorname{diam}(f(\gamma_{\delta_n}) \cup \sigma_n) \to 0$$

が成り立つ.

各 $n \in \mathbb{N}$ について $\Omega_n = f(\mathbb{D} \cap \mathbb{D}(\zeta, \delta_n))$ と置くと $\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \cdots$ を満たす. それでは十分大きな全ての n について $\Omega_n = U_n$ が成り立つことを示そう. 実際 U_n は Jordah 領域 Ω から cross cut $f(\gamma_{\delta_n})$ を取り除いた開集合

$$\Omega \backslash f(\gamma_{\delta_n}) = f(\mathbb{D} \backslash \gamma_{\delta_n}) = f(\mathbb{D} \cap \mathbb{D}(\zeta, \delta_n)) \cup f(\mathbb{D} \backslash \overline{\mathbb{D}}(\zeta, \delta_n))$$

の成分の 1 つであるから Lemma 9.2.2, 9.2.3 より

$$U_n = f(\mathbb{D} \cap \mathbb{D}(\zeta, \delta_n)) \quad \text{または } U_n = f(\mathbb{D} \backslash \overline{\mathbb{D}}(\zeta, \delta_n))$$

のどちらか一方が成り立つ. しかしながら

$$\operatorname{diam} f(\mathbb{D} \backslash \overline{\mathbb{D}}(\zeta, \delta_n)) \geq \operatorname{diam} f(\mathbb{D}(0, 1 - \delta_1)) > 0$$

であるから $\operatorname{diam} U_n \to 0$ と合わせ十分大きな全ての n について $U_n = f(\mathbb{D} \cap \mathbb{D}(\zeta, \delta_n)) = \Omega_n$ が成り立つ. そして $\operatorname{diam} \overline{\Omega_n} = \operatorname{diam} \overline{U_n} = \operatorname{diam} U_n \to 0$ であるから compact 集合の減少列の共通部分は $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\Omega_n}$ 1 点よりなる. これを w_0 と置けば $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\Omega_n} = \{w_0\}$ である. これより $\lim_{\mathbb{D} \ni z \to \zeta} f(z) = w_0$ が従う. 実際, 任意の $\varepsilon > 0$ について $\operatorname{diam} \Omega_n < \varepsilon$ となる n を取れば任意の $z \in \mathbb{D} \cap \mathbb{D}(\zeta, \delta_n)$ について $f(z) \in \Omega_n$ より $|f(z) - w_0| \leq \operatorname{diam} \Omega_n < \varepsilon$ が成り立つ. $\square$

第 10 章

単葉函数の初等理論

10.1　Darboux の定理

$\mathbb{D}(c,r)$ で複素平面 $\mathbb{D}$ 内の中心 $c(\in\mathbb{C})$ 半径 $r>0$ の開円板を表す．つまり $\mathbb{D}(c,r)=\{z\in\mathbb{C}:|z-c|<r\}$ である．また閉円板の場合は $\overline{\mathbb{D}}(c,r)=\{z\in\mathbb{C}:|z-c|\le r\}$ と表す．特に単位円板の場合は $\mathbb{D}=\mathbb{D}(0,1)$, $\overline{\mathbb{D}}=\overline{\mathbb{D}}(0,1)$ と表す．

単位円板 $\mathbb{D}$ 上の正則函数 f が $\overline{\mathbb{D}}$ に連続に拡張されるとする．もし $f|_{\partial\mathbb{D}}$ が単射ならば制限写像 $f|_{\partial\mathbb{D}}:\partial\mathbb{D}\to f(\partial\mathbb{D})$ は Jordan 曲線 (= 単純閉曲線) になるが, このとき f は $\mathbb{D}$ を $f(\partial\mathbb{D})$ の内側の領域に等角 (= 全単射かつ双正則) に写像する．この事実は Darboux の定理 ([**?**]) または Darboux-Picard の定理 ([**?**]) と呼ばれる．この節では [**?**] を参考にさせて頂いて Darboux の定理の精密化を試みる．証明には Jordan の曲線定理が必要になるので, 正確に述べておこう．

Jordan の曲線定理　$\gamma:\partial\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ を単純閉曲線, すなわち $\mathbb{D}=\mathbb{D}(0,1)$ から $\mathbb{C}$ 内への単射連続写像とすると, その像 $J=\gamma(\partial\mathbb{D})$ の補集合 $\mathbb{C}\backslash J$ は丁度 2 つの成分よりなり, 一方は非有界で, もう一方は有界である．非有界な方を $D_o(J)$ 有界な方を $D_i(J)$ と表し, それぞれ J の外側, 内側と呼ぶことにすると,

$$\partial D_o(J)=\partial D_i(J)=J$$

が成り立つ. また $D_i(J)$ の各点 w について J に関する回転数

$$\frac{1}{2\pi i}\int_J\frac{d\zeta}{\zeta-w}$$

は w に依らず一定で 1 または -1 であり, $w\in D_o(J)$ の回転数も w に依らず一定で 0 になる.

以下の議論でよく使う事実を補題として述べておこう.

Lemma 10.1.1. X を位相空間と $A,B\subset X$ とする．A が連結で $A\cap B\ne\emptyset$ かつ $A\backslash B\ne\emptyset$ ならば $A\cap\partial B\ne\emptyset$ が成り立つ.

Proof. X が

$$X=\operatorname{Int}B\cup\partial B\cup\operatorname{Ext}E$$

と 3 つの互いに素な集合に分解されることに注意しよう．従って, もし $A\cap\partial B=\emptyset$ ならば $A\subset\operatorname{Int}B\cup\operatorname{Ext}B$ が成り立つ．さらに $\operatorname{Int}B=B\backslash\partial B$, $\operatorname{Ext}B=X\backslash(B\cup\partial B)$ と合わせると

$$A\cap\operatorname{Int}B=A\cap B\ne\emptyset\quad\text{かつ}\quad A\cap\operatorname{Ext}B=A\backslash B\ne\emptyset$$

も成り立つ. $\operatorname{Int}B$, $\operatorname{Ext}B$ は開集合であるから, これは A の連結性に反する. $\square$

Theorem 10.1.2. D を $\mathbb{C}$ 内の有界領域とし，写像 $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ は連続であり像 $f(D)$ は $\mathbb{C}$ 内の開集合であるとする．このとき次が成り立つ．

(i) $\partial f(D) \subset f(\partial D)$.

(ii) コンパクト集合 E について $f(\partial D) \subset E$ ならば $\mathbb{C}\backslash E$ の任意の成分 G について $G \subset f(D)$ または $G \cap f(D) = \emptyset$ のどちらか一方が成り立つ．

(iii) J を単純閉曲線の像とする．このとき $f(\partial D) \subset J$ ならば $f(\partial D) = J$ が成り立ち，さらに $f(D) = D_i(J)$, が成り立つ．すなわち f は $\overline{D}$ から $D_i(J) \cup J$ への全射であり，D, ∂D のそれぞれを $D_i(J)$, J のそれぞれの上へ写像する．特に $f_{\partial D} : \partial D \to J$ が単射ならば制限 $f|_{\partial D} : \partial D \to J$ は全単射で同相写像である．

Proof. (i) を示そう．$w_0 \in \partial f(D)$ とすれば $f(z_n) \to w_0$ を満たす D 内の点列 $\{z_n\}$ が存在する．$\overline{D}$ はコンパクトであるから必要ならば部分列を取ることにより $z_n \to z_0 \in \overline{D}$ と仮定してよい． このとき f の連続性より $f(z_0) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = w_0$ である．もし $z_0 \in D$ ならば $w_0 = f(z_0)$ は開集合 $f(D)$ の内点となり矛盾を生じる．従って $z_0 \in \partial D$ であり $w_0 = f(z_0) \in f(\partial D)$ が成り立つ．

(ii) を背理法で示すために G を E の補集合 $\mathbb{C}\backslash E$ の成分とし，“$G \subset f(D)$ または $G \cap f(D) = \emptyset$” が成り立たないと仮定する．つまり “$G\backslash f(D) \neq \emptyset$ かつ $G \cap f(D) \neq \emptyset$“ と仮定する．このとき G の連結性より (Lemma 10.1.1 を用いよ)

$$\emptyset \neq G \cap \partial f(D) \subset G \cap f(\partial D) \subset G \cap E$$

となり矛盾である．

(iii) を示そう．$\mathbb{C}\backslash J$ の非有界な成分 $D_o(J)$ について (ii) より “$D_o(J) \subset f(D)$ または $D_o(J) \cap f(D) = \emptyset$” のどちらか一方が成り立つが $D_o(J)$ は非有界で $f(D)$ は有界であるから $D_o(J) \subset f(D)$ が成り立つことはない．従って $D_o(J) \cap f(D) = \emptyset$ が成り立つことになる．よって

$$f(D) \subset \mathbb{C}\backslash D_o(J) = D_i(J) \cup J$$

が成り立つ．また $D_i(J)$ についても “$D_i(J) \subset f(D)$ または $D_i(J) \cap f(D) = \emptyset$” のどちらか一方が成り立つ．もし後者が成り立つとすれば $f(D) \subset D_o(J) \cup J$ となるが，$f(D) \subset D_i(J) \cup J$ と合わせて $f(D) \subset J$ となる．Jordan の曲線定理より $J = \partial D_i(J) = \partial D_o(J)$ であるから J は内点を持たない．しかし $f(D)$ は開集合であるから矛盾を生じる．従って $D_i(J) \subset f(D)$ が成り立つ．よって

$$D_i(J) \subset f(D) \subset D_i(J) \cup J \tag{10.1.1}$$

が成り立つ．ここで点 $f(D) \cap J \neq \emptyset$ ならば $f(\mathbb{D})$ は開集合であること，及び $J = \partial D_o(J)$ より $f(D) \cap D_o(J) \neq \emptyset$ となり矛盾を生じる．従って $f(D) \cap J = \emptyset$ であり (10.1.1) と合わせて $f(D) = D_i(J)$ が分かる．さらにこれより

$$J = \partial D_i(J) = \partial f(D) \subset f(\partial D) \subset J$$

となるので $f(\partial D) = J$ が成り立つ．$f|_{\partial D} : \partial D \to J$ が単射ならば，上で見たように全射でもあるから全単射である．そしてコンパクト空間から Hausdorff 空間への連続な全単射であるから逆写像も連続である． □

Remark 10.1.3. *Theorem 10.1.2 の (iii) に於いて* $f|_D$ が ∂D から単純閉曲線 J への同相写像であっても，制限写像 $f|_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \to D_i(J)$ が単射になるとは限らない．反例が容易に作れる．実際正方形 $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}\, z < 1,\ 0 < \mathrm{Im}\, z < 1\}$ と置いて $\overline{D}$ から自身への連続写像を以下のように置こう．$\phi_{1/2} : [0,1] \to [0,1]$ を $\phi_{1/2}(0) = 0$, $\phi_{1/2}(1) = 1$ を満たす連続写像で単射でないとする．そして連続変形で $\phi_0 = \phi_1 = \mathrm{id}_{[0,1]}$ $\phi_t(0) = 0$, $\phi_t(1) = 1$ を満たすように族 $\{\phi_t\}$ を作り，写像 $R \ni x + iy \mapsto \phi_y(x) + iy \in R$ と置けば，∂R で恒等写像で R に於いて単射でない連続写像が出来る．

f が非定数で正則ならば開写像であるから Theorem 10.1.2 が適用可能である．(iii) において $f(\partial D) \subset J$ を満たす具体的な写像の例を見ておこう．例えば D が $n \in \mathbb{N}$ 個の解析的単純閉曲線で囲まれた有界領域とし $f : D \to \mathbb{D}$ を Ahlfors 函数としよう．このとき f は D から $\mathbb{D}$ への全射であり $n : 1$ の写像になる．また f は $\overline{D}$ への連続に拡張され $f(\partial D) = \partial\mathbb{D}$ が成り立つ．Ahlfors 函数については [?] の §4.5 または, 種本である [?] の §5.1 を参照せよ．

より簡単な例としては有限 Blaschke 乗積がある．$c \in \partial\mathbb{D}$ と $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$ により

$$B(z) = c \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z}, \quad z \in \overline{\mathbb{D}}$$

の形に表せる函数を位数 n の有限 Blaschke 乗積と言う．この函数についても $B(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$ が成り立ち, $\overline{\mathbb{D}}$ から自身への $n : 1$ の写像である

以下では境界における単射性から領域全体での単射性が導かれる場合を考えよう．

Corollary 10.1.4 (Darboux の定理)**.** 写像 $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ は連続で $\mathbb{D}$ において非定数かつ正則であるとする．また J を単純閉曲線の像とする．このときもし $f(\partial\mathbb{D}) \subset J$ が成り立ち, 制限写像 $f|_{\partial\mathbb{D}} : \partial\mathbb{D} \to J$ が単射ならば, f は $\overline{\mathbb{D}}$ から $D_i(J) \cup J$ への連続な全単射であり制限写像 $f|_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \to D_i(J)$ は等角, つまり両正則な全単射であり $f|_{\partial\mathbb{D}} : \partial\mathbb{D} \to J$ も両連続な全単射である．

Proof. 前定理より制限 $f|_{\partial\mathbb{D}} : \partial\mathbb{D} \to J$ は同相写像であり $f|_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \to D_i(J)$ については全射である． 従って $f|_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \to D_i(J)$ が単射であることを示せば十分である．

偏角の原理を用いる方法 $D_i(J)$ の各点の $f(\partial\mathbb{D})$ に関する回転数は一定で 1 または -1 である．よって偏角の原理より $\mathbb{D}$ 内にただ 1 つの原像を持つ．従って $f|_{\mathbb{D}}$ は単射である．

有限 Blaschke 積を用いた証明 $D_i(J)$ から $\mathbb{D}$ への等角写像を取ると Carathéodry の境界対応定理により $D_i(J) \cup J$ から $\overline{\mathbb{D}}$ への連続写像に拡張される．これを f と合成すれば $\overline{\mathbb{D}}$ から自身への連続写像 g で $\mathbb{D}$ で非定数正則であり, 制限 $g|_{\mathbb{D}}$ は $\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}$ への全射, さらに制限 $g|_{\partial\mathbb{D}}$ は $\partial\mathbb{D}$ から $\partial\mathbb{D}$ への全単射であるものが得られる．

$\partial\mathbb{D}$ 上で $|g| = 1$ であり, $\overline{\mathbb{D}}$ で連続であるから g の零点は高々有限個である．また $g(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ より少なくとも 1 つ零点を持つ．g の零点を $a_1, \ldots, a_n$ (j 位の零点の場合は同じものを j 個並べる) とし, これらを零点に持つ有限 Blaschke 積を

$$B(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z}$$

と置く．このとき $g(z)/B(z)$, $B(z)/g(z)$ は $\mathbb{D}$ で正則で $\overline{\mathbb{D}}$ で連続であり, $\partial\mathbb{D}$ 上で $|g(z)/B(z)| = 1 = |B(z)/g(z)|$ であるから, 最大値の原理より $\overline{\mathbb{D}}$ 上で $|g(z)/B(z)| \leq 1$, $B(z)/g(z)| \leq 1$ が成り立つ．よって $|g(z)/B(z)| \equiv 1$ が $\overline{\mathbb{D}}$ で成り立ち, ある定数 $c \in \partial\mathbb{D}$ について $g(z)/B(z) \equiv c$, つまり $g(z) \equiv cB(z)$ が成り立つ．しかしながら g は境界 $\partial\mathbb{D}$ で単射であるから B の位数 n は $n = 1$ であり, $g = cB$ は $\mathbb{D}$ を保存する一次変換である．従って g は $\mathbb{D}$ で単射であり $f|_{\mathbb{D}}$ も単射である． □

さて, 今まで領域 D の閉包 $\overline{D}$ で連続な写像について議論を行ってきたが, 今度はこれを緩めることを考えよう．この為に f を領域 D 上の正則函数とし

$$L(f, D) = \{w_0 \in \mathbb{C} :\ \text{ある点列 } \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \text{ で } z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n \in \partial D \text{ かつ } w_0 = \lim_{n\to\infty} f(z_n) \text{ を満たすものが存在する } \} \tag{10.1.2}$$

と置く．$f(\partial D)$ の代用に $L(f,D)$ を使うことにより, Theorem 10.1.2 がほぼそのままの形で成り立つ．Corollary 10.1.4 については, 境界における単射性の代わりに 1 つの値に関する単射性があれば十分である．以下は Pommerenke [22, Theorem 1.9] を参考にした．

Theorem 10.1.5. D を複素平面内の有界領域として写像 $f: D \to \mathbb{C}$ は連続であり $f(D)$ は開集合であるとする．このとき次が成り立つ．

(i) $\partial f(D) \subset L(f,D)$.

(ii) E をコンパクト集合とし $L(f,D) \subset E$ が成り立つとする．このとき $\mathbb{C}\backslash E$ の任意の成分 G について $G \subset f(D)$ または $G \cap f(D) = \emptyset$ のどちらか一方が成り立つ．

(iii) (ii) において E が 単純閉曲線の像 J と一致すれば $f(D) = D_i(J)$ が成り立つ．

(iv) (iii) に加え f が D で正則であるとし, ある $w_0 \in D_i(J)$ について $f(z_0) = w_0$ を満たす点 $z_0 \in D$ が一点のみで $f'(z_0) \neq 0$ ならば $f: D \to D_i(J)$ は等角である．特に D も単連結である．

Proof. (i),(ii),(iii) についての証明は Theorem 10.1.2 の証明において $f(\partial D)$ とある所を $L(f,D)$ で置き換えればそのまま通用する．

(iv)

$$D_1 = \{c \in D : f(z) \neq f(c)\ \forall z \in D\backslash\{c\} \text{ and } f'(c) \neq 0\}$$

と置いて $D_1 = D$ を示せばよい．条件より $D_1 \neq \emptyset$ であることに注意しよう．$D\backslash D_1 \neq \emptyset$ と仮定すると D の連結性より $D \cap \partial D_1 \neq \emptyset$ である．よって $z_0 \in D \cap \partial D_1$ を取れば, 点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D\backslash D_1$ で $z_n \to z_0$ を満たすものが存在する．このとき $z_n \in D\backslash D_1$ より “$f(a_n) = f(z_n)$, $a_n \neq z_n$ を満たす $a_n \in D$ が存在する” または “$f'(z_n) = 0$” が成り立つ．どちらか一方は無限回起こるので, 必要ならば部分列を取ることにより, 以下のように場合分けを行う．

(I) $f'(z_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$ の時．この場合は $f'(z_0) = \lim_{n\to\infty} f'(z_n) = 0$ となるので $f(z) - f(z_0) = c(z-z_0)^k + \cdots$, $c \neq 0$, $k \geq 2$ の形に展開される．従って z_0 のある近傍で f は $k:1$ ゆえ, この近傍内の全ての点は D_1 に属さない．これは $z_0 \in \partial D_1$ に矛盾する．

(II) $f(a_n) = f(z_n)$, $a_n \neq z_n$ を満たす点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する．必要ならば部分列を取ることにより $a_n \to a \in \overline{D}$ と仮定してよい．もし $a_0 \in D\backslash\{z_0\}$ ならば $f(a_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$ である．このとき z_0, a_0, $f(z_0) = f(a)$ それぞれの近傍 U, V, W を $U \cap V = \emptyset$ かつ $f(U) \subset W \subset f(V)$ を満たすように取ることが出来る．この時 U 内の全ての点 z に対し, 点 $a \in V$ で $f(z) = f(a)$ を満たすものが存在する．従って U の点は全て D_1 には属さない．これは $z_0 \in \partial D_1$ に矛盾する．

もし $a_0 = z_0$ ならば

$$0 = \frac{f(a_n) - f(z_n)}{a_n - z_n} = \int_0^1 f'((1-t)z_n + ta_n)\,dt \to f'(z_0), \quad n \to \infty$$

より $f'(z_0) = 0$ となり (I) の場合と同様に矛盾を生じる．

最後に $a_0 \in \partial D$ の場合は $f(z_0) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$ より $f(z_0) \in L(f,D) \subset J$ となるが, これは $f(D) = D_i(J)$ に矛盾する． □

10.2 Starlike univalent functions

複素平面 $\mathbb{C}$ 内の集合 E が点 w_0 に関して starlike であるとは, 任意の $w \in E$ について w_0 と w を結ぶ線分 $[w_0, w] = \{(1-t)w_0 + tw : 0 \le t \le 1\}$ が E に含まれる, つまり $[w_0, w] \subset E$ が成り立つ時を言う. 以下では $w_0 = 0$ の場合のみを考えることにして, 原点 0 に関して starlike の時, 単に starlike と言うことにする. 集合 E が starlike ならばその閉包 $\overline{E}$ も starlike になることは明らかであろう.

記号 $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ で $\mathbb{D}$ 上の正則函数全体を表すことにする. さて $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ が $f(0) = 0$ を満たすとする. このとき f が starlike univalent であるとは f が単葉で 像領域 $f(\mathbb{D})$ が starlike であることと定義する. 以下では univalent を省略し単に starlike と言うことにする.

Theorem 10.2.1. *$f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ は $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ を満たすとする. このとき f が starlike である為の必要十分条件は*

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0, \quad z \in \mathbb{D} \tag{10.2.1}$$

が成り立つこと.

Proof. f が starlike のとき任意の $r \in (0,1)$ について $f(\mathbb{D}(0,r))$ は starlike な領域であることを示そう. 実際 $f(\mathbb{D})$ が starlike であることから任意の $t \in (0,1)$ について $\omega_t(z) = f^{-1}(tf(z))$ が定義可能であり $\omega_t : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ は $\omega_t(0) = 0$ を満たす. よって Schwarz の補題から $|\omega_t(z)| \le |z|$ が成り立つ. また $tf = f \circ \omega_t$ が成り立つので $z \in \mathbb{D}(0,r)$ ならば $tf(z) = f(\omega_t(z)) \in f(\mathbb{D}(0,r))$ が成り立つので $(tf)(\mathbb{D}(0,r)) \subset f(\mathbb{D}(0,r))$ となる. t の任意性より $f(\mathbb{D}(0,r))$ は starlike であることが分かる.

以上より f は $\mathbb{D}(0,r)$ を $f(\partial\mathbb{D}(0,r))$ で囲まれた starlike な Jordan 領域 $f(\mathbb{D}(0,r))$ へ等角に写像し, $\partial\mathbb{D}(0,r)$ を $f(\partial\mathbb{D}(0,r))$ に全単射に写像し, C^∞ 級である.

ここで偏角 $\arg f(re^{i\theta})$ を考える. 厳密に定義するには $\theta_0 \in \mathbb{R}$ を固定し, 単位円板に slit を入れた領域 $\Omega_{\theta_0} := \mathbb{D}\backslash[0, -e^{i\theta_0}]$ を考える. Ω_{θ_0} は単連結であり, f はここで正則で零点を持たないので対数関数の 1 価な分枝 $g = \log f$ が存在する. つまり Ω_{θ_0} 上で正則な函数 g で $f(z) = e^{g(z)}$ を満たすものが存在する. そこで $\arg f(z) = \mathrm{Im}\, logf(z)$ と置く.

各固定された $r \in (0,1)$ について写像 $(\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi] \ni \theta \mapsto \arg f(re^{i\theta}) = \mathrm{Im}\ \log f(re^{i\theta})$ は単射であることを示そう. この事実を背理法で示す為に $\theta_1, \theta_2 \in (\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi]$, $\theta_1 \neq \theta_2$ について $\arg f(re^{i\theta_1}) = \arg f(re^{i\theta_2})$ が成り立つと仮定する. このときもし $|f(re^{i\theta_1})| = |f(re^{i\theta_2})|$ ならば f の単葉性に反するので $|f(re^{i\theta_1})| \neq |f(re^{i\theta_2})|$ である. 従って一般性を失うことなく $|f(re^{i\theta_1})| < |f(re^{i\theta_2})|$ と仮定してよい.

ここから矛盾を導くには 2 つの方法がある.

1 幾何学的方法 $f(\overline{\mathbb{D}}(0,r)) = \overline{f(\mathbb{D}(0,r))}$ は starlike であるから $[0, f(re^{i\theta_2})] \subset f(\overline{\mathbb{D}}(0,r))$ が成り立つ. 開線分 $(f(re^{i\theta_1}), f(re^{i\theta_2}))$ の中に $f(\mathbb{D}(0,r))$ に属する点が存在すれば, その点を中心とする小円板で $f(\mathbb{D}(0,r))$ に含まれるものを取る. 小円板内の各点と 0 を結んだ線分が $f(\mathbb{D}(0,r))$ に含まれることから, 特に $f(re^{i\theta_1}) \in f(\mathbb{D}(0,r))$ が従い, 矛盾を生じる. よって $(f(re^{i\theta_1}), f(re^{i\theta_2})) \subset \partial f(\mathbb{D}(0,r)) = f(\partial\mathbb{D}(0,r))$ が成り立つ. ここで f^{-1} の $f(\partial\mathbb{D}(0,r))$ への制限は $f(\partial\mathbb{D}(0,r))$ から $\partial\mathbb{D}(0,r)$ への同相写像である. ただし $f(\partial\mathbb{D}(0,r))$, $\partial\mathbb{D}(0,r)$ ともに $\mathbb{C}$ に関する相対位相のもとで考えている. 従って $f^{-1}((f(re^{i\theta_1}, f(re^{i\theta_2})))$ は $\partial\mathbb{D}(0,r)$ 内の連結開集合であるから $\partial\mathbb{D}(0,r)$ の部分開弧であり,

この開弧上で $\arg f(re^{i\theta})$ は一定値であるから $\frac{d}{d\theta}(\arg f(re^{i\theta}))=0$ が成り立つ．ここで

$$\frac{d}{d\theta}(\arg f(re^{i\theta}))=\frac{d}{d\theta}\mathrm{Im}\,\log f(re^{i\theta})=\mathrm{Im}\left(\frac{d}{d\theta}\log f(re^{i\theta})\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{ire^{i\theta}f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{re^{i\theta}f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right)$$

より $\frac{d}{d\theta}(\arg f(re^{i\theta}))$ は 1 価であり, 実解析的である．よって $\frac{d}{d\theta}(\arg f(re^{i\theta}))=0$ が全ての θ について成り立つ．そこで

$$u(z)=\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right),\qquad z\in\mathbb{D}$$

と置けば, u は $\mathbb{D}$ で調和であり $\partial\mathbb{D}(0,r)$ 上で $u=0$ であるから $\mathbb{D}(0,r)$ でも $u=0$ である．これは $u(0)=1$ に矛盾する．

2 函数論的方法　$t:=f(re^{i\theta_1})/f(re^{i\theta_2})\in(0,1)$ と置き, $\omega(z)=f^{-1}(tf(z))$, $z\in\mathbb{D}$ と置けば $\omega(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$ であり $\omega(0)=0$ である．さて $\omega(re^{i\theta_2})=f^{-1}(tf(re^{i\theta_2}))=re^{i\theta_1}$ であるから Schwarz の補題より $\omega(z)\equiv e^{i(\theta_1-\theta_2)}z$ が成り立つ．よって $tf(z)\equiv f(\omega(z))=f(e^{i(\theta_1-\theta_2)}z)$ が $\mathbb{D}$ で成り立つ．$z=0$ において両辺の微係数 を取れば $tf'(0)=e^{i(\theta_1-\theta_2)}f'(0)$ となるが, これは $f'(0)\neq 0$ に反する．

さて $\arg f(re^{i\theta})$ の θ に関する単射性より

$$\frac{d}{d\theta}(\arg f(re^{i\theta}))\geq 0\text{ on }(\theta_0-\pi,\theta_0+\pi]\quad\text{または}\quad\frac{d}{d\theta}(\arg f(re^{i\theta}))\leq 0\text{ on }(\theta_0-\pi,\theta_0+\pi]$$

が成り立つ．$\arg f(re^{i\theta})$ は $\theta\in\mathbb{R}$ について 1 価とは限らないが

$$\frac{d}{d\theta}(\arg f(re^{i\theta}))=\frac{d}{d\theta}\mathrm{Im}\,\log f(re^{i\theta})=\mathrm{Im}\left(\frac{d}{d\theta}\log f(re^{i\theta})\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{ire^{i\theta}f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{re^{i\theta}f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right)$$

は 1 価であることに注意する．ここで $z=re^{i\theta}$ について

$$u(z)=\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)=\frac{d}{d\theta}(\arg f(re^{i\theta}))$$

と置けば $u(z)$ は $\mathbb{D}$ で調和である．よって最小値または最大値の原理より

$$u(z)\geq 0\text{ on }\overline{\mathbb{D}}(0,r)\quad\text{または}\quad u(z)\leq 0\text{ on }\overline{\mathbb{D}}(0,r)$$

が成り立つ．しかしながら $u(0)=1$ であるから前者が成り立つ．$r\in(0,1)$ は任意であるから $u(z)\geq 0$ が $\mathbb{D}$ で成り立つことになるが, 再び最小値の原理より $u(z)>0$ が $\mathbb{D}$ で成り立つ．

逆に $\mathbb{D}$ において $u(z)=\mathrm{Re}\,(zf'(z)/f(z))>0$ が成り立つと仮定する．仮定より f は原点に 1 位の零点を持ち, $u(z)>0$ より他に零点を持たない．従って上で議論したように $\theta_0-\pi<\theta\leq\theta_0+\pi$ において $\arg f(re^{i\theta})$ を定めることができる．そして $\frac{d}{d\theta}(\arg f(re^{i\theta}))=u(z)>0$ であり

$$\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi}\frac{d}{d\theta}(\arg f(re^{i\theta}))\,d\theta=\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi}u(re^{i\theta}))\,d\theta=2\pi u(0)=2\pi$$

従って $\arg f(re^{i\theta})$ は θ が $\theta_0-\pi$ から $\theta_0+\pi$ を動く時, 丁度 2π だけ, 狭義単調に増加する．従って $\partial D\ni e^{i\theta}\mapsto f(re^{i\theta})$ は単純閉曲線である．よって Darboux の定理より $f|_{\mathbb{D}(0,r)}$ はこの単純閉曲線の内側の領域への等角写像である．特に f は任意の $r\in(0,1)$ について $\mathbb{D}(0,r)$ で単葉であるから $\mathbb{D}$ で単葉である．(この事実から $0<r_1<r_2<1$ について $f(\partial\mathbb{D}(0,r_1))$ は $f(\mathbb{D}(0,r_2))$ 内に含まれる単純閉曲線であることも従う.)

それでは最後に $f(\mathbb{D})$ が starlike であることを示そう．これには　$f(\mathbb{D}(0,r))$ が starlike であることを示せばよい．まず $w_0=\rho_0e^{i\varphi_0}\in f(\mathbb{D}(0,r))$ について 0 から w_0 へ向かう半直線を ℓ とし, $t_1=\sup\{t>0:te^{\varphi_0}\in f(\mathbb{D}(0,r))\}$ と

置けば $\rho_0 < t_1$ であり $f(re^{i\theta_1}) = t_1 e^{i\varphi_0} \in \ell$ を満たす $\theta_1 \in \mathbb{R}$ が存在する．もし $[0, w_0] \subset f(\mathbb{D}(0,r))$ が成り立たなければ

$$\emptyset \neq [0, w_0] \cap \partial f(\mathbb{D}(0,r)) \subset [0, w_0] \cap f(\partial \mathbb{D}(0,r))$$

となるが, これは ℓ と $f(\partial\mathbb{D}(0,r))$ がただ 1 点で交わることに矛盾である．よって $[0, w_0] \subset f(\mathbb{D}(0,r))$ が成り立ち $f(\mathbb{D}(0,r))$ は starlike である． □

10.3 Convex univalent functions

複素平面 $\mathbb{C}$ 内の集合 E が convex であるとは任意の 2 点 $w_0, w_1 \in E$ について w_0 と w_1 を結ぶ線分 $[w_0, w_1] = \{(1-t)w_0 + tw_1 : 0 \leq t \leq 1\}$ が E に含まれる, つまり $[w_0, w_1] \subset E$ が成り立つ時を言う．集合 E が convex ならばその閉包 $\overline{E}$ も convex になることは明らかであろう．

$f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ がこのとき f が convex univalent であるとは f が単葉で, 領域 $f(\mathbb{D})$ が convex であることと定義する．以下では univalent を省略し単に convex と言うことにする．

Theorem 10.3.1. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ は $f'(0) \neq 0$ を満たすとする．このとき f が *convex* である為の必要十分条件は

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0, \quad z \in \mathbb{D} \tag{10.3.1}$$

が成り立つことである．

Proof. f が convex のとき $r \in (0,1)$ について $f(\mathbb{D}(0,r))$ も convex であることを示そう．$z_0, z_1 \in \mathbb{D}(0,r)$ について

$$\omega(z) = f^{-1}\left((1-t)f\left(\frac{z_0}{r}z\right) + tf\left(\frac{z_1}{r}z\right)\right)$$

と置くと $\omega(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, $\omega(0) = 0$ を満たすので $|\omega(z)| \leq |z|$ が成り立つ．

$$(1-t)f(z_0) + tf(z_1) = f(\omega(r)) \in f(\mathbb{D}(0,r))$$

となるので $(1-t)f(\mathbb{D}(0,r)) + tf(\mathbb{D}(0,r)) = f(\mathbb{D}(0,r))$, つまり $f(\mathbb{D}(0,r))$ は convex である．

次に曲線 $(-\pi, \pi] \ni \theta \mapsto f(re^{i\theta})$ の接線の偏角が θ について増加であることを示そう．これは $-\pi < \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$ を満たす θ_1, θ_2 を取り $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ とする．このとき

1 まず開三角形 $\triangle 0 f(re^{i\theta_1}) f(re^{i\theta_2})$ は $\triangle 0 f(re^{i\theta_1}) f(re^{i\theta_2}) \subset f(\mathbb{D}(0,r))$ を満たすことから $f(re^{i\theta})$ は三角形 $\triangle 0 f(re^{i\theta_1}) f(re^{i\theta_2})$ に属さない．

2 f は starlike でもあるから $f(re^{i\theta})$ は 0 から $f(re^{i\theta_1})$ へ伸びる半直線から 0 から $f(re^{i\theta_2})$ へ伸びる半直線へ反時計回りに進む角領域内にある．

という 2 つの事実から従う．

曲線 $(-\pi, \pi] \ni \theta \mapsto f(re^{i\theta})$ の接ベクトルは $ire^{i\theta} f'(re^{i\theta})$ であるから

$$0 \leq \frac{d}{d\theta} \arg\left(re^{i\theta} f'(re^{i\theta})\right) = \frac{d}{d\theta} \operatorname{Im} \log\left(re^{i\theta} f'(re^{i\theta})\right) = \operatorname{Im} \frac{d}{d\theta} \log\left(re^{i\theta} f'(re^{i\theta})\right) = \operatorname{Re}\left(1 + \frac{re^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right)$$

が従う．

$$v(z) = \operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right), \quad z \in \mathbb{D}$$

と置けば v は $\mathbb{D}$ で調和であり, 上の議論より $\mathbb{D}$ 上, 非負である．また原点において $v(0) = 1$ であるから調和函数における最小値の原理より $\mathbb{D}$ 上で $v(z) > 0$ であることが分かる．

逆に $\mathbb{D}$ 上で $v(z) > 0$ と仮定する．このとき f' は零点を持たない．従って $\log f'(0) = 0$ を満たす 1 価な分枝 $\log f'(z)$ が存在する．また閉曲線 $f(\partial\mathbb{D}(0,r)$ の接ベクトル $ire^{i\theta}f'(re^{i\theta})$ は 0 となることは無くその偏角は $\theta + 2^{-1}\pi + \mathrm{Im}\log f'(re^{i\theta})$ である．であり θ で微分すると

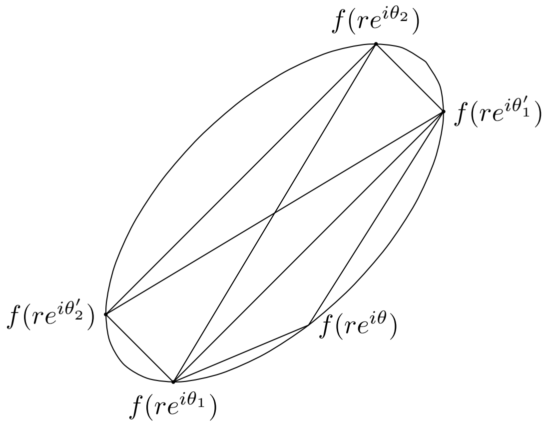
$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{re^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right) = v(re^{i\theta}) > 0$$

である．また θ が 2π 増える時の偏角の増分は調和函数に関する平均値定理より

$$\int_{-\pi}^{\pi} v(re^{i\theta})\,d\theta = 2\pi v(0) = 2\pi$$

である．それでは閉曲線 $f(\partial\mathbb{D}(0,r))$ が単純であり，凸領域を囲むことを示そう．これが示されれば定理の証明は完了する．

Claim. $f(\partial\mathbb{D}(0,r))$ は単純閉曲線であり，複素平面内の任意の直線と $f(\partial\mathbb{D}(0,r))$ の共通部分は
(i) 空である　(ii) 1 点よりなる (iii) 相異なる 2 点よりなる
のいずれかの場合しかない．また (iii) の場合 2 交点を結ぶ開線分は $f(\partial\mathbb{D}(0,r))$ の内側にある．
$\because$　適当に回転を施せば，直線が実軸と平行な場合 ($\{\mathrm{Im}\,w = t\}$, $t \in \mathbb{R}$ と表せることに注意する) にそうなることを見れば十分である．それには $a = \inf\{\mathrm{Im}\,w : w \in f(\partial\mathbb{D}(0,r))\}$, $b = \sup\{\mathrm{Im}\,w : w \in f(\partial\mathbb{D}(0,r))\}$ と置くと直線が $\{\mathrm{Im}\,w = a\}$ または $\{\mathrm{Im}\,w = b\}$ の場合は共通部分は 1 点のみよりなる．何故ならばその交点において棲ベクトルは実軸と平行であり，棲ベクトルが実軸と平行となる θ は丁度 2 つであるからである．ここでそうなる θ を θ_1, θ_2 と置けば $\theta_1 < \theta_2 < \theta_1 + \pi$ で θ_1 での棲ベクトルは $\arg(ire^{i\theta_1}f'(re^{i\theta_1})) = 0$, θ_2 での棲ベクトルは $\arg(ire^{i\theta_2}f'(re^{i\theta_2})) = \pi$ を満たすと仮定してよい．さて $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ については $0 < \arg(ire^{i\theta}f'(re^{i\theta})) < \pi$ であるから $\mathrm{Im}\,f(re^{i\theta})$ はここで狭義増加であり，$\theta \in (\theta_2, \theta_1 + 2\pi)$ については $\pi < \arg(ire^{i\theta}f'(re^{i\theta})) < 2\pi$ であるから $\mathrm{Im}\,f(re^{i\theta})$ はここで狭義減少である．よって $a < t < b$ の時，実軸と平行な直線 $\{\mathrm{Re}\,w = t\}$ と $f(\partial\mathbb{D}(0,r))$ の交点は，(θ_1, θ_2) に於いて 1 点であり．$(\theta_2, \theta_1 + 2\pi)$ に於いてもう 1 点の 2 点よりなる．また区間 $[\theta_1, \theta_2]$, $[\theta_2, \theta_1 + 2\pi]$ に於いて写像 $\theta \mapsto f(re^{i\theta})$ が単射であることも分かる．



次に $f(\partial\mathbb{D}(0,r))$ が単純であることを言うには $[\theta_1, \theta_2]$ に対応する弧と $[\theta_2, \theta_1 + 2\pi]$ に対応する弧が端点以外で共通部分を持たないことを示せばよい．これには $\theta'_1 \in (\theta_1, \theta_2)$ と $\theta'_2 \in (\theta_2, \theta_1 + 2\pi)$ と

$$\mathrm{Re}\,f(re^{i\theta'_1}) = \max_{\theta\in\mathbb{D}} \mathrm{Re}\,f(re^{i\theta}), \quad \mathrm{Re}\,f(re^{i\theta'_2}) = \min_{\theta\in\mathbb{D}} \mathrm{Re}\,f(re^{i\theta})$$

を満たすように取る．このとき $f(re^{i\theta'_1})$ における棲ベクトルは虚軸の上向きと平行であり $\mathrm{Re}\,f(re^{i\theta})$ は $[\theta_1, \theta'_1]$ において狭義増加で $[\theta'_1, \theta_2]$ で狭義減少であることに注意しよう．任意の $\theta \in (\theta_1, \theta'_1)$ について Cauchy の平均値定理と接

ベクトルの偏角 $i\arg(ire^{i\theta}f'(re^{i\theta}))$ の増加性よりある $\theta_1^* \in (\theta_1, \theta)$ $\theta_2^* \in (\theta, \theta_1')$ について

$$\frac{\mathrm{Im}\,\{f(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta_1})\}}{\mathrm{Re}\,\{f(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta_1})\}} = \frac{\mathrm{Im}\,\{ire^{i\theta_1^*}f'(re^{i\theta_1^*})\}}{\mathrm{Re}\,\{ire^{i\theta_1^*}f'(re^{i\theta_1^*})\}} < \frac{\mathrm{Im}\,\{ire^{i\theta_2^*}f'(re^{i\theta_2^*})\}}{\mathrm{Re}\,\{ire^{i\theta_2^*}f'(re^{i\theta_2^*})\}} = \frac{\mathrm{Im}\,\{f(re^{i\theta_1'}) - f(re^{i\theta})\}}{\mathrm{Re}\,\{f(re^{i\theta_1'}) - f(re^{i\theta})\}}$$

が成り立つ. また 4 つの正数 a, b, c, d について $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$ ならば $\frac{b}{a} < \frac{b+d}{a+c} < \frac{d}{c}$ が成り立つことを利用すれば

$$\frac{\mathrm{Im}\,\{f(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta_1})\}}{\mathrm{Re}\,\{f(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta_1})\}} < \frac{\mathrm{Im}\,\{f(re^{i\theta_1'}) - f(re^{i\theta_1})\}}{\mathrm{Re}\,\{f(re^{i\theta_1'}) - f(re^{i\theta_1})\}} < \frac{\mathrm{Im}\,\{f(re^{i\theta_1'}) - f(re^{i\theta})\}}{\mathrm{Re}\,\{f(re^{i\theta_1'}) - f(re^{i\theta})\}}$$

従って $f(re^{i\theta})$ は $f(re^{i\theta_1})$ と $f(re^{i\theta_1'})$ を結ぶ直線の右側の開半平面と領域 $\{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, f(re^{i\theta_1}) < \mathrm{Im}\, w < \mathrm{Im}\, f(re^{i\theta_1'})\}$ の共通部分内にある. 類似の議論を (θ_1', θ_2), (θ_2, θ_2'), $(\theta_2', \theta_1 + 2\pi)$ についても行えば, 閉曲線 $f(\partial\mathbb{D}(0,r))$ は $f(re^{i\theta_1})$, $f(re^{i\theta_1'})$, $f(re^{i\theta_2})$, $f(re^{i\theta_2'})$ の 4 点を頂点とする 4 角形 (凸である) の外部または周上にあることが分かる. よって閉曲線 $f(\partial\mathbb{D}(0,r))$ の $[\theta_1, \theta_2]$ に対応する弧と $[\theta_2, \theta_1 + 2\pi]$ に対応する弧は端点以外で共通部分を持たず, $f(\partial\mathbb{D}(0,r))$ は単純である. また $\mathrm{Im}\, f(re^{i\theta_1}) < t < \mathrm{Im}\, f(re^{i\theta_2})$ について直線 $\{\mathrm{Im}\, w = t\}$ と $f(\partial\mathbb{D}(0,r))$ の交点が丁度 2 つであることが分かる. さらに 2 交点を結ぶ開線分は単純閉曲線 $f(\partial\mathbb{D}(0,r))$ の内側に含まれることを示そう. この開線分は $f(\partial\mathbb{D}(0,r))$ は交わらないので, この開線分上で $f(\partial\mathbb{D}(0,r))$ に関する回転数は一定値である. よってこの一定値が 1 であること示せば十分である.

実際 $f(re^{i\theta_1})$ と $f(re^{i\theta_2})$ を結ぶ対角線と $f(re^{i\theta_1'})$ と $f(re^{i\theta_2'})$ を結ぶ対角線の交点 w_0 の $f(\partial\mathbb{D}(0,r))$ に関する回転数は 1 である. この事実は, w_0 を中心とする偏角 $\arg(f(re^{i\theta}) - w_0)$ の変化を 4 つの区間について見ることにより分かる. 従って w_0 は 単純閉曲線 $f(\partial\mathbb{D}(0,r))$ の内側にある. また 2 本の開対角線は $f(\partial\mathbb{D}(0,r))$ と交わらないので, この開対角線上で回転数は一定値 1 である. さらに 2 交点を結ぶ開線分と $f(re^{i\theta_1})$ と $f(re^{i\theta_2})$ を結ぶ対角線は交わる. よって 2 交点を結ぶ開線分上で $f(\partial\mathbb{D}(0,r))$ に関する回転数は一定値 1 である. 以上で Claim は証明された.

さて Darboux の定理より $f(\mathbb{D}(0,r))$ は単純閉曲線 $f(\partial\mathbb{D}(0,r))$ で囲まれた領域と一致する. これが凸であることは次のようにして分かる. $\zeta_0, \zeta_1 \in f(\mathbb{D}(0,r))$ を任意に取るとき ζ_0, ζ_1 を結ぶ直線と $f(\partial\mathbb{D}(0,r))$ の交点は直線内において閉線分 $[\zeta_0, \zeta_1]$ の外側に少なくとも 2 点存在する. Claim より交点は他には存在せず ζ_0', ζ_1' と置けば

$$[\zeta_0, \zeta_1] \subset (\zeta_0', \zeta_1') \subset D_i(f(\partial\mathbb{D}(0,r))) = f(\mathbb{D}(0,r))$$

が成り立つ. $\square$

第 IV 部

Koebe の一意化定理

第 11 章

調和函数

11.1 調和函数の平均値定理と最大値定理

Definition 11.1.1. 開集合上の $G(\subset \mathbb{C})$ 上の実数値函数 $u(z) = u(x, y)$ が G で調和 *(harmonic)* であるとは, $u \in C^2(G)$ *(*つまり G において 2 階までの偏導函数が全て存在し, かつ連続*)* であり

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \tag{11.1.1}$$

を G で満たすときを言う. $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ は *Laplace(-Beltrami* 微分*)* 作用素と呼ばれる.

複素数値函数の場合, 実部と虚部の両方が上の意味で調和函数である場合に調和であると言う. 以下では断らない限り実数値の調和函数のみを取り扱う.

定義から容易に分かるように, 調和函数同士の和や定数倍も調和函数である. 簡単な調和函数の例としては $ax + by$ のような 1 次函数がある. また G で (複素) 解析函数 f を実部と虚部に分解して $f(z) = u(x) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ と置くとき u, v はともに調和函数である. 実際 Cauchy-Riemann の方程式

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

及び C^2 級の函数は偏微分の順序交換が可能なことを利用すれば

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \{u_x\}_x = \{v_y\}_x = \{v_x\}_y = -\{u_y\}_y = -u_{yy} \\ v_{xx} &= \{v_x\}_x = -\{u_y\}_x = -\{u_x\}_y = -\{v_y\}_y = -v_{yy} \end{aligned}$$

であるから $Lu = Lv = 0$ が従う.

上で述べたのは 2 変数 x, y の調和函数の定義であるが, n 変数 $x_1, \ldots, x_n$ の場合は $L = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ と置けば, 調和函数の定義は n 変数の場合でも $Lu =$ が成り立つことと一般化される. 特に $n = 1$ の場合, 函数 $u(x)$ が, ある開集合 (連結成分に分解すれば, 開区間の高々可算和である) において調和であるとは, ここで $u''(x) \equiv 0$ を満たすことであるから, 各成分ごとに 1 次函数 $u(x) = ax + b$ であることに他ならない. これに比して上で示したように $n = 2$ の場合は正則函数の実部, 虚部 のように一次函数とは限らない調和函数も存在する.

また以下では領域 (= 連結開集合) 上の調和函数について結果を述べるが, 大部分の結果は開集合を定義域とする調和函数について成り立つことを注意しておく.

Theorem 11.1.2. *f を領域 Ω 上の解析函数とし, φ を領域 D 上の調和函数とする. このとき $f(\Omega) \subset D$ ならば $\varphi \circ f$ は Ω で調和である.*

Proof. まず $w = u + iv = f(z)$, $z = x + iy$ とすると $\varphi \in C^2(D)$ について

$$L(\varphi \circ f)(z) = (L\varphi) \circ f \cdot |f'(z)|^2 \tag{11.1.2}$$

が成り立つことを示そう．ただし $L\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}$ である．

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ f)_x &= \varphi_u u_x + \varphi_v v_x \\
(\varphi \circ f)_y &= \varphi_u u_y + \varphi_v v_y \\
(\varphi \circ f)_{xx} &= \varphi_{uu} u_x^2 + 2\varphi_{uv} u_x v_x + \varphi_{vv} v_x^2 + \varphi_u u_{xx} + \varphi_v v_{xx} \\
(\varphi \circ f)_{yy} &= \varphi_{uu} u_y^2 + 2\varphi_{uv} u_y v_y + \varphi_{vv} v_y^2 + \varphi_u u_{yy} + \varphi_v v_{yy}
\end{aligned}$$

である．ここで Cauchy-Riemann の方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ と $Lu = Lv = 0$ より

$$\begin{aligned}
&L(\varphi \circ f) \\
=&\varphi_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + 2\varphi_{uv}(u_x v_x + u_y v_y) + \varphi_{vv}(v_x^2 + v_y^2) + \varphi_u(u_{xx} + u_{yy}) + \varphi_v(v_{xx} + v_{yy}) \\
=&(L\varphi) \circ f \cdot (u_x^2 + v_x^2) \\
=&(L\varphi) \circ f \cdot |f'|^2
\end{aligned}$$

となる．これより特に φ が調和函数ならば $L\varphi = 0$ であるから $L(\varphi \circ f) = 0$ が従い $\varphi \circ f$ は Ω で調和である． □

Theorem 11.1.3 (調和函数の平均値定理)**.** u が領域 Ω で調和であり $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r) \subset \Omega$ ならば

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta \tag{11.1.3}$$

が成り立つ．

Proof. $0 \leq \rho < \operatorname{dist}(z_0, \Omega^c)$ を満たす ρ を取り，

$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta, \quad 0 \leq r \leq \rho$$

と置くと I は閉区間 $[0, \rho]$ で連続であり $I(0) = u(z_0)$ である．また開区間 $(0, \rho)$ において I は C^2 級で

$$I''(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \{u(z_0 + re^{i\theta})\}\, d\theta$$

が成り立つ．

　さて $z = re^{i\theta}$ と置くと

$$0 = Lu = u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$$

である．これを $u(z)$ の代わりに $u(z_0 + z)$ に用いて $0 < r < \rho$ について

$$\begin{aligned}
I''(r) =& -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \{u(z_0 + re^{i\theta})\}\, d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \{u(z_0 + re^{i\theta})\}\, d\theta \\
=& -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \{u(z_0 + re^{i\theta})\}\, d\theta - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial u}{\partial \theta}(z_0 + re^{i\theta}) \right]_{-\pi}^{\pi} \\
=& -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta \right\} = -\frac{1}{r} I'(r)
\end{aligned}$$

が成り立つ．従って

$$\frac{d}{dr} \{rI'(r)\} = rI''(r) + I'(r) = 0$$

が成り立つ. よってある定数 A により $rI'(r) = A$ と表せ, $I'(r) = \frac{A}{r}$ より, さらにある定数 B により $I(r) = A\log r + B$ と表せる. ここで $\lim_{r\to+0} I(r) = u(z_0)$ であるから $A = 0$, $B = u(z_0)$ でなければならない. 従って $I(r) \equiv u(z_0)$ である. □

Theorem 11.1.4 (調和函数に関する最大値の原理)**.** 函数 u は領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の *(*実数値*)* 調和函数とする.

(i) u が内点 $z_0 \in \Omega$ で最大値 *(*または最小値*)* M を取れば $u = M$ *(*定数函数*)* である.

(ii) Ω が有界であり, ある定数 M に関し $\limsup_{\Omega\ni z\to\zeta} u(z) \le M$ が任意の $\zeta \in \partial\Omega$ について成り立つならば $u(z) \le M$ が Ω で成り立つ.

(iii) Ω が非有界であり, ある定数 M に関し $\limsup_{\Omega\ni z\to\zeta} u(z) \le M$ が任意の $\zeta \in \partial\Omega$ について成り立ち, さらに $\limsup_{\Omega\ni z\to\infty} u(z) \le M$ が成り立つならば $u(z) \le M$ が Ω で成り立つ.

Proof. (i) u が内点 $z_1 \in \Omega$ で最大値 M を取れば

$$0 = M - u(z_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{M - u(z_1 + re^{i\theta})\}\,d\theta \ge 0, \quad 0 \le r < d := \mathrm{dist}(z_1, \Omega^c)$$

が成り立つ. $M - u(z_1 + re^{i\theta}) \ge 0$ に注意すれば, 上式より, $u(z_1 + re^{i\theta}) \equiv M$ が任意の θ と $r \in [0, d)$ について成り立つことが分かる. つまり $\mathbb{D}(z_1, d)$ において $u(z) = M$ が成り立つ. これより特に $\Omega_0 = \{z \in \Omega : u(z) = M\}$ と置けば Ω_0 は開集合であり, $z_0 \in \Omega_0$ より $\Omega_0 \ne \emptyset$ である. また $\Omega_1 = \{z \in \Omega : u(z) < M\}$ と置けば u の連続性より Ω_1 も開集合であり, $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$ かつ $\Omega_0 \cap \Omega_1 = \emptyset$ である. Ω は連結であるから, $\Omega_0 = \emptyset$ または $\Omega_1 = \emptyset$ のどちらか一方が成り立つが, $z_1 \in \Omega \cap \Omega_0$ より, 後者が成り立つことになるので $\Omega = \Omega_0$ が従う. これは Ω 上 $u = M$ を意味する.

(ii) $u(z_0) > M$ となる内点 $z_0 \in \Omega$ が存在すると仮定し, 矛盾を導こう. $\varepsilon = u(z_0) - M > 0$ を置く. 各 $\zeta \in \partial\Omega$ について $\mathbb{D}(\zeta, \rho(\zeta)) \cap \Omega$ 上 $u(z) < M + \varepsilon$ となるように $r(\zeta) > 0$ を取る. Ω は有界であるから $\partial\Omega$ はコンパクトであり, $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \partial\Omega$ を $\partial\Omega \subset \cup_{k=1}^n \mathbb{D}(\zeta_k, \rho(\zeta_k))$ が成り立つように取れる. このとき $\Omega \cap \cup_{k=1}^n \mathbb{D}(\zeta_k, \rho(\zeta_k))$ において $u(z) < M + \varepsilon$ であり $u(z_0) = M + \varepsilon$ より $z_0 \in \Omega \setminus \cup_{k=1}^n \mathbb{D}(\zeta_k, \rho(\zeta_k))$ が成り立つ. ここで集合 $\Omega_0 := \Omega \setminus \cup_{k=1}^n \mathbb{D}(\zeta_k, \rho(\zeta_k))$ は有界閉集合であることに注意しよう. 従ってある点 $z_1 \in \Omega_0$ において u は Ω_0 での最大値 $M' = u(z_1)$ を取り, $M' \ge u(z_0) \ge M$ である. 以上より u は Ω における最大値を z_1 で取ることが分かる. $z_1 \in \Omega_0$ は明らかに Ω の内点であるから (i) より u は定数函数 $M'(> M)$ に等しい. これは u の境界条件と明らかに矛盾する.

(iii) (ii) と同様に $r(\zeta) > 0$, $\zeta \in \partial\Omega$ を取り, 加えて $r(\infty) > 0$ を $\Omega \setminus \mathbb{D}(0, r(\infty))$ 上 $u(z) < M + \varepsilon$ が成り立つように取る. そしてコンパクト集合 $\partial\Omega \cap \overline{\mathbb{D}}(0, r(\infty))$ の開被覆

$$\partial\Omega \cap \overline{\mathbb{D}}(0, r(\infty)) \subset \bigcup_{\zeta \in \partial\Omega \cap \overline{\mathbb{D}}(0, \rho(\infty))} \mathbb{D}(\zeta, r(\zeta))$$

から有限被覆

$$\partial\Omega \cap \overline{\mathbb{D}}(0, r(\infty)) \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathbb{D}(\zeta_k, \rho(\zeta_k))$$

を取り出す. ここで $K = \Omega \cap \overline{\mathbb{D}}(0, r(\infty)) \setminus \bigcup_{k=1}^n \mathbb{D}(\zeta_k, \rho(\zeta_k))$ と置くと, K はコンパクト集合であり, $\Omega \setminus K = (\Omega \setminus \overline{\mathbb{D}}(0, r(\infty))) \cap \bigcup_{k=1}^n \mathbb{D}(\zeta_k, \rho(\zeta_k))$ において $u(z) < M + \varepsilon$ が成り立つ. ここで $u(z_0) = M + \varepsilon$ より $z_0 \in K$ であり, K はコンパクトであるから (ii) と同様に u の Ω における最大値 M' は $M' \ge M + \varepsilon$ であり K 内のある点 (Ω の内点である) 上で取られることが分かる. よって (i) より $u = M'$ となるが, これは u の境界条件と明らかに矛盾する. □

Remark 11.1.5. 上の最大値の原理 *(Theorem 11.1.4)* は調和函数について成立する事実として述べたが, 証明を読めば分かるように領域 Ω 上の連続函数 u が次の平均値の性質 *(Theorem 11.1.3* の結論よりも弱いことに注意*)*

$$\forall z \in \Omega : \exists r_0 > 0 : \forall r \in (0, r_0) : u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z + re^{it})\,dt \tag{11.1.4}$$

を満たせば成り立つ．

Theorem 11.1.4 の (iii) において $\limsup_{\Omega\ni z\to} u(z) \le M$ を省略することは出来ない．例えば上半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ において $h(z) = y$, $z = x + iy$ と置けば境界である実軸の全ての点において $h \le 0$ であるが明らかに $h \le 0$ ではない．

11.2　調和函数の Poisson 積分表示

調和函数の平均値の定理は, 円周上の値の積分平均を取れば, 中心での値が得られることを主張している．実は円周上の値から中心以外の点における値を求めることも可能である．

Theorem 11.2.1 (Poisson の積分表示)**.** u が $\mathbb{D}(0,R)$ で調和であり $\overline{\mathbb{D}}(0,R)$ で連続ならば $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}(0,R)$ について

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2} u(Re^{it})\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}\left\{\frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z}\right\} u(Re^{it})\,dt \end{aligned} \tag{11.2.1}$$

と積分表示される．

Proof. はじめに $R = 1$ の場合に示そう．つまり函数 u は $\mathbb{D}$ で調和であり $\overline{\mathbb{D}}$ で連続とする．$a \in \mathbb{D}$について

$$\varphi(z) = \frac{z + a}{1 + \bar{a}z}, \quad z \in \overline{\mathbb{D}}$$

と置けば, φ は $\mathbb{D}$ で解析的で $\varphi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, また $\overline{\mathbb{D}}$ で連続であり $\varphi(\overline{\mathbb{D}}) = \overline{\mathbb{D}}$ を満たす．従って $u \circ \varphi$ も $\mathbb{D}$ で調和であり $\overline{\mathbb{D}}$ で連続である．従って平均値の定理 (Theorem 11.1.3) より

$$u(a) = u \circ \varphi(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u \circ \varphi(e^{i\theta})\,d\theta$$

が成り立つ．ここで $\varphi(\partial\mathbb{D})$ であるから $e^{it} = \varphi(e^{i\theta})$ と置ける．このとき

$$e^{i\theta} = \varphi^{-1}(e^{it}) = \frac{e^{it} - a}{1 - \bar{a}e^{it}}$$

の両辺を t で微分して

$$\begin{aligned} ie^{i\theta}\frac{d\theta}{dt} &= \frac{(1 - |a|^2)ie^{it}}{(1 - \bar{a}e^{it})^2} \\ \Longrightarrow \quad \frac{d\theta}{dt} &= \frac{(1 - |a|^2)e^{it}}{(e^{it} - a)(1 - \bar{a}e^{it})} = \frac{1 - |a|^2}{|e^{it} - a|^2} \end{aligned}$$

また $e^{i\theta_0} = \varphi(e^{i0}) = \varphi(1)$ となる θ_0 を取れば, 積分区間 $[-\pi, \pi]$ は $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$ に対応するが, 周期性より $[-\pi, \pi]$ での積分として差し支えないので

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - |a|^2}{|e^{it} - a|^2} u(e^{it})\,dt$$

が成り立つ．

一般の R については u の代わりに $u(Rz)$, $a = R^{-1}z$ に上の等式を適用すれば直ちに (11.2.1) の前半が得られる．後半の等式は単なる計算で示される． □

Definition 11.2.2. $\zeta = Re^{i\theta}$, $z = re^{i\theta}$ 但し $(r < R)$ について

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right\} = \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\theta} - z|^2}$$

を円板 $\mathbb{D}(0, R)$ の *Poisson* 核という.

11.3　Poisson 積分の調和性

以下では議論を簡単にするために $R = 1$, つまり単位円板 $\mathbb{D}$ で考えることにし

$$P_z(\zeta) = \mathrm{Re}\left\{\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right\}, \quad z \in \mathbb{D} \text{ and } \zeta \in \partial\mathbb{D} \tag{11.3.1}$$

と置く. このとき Theorem 11.2.1 より $\mathbb{D}$ で調和で, $\overline{\mathbb{D}}$ で連続な函数 $u(z)$ は

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_z(e^{it})u(e^{it})\,dt$$

と表せる. 函数 u の境界値 $u(e^{it})$ は t の函数として周期 2π を持つ $\mathbb{R}$ 上の連続な周期関数である.

逆に周期 2π を持つ $\mathbb{R}$ 上の連続函数 $f(\theta)$ について

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_z(e^{i\theta})f(\theta)\,d\theta \tag{11.3.2}$$

と置く. このとき u は $\mathbb{D}$ で調和であり, 境界での極限について $\lim_{\mathbb{D}\ni z\to e^{i\theta}} u(z) = f(\theta)$ が成り立つ. この事実はもう少し一般化した結果に拡張してから後ほど証明を行う. その前に良い機会であるから, 2π 周期を持つ $\mathbb{R}$ 上の周期函数と単位円周 $\partial\mathbb{D}$ 上の函数の関係, 連続性や積分などの取り扱いについての注意事項をまとめておこう.

$\mathbb{R}$ を加法に関する群と考え, $2\pi\mathbb{Z} = \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ を 2π の整数倍全体がなす部分群とする. そして剰余群を $T = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ と置く. このとき T の各元は $t + 2\pi\mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$ の形で表される同値類である. $\mathbb{R}$ 上の周期 2π を持つ周期函数 G について $g(t + 2\pi\mathbb{Z}) = G(t)$ と置けば G の周期性より右辺は t の取り方に依らず定まり g は T 上の函数である. 逆に T 上の函数 g について $G(t) = g(t + 2\pi\mathbb{Z})$ と置けば G は $\mathbb{R}$ 上の周期 2π を持つ周期函数である. このようにして $\mathbb{R}$ 上の周期 2π を持つ周期函数と $\partial\mathbb{D}$ 上の函数を同一視することが出来る.

抽象的な T の代わりに単位円周 $\partial\mathbb{D}$ を用いることも出来る. つまり全単射 $\partial\mathbb{D} \ni t + 2\pi\mathbb{Z} \mapsto e^{it} \in \partial\mathbb{D}$ により $\partial\mathbb{D}$ を $\partial\mathbb{D}$ と同一視するのである. このときの $\mathbb{R}$ 上の周期 2π を持つ周期函数 G と $\partial\mathbb{D} = T$ 上の函数の対応は $G(t) = g(e^{it})(= g(t + 2\pi\mathbb{Z}))$ となる. $\partial\mathbb{D}$ は距離空間 $\mathbb{C}$ の部分距離空間であり, これから定まる位相と $T = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ の商位相が一致することも容易に分かる. 従って g が $e^{i\theta_0}$ で連続であることと G が θ_0 で連続であることは同値である. 実際には $\partial\mathbb{D}$ は実解析的多様体であるから多様体上の函数として連続性や微分可能性などは局所座標系を用いて定義できるのであるが, 以後の議論を簡単にするために g が微分可能であることや C^k, $k = 1, 2, \ldots$ であることなどは, 対応する G がそうであることと定義する. また g の Borel 可測性, Lebesgue 可測性も同様に G がそうであるときと定義する. また $C(\partial\mathbb{D}) = C^0(\partial\mathbb{D})$ で $\partial\mathbb{D}$ 上の複素数値連続函数全体のなす線形空間とし, $C^k(\partial\mathbb{D})$ で 0 階から k 階までの導函数が全て連続な複素数値連続函数全体のなす線形空間とする. 本書では出来るだけ T の代わりに $\partial\mathbb{D}$ を用いることにする.

本来ならば周期函数 $G(t)$ と対応する $g(e^{it})$ とは別物であるから混同するような表記は慎むべきであるが, 以後どちらの場合も同じ文字を用いることにして $g(t)$ と書いたら $\mathbb{R}$ 上の 2π 周期を持つ函数とみなし, $g(e^{i\theta})$ または $g(\zeta)$, $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ と書いたら $\partial\mathbb{D}$ 上の函数とみなすことにする. この書き方に従えば

$$P_z(e^{it}) = P_z(t)$$

と表すことを許すことになる．また

$$P_z(t) = P_r(t_0 - t), \quad z = re^{it_0} \tag{11.3.3}$$

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2} \tag{11.3.4}$$

が成り立つ．

次に $\partial\mathbb{D} = T$ における積分を考えよう．これには全単射 $[-\pi, \pi) \ni \theta \mapsto e^{i\theta}$ により $\partial\mathbb{D}$ に $[-\pi, \pi)$ の Lebesgue 測度の像測度が導入される．これを $\partial\mathbb{D} = T$ の Lebesgue 測度と呼ぶことにして $d\theta$ で表そう．つまり

$$\int_{\partial\mathbb{D}} g(\theta)\, d\theta = \int_{[-\pi,\pi)} g(t)\, dt$$

であり, $\partial\mathbb{D} = T$ における Lebesgue 測度に関する積分は $[-\pi, \pi)$ における積分と考えて差し支えない．また周期性により

$$\int_{\partial\mathbb{D}} g(\theta)\, d\theta = \int_{[a,a+2\pi)} g(t)\, dt$$

が成り立つ．$0 < p < \infty$ について $|g|^p$ が $d\theta$ について複素数値可積分な函数の全体 (正しくは殆ど至るところ一致する函数同士を同値として類別した商空間) を $L^p(\partial\mathbb{D})$ で表す．また g の大きさを測る量として $0 < p < \infty$ については

$$\|g\|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} |g(\theta)|^p\, d\theta \right\}^{\frac{1}{p}},$$

と定義する．$p = \infty$ の場合は本質的に有界な Lebesgue 可測函数の全体に同様な類別を行った商空間を $L^\infty(\partial\mathbb{D})$ とし, $\|g\|_\infty$ は $\partial\mathbb{D}$ 上殆ど至るところ $|g(\theta)| \leq M$ が成り立つような数 M の下限 (これを $|g|$ の本質的上限と呼び, 記号 $\operatorname{ess.sup}|g|$ で表す) と定義する．以上, 駆け足で空間 $L^p(\partial\mathbb{D})$ の定義を述べたが, 必要に応じ函数解析の教科書を参照して頂きたい．$1 \leq p \leq \infty$ のとき $\|\|_p$ はノルム, つまり "三角不等式: $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$", $\|cf\|_p = |c|\|f\|_p$ 及び "$f \neq 0$ ならば $\|f\|_p > 0$" を満たす．そして $L^p(\partial\mathbb{D})$ はこのノルムのもとで完備であり Banach 空間をなす．

さて $\|g\|_p$ は確率測度 $\frac{1}{2\pi}d\theta$ を用いて定義されたので, Hölder の不等式より p に関する単調性

$$\|g\|_{p_1} \leq \|g\|_{p_2}, \quad 0 < p_1 < p_2 \leq \infty$$

が導かれる．実際 $p_2 = \infty$ の場合は, 殆ど至る所成り立つ不等式 $|g(\theta)| \leq \|g\|_\infty$ の両辺を p_1 乗し $\frac{1}{2\pi}d\theta$ で積分すれば直ちに得られる．また $p_2 < \infty$ のときは $p = \frac{p_2}{p_1}$ と置き, $q > 0$ を p の共役指数, つまり $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ を満たす数とすれば

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} |g(\theta)|^{p_1}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} |g(\theta)|^{p_1} \cdot 1\, d\theta \leq \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} |g(\theta)|^{p_1 p}\, d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} 1^q\, d\theta \right\}^{\frac{1}{q}} = \|g\|_{p_2}^{p_1}$$

より $\|g\|_{p_1} \leq \|g\|_{p_2}$ が従う．この単調性の不等式より $0 < p_1 < p_2 < \infty$ について

$$L^\infty(\partial\mathbb{D}) \subset L^{p_1}(\partial\mathbb{D}) \subset L^{p_2}(\partial\mathbb{D})$$

が直ちに従う．

$\partial\mathbb{D}$ 上の 2 つの可積分函数 f, g について

$$f * g(\theta) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(\theta - t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t) g(t)\, dt$$

は Fubini の定理より, 殆ど全ての θ について積分が収束し θ に関して $L^1(\partial\mathbb{D})$ の函数を与える．これを f, g の合成積と呼ぶ．また $\partial\mathbb{D}$ 上の連続函数 f と Borel 測度 μ について

$$f * \mu(\theta) = \int_{\partial\mathbb{D}} f(\theta - t)\, d\mu(t) = \int_{\partial\mathbb{D}} P_z(\zeta)\, d\mu(\zeta)$$

を f と μ の合成積と呼ぶ. ただし Borel 測度とは Borel 集合族 (= 開集合族を含む最小の加算加法代数) 上の測度であり, 任意の compact 集合上で有限値を取るものである. いまの場合は $\partial\mathbb{D}$ 自身が compact なので必然的に μ は有限測度である. 函数の場合と同様に $d\mu(\theta)$ 及び上式において $d\mu(\zeta)$ という 2 つの表現を用いていることに注意しよう.

式 (11.3.2) の箇所で触れたように $\partial\mathbb{D}$ 上の連続函数 f について

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} P_z(e^{i\theta})f(e^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\theta_0)f(e^{i\theta})\,d\theta = P_r * f(\theta_0), \quad z = re^{i\theta_0}\in\mathbb{D}$$

と置けば u は $\mathbb{D}$ で調和であることを示そう. u は f の Poisson 積分と呼ばれる. Poisson 積分の $\mathbb{D}$ での調和性を証明するには f が連続である必要は無く, $\partial\mathbb{D}$ 上で可積分であれば十分であるし, あるいはもっと一般に次が成り立つ.

Theorem 11.3.1. *$\partial\mathbb{D}$ 上の Borel 測度 μ の Poisson 積分*

$$u(z) = P_r * \mu(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} P_z(\zeta)\,d\mu(\zeta), \quad z = re^{i\theta}\in\mathbb{D}$$

は $\mathbb{D}$ で調和である.

Proof.

$$F(z,\zeta) = \frac{\zeta+z}{\zeta-z}, \quad z\in\mathbb{D} \text{ and } \zeta\in\partial\mathbb{D}$$

と置くとき $\operatorname{Re}F(z,\zeta) = P_z(\zeta)$ であるから

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} F(z,\zeta)\,d\mu(\zeta), \quad z\in\mathbb{D}$$

と置けば $\operatorname{Re}f = u$ である. 従って f が $\mathbb{D}$ で解析函数であることを示せば, $u = \operatorname{Re}f$ は調和である. これには

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= \frac{1}{2\pi h}\int_{\partial\mathbb{D}}\{F(z+h,\zeta)-F(z,\zeta)\}\,d\mu(\zeta)\\ &= \frac{1}{2\pi h}\int_{\partial\mathbb{D}}\left\{\int_0^1 \frac{d}{dt}\{F(z+th,\zeta)\}\,dt\right\}d\mu(\zeta)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}}\left\{\int_0^1 F'(z+th,\zeta)\,dt\right\}d\mu(\zeta)\end{aligned}$$

と表せる. ただし $F'(z,\zeta)$ は z に関する複素微分を表す. $r = |z|\in(0,1)$ と置くと $|h| < \frac{(1-r)}{2}$ を満たす h について

$$\begin{aligned}|F'(z+th,\zeta)-F'(z,\zeta)| &= \left|\frac{2\zeta}{\{\zeta-(z+th)\}^2} - \frac{2\zeta}{\{\zeta-z\}^2}\right|\\ &\le \frac{|2\zeta th\{2\zeta-2z+th\}|}{|\{\zeta-(z+th)\}^2\{\zeta-z\}^2|}\\ &\le \frac{8(|h|(4+|h|))}{(1-r)^4}, \qquad 0\le t\le 1, \quad \zeta\in\partial\mathbb{D}\end{aligned}$$

を満たすので, $t\in[0,1]$ と $\zeta\in\partial\mathbb{D}$ に関し一様に $F'(z+th,\zeta)\to F'(z,\zeta)$ が成り立つので

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} F'(z,\zeta)\,d\mu(\zeta)$$

が成り立つ. 従って f は $\mathbb{D}$ において複素微分可能, つまり解析的である. □

調和函数の Poisson 積分表示と Theorem 11.1.4 の (ii) の応用として次を示しておこう.

Theorem 11.3.2 (調和函数の除去可能特異点)**.** 函数 h が穴開き円板 $\mathbb{D}(z_0,r)\backslash\{z_0\}$ で調和であり, $h(z) = o(\log\frac{1}{|z-z_0|})$, $z \to z_0$ ならば $\lim_{z\to 0} h(z)$ が存在する．また $h(0) = \lim_{z\to 0} h(z)$ と置いて h を $\mathbb{D}(z_0,r)$ 上の函数に拡張すれば $\mathbb{D}(z_0,r)$ で調和である．

Proof. h が $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ で調和であり, $\overline{\mathbb{D}}\backslash\{0\}$ で連続の場合に示せば十分である．このとき k を境界函数 $h(e^{i\theta})$ の Poisson 積分と置けば k $\mathbb{D}$ で調和であり, $\overline{\mathbb{D}}$ で連続であり, 任意の $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ について $\lim_{z\to\zeta} h(z) = \lim_{z\to\zeta} k(z)$ が成り立つ．場合 $\alpha > 0$ について

$$u_\alpha(z) = h(z) - k(z) - \alpha\log\frac{1}{|z|}, \quad z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$$

と置く．このとき u_α は $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ で調和であり

$$\lim_{z\to\zeta} u_\alpha(z) = 0, \quad \forall\zeta \in \partial\mathbb{D}$$

及び

$$u_\alpha(z) \to -\infty, \quad z \to 0$$

を満たす．従って最大値の原理 (Theorem 11.1.4 の (ii)) より $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ 上で $u_\alpha \leq 0$ が成り立つ．つまり

$$h(z) \leq k(z) + \alpha\log\frac{1}{|z|}, \quad z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$$

が成り立つ．$\alpha > 0$ は任意であったから $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ 上で $h \leq k$ である．

次に $\alpha > 0$ について

$$v_\alpha(z) = k(z) - h(z) - \alpha\log\frac{1}{|z|}, \quad z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$$

と置く．このとき v_α は $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ で調和であり

$$\lim_{z\to\zeta} v_\alpha(z) = 0, \quad \forall\zeta \in \partial\mathbb{D}$$

及び

$$v_\alpha(z) \to -\infty, \quad z \to 0$$

を満たす．従って最大値の原理 (Theorem 11.1.4 の (ii)) より $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ 上で $v_\alpha \leq 0$ が成り立つ．つまり

$$k(z) - \alpha\log\frac{1}{|z|} \leq h(z), \quad z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$$

が成り立つ．$\alpha > 0$ は任意であったから $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ 上で $k \leq h$ である．

以上で $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ 上で $k = h$ が成り立つ．k は $\mathbb{D}$ で調和であることより定理の主張が直ちに従う． □

Poisson 積分の調和性の応用として, 調和函数列の局所一様収束極限も再び調和であることを示しておこう．

Theorem 11.3.3. $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ を領域 Ω 上の調和函数列で函数 u に Ω 上, 局所一様収束するとする．このとき u も Ω で調和である．

Proof. $z_0 \in \Omega$ とし, z_0 の近傍で u が調和であることを示そう．$\rho = \inf\{|z - z_0| : z \in \mathbb{C}\backslash\Omega\} > 0$ と置く．このとき $0 < R < \rho$ を満たす任意の R を 1 つ取り固定する．函数 $u_n(z_0 + Rz)$, $z \in \overline{\mathbb{D}}$ は $\mathbb{D}$ で調和で, $\overline{\mathbb{D}}$ で連続であるから

$$u_n(z_0 + Rz) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}u_n(z_0 + Re^{it})\,dt, \quad z \in \mathbb{D}$$

が成り立つ．このとき $n \to \infty$ とすれば, 左辺は $u(z_0 + Rz)$ に収束する．また右辺は $u_n(z_0 + Re^{it}) \to u(z_0 + Re^{it})$ が t について一様に収束するので

$$u(z_0 + Rz) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} u(z_0 + Re^{it})\, dt, \quad z \in \mathbb{D}$$

が成り立つ．よって $u(z_0 + Rz)$ も $\mathbb{D}$ で調和であり, 従って u は $\mathbb{D}(z_0, R)$ で調和である． □

11.4 正値調和函数に関する Harnack の定理

Theorem 11.4.1 (Harnack の不等式)**.** 単位円板 $\mathbb{D}$ 上の非負調和函数 u について

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} u(0) \le u(z) \le \frac{1 + |z|}{1 - |z|} u(0), \quad z \in \mathbb{D} \tag{11.4.1}$$

が成り立つ．

Proof. Herglotz の表現定理 (順番は前後するが, 後節で Theorem 12.3.3 として証明する) を既に知っている読者向けの証明は以下の通り．

u を測度 μ の Poisson 積分 $u(z) = P_r * \mu(\theta)$ と表し, これに不等式

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \le P_r(t - \theta) = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} \le \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \tag{11.4.2}$$

と

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_T d\mu(\theta) \tag{11.4.3}$$

を組み合わせれば直ちに従う．

Herglotz の表現定理を知らなくても, 以下のように証明は可能である．$\rho \in (0, 1)$ について $u_\rho(z) = u(\rho z)$ と置けば, u_ρ は $\mathbb{D}$ で調和で, $\overline{\mathbb{D}}$ で連続であるから

$$u_\rho(z) = \frac{1}{2\pi} \int_T \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} u_\rho(e^{it})\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_T \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} u(\rho e^{it})\, dt$$

と表現できる．これに (11.4.2) と $u(0) = u_\rho(0) = (2\pi)^{-1} \int_T u(\rho e^{it})\, dt$ を組み合わせれば

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} u(0) \le u_\rho(z) = u(\rho z) \le \frac{1 + |z|}{1 - |z|} u(0), \quad z \in \mathbb{D}$$

が成り立つので $\rho \nearrow 1$ とすればよい． □

Theorem 11.4.2 (Harnack の収束定理)**.** $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ を領域 Ω 上の調和函数の非減少列, つまり

$$u_1(z) \le u_2(z) \le \cdots, \quad z \in \mathbb{D}$$

を満たすとする．このとき各 $z \in \mathbb{D}$ について $u(z) = \lim_{n\to\infty} u_n(z) \in (-\infty, \infty]$ と置けば, 次のどちらか一方のみが必ず成り立つ．

(1) 全ての $z \in \Omega$ について $u(z) < \infty$ であり $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ は u に局所一様収束し, u は Ω で調和である．
(2) 全ての $z \in \Omega$ について $u(z) = \lim_{n\to\infty} u_n(z) = \infty$.

Proof. 函数列の非減少性より各点で極限 $\lim_{n\to\infty} u_n(z) \in (-\infty, \infty]$ が存在する．$E = \{z \in \Omega : \lim_{n\to\infty} u_n(z) = \infty\}$ と置く．このとき $z_0 \in E$ ならば $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r_0) \subset \Omega$ を満たす r_0 を取る．$\mathbb{D}$ 上の非負調和函数　$u_n(z_0+r_0z)-u_1(z_0+r_0z)$ に Harnack の不等式を用いて

$$u_n(z_0 + r_0z) - u_1(z_0 + r_0z) \geq \frac{1 - |z|}{1 + |z|}\{u_n(z_0) - u_1(z_0)\}$$

が成り立つ．従って

$$u_n(z) - u_1(z) \geq \frac{r_0 - |z - z_0|}{r_0 + |z - z_0|}\{u_n(z_0) - u_1(z_0)\}, \quad z \in \mathbb{D}(z_0, r_0)$$

が成り立つ．この不等式と $\lim_{n\to\infty} u_n(z_0) = \infty$ より $z \in \mathbb{D}(z_0, r_0)$ について $\lim_{n\to\infty} u_n(z) = \infty$ つまり $\mathbb{D}(z_0, r_0) \subset E$ が従う．よって E は開集合である．

$z_0 \in \Omega\backslash E$ についても $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r_0) \subset \Omega$ を満たす r_0 を取る．$\lim_{n\to\infty} u_n(z_0) < \infty$ であることと $n \geq m$ について Harnack の不等式より得られる

$$u_n(z) - u_m(z) \leq \frac{r_0 + |z - z_0|}{r_0 - |z - z_0|}\{u_n(z_0) - u_m(z_0)\}, \quad z \in \mathbb{D}(z_0, r_0)$$

が成り立つことより，$z \in \mathbb{D}(z_0, r_0)$ について $\lim_{n\to\infty} u_n(z) < \infty$ が従う．よって $\mathbb{D}(z_0, r_0) \subset \Omega\backslash E$ となるので $\Omega\backslash E$ も開集合である．さらに収束は $\mathbb{D}(z_0, r_0)$ で局所一様であり，Theorem 11.3.3 より極限函数は調和である．

Ω は連結であるから $E = \Omega$ つまり (2) であるか，または $E = \emptyset$ つまり (1) であるかのどちらか一方が成り立つ．　□

第 12 章

Poisson 積分の境界挙動

12.1 Poisson 積分の大域的境界挙動

この節と次節で f が可積分函数の場合の Poisson 積分 $u(z) = P_r * f(\theta)$ の境界極限値 $\lim_{\mathbb{D}\ni z\to\zeta} u(z)$ の存在や, f と一致するかどうかなどを調べる. このためにまず Poisson 核の基本的な性質をまとめる.

Theorem 12.1.1. *Poisson* 核 $P_r(\theta) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$ について次が成り立つ.

(i) $P_r(\theta) > 0$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\,d\theta = 1$.
(ii) $P_r(-\theta) = P_r(\theta)$.
(iii) $P_r(\theta)$ は $\theta \in [0,\pi]$ について狭義減少.
(iv) $\frac{1-r}{1+r} \le P_r(\theta) \le \frac{1+r}{1-r}$.
(v) $\delta \in (0,\pi)$ について $\sup_{\delta\le|\theta|\le\pi} P_r(\theta) \to 0$ $(r \nearrow 1)$.
(vi) $\delta \in (0,\pi)$ について $\int_{\delta\le|\theta|\le\pi} P_r(\theta)\,d\theta \to 0$ $(r \nearrow 1)$.
(vii) $P_{r_1} * P_{r_2} = P_{r_1 r_2}$, $r_1, r_2 \in (0,1)$

Proof. (ii)-(iv) は $P_r(\theta) > 0$ は $P_r(\theta)$ の式表示より明らか. $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\,d\theta = 1$ については調和函数 $u = 1$ に Theorem 11.2.1 を適用すれば直ちに従うので (i) が成り立つ.

(v) については (ii), (iii) より

$$\sup_{\delta\le|\theta|\le\pi} P_r(\theta) = P_r(\delta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2} \to 0, \quad r \nearrow 1$$

である. また (vi) は (v) より従う.

最後に (vii) を示そう. $u(z) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ と置くと $u(re^{i\theta}) = P_r(\theta)$ である. また $\rho \in (0,1)$ について $u_\rho(z) = u(\rho z)$ は $z \in \mathbb{D}$ について調和であり, $\overline{\mathbb{D}}$ で連続であるから

$$P_{\rho r}(\theta) = u(\rho r e^{i\theta}) = u_\rho(re^{i\theta}) = P_r * u_\rho(\theta) = P_r * P_\rho(\theta)$$

である. □

Theorem 12.1.2. f の を T 上の L^p 函数とし $r \in [0,1)$ について $u_r(\theta) = P_r * f(\theta)$ と置き, T 上の函数を定義する. このとき L^p ノルムに関し

$$\|u_r\|_p \le \|f\|_p, \quad 1 \le p \le \infty \tag{12.1.1}$$

が成り立つ．

L^p ノルムに関する三角不等式 $\|f+g\|_p \le \|f\|+\|g\|$ は Minkowski の不等式と呼ばれる．Theorem 12.1.2 は Minkowski の不等式の一般化である次の不等式より容易に従う．この不等式も Minkowski の不等式と呼ばれることがある．

Theorem 12.1.3 (Minkowski の不等式)**.** $(X,\mathcal{F},\mu)$, $(Y,\mathcal{G},\nu)$ を 2 つの σ 有限な測度空間とし，$F(x,y)$ を $\mathcal{F}\times\mathcal{G}$ 可測な非負函数とする．このとき $p\in[0,\infty)$ について

$$\left\|\int_X F(x,y)\,d\mu(x)\right\|_{L^p(\nu)} \le \int_X \|F(x,y)\|_{L^p(\nu)}\,d\mu(x)$$

が成り立つ．

Proof. 以下の議論では積分変数の順序交換を行うために Fubini の定理を使用する．この為に σ-有限性が必要であることに注意する．

$p=1$ の時は Fubini の定理より等号が成り立つ．$p>1$ のときは $p^{-1}+q^{-1}=1$ を満たす $q\in(1,\infty)$ を取り

$$G(y)=\left\{\int_X F(x,y)\,d\mu(x)\right\}^{p-1}$$

と置く．このとき $q(p-1)=p$ より

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_X F(x,y)\,d\mu(x)\right\|^p_{L^p(\nu)}\\
&=\int_Y\left\{\int_X F(x,y)\,d\mu(x)\right\}^p d\nu(y)\\
&=\int_Y\left\{\int_X F(x,y)\,d\mu(x)\right\}^{p-1}\cdot\left\{\int_X F(x,y)\,d\mu(x)\right\} d\nu(y)\\
&=\int_Y G(y)\left\{\int_X F(x,y)\,d\mu(x)\right\} d\nu(y)\\
&=\int_X\left\{\int_Y G(y)F(x,y)\,d\nu(y)\right\} d\mu(x)\quad(\text{非負函数についての Fubini の定理より})\\
&\le\int_X\left\{\int_Y G(y)^q\,d\nu(y)\right\}^{1/q}\left\{\int_Y F(x,y)^p\,d\nu(y)\right\}^{1/p} d\mu(x)\quad(\text{Hölder の不等式より})\\
&=\left\{\int_Y G(y)^q\,d\nu(y)\right\}^{1/q}\int_X \|F(x,y)\|_{L^p(\nu)}\,d\mu(x)\\
&=\left\{\int_Y\left\{\int_X F(x,y)\,d\mu(x)\right\}^p d\nu(y)\right\}^{\frac{p-1}{p}}\int_X \|F(x,y)\|_{L^p(\nu)}\,d\mu(x)\\
&=\left\|\int_X F(x,y)\,d\mu(x)\right\|^{p-1}_{L^p(\nu)}\int_X \|F(x,y)\|_{L^p(\nu)}\,d\mu(x)
\end{aligned}$$

を得る．もし $\left\|\int_X F(x,y)\,d\mu(x)\right\|^{p-1}_{L^p(\nu)}=0$ ならば不等式は自明に成り立つ．そうでなければ $\left\|\int_X F(x,y)\,d\mu(x)\right\|^{p-1}_{L^p(\nu)}$ で両辺を割れば望む不等式を得る． □

Proof of Theorem 12.1.2.

$$u_r(\theta)=P_r*f(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_T P_r(\theta-\varphi)f(\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_T f(\theta-t)P_r(t)dt$$

であるから, 測度 $(2\pi)^{-1}d\theta$, $(2\pi)^{-1}P_r(t)dt$ に Minkowski の不等式を適用すれば

$$\begin{aligned}\|u_r\|_{L^p(T)} &= \left\{\int_T \left|\int_T f(\theta-t)\frac{P_r(t)dt}{2\pi}\right|^p \frac{d\theta}{2\pi}\right\}^{1/p} \\ &\le \left\{\int_T \left(\int_T |f(\theta-t)|\frac{P_r(t)dt}{2\pi}\right)^p \frac{d\theta}{2\pi}\right\}^{1/p} \\ &\le \int_T \left\{\int_T |f(\theta-t)|^p \frac{d\theta}{2\pi}\right\}^{1/p} \frac{P_r(t)dt}{2\pi} \\ &= \frac{\|f\|_p}{2\pi}\int_T P_r(t)dt = \|f\|_p\end{aligned}$$

を得る. □

次の定理ではノルム空間の双対空間における汎弱収束 (weak-star convergence) の概念を使用するので, 少し説明しておこう. $\mathbb{C}$ (or $\mathbb{R}$) を係数体とするノルム空間 X 上の有界線形汎函数の全体を X^* と置く. つまり線形写像 $\Lambda : X \to \mathbb{C}$ (or $\mathbb{R}$) であり, ある定数 $M \ge 0$ について

$$|\Lambda x| \le M\|x\|, \quad x \in X$$

を満たすものの全体を X^* とする. また各 $\Lambda \in X^*$ について

$$\|\Lambda\| = \sup_{x\in X, x\neq 0}\frac{|\Lambda x|}{\|x\|}$$

と置いて, Λ の作用素ノルムと呼ぶ. このとき $|\Lambda x| \le \|\Lambda\|\|x\|$ が成り立つことは明らかであろう. X^* はこの作用素ノルムのもとで Banach 空間をなす. X^* には汎弱位相と呼ばれる, 別の位相を導入することも出来る. (本書では汎函数の列に関する汎弱収束の概念のみを使用するので汎弱位相についてはこれ以上触れないが, 詳しくは函数解析の教科書 [24] や [16] などを参照のこと.) 列 $\{\Lambda_n\}_{n=1}^\infty \subset X^*$ が $\Lambda \in X^*$ に汎弱収束するとは

$$\lim_{n\to\infty}\Lambda_n x = \Lambda x, \quad \forall x \in X$$

が成り立つときを言う. 列 $\{\Lambda_n\}_{n=1}^\infty$ がノルム収束すれば汎弱収束することは容易に分かる.

σ-有限測度空間 $(E, \mathcal{M}, \mu)$ 上の L^p-空間を $L^p(E)$ で表そう. また $p \in [1,\infty]$ の共役指数を q, つまり $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ を満たす $q \in [1,\infty]$ とする. このとき $1 \le p < \infty$ ならば各 $\Lambda \in L^p(E)^*$ について, ある $f \in L^q(E)$ で

$$\Lambda g = \int_X gf\,d\mu, \quad g \in L^p(E)$$

と満たすものが一意的に存在し, $\|\Lambda\| = \|f\|_q$ が成り立つ. 逆に $f \in L^q(E)$ について上式で Λ を定義すれば $\Lambda \in L^p(E)^*$ であり $\|\Lambda\| = \|f\|_q$ が成り立つ. 従って $L^p(E)^*$ は $L^q(E)$ と Banach 空間として同型であり, 同一視することが出来る. この同一視のもとでは列 $\{f_n\} \subset L^q(E)$ が $f \in L^q(E)$ に汎弱収束するとは

$$\lim_{n\to\infty}\int_X gf_n\,d\mu = \int_X gf\,d\mu, \quad \forall f \in L^p(E)$$

が成り立つことである.

また局所コンパクト Hausdorff 空間 X 上の複素数値連続函数 g で

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists \text{ コンパクト集合 } K \subset X : \forall x \in X\backslash K : |g(x)| < \varepsilon$$

を満たすものを $C_0(X)$ と置き $\|g\|_\infty = \sup_{x\in X}|g(x)|$ と定義すればノルムであり, このノルムのもとで $C_0(X)$ は Banach 空間をなす. このとき各 $\Lambda \in C_0(X)^*$ について $(X, \mathcal{B}(X))$ 上の複素測度 μ で

$$\Lambda g = \int_X g\, d\mu, \quad \forall g \in C_0(X)$$

を満たすものが一意的に存在し, 作用素ノルムに関して $\|\Lambda\| = |\mu|(E)$ が成り立つ. 但し $|\mu|$ は μ の全変動と呼ばれる $(X, \mathcal{B}(X))$ 上の測度である. 逆に $(X, \mathcal{B}(X))$ 上の複素測度 μ について上式で Λ を定義すれば $\Lambda \in C_0(X)^*$ であり $\|\Lambda\| = |\mu|(E)$ が成り立つ. 従って $C_0(X)^*$ は $(X, \mathcal{B}(X))$ 上の複素測度の全体の空間と Banach 空間として同型であり, 同一視出来る. この同一視のもとで $\{\mu_n\} \subset C_0(X)^*$ が $\mu \in C_0(X)$ に汎弱収束するとは

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g\, d\mu_n = \int_X g\, d\mu, \quad \forall g \in C_0(X)$$

が成り立つことである.

Theorem 12.1.4. *Poisson* 積分について次が成り立つ.

(a) $f \in L^p(T)$, $1 \le p < \infty$ について $r \nearrow 1$ のとき $\|P_r * f - f\|_p \to 0$.

(b) $f \in L^\infty(T)$ ならば $P_r * f$ は $r \nearrow 1$ のとき f に汎弱収束する. つまり任意の $g \in L^1(T)$ について

$$\int_T g(\theta) P_r * f(\theta)\, d\theta \to \int_T g(\theta) f(\theta)\, d\theta, \quad r \nearrow 1$$

が成り立つ.

(c) μ が T 上の *Borel* 測度ならば $P_r * \mu$ は $r \nearrow 1$ のとき μ に汎弱収束する. つまり任意の $g \in C(T)$ について

$$\int_T g(\theta) P_r * \mu(\theta)\, d\theta \to \int_T g(\theta)\, d\mu(\theta), \quad r \nearrow 1$$

が成り立つ.

(d) f が T 上の連続函数ならば $r \nearrow 1$ のとき $\|P_r * f - f\|_\infty \to 0$.

Proof. (a) $\|f\|_p = 0$ の時は明らかに成り立つので, 以下では $\|f\|_p > 0$ と仮定する.

$$\begin{aligned}|P_r * f(\theta) - f(\theta)| &= \left| \frac{1}{2\pi}\int_T P_r(t) f(\theta - t)\, dt - \frac{1}{2\pi}\int_T P_r(t) f(\theta)\, dt \right| \\ &\le \int_T |f(\theta - t) - f(\theta)| \frac{P_r(t)dt}{2\pi}\end{aligned} \tag{12.1.2}$$

より Minkowski の不等式を用いて任意の $\delta \in (0, \pi)$ について

$$\begin{aligned}&\|P_r * f - f\|_p \\ &= \|P_r * f(\theta) - f(\theta)\|_{L^p(\frac{d\theta}{2\pi})} \\ &\le \int_T \|f(\theta - t) - f(\theta)\|_{L^p(\frac{d\theta}{2\pi})} \frac{P_r(t)dt}{2\pi} \\ &= \int_{|t|\le\delta} \|f(\theta - t) - f(\theta)\|_{L^p(\frac{d\theta}{2\pi})} \frac{P_r(t)dt}{2\pi} + \int_{\delta\le|t|\le\pi} \|f(\theta - t) - f(\theta)\|_{L^p(\frac{d\theta}{2\pi})} \frac{P_r(t)dt}{2\pi} \\ &= \int_{|t|\le\delta} \|f(\theta - t) - f(\theta)\|_{L^p(\frac{d\theta}{2\pi})} \frac{P_r(t)dt}{2\pi} + 2\|f\|_p \int_{\delta\le|t|\le\pi} \frac{P_r(t)dt}{2\pi}\end{aligned} \tag{12.1.3}$$

を得る. ここで $1 \le p < \infty$ のとき L^p 空間において平行移動は連続であるから任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ を $|t| \le \delta$ ならば

$$\|f(\theta - t) - f(\theta)\|_{L^p(\frac{d\theta}{2\pi})} < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つように取れ, 上式の最右辺の初項も $< \frac{\varepsilon}{2}$ である. またこの $\delta > 0$ に対して $r_0 \in (0,1)$ を $r_0 \leq r < 1$ ならば

$$\int_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} \frac{P_r(t)dt}{2\pi} < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_{L^p(\frac{d\theta}{2\pi})}}$$

が成り立つように取れるので, 結局 (12.1.3) より $r_0 \leq r < 1$ ならば $\|P_r * f - f\|_p < \varepsilon$ が成り立つことになる.

(d) f が T で連続ならば (12.1.2) より $f_t(\theta) = f(\theta - t)$, $\theta \in T$ と置くと

$$\begin{aligned}\|P_r * f - f\|_\infty &\leq \frac{1}{2\pi}\int_T \|f - f_t\|_\infty P_r(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq\delta} \|f - f_t\|_\infty P_r(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} \|f - f_t\|_\infty P_r(t)\,dt\end{aligned}$$

となる. ここで f の連続性より $t \to 0$ のときに $\|f - f_t\|_\infty \to 0$ が成り立つので, 後は (a) の場合と同様に示される.

(b) $f \in L^\infty(T)$ で $g \in L^1(T)$ ならば $r \in (0,1)$ について $P_r(\theta - t)f(t)g(\theta) \in L^1(dt \times d\theta)$ であるから Fubini の定理を用いて

$$\begin{aligned}\int_T g(\theta)P_r * f(\theta)\,d\theta &= \int_T g(\theta)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_T P_r(\theta - t)f(t)\,dt\right\}d\theta \\ &= \int_T \left\{\frac{1}{2\pi}\int_T g(\theta)P_r(\theta - t)\,d\theta\right\} f(t)\,dt \\ &= \int_T \left\{\frac{1}{2\pi}\int_T g(\theta)P_r(t - \theta)\,d\theta\right\} f(t)\,dt \\ &= \int_T P_r * g(t)f(t)\,dt\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\left|\int_T P_r * g(t)f(t)\,dt - \int_T g(t)f(t)\,dt\right| &\leq \int_T |P_r * g(t) - g(t)||f(t)|\,dt \\ &\leq 2\pi\|P_r * g - g\|_1\|f\|_\infty\end{aligned}$$

を得る. (a) より $r \nearrow 1$ のとき $\|P_r * g - g\|_1 \to 0$ であるから $\int_T P_r * g(t)f(t)\,dt \to \int_T g(t)f(t)\,dt$ が成り立つ.

(c) $g \in C(T)$ ならば $g(\theta)P_r(\theta - t)$ は有界で dt, $d\mu$ ともに T 上の有限測度であるから Fubini の定理が適用可能である. よって

$$\begin{aligned}\int_T g(\theta)P_r * \mu(\theta)\,d\theta &= \int_T g(\theta)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_T P_r(\theta - t)\,d\mu(t)\right\}d\theta \\ &= \int_T \left\{\frac{1}{2\pi}\int_T g(\theta)P_r(\theta - t)\,d\theta\right\} d\mu(t) \\ &= \int_T \left\{\frac{1}{2\pi}\int_T g(\theta)P_r(t - \theta)\,d\theta\right\} d\mu(t) \\ &= \int_T P_r * g(t)\,d\mu(t)\end{aligned}$$

が成り立つので

$$\begin{aligned}&\left|\int_T g(\theta)P_r * \mu(\theta)\,d\theta - \int_T g(\theta)\,d\mu(\theta)\right| \\ &= \left|\int_T \{P_r * g(t) - g(t)\}\,d\mu(t)\right| \\ &\leq \int_T |P_r * g(t) - g(t)|\,d\mu(t) \leq \|P_r * g - g\|_\infty \cdot \mu(T)\end{aligned}$$

を得る. ここで (d) より $\|P_r * g - g\|_\infty \to 0$ であるから (c) が成り立つ. □

Theorem 12.1.5. *$f \in L^1(T)$ が $\theta_0 \in T$ で連続ならば, Poisson 積分 $u(z) = P_r * f(\theta)$, $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ について*

$$\lim_{\mathbb{D} \ni z \to e^{i\theta_0}} u(z) = f(\theta_0)$$

が成り立つ.

Proof.

$$|P_r * f(\theta) - f(\theta_0)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_T P_r(\theta - t)\{f(t) - f(\theta_0)\}\,dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_T P_r(\theta - t)|f(t) - f(\theta_0)|\,dt$$

が成り立つことに注意しよう. まず $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を $|\theta - \theta_0| \leq 2\delta$ ならば $|f(\theta) - f(\theta_0)| \leq 2^{-1}\varepsilon$ となるように取る. このとき $|\theta - \theta_0| \leq \delta$ ならば $2\delta \leq |t - \theta_0| \leq \pi$ を満たす t について $|\theta - t| \geq |\theta_0 - t| - |\theta - \theta_0| \geq \delta$ が成り立つので

$$\begin{aligned}
&|P_r * f(\theta) - f(\theta_0)| \\
\leq &\frac{1}{2\pi}\int_{|t-\theta_0|\leq 2\delta} P_r(\theta - t)|f(t) - f(\theta_0)|\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{2\delta \leq |t-\theta_0| \leq \pi} P_r(\theta - t)|f(t) - f(\theta_0)|\,dt \\
\leq &2^{-1}\varepsilon + P_r(\delta)\{|f(\theta_0)| + \|f\|_1\}
\end{aligned}$$

そこで $r_0 \in (0,1)$ を $r_0 \leq r < 1$ ならば $P_r(\delta)\{|f(\theta_0)| + \|f\|_1\} < 2^{-1}\varepsilon$ が成り立つように取れば, $(r,\theta) \in [r_0, 1) \times [\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta]$ について $|P_r * f(\theta) - f(\theta_0)| \leq \varepsilon$ が成り立つ. □

Theorem 12.1.5 の証明を少し変更すれば次が得られる.

Corollary 12.1.6. *$f \in L^1(T)$ が $\theta_0 \in T$ においてある定数 M に関し $\limsup_{\theta \to \theta_0} f(\theta) \leq M$ を満たせば, Poisson 積分 $u(z) = P_r * f(\theta)$, $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ は*

$$\limsup_{\mathbb{D} \ni z \to e^{i\theta_0}} u(z) \leq M$$

を満たす.

Theorem 12.1.7. *$f \in C(T)$ ならば*

$$u(z) = \begin{cases} P_r * f(\theta), & z = re^{i\theta} \in \mathbb{D} \\ f(e^{i\theta}), & z = e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D} \end{cases}$$

と置くと u は $\overline{\mathbb{D}}$ で連続で, $\mathbb{D}$ で調和である.

Proof. $\mathbb{D}$ で調和であることは Theorem 11.3.1 より従い, 特に $\mathbb{D}$ において連続である. 単位円周上の $e^{i\theta_0} \in \partial\mathbb{D}$ における連続性は Theorem 12.1.5 より従う. □

Theorem 12.1.8. *領域 Ω 上で函数 u が調和 (C^2 級で, $Lu = 0$) であるための必要十分条件は u が Ω 上で連続であり*

$$\forall z_0 \in \Omega : \exists r_0 > 0 : \forall r \in (0, r_0) : u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{it})\,dt. \tag{12.1.4}$$

Proof. 必要性については調和函数の平均値定理 (Theorem 11.1.3) より従う.

十分性を示そう. u を (12.1.4) を満たす Ω 上の連続函数とする. まず調和函数の最大値原理 (Theorem 11.1.4) の証明は函数の連続性と性質 (12.1.4) のみを用いて行われたことに注意しよう. 従って最大値原理は u について成り立つ.

$z_0 \in \Omega$ について $\delta = \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)$ と置く. $r \in (0, \delta)$ について

$$v(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{r^2 - |z - z_0|^2}{|re^{it} - z|^2} u(z_0 + re^{it})\, dt, & z \in \mathbb{D}(z_0, r) \\ u(z), \quad z \in \partial\mathbb{D}(z_0, r) \end{cases}$$

と置くと, v は $\mathbb{D}(z_0, r)$ で調和であり, $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$ で連続である. 特に $u - v$ についても $\mathbb{D}(z_0, r)$ において最大値原理が成り立つことに注意すれば

$$\limsup_{\mathbb{D}(z_0,r)\ni z\to\zeta} \{u(z) - v(z)\} = \lim_{\mathbb{D}(z_0,r)\ni z\to\zeta} \{u(z) - v(z)\} = 0, \quad \zeta \in \partial\mathbb{D}(z_0, r)$$

より $\mathbb{D}(z_0, r)$ において $u \le v$ が成り立つ. $v - u$ にも同じ議論を適用すれば $\mathbb{D}(z_0, r)$ において $v \le u$ が成り立つので結局 $\mathbb{D}(z_0, r)$ において $u = v$ が成り立つことが分かる. これより特に u は $\mathbb{D}(z_0, r)$ で調和 (C^2 級で $Lu = 0$) である. $z_0 \in \Omega$ は任意であるから u は Ω において調和である. □

12.2 Poisson 積分の nontangential limit

Theorem 12.1.5 が示すように θ_0 において f が連続ならば, その Poisson 積分も境界極限を持ち $f(\theta_0)$ に一致する. 境界への近づき方を制限すると可積分函数についても類似の結果を示すことが出来る.

Definition 12.2.1. 各 $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$ と $\varphi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ について $\overline{\mathbb{D}}(0, \sin\varphi_0)$ の凸包の内部を $S_{\varphi_0}(\zeta_0)$ と表し, 点 ζ_0 における開きの角が $2\varphi_0$ である *Stolz* の角領域と呼ぶ. $\mathbb{D}$ 上の函数 $u(z)$ が任意の $\varphi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ について

$$\lim_{S_{\varphi_0}(\zeta_0)\ni z\to\zeta_0} u(z) = A$$

を満たすとき u は ζ_0 において *non-tangential* な極限 A を持つという.

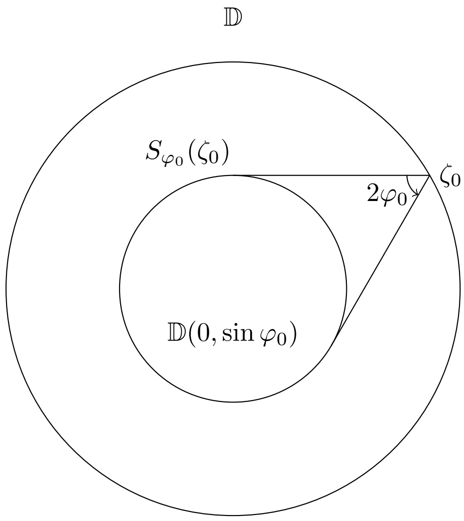


図 12.2.1 Stolz の角領域

Theorem 12.2.2 (Fatou)**.** $\varphi_0 \in (0, 2^{-1}\pi)$ とする. $f \in L^1(T)$ について $u(z) = P_r * f(\theta)$, $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ と置くと

(12.2.1) $$\lim_{S_{\varphi_0}(e^{i\theta})\ni z\to e^{i\theta}} u(z) = f(\theta)$$

が殆ど全ての $\theta \in T$ について成り立つ．特に殆ど全ての $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ について $u(z)$ は *nontangential limit* $f(\theta)$ を持つ．

証明には Stolz の角領域について予備的な結果が必要である．$\zeta = 1$ の場合に限定して述べよう．

Lemma 12.2.3. $z \in S_{\varphi_0}(1) \cap \mathbb{D}(1, \cos\varphi_0)$ ならば

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} \leq \frac{2}{\cos\varphi_0}$$

が成り立つ．また $z \in S_{\varphi_0}(1) \backslash \mathbb{D}(0, \sin\varphi_0)$ ならば

$$|\arg z| \leq \frac{\pi}{\cos\varphi_0}(1-|z|)$$

が成り立つ．

Proof. $z \in S_{\varphi_0}(1) \cap \mathbb{D}(1, \cos\varphi_0)$ ならば

$$z = 1 - \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi), \quad 0 \leq \rho = |z-1| \leq \cos\varphi_0 \text{ and } |\varphi| \leq \varphi_0$$

と表せる．よって

$$1 - |z|^2 = 1 - \{(1-\rho\cos\varphi)^2 + \rho^2\sin^2\varphi\} = \rho(2\cos\varphi - \rho) = |z-1|(2\cos\varphi - \rho)$$

より

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{1+|z|}{2\cos\varphi - \rho} \leq \frac{2}{2\cos\varphi_0 - \cos\varphi_0} = \frac{2}{\cos\varphi_0}$$

次に $z \in S_{\varphi_0}(1) \backslash \mathbb{D}(0, \sin\varphi_0)$ ならば $z = re^{i\theta}$ とおいて 0, z, 1 を頂点とする三角形に正弦定理を適用して $\frac{|z-1|}{|\sin\theta|} = \frac{|z|}{|\sin\varphi|}$ よって $|z| \geq \sin\varphi_0$ と合わせて

$$\frac{2}{\pi}|\theta| \leq \sin|\theta| = \frac{|z-1|}{|z|}\sin\varphi \leq \frac{|z-1|}{\sin\varphi_0}|\sin\varphi| \leq |z-1| \leq \frac{2}{\cos\varphi_0}(1-|z|)$$

□

Proof of Theorem 12.2.2. まず Lebesgu の密度点定理より殆ど全ての $\theta \in T$ について $\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} |f(\theta+t) - f(\theta)|\,dt = 0$ が成り立つ．この等式が成り立つ点 θ は f の Lebesgue 点と呼ばれる．以下では話を簡単にするために $\theta = 0$ が Lebesgue 点であると仮定し，ここで (12.2.1) が成り立つことを示そう．このとき

$$\Phi(t) = \int_{-t}^{t} |f(s) - f(0)|\,ds, \quad 0 \leq t \leq \pi \tag{12.2.2}$$

について

$$\lim_{t\downarrow} \frac{\Phi(t)}{t} = 0$$

が成り立つ．Φ は非減少かつ連続である．ある $t_0 > 0$ について $\Phi(t) = 0$ が区間 $[0, t_0]$ で成り立つ場合 $f(t) = f(0)$ が区間 $[0, t_0]$ で殆ど至るところ成り立つことになり，Theorem 12.1.5 より (12.2.1) が $\theta = 0$ で成り立つ．よって以後 $0 < t \leq \pi$ について $\Phi(t) > 0$ と仮定する．

任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta_0 > 0$ を

$$\frac{\Phi(\delta)}{\delta} \leq \varepsilon, \quad 0 < \delta \leq \delta_0 \tag{12.2.3}$$

が成り立つように取る. 他にも仮定しておくべき条件はあるが, 煩雑さを避けるために, この時点では触れないでおく.

さて $z = re^{i\theta} \in S_{\varphi_0}(1)$ で $1 - r \leq \sqrt{\delta_0 \Phi(\delta_0)}$ を満たすものについて

$$1 - r = \sqrt{\delta\Phi(\delta)} \tag{12.2.4}$$

を満たす $\delta = \delta(r)$ を取る. このとき

$$\begin{aligned} |P_r * f(\theta) - f(0)| &\leq \int_{|t|\leq\delta} P_r(\theta - t)|f(t) - f(0)|\,dt + \int_{\delta\leq|t|\leq\pi} P_r(\theta - t)|f(t) - f(0)|\,dt \\ &= I_1(r,\theta) + I_2(r,\theta) \end{aligned}$$

と置いて, それぞれを評価しよう.

まず $P_r(\theta) \leq \frac{1+r}{1-r} \leq \frac{2}{1-r}$, (12.2.4) と (12.2.3) より

$$I_1(r,\theta) \leq \frac{1}{\pi(1-r)} \int_{|t|\leq\delta} |f(t) - f(0)|\,dt = \frac{\Phi(\delta)}{\pi(1-r)} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\Phi(\delta)}{\delta}} < \frac{\varepsilon}{\pi}$$

次に Lemma 12.2.3 より

$$|\theta| \leq \frac{\pi}{\cos\varphi_0}(1 - r) = \frac{\pi\sqrt{\delta\Phi(\delta)}}{\cos\varphi_0}$$

が成り立つ. 従って δ_0 をあらかじめ

$$\sqrt{\frac{\Phi(\delta)}{\delta}} \leq \frac{\cos\varphi_0}{2\pi}, \quad 0 < \delta \leq \delta_0 \tag{12.2.5}$$

が成り立つように取って置けば $|t| \geq \delta$ を満たす t について

$$|t - \theta| \geq |t| - |\theta| \geq |t| - \delta\frac{\pi}{\cos\varphi_0}\sqrt{\frac{\Phi(\delta)}{\delta}} \geq |t| - \frac{\delta}{2} \geq \frac{|t|}{2}$$

が成り立つ, よって

$$1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2 \geq (1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{t-\theta}{2} \geq 4r\sin^2\frac{t-\theta}{2} \geq \frac{4r|t-\theta|^2}{\pi^2} \geq \frac{r|t|^2}{\pi^2}$$

となる．従って $\Phi'(t) = |f(t) - f(0)| + |f(-t) - f(0)|$ と $M = \sup_{0<t\le\pi} \frac{\Phi(t)}{t}$ と置くことにより

$$
\begin{aligned}
I_2(r,\theta) &\le \frac{1-r^2}{2\pi}\frac{\pi^2}{r}\int_{\delta\le|t|\le\pi} \frac{|f(t)-f(0)|}{t^2}\,dt \\
&\le \frac{\pi(1-r)}{r}\int_{\delta\le|t|\le\pi} \frac{|f(t)-f(0)|}{t^2}\,dt \\
&= \frac{\pi(1-r)}{r}\int_{\delta\le t\le\pi} \frac{\Phi'(t)}{t^2}\,dt \\
&= \frac{\pi(1-r)}{r}\left\{\left[\frac{\Phi(t)}{t^2}\right]_\delta^\pi + 2\int_{\delta\le t\le\pi}\frac{\Phi(t)}{t^3}\,dt\right\} \\
&\le \frac{\pi(1-r)}{r}\left[\frac{\Phi(\pi)}{\pi^2} + 2\int_{\delta\le t\le\pi}\frac{\Phi(t)}{t^3}\,dt\right\} \\
&\le \frac{\pi(1-r)}{r}\left\{\frac{M}{\pi} + 2\int_{\delta\le t\le\pi}\frac{M}{t^2}\,dt\right\} \\
&\le \frac{\pi(1-r)}{r}\left\{\frac{M}{\pi} + 2M\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\pi}\right)\right\} \\
&\le \frac{M\pi(1-r)}{r}\left\{\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\delta}\right\} \\
&\le \frac{M\pi}{r}\left\{\frac{\sqrt{\delta\Phi(\delta)}}{\pi} + 2\sqrt{\frac{\Phi(\delta)}{\delta}}\right\} \le \frac{M\pi}{r}\left\{\frac{\delta}{\pi}+2\right\}\varepsilon
\end{aligned}
$$

が成り立つ． □

Theorem 12.1.5 や Thoerem 12.2.2 の他にも Poisson 積分の境界挙動に関しては沢山の古典的だが興味深い結果が知られている．Koosis [12] または Tsuji [27] が詳しい．

12.3　正値調和函数に関する Herglotz の表現公式

Poisson 積分の応用として正値調和函数に関する Herglotz の表現定理を示そう．但し証明には有界変動函数に関する Helly の選出定理, またはもっと一般的な点列 Banach-Alaoglu の定理が必要になる．

Theorem 12.3.1 (点列 Banach-Alaoglu の定理)**.** *X をノルム空間とし, X^* を X の有界線形汎函数の全体がなす作用素ノルムに関する Banach 空間, 及び B を X^* の閉単位球とする．このとき X が可分ならば X^* は汎弱位相について点列コンパクト, つまり B 内の任意の点列について汎弱収束する部分列が存在する．*

Remark 12.3.2. X が可分であるから X^* の汎弱位相は距離化可能である．実際 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ を X において稠密な列とすれば

$$d(\Lambda_1,\Lambda_2) = \sum_{n=1}^\infty \frac{|\Lambda_1 x_n \Lambda_2 x_n|}{2^n(1+|\Lambda_1 x_n \Lambda_2 x_n|)}$$

は距離であり, この距離が定める位相は汎弱位相と一致する．従って特に点列コンパクト性とコンパクト性は同値になり,

可分なノルム空間 X の双対空間の閉単位球 B は汎弱位相に関してコンパクトである．

が成り立つ．この事実は *1932* 年に *Banach* により示され, *1940* 年に可分と言う条件を省いても成り立つことが *Alaoglu* によって証明された．このため *Banach-Alaoglu* の定理と呼ばれるようになった．現在では, ノルム空間のみならず, 局所凸位相ベクトル空間にまで定理は拡張されているが, 実用上, 点列 *Banach-Alaoglu* の定理と呼ばれる上

の形の主張を知っていれば間に合うことが多い．そして点列 *Banach-Alaoglu* の定理の証明は，一様有界同程度一様連続函数列から局所一様収束する部分列が取れると言うことを主張する *Arzera-Asccoli* の定理の通常の証明の単なる焼き直しである．

Proof of Theorem 12.3.1. $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ を X において稠密な列とする．また $\{\Lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ を B 内の列とする．このとき $\|\Lambda_n\| \leq 1$ より $|\Lambda_n x_1| \leq \|\Lambda_n\|\|x_1\| \leq \|x_1\|$ であるから $\{\Lambda_n x_1\}_{n=1}^{\infty}$ は X の係数体 ($\mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ である) の有界列である．そこで

$$\Lambda_{11}, \Lambda_{12}, \Lambda_{13}, \cdots,$$

を $\{\Lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列で $\{\Lambda_{1n}x_1\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するように取る．次に $\{\Lambda_{1n}\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{\Lambda_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ をを $\{\Lambda_{2n}x_2\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するように取る．以下，このような部分列を取る操作を続けていけば

$$\begin{array}{l} \Lambda_{11}, \Lambda_{12}, \ldots, \Lambda_{1n}, \ldots, \\ \Lambda_{21}, \Lambda_{22}, \ldots, \Lambda_{2n}, \ldots, \\ \vdots \quad\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \ldots \\ \Lambda_{n1}, \Lambda_{n2}, \ldots, \Lambda_{nn}, \ldots, \\ \vdots \quad\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \ldots \end{array}$$

を得る．ここで n 行の汎函数の列は $n-1$ 行の汎函数列の部分列であり $\{\Lambda_{nk}x_n\}_{k=1}^{\infty}$ は収束する．このとき対角線より選んだ列 $\{\Lambda_{nn}\}_{n=1}^{\infty}$ を考えよう．任意の x_N について $\{\Lambda_{nn}x_N\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する．何故なら $\{\Lambda_{nn}\}_{n=N}^{\infty}$ 第 N 行の部分列であるからである．

任意の $X \in X$ について $\lim_{n\to\infty} \Lambda_{nn}x$ が存在することを示そう．これは $\varepsilon > 0$ について $\|x - x_k\| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ を満たす x_k を取り，$N \in \mathbb{N}$ を $m, n \geq N$ ならば $|\Lambda_{mm}x_k - \Lambda_{nn}x_k| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ が成り立つように取れば

$$\begin{aligned} |\Lambda_{mm}x - \Lambda_{nn}x| &\leq |\Lambda_{mm}x - \Lambda_{mm}x_k| + |\Lambda_{mm}x_k - \Lambda_{nn}x_k| + |\Lambda_{nn}x_k - \Lambda_{nn}x| \\ &\leq \|\Lambda_{mm}\|\|x - x_k\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|\Lambda_{nn}\|\|x_k - x\| \quad (\because \Lambda_{mm}, \Lambda_{mm} \in B) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

となるからである．そこで $\Lambda x = \lim_{n\to\infty} \Lambda_{nn}x$ と置いて $\Lambda : X \to \mathbb{C}$ (または $\mathbb{R}$) を定義すれば，明らかに線形であり

$$|\Lambda x| = \lim_{n\to\infty} |\Lambda_{nn}x| \leq \liminf_{n\to\infty} \|\Lambda_{nn}\|\|x\| \leq \|x\|$$

より有界である．よって $\Lambda \in X^*$ であり定義より明らかに $\{\Lambda_{nn}\}_{n=1}^{\infty}$ の汎弱極限である． □

Theorem 12.3.3 (Herglotz の表現定理)**.** 単位円板 $\mathbb{D}$ 上の調和函数 u が非負ならば $\partial\mathbb{D}$ 上の *Borel* 測度 μ で

$$u(z) = P_r * \mu(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_T P_r(\theta - t)\, d\mu(t) \tag{12.3.1}$$

を満たすものが一意的に存在する．

Proof. $C(T)$ はノルム $\|\cdot\|_\infty$ のもとで Banach 空間であり，これを X と置くと $\Lambda \in X^*$ について複素 Borel 測度 μ で

$$\Lambda g = \int_T g\, d\mu, \quad g \in X = C(T)$$

を満たすものが一意的に存在し，$\|\Lambda\| = \|\mu\|$ が成り立つ．但し $\|\Lambda\|$ は Λ の作用素ノルムであり，$\|\mu\|$ は μ の全変動測度を $|\mu|$ と表したとき $\|\mu\| = |\mu|(T)$ である．

さて u を $\mathbb{D}$ 上の非負調和函数とし各 $r \in (0,1)$ について $u(re^{it})dt$ で T 上の正 Borel 測度 μ_r を定義すれば $\|\mu_r\| = \mu_r(T) = \int_T u(re^{it})\,dt = 2\pi u(0)$ である．従って $\{\mu_r\}_{r\in(0,1)}$ は X^* の原点を中心とする半径 2π の閉球に含まれる．よって点列 Banach-Alaoglu の定理より $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $r_n \nearrow 1$ かつ μ_{r_n} が汎弱収束するように取れる．つまり

$$\lim_{n\to\infty}\int_T g(t)u(r_ne^{it})\,dt = \int_T g(t)\,d\mu(t), \quad g \in C(T)$$

が成り立つ．ここで $g(t) = (2\pi)^{-1}P_r(\theta - t)$ と取れば

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \lim_{n\to\infty} u(r_nre^{i\theta}) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_T P_r(\theta-t)u(r_ne^{it})\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_T P_r(\theta-t)\,d\mu(t) = P_r * \mu(\theta) \end{aligned}$$

である．

μ の一意性を示そう．つまり T 上の 2 つの Borel 測度 μ_1, μ_2 について $P_r * \mu_1(\theta) = P_r * \mu_2(\theta)$, $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ が成り立つとき $\mu_1 = \mu_2$ を示す．これには $\int_T g(\theta)\,d\mu_1 = \int_T g(\theta)\,d\mu_2$ が任意の $g \in C(T)$ について成り立つことを示せばよいが, Theorem 12.1.4 (c) より

$$\begin{aligned} \int_T g(\theta)\,d\mu_1(\theta) &= \lim_{r\nearrow 1}\frac{1}{2\pi}\int_T g(\theta)P_r * \mu_1(\theta)\,d\theta \\ &= \lim_{r\nearrow 1}\frac{1}{2\pi}\int_T g(\theta)P_r * \mu_2(\theta)\,d\theta = \int_T g(\theta)\,d\mu_2(\theta) \end{aligned}$$

である． □

第 13 章

劣調和函数

13.1　半連続函数

調和函数を拡張した劣調和函数や優調和函数の議論を行うには半連続性の概念が必要である. そこでこの節では, 距離空間における半連続函数の定義と性質をまとめておく.

暫くの間, X を距離 $d(\cdot,\cdot)$ を持つ距離空間とし $E \subset X$ とする. また $a \in X$, $\delta > 0$ について a の δ-近傍を

$$U_\delta(a) = \{x \in X : d(x,a) < \delta\}$$

と置く.

Definition 13.1.1. 集合 E 上の $[-\infty,\infty]$ に値を持つ函数 f が点 $a \in E$ で上半連続 *(upper semi-continuos)* であるとは

$$\limsup_{z\to a} f(x) \le f(a)$$

が成り立つこと, すなわち $-\infty < f(a) \le \infty$ の場合は

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : \forall x \in E \cap U_\delta(a) : f(x) \le f(a) + \varepsilon$$

が成り立つこと, また $f(a) = -\infty$ の場合は

$$\forall A \in \mathbb{R} : \exists\delta > 0 : \forall z \in E \cap U_\delta(a) : f(x) \le A$$

が成り立つことと定義する. 同様に a で下半連続であるとは

$$\liminf_{x\to a} f(x) \ge f(a)$$

が成り立つことと定義する. E の全ての点で上半連続または下半連続のとき, それぞれ E で上半連続または下半連続であるという.

函数 f が上半連続かつ下半連続ならば $[-\infty,\infty]$ に値を持つ函数として連続である.

Theorem 13.1.2. 函数 $f : E \to [-\infty,\infty]$ について

(1) f が上半連続 $\Longleftrightarrow$ 任意の実数 α について $f^{-1}([-\infty,\alpha)) = \{x \in E : f(x) < \alpha\}$ は E の *(*部分空間位相に関する*)* 開部分集合.
(2) u が下半連続 $\Longleftrightarrow$ 任意の実数 α について $f^{-1}((\alpha,\infty]) = \{x \in E : f(x) > \alpha\}$ は E の *(*部分空間位相に関する*)* 開部分集合.

Proof. (1) のみ示そう．$a \in f^{-1}([-\infty,\alpha))$, つまり $f(a) < \alpha$ と仮定すると, f の a における上半連続性より $\delta > 0$ で

$$x \in E \cap U_\delta(a) \quad \Longrightarrow \quad f(x) < \alpha$$

を満たすものが取れる．従って a の δ-近傍 $U_\delta(a)$ は $E \cap U_\delta(a) \subset f^{-1}([-\infty,\alpha))$ を満たす．よって a は $f^{-1}([-\infty,\alpha))$ の内点であり, a の任意性より $f^{-1}([-\infty,\alpha))$ は open である．

逆に任意の α について $f^{-1}([-\infty,\alpha))$ が開集合であるとする．このとき $a \in D$, $\varepsilon > 0$ について $\alpha = f(a)+\varepsilon$ と置けば $a \in f^{-1}([-\infty,\alpha))$. よってある $\delta > 0$ で

$$E \cap U_\delta(a) \subset f^{-1}([-\infty,\alpha))$$

を満たすものが取れる．従って $x \in E \cap U_\delta(a)$ ならば $f(x) < \alpha = f(a)+\varepsilon$ が成り立つ．よって u は a で上半連続である． □

上の Theorem より上半 (または下半) 連続函数は Borel 可測であることが分かる．

u が上半連続函数ならば $-u$ は下半連続函数であり, u が下半連続函数ならば $-u$ は上半連続函数である．従ってどちらかについて成り立つ結果をもう一方について翻訳することは容易である．そこでこれからは特に必要でない限り上半連続函数について述べることにする．

Theorem 13.1.3. 上半連続函数について次が成り立つ．

(1) $f_1,\dots,f_n$ が E で上半連続ならば $\max\{f_1(x),\dots,f_n(x)\}$, $\min\{f_1(x),\dots,f_n(x)\}$ も E で上半連続.
(2) $f_1,\dots,f_n$ が E で上半連続ならば定数 $\alpha_1,\dots,\alpha_n \geq 0$ について $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n$ も E で上半連続.
(3) $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が E で上半連続な函数族ならば函数 $f(x) = \inf\{f_\lambda(x) : \lambda \in \Lambda\}$, $x \in E$ も E で上半連続.
(4) E 上で上半連続な函数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が各点 $x \in D$ で $f_1(x) \geq f_2(x) \geq \cdots$ ならば極限函数 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in E$ も E で上半連続.

Proof. (1), (2) を示そう．$a \in D$ と $\varepsilon > 0$ が任意に与えられたとする．$\delta > 0$ を

$$x \in E \cap U_\delta(a) \quad \Longrightarrow \quad f_j(x) < f_j(a)+\varepsilon, \text{ for } j = 1,\dots,n$$

が成り立つように取れれば $d(x,a) < \delta$ を満たす $x \in D$ について

$$\begin{aligned}
&\min\{f_1(x),\dots,f_n(x)\} < \min\{f_1(a)+\varepsilon,\dots,f_n(a)+\varepsilon\} = \min\{f_1(a),\dots,f_n(a)\}+\varepsilon\\
&\max\{f_1(x),\dots,f_n(x)\} < \max\{f_1(a)+\varepsilon,\dots,f_n(a)+\varepsilon\} = \max\{f_1(a),\dots,f_n(a)\}+\varepsilon\\
&\alpha_1(f_1(x)+\varepsilon)+\cdots+\alpha_n(f_n(x)+\varepsilon) \leq \alpha_1 f_1(a)+\cdots+\alpha_n f_n(a)+(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)\varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つことより直ちに (1),(2) が従う．

(3) $f_\lambda(a) < f(a)+\varepsilon/2$ を満たす $\lambda_0 \in \Lambda$ を取る．そしてこの f_{λ_0} について $\delta > 0$ を $x \in E \cap U_\delta(a)$ ならば $f_{\lambda_0}(x) < f_{\lambda_0}(a)+\varepsilon/2$ が成り立つように取れば

$$f(x) = \inf_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x) \leq f_{\lambda_0}(x) < f_{\lambda_0}(a)+\varepsilon/2 < f(a)+\varepsilon \quad x \in E \cap U_\delta(a)$$

が成り立つ．

(4) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が減少列ならば $f(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ が成り立つので, (3) より f が上半連続であることが従う． □

Theorem 13.1.4. *f が compact 集合 E 上の上半連続函数ならば f は E 上で最大値 (ただし $\pm\infty$ も許す) を取る．*

Proof. $M = \sup_{z \in E} f(x)$ と置くと E の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $n \to \infty$ のとき $f(x_n) \to M$ を満たすものが存在する．E は compact ゆえ必要ならば部分列をとることにより $x_n \to x_0 \in E$ と仮定してよい．このとき

$$M = \sup_{x \in E} f(x) \geq f(x_0) \geq \limsup_{E \ni x \to x_0} f(x) \geq \lim_{n \to \infty} f(x_n) = M$$

が成り立つので $x(x_0) = M$ である． □

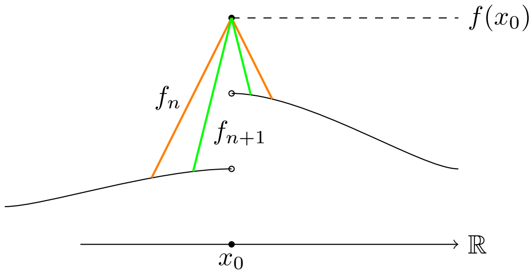
Theorem 13.1.3 より連続函数の減少列の極限函数は上半連続である．逆に上半連続函数はつねに連続函数の減少列の極限として表せる．

Theorem 13.1.5. (Baire) 函数 $f : E \to [-\infty, \infty]$ が上半連続であれば E 上の $(-\infty, \infty]$ に値を取る函数として連続な函数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ で

$$f_1(x) \geq f_2(x) \geq \cdots \geq f_n(x) \to f(x) \quad n \to \infty, \quad x \in E$$

を満すものが存在する．また全ての $x \in E$ について $f(x) \leq M (\in \mathbb{R})$ ならば全ての n と x について $f_n(x) \leq M$ を満たすように $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を取れる．さらに E が *compact* の場合, 全ての $x \in E$ について $f(x) < \infty$ ならば全ての n と x について $f_n(x) < \infty$ を満たすように $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を取れる．

証明に進む前に, その方針を解説しておこう．話を簡単にするために $E = \mathbb{R}^d$ とする．上半連続性は通常の連続性と異なり $\limsup_{x \to x_0} f(x) < f(x_0)$ となることを許容する．そこで実際に $\limsup_{x \to x_0} f(x) < f(x_0)$ となる不連続点 $x_0 \in E$ があるとする．このとき x_0 のまわりのある範囲で $f(x)$ の代わりに $y = f(x_0) - n|x - x_0|$ で値を置き換えた函数を $f_n(x)$ としよう．下の図で分かるように, $f(x_0)$ を頂点とする三角錐を $f(x)$ の上に被せるという意味である．但しある範囲とは動点 x が x_0 から離れていく際に $y = f(x_0) - n|x - x_0|$ と $y = f(x)$ のグラフが交わるまでの x の範囲である．このようにすれば n が大きいほど三角錐はとがっていくので $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ が成り立ち, $n \to \infty$ のときに $f_n(x) \downarrow f(x)$ が成り立つと期待できる．



実際には点 $x \in E$ に三角推を被せる際に, 三角錐の頂点をどこにするかが問題となるが, それには $f(x_0) - n|x - x_0|$ の $x_0 \in E$ に関する上限を取ればよいであろう．このようにして $f_n(x) = \sup_{x_0 \in E}\{f(x_0) - n|x - x_0|\}$ と置くというアイデアが生まれる．ただし右辺の上限が発散すると困るので, まず f を有界函数に変形が必要になる．

Proof. $g(x) = \dfrac{2}{\pi} \tan^{-1} f(x)$ と置けば g の値域は閉区間 $[-1, 1]$ であり, $g : E \to [-1, 1]$ は上半連続である．そこで $n \in \mathbb{N}$ について

$$g_n(x) = \sup_{x_0 \in E} \{g(x_0) - nd(x, x_0)\}, \quad x \in E$$

と置く．このとき各点 $x \in E$ において $g_n(x) \geq g_{n+1}(x)$ が成り立つことは明らかであろう．また $x_0 = x_1$ のときを考えれば $g_n(x) = \sup_{x_0 \in E}\{g(x_0) - nd(x, x_0)\} \geq g(x_1)$ が成り立つことも容易に分かる．また $\{g(x_0) - nd(x, x_0)\}_{x_0 \in E}$

を $x_0 \in E$ をパラメータに持つ $x \in E$ に関する函数族とみなせば, 各函数は Lipschitz 定数を n とする Lipschitz 連続函数である. 従って各点 $x \in E$ での inf を取って定義された g_n も Lipschitz 定数を n とする Lipschitz 連続函数である.

各 $a \in E$ について $n \to \infty$ のとき $g_n(a) \to g(a)$ であることを示そう. 任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を $x \in U_\delta(a) \cap E$ ならば $g(x) < g(a) + \varepsilon$ が成り立つように取る. このとき $x \in U_\delta(a) \cap E$ ならば $g(x) - nd(x,a) < g(x) < g(a) + \varepsilon$ が成り立ち, $x \in E \backslash U_\delta(a)$ ならば $g(x) - nd(x,a) < 1 - n\delta$ が成り立つ. よって

$$g(a) \leq g_n(a) \leq \max\{g(a) + \varepsilon, 1 - n\delta\}$$

が成り立つ. 従って十分大きな全ての n について $g(a) \leq g_n(a) \leq g(a) + \varepsilon$ が成り立つので $g_n(a) \to g(a)$ である.

最後に $f_n = \tan g_n$ について定理の後半の主張を示そう. まず $f_n(x) > -\infty$ については必要ならば g_n の代わりに $\max\left\{g_n(x), \frac{1}{n} - 1\right\}$ を取れば $g_n(E) \subset (-1, 1]$ となることより分る. また E 上 $f(x) \leq M$ ならば E 上 $g(x) \leq \tan^{-1}(M)$ であるから E 上 $g_n(x) \leq M$ となることも $g_n(x)$ の定義式より容易に分る. 最後に E が compact で E 上 $f(x) < \infty$ ならば E 上 $g(x) < 1$ であり E の compact 性より $m := \sup_{x \in E} g(x) = \max_{x \in E} g(x) < 1$ である. よって $g_n(x) \leq m$ が成り立つ. □

13.2　劣調和函数の最大値原理

それでは調和函数の概念の一般化である劣調和函数, 優調和函数を定義しよう.

Definition 13.2.1. $G \subset \mathbb{C}$ を開集合とし, 各 $z_0 \in G$ について $d(z_0) = \inf\{|z - z_0| : z \in G^c\} \in (0, \infty]$ と置く. このとき G 上の函数 u が G 上劣調和であるとは, 次の 3 条件を満たすときを言う.

(i) $-\infty \leq u(z) < \infty$, $z \in G$ であり, かつ G の各成分において $u \not\equiv -\infty$ (ある成分上で恒等的に $-\infty$ である函数は排除される).

(ii) u は G で上半連続, つまり $\limsup_{z \to z_0} u(z) \leq u(z_0)$, $z_0 \in G$.

(iii) 各 $z_0 \in G$ についてある $\rho \in (0, d(z_0))$ で

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta, \quad 0 \leq r \leq \rho$$

が成り立つものが存在する.

(iii) の不等式の右辺の積分について注意を述べる. u の上半連続性より, コンパクト集合 $\partial\mathbb{D}(z_0, r)$ 上で u は上に有界であり, さらに *Borel* 可測である. よって $u(z_0 + re^{i\theta})$ は $\partial\mathbb{D}(z_0, r)$ において *Lebesgue* 可積分であるか, または $\int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta = -\infty$ である. いずれの場合も積分値は確定することに注意する.

同様に u が G で優調和函数であるとは

(i') $-\infty < u(z) \leq \infty$, $z \in G$ であり, G の各成分上で $u \not\equiv \infty$.

(ii') u は G で下半連続, つまり $\liminf_{z \to z_0} u(z) \geq u(z_0)$, $z_0 \in G$.

(iii') 各 $z_0 \in G$ についてある $\rho \in (0, d(z_0))$ で

$$u(z_0) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta, \quad 0 \leq r \leq \rho$$

が成り立つものが存在する.

を満たすときを言う．勿論, (iii') における積分も *Lebesgue* 積分とする．

定義より直ちに u が劣調和であることと $-u$ が優調和であることは同値である．従って劣調和函数について成り立つ結果は, 優調和函数に関する結果に翻訳することができる．以下では煩雑さを避けるために劣調和函数に焦点を絞るが, その前にひとつだけ結果を述べておこう．

Theorem 13.2.2. 複素平面内の開集合 G 上で函数 u が劣調和かつ優調和ならば, Ω で調和である．

Proof. u が劣調和ならば $[-\infty, \infty)$ に値を持ち, 優調和ならば $(-\infty, \infty]$ に値を持つので, 結局 u は $(-\infty, \infty)$ に値を持つことになる．また有限値で, 上半連続かつ下半連続であるから連続である．さらに任意の $z_0 \in \Omega$ についてある $\rho \in (0, \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega))$ で

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{it})\, dt, \quad 0 \le r \le \rho$$

となるものが存在する．よって Theorem 12.1.8 より u は Ω で調和である． □

Example 13.2.3. 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の解析函数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ について $u(z) = |f(z)|^p$, $0 < p < \infty$ と置けば, u は Ω 上劣調和である．

Proof. u は有限値で連続であるから (iii) のみ示せ良い．$f(z_0) = 0$ のときは $\rho < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$ について不等式は自明に成り立つ．$f(z_0) \neq 0$ のときは $\rho < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$ かつ $\overline{\mathbb{D}}(z_0, \rho)$ において $f(z) \neq 0$ となるように $\rho > 0$ を選べば単連結領域 $\overline{\mathbb{D}}(z_0, \rho)$ において $f(z)^p$ の 1 価な分枝が存在し, $|f(z)|^p = |f(z)^p|$ を満たす．よって Cauchy の積分公式より

$$f(z_0)^p = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}(z_0, r)} \frac{f(z)^p}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + re^{i\theta})^p\, d\theta, \quad 0 \le r \le \rho$$

が成り立つ．よって

$$u(z_0) = |f(z_0)|^p \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^p\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(z_0 + re^{i\theta})|\, d\theta, \quad 0 \le r < \rho$$

を得る． □

Example 13.2.4. $f \neq 0$ である解析函数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ について $u(z) = \log|f(z)|$ と置けば, u は劣調和函数である．

Proof. $f(z_0) \neq 0$ である点 z_0 の近傍において $\log f$ の 1 価正則な分枝が存在し, $\log|f| = \operatorname{Re} \log f$ であるから, そこで調和である．また $f(z_0) = 0$ となる点 z_0 が存在しても仮定より孤立点であり $u(z_0) = \log|f(z_0)| = -\infty$ であるが, ここでも連続 ($\lim_{z \to z_0} u(z) = -\infty$ の意味) である．また定義の条件 (iii) については自明に成り立つ． □

Theorem 13.2.5. u_1, u_2 を開集合 G 上の劣調和函数とすると函数 $u(z) = \max\{u_1(z), u_2(z)\}$ は G で劣調和.

Proof. u が上半連続であることは Theorem 13.1.3 より従う．また $z_0 \in G$ について $\rho > 0$ を u_1, u_2 の平均値に関する不等式が $0 < r < \rho$ で成り立つように取れば

$$\begin{aligned} u(z_0) &= \max\{u_1(z_0), u_2(z_0)\} \\ &\le \max\left\{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_1(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta\right\} \\ &\le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \max\{u_1(z_0 + re^{i\theta}), u_2(z_0 + re^{i\theta})\}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta \end{aligned}$$

が成り立つ．

最後に G の任意の成分 D について $u \neq -\infty$ である．実際もしそうならば $u_j \le u$ より $u_j = -\infty$ となり矛盾を生じる． □

Remark 13.2.6. 本来ならば, この段階で非負係数 c_1, c_2 について $v = c_1u_1 + c_2u_2$ も劣調和になると言う定理を述べたいところである. しかし残念なことにこの事実の証明を試みようとすると (ii), (iii) と (i) の $[-\infty, \infty)$ に値を取ることは明らかに成り立つのだが, 意外なことに $v \neq -\infty$ であることを示すのに, 現時点では知識が足りない. これは後ほど証明する事実 "劣調和函数は 2 次元 *Lebesgue* 測度に関し, 殆ど至るところ有限値である" を用いれば容易である.

Theorem 13.2.7. $\Omega \subset \mathbb{C}$ を領域とし $u \in C^2(\Omega)$ を実数値函数とする. このとき

$$Lu(z) = (u_{xx} + u_{yy})(z) \geq 0, \quad z \in \Omega \quad \Longleftrightarrow \quad u \text{ は } \Omega \text{ で劣調和} \tag{13.2.1}$$

が成り立つ.

Proof. $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ とすると $z = x + iy \to z_0$ のとき

$$\begin{aligned} u(z) = u(z_0) &+ u_x(z_0)(x - x_0) + u_y(z_0)(y - y_0) + u_{xy}(z_0)(x - x_0)(y - y_0) \\ &+ \frac{1}{2}\left\{u_{xx}(z_0)(x - x_0)^2 + u_{yy}(z_0)(y - y_0)^2\right\} + \mathrm{o}(|z - z_0|^2) \end{aligned}$$

が成り立つ. $z - z_0 = re^{i\theta}$ と置いて θ について $[-\pi, \pi)$ で積分すれば $x - x_0 = r\cos\theta$, $y - y_0 = r\cos\theta$, $(x - x_0)(y - y_0) = r^2\cos\theta\sin\theta$ に対応する項の積分値は 0 であり, $(x - x_0)^2 = r^2\cos^2\theta = r^2\frac{1+\cos 2\theta}{2}$, $(y - y_0)^2 = r^2\sin^2\theta = r^2\frac{1-\cos 2\theta}{2}$ に対応する項の積分値は πr^2 であるから

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta = u(z_0) + \frac{r^2}{4}Lu(z_0) + \mathrm{o}(r^2) \tag{13.2.2}$$

である. u が劣調和ならば十分小さな全ての $r > 0$ について $u(z_0) \leq (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$ が成り立つので, 上式と組み合わせて直ちに $Lu(z_0) \geq 0$ を得る.

逆に Ω 上で $Lu \geq 0$ と仮定して u が劣調和であることを示そう. $-\infty \leq u < \infty$, $u \neq -\infty$ 及び上半連続性は明らかであるから, 各点 $z_0 \in \Omega$ と十分小さな $r > 0$ について $u(z_0) \leq (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$ を示せばよい.

$0 < r_1 < r_2 < d(z_0, \Omega^c)$ を満たす r_1, r_2 について $A(r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ と置く. このとき $\overline{A(r_1, r_2)}$ を含むある領域で C^2-級の函数 f, g について Green の公式より

$$\begin{aligned} &\int_{A(r_1,r_2)} (f(z)Lg(z) - g(z)Lf(z))\, dxdy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{f(z_0 + r_2e^{i\theta})\frac{\partial g}{\partial r}(z_0 + r_2e^{i\theta}) - g(z_0 + r_2e^{i\theta})\frac{\partial f}{\partial r}(z_0 + r_2e^{i\theta})\right\} r_2\, d\theta \\ &- \int_{-\pi}^{\pi} \left\{f(z_0 + r_1e^{i\theta})\frac{\partial g}{\partial r}(z_0 + r_1e^{i\theta}) - g(z_0 + r_1e^{i\theta})\frac{\partial f}{\partial r}(z_0 + r_1e^{i\theta})\right\} r_1\, d\theta \end{aligned}$$

が成り立つ. $f = u$, $g(z) = \log\frac{r_2}{|z-z_0|}$ とおいて適用すれば $A(r_1, r_2)$ 上 $Lg = 0$ であり, $\partial\mathbb{D}(z_0, r_2)$ 上で $g = 0$, そして $\frac{\partial g}{\partial r} = -\frac{1}{r}$ であるから

$$\begin{aligned} &-\int_{A(r_1,r_2)} \log\frac{r_2}{|z|} \cdot Lu(z)\, dxdy \\ &= -\int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + r_2e^{i\theta})\, d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + r_1e^{i\theta})\, d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} \log\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial r}(z_0 + r_1e^{i\theta})r_1\, d\theta \end{aligned}$$

$r_1 \downarrow 0$ とすれば右辺の第 2 項は $2\pi u(z_0)$ に収束し, 第 3 項は 0 に収束する. よって

$$0 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}(z_0,r_2)} \log\frac{r_2}{|z|} \cdot Lu(z + z_0))\, dxdy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + r_2e^{i\theta})\, d\theta - u(z_0)$$

が $r_2 < d(z_0, \Omega^c)$ について成り立つ. □

Theorem 13.2.8 (劣調和函数に関する最大値の原理)**.** 函数 u は領域 Ω において劣調和とする.

(a) u が Ω の内点で最大値を取れば定数である. つまり $u(z) \le u(z_0)$, $\forall z \in \Omega$ を満たす点 $z_0 \in \Omega$ が存在すれば, $u(z) \equiv u(z_0)$, $z \in \Omega$ が成り立つ.

(b) Ω が有界なとき, ある定数 M について

$$\limsup_{\Omega \ni z \to \zeta} u(z) \le M, \quad \forall \zeta \in \partial\Omega$$

が成り立てば Ω 上で $u(z) \le M$ が成り立つ.

(c) Ω が非有界なとき, ある定数 M に関し

$$\limsup_{\Omega \ni z \to \zeta} u(z) \le M \quad \forall \zeta \in \partial\Omega$$

が成り立ち, さらに

$$\limsup_{\Omega \ni z \to \infty} u(z) \le M$$

が成り立つならば $u(z) \le M$ が Ω で成り立つ.

Proof. (a) $M = u(z_0)$, $\Omega_0 = \{z \in \Omega : u(z) = M\}$ と置くと u の上半連続性より Ω_0 は閉集合である. また $z_0 \in \Omega_0$ であるから空でない. そこで各 $z_1 \in \Omega_0$ が Ω_0 の内点であることを示そう. そうすれば Ω_0 は開集合でもあり, 先に述べたことと合わせ, Ω_0 は Ω の空でない開かつ閉部分集合である. よって Ω の連結性より $\Omega_0 = \Omega$ が従い, 証明が完了する.

$z_1 \in \Omega_0$ について $d = \inf\{|z_1 - z| : z \in \partial\Omega\} (> 0)$ と置くと, ある $\rho \in (0, d)$ について

$$u(z_1) \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z_1 + re^{it})\,dt, \quad 0 \le r \le \rho$$

が成り立つ. よって $u(z_1) = M$ と $u \le M$ を利用すると

$$M = u(z_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z_1 + re^{it})\,dt \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M\,d\theta = M$$

となり等号が成り立つ. 従って $u(z + re^{it}) = M$ が殆ど全ての $t \in (-\pi, \pi]$ について成り立つ. これと u の上半連続性を合わせると, 全ての $t_0 \in (-\pi, \pi]$ について

$$M \le \limsup_{t \to t_0} u(z_1 + re^{it}) \le \limsup_{z \to z_0 + re^{it_0}} u(z) \le u(z_1 + re^{it_0}) \le M$$

が成り立つので $u(z_1 + re^{it_0}) = M$ を得る. また $r \in [0, \rho]$ も任意であるから結局 $\overline{\mathbb{D}}(z_1, \rho)$ 上 $u = M$ である. 従って $\overline{\mathbb{D}}(z_1, \rho) \subset \Omega_0$ が成り立ち, z_1 は Ω_0 の内点である.

(b), (c) は (a) から従う. これは調和函数に関する最大値原理 (Theorem 11.1.4) の証明において (i) から (ii), (iii) を示したのと全く同じである. □

この最大値の原理と上半連続性より劣調和函数 u の定義域に含まれるコンパクト集合 K において

$$\max_{z \in K} u(z) = \max_{z \in \partial K} u(z) \tag{13.2.3}$$

が成り立つ. また (b) より直ちに次が従う.

Corollary 13.2.9. 函数 u, h は有界領域 Ω でそれぞれ劣調和と調和であるとする. このとき任意の $\zeta \in \partial\Omega$ について $\limsup_{\Omega \ni z \to \zeta}\{u(z) - h(z)\} \le 0$ が成り立てば Ω 上で $u(z) \le h(z)$ が成り立つ.

Theorem 13.2.10. u が $\mathbb{C}$ で上に有界な劣調和函数ならば定数である.

Proof. $u(z) < M$ を満たす $M \in \mathbb{R}$ を取る. $m = \max_{z\in\overline{\mathbb{D}}} u(z)$ と置けば, Theorem 13.2.8 (a) より $u(z_0) = m$ を満たす $z_0 \in \partial\mathbb{D}$ が存在する.

任意の $\varepsilon > 0$ について $u(z) - \varepsilon \log|z|$ は $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \infty\}$ で調和である. $r > e^{(M-m)/\varepsilon}$ について $D_r = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < r\}$ と置けば $|\zeta| = r$ を満たす任意の ζ について

$$\limsup_{D_r \ni z \to \zeta} \{u(z) - \varepsilon \log|z|\} \le M - \varepsilon \log r < M - \varepsilon \log e^{(M-m)/\varepsilon} = m$$

が成り立つ. また $|\zeta| = 1$ を満たす任意の ζ について

$$\limsup_{D_r \ni z \to \zeta} \{u(z) - \varepsilon \log|z|\} = \limsup_{D_r \ni z \to \zeta} u(z) \le m$$

が成り立つ. よって Theorem 13.2.8 (a) より $u(z) - \varepsilon \log|z| \le m$ が D_r で成り立つ. r の任意性より, この不等式は $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \infty\}$ で成り立つ. さらに $\varepsilon > 0$ の任意性より

$$u(z) \le m, \quad 1 < |z| < \infty$$

が成り立つ.

以上より u は $\mathbb{C}$ における最大値を $z_0 \in \partial\mathbb{D}$ で取ることになり, Theorem 13.2.8 (a) より u は定数函数である. □

上の証明を参考にすれば, 上に有界な劣調和函数について Theorem 13.2.8 (b) の仮定を少し緩めることができる.

Theorem 13.2.11 (Lindelöf の最大値の原理)**.** 函数 u は有界領域 Ω において劣調和で, 上に有界とする. ある定数 M について

$$\limsup_{\Omega \ni z \to \zeta} u(z) \le M, \quad \zeta \in \partial\Omega$$

が高々有限個の境界点 ζ を除いて成り立てば Ω 上で $u(z) \le M$ が成り立つ.

Proof. $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ を除外点とする. $d = \operatorname{diam}\Omega := \sup\{|z_1 - z_2| : z_1, z_2 \in \Omega\}$ と置き, $\varepsilon > 0$ について

$$v_\varepsilon(z) = u(z) - \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \log \frac{d}{|z - \zeta_k|}, \quad z \in \Omega$$

と置く. v_ε は Ω で劣調和であり, $z \in \Omega$ について $|z - \zeta_k| \le d$ より $\log \frac{d}{|z-\zeta_k|} \ge 0$ が成り立つので

$$\limsup_{\Omega \ni z \to \zeta} v_\varepsilon(z) \le \limsup_{\Omega \ni z \to \zeta} u(z) \le M, \quad \zeta \in \partial\Omega \backslash \{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$$

また u が上に有界であることより

$$\limsup_{\Omega \ni z \to \zeta_k} v_\varepsilon(z) = -\infty \le M, \quad k = 1, \ldots, n$$

が成り立つ. 従って最大値の原理より Ω で $v_\varepsilon(z) \le M$ が成り立つ. ここで $\varepsilon \searrow 0$ とすれば Ω で $u(z) \le M$ を得る. □

13.3　劣調和函数の局所可積分性

劣調和函数の局所的な挙動を調べる為に予備的な補題を準備する．

Lemma 13.3.1. u が領域 Ω 上の劣調和函数で $z_0 \in \Omega$ において $u(z_0) > -\infty$ ならば任意の $r \in (0, d(z_0, \Omega^c))$ について $u(z_0 + re^{i\theta})$ は θ の函数として $(-\pi, \pi]$ で可積分であり，

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

が成り立つ．

Proof. u は上半連続ゆえ $\partial\mathbb{D}(z_0, r)$ で上に有界である．従って上の不等式を示せば可積分であることが分かる．

$\partial\mathbb{D}(z_0, r)$ 上 $u \leq M$ が成り立つように定数 M を取る．そして Theorem 13.1.5 を用いて $\partial\mathbb{D}(z_0, r)$ 上の連続函数の列 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$\begin{aligned} &M \geq h_1(z) \geq h_2(z) \geq \cdots \geq u(z) \\ &\lim_{n\to\infty} h_n(z) = u(z) \end{aligned}$$

が各点 $z \in \partial\mathbb{D}(z_0, r)$ で成り立つように取る．このとき

$$H_n(z) = \begin{cases} h_n(z), & z \in \partial\mathbb{D}(z_0, r) \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|re^{it} - (z - z_0)|} h_n(z_0 + re^{it})\, dt & z \in \mathbb{D}(z_0, r) \end{cases}$$

と置けば H_n は $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$ で連続で $\mathbb{D}(z_0, r)$ で調和であり，

$$\limsup_{\mathbb{D}(z_0,r) \ni z \to \zeta} \{u(z) - H_n(z)\} \leq u(\zeta) - h_n(\zeta) \leq 0, \quad \forall\zeta \in \partial\mathbb{D}(z_0, r)$$

が成り立つ．よって最大値の原理より $u(z) \leq H_n(z)$ が $\mathbb{D}(z_0, r)$ で成り立つ．従って特に $z = z_0$ として

$$-\infty < u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_n(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

が成り立つ．$n \to \infty$ とすれば, 単調収束より右辺は $(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$ に収束する． □

後ほど Lemma 13.3.1 の条件 $u(z_0) > -\infty$ が実際には不必要であることを示す．(Theorem 13.3.4 を参照)．

Theorem 13.3.2. u を開集合 G 上の劣調和函数とすると u は 2 次元 *Lebesgue* 測度に関して G で局所可積分である．

Proof. u を開集合 G 上の劣調和函数とし, Ω を G の成分とする．

$$\Omega_0 = \{z_0 \in \Omega : \exists r > 0,\ \mathbb{D}(z_0, r) \text{ で } u \text{ は可積分 }\}$$

と置く．定義より明らかに Ω_0 は開集合である．

Claim: $u(z_0) > -\infty$ ならば任意の $r \in (0, d(z_0, \Omega^c))$ について u は $\mathbb{D}(z_0, r)$ で可積分である．

∵　実際 u は上半連続であるからコンパクト集合 $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r)(\subset \Omega)$ で上に有界であり, Lemma 13.3.1 より

$$-\infty < u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta})\, d\theta, \quad 0 \leq \rho \leq r$$

であるから $u(z_0+\rho e^{i\theta})$ は θ の函数として $(-\pi,\pi]$ で可積分である．また置換積分により

$$\begin{aligned}u(z_0) &= \frac{2}{r^2}\int_0^r u(z_0) r\, dr\\ &\le \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r \left\{\int_{-\pi}^{\pi} u(z_0+\rho e^{i\theta})\, d\theta\right\}\rho\, d\rho = \frac{1}{\pi r^2}\iint_{\mathbb{D}(z_0,\rho)} u(z)\, dxdy\end{aligned}$$

となるので, u は $\mathbb{D}(z_0,r)$ で 2 次元 Lebesgue 測度に関して可積分である．

$u\ne -\infty$ であったから $u(z_0)>-\infty$ を満たす点 $z_0\in\Omega$ は少なくとも 1 つ存在する．Claim より $z_0\in\Omega_0$ であり $\Omega_0\ne\emptyset$ である．

Ω_0 が閉集合であることを示そう．これが示されれば Ω_0 は空でない開かつ閉集合となり, Ω の連結性より $\Omega_0=\Omega$ が成り立ち, u の局所可積分性が従う．

さて $\Omega_0\ni z_n\to z_0\in\Omega$ と仮定し, $d=d(z_0,\Omega^c)$ と置く．z_n のある近傍で u は可積分性であるから z_n のいくらでも小さな近傍内に $u(z)>-\infty$ となる点が存在する．必要ならば z_n を取り直すことにより $u(z_n)>-\infty$ と仮定してよい．このとき $|z_n-z_0|<\frac{d}{4}$ を満たす z_n について $d(z_n,\Omega)\ge\frac{3d}{4}$ であるから $u(z_n)>-\infty$ と上の Claim を合わせて $\mathbb{D}(z_n,2^{-1}d)$ において u は可積分である．$|z_n-z_0|<\frac{d}{4}$ より $\mathbb{D}(z_0,4^{-1}d)\subset\mathbb{D}(z_n,2^{-1}d)$ であるから u は $\mathbb{D}(z_0,4^{-1}d)$ で可積分である．これより $z_0\in\Omega_0$ が分かる．□

Corollary 13.3.3. u_1,u_2 が領域 Ω で劣調和ならば $c_1\ge 0, c_2\ge 0$ について $c_1u_1(z)+c_2u_2(z)$ も劣調和

Proof. Remark 13.2.6 で触れたように, 劣調和性の定義の条件 (ii), (iii) 及び (i) の $-\infty\le c_1u_1(z)+c_2u_2(z)<\infty$ が成り立つことは容易に分かる．残された $c_1u_1+c_2u_2\ne-\infty$ については u_1, u_2 が局所的に可積分であることより $c_1u_1+c_2u_2$ もそうであることより従う．□

Theorem 13.3.4. *u を開集合 G 上の劣調和函数とし, $\overline{\mathbb{D}}(z_0,r)\subset G$ とする．このとき $u(z_0+re^{i\theta})$ は θ の函数として $(-\pi,\pi]$ で可積分であり, その Poisson 積分を*

$$h(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r^2-|z-z_0|^2}{|re^{it}-(z-z_0)|^2}u(re^{it})\, dt,\quad z\in\mathbb{D}(z_0,r) \tag{13.3.1}$$

と置けば $\mathbb{D}(z_0,r)$ 上で $u\le h$ が成り立つ．また $G\backslash\mathbb{D}(z_0,r)$ において $h=u$ と置いて, h を G 上の函数に拡張すれば G で劣調和である．

証明の前に $\partial\mathbb{D}(z_0,r)$ 上で $h=u$ と置いていることに注意しておこう．

Proof. Lemma 13.3.1 の証明と同様に $\partial\mathbb{D}(z_0,r)$ 上 $u\le M$ が成り立つように定数 M を取る．そして $\partial\mathbb{D}(z_0,r)$ 上の連続函数の列 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ を各点 $z\in\partial\mathbb{D}(z_0,r)$ について $M\ge h_1(z)\ge h_2(z)\ge\cdots\ge u(z)$ と $\lim_{n\to\infty}h_n(z)=u(z)$ が成り立つように取る．このとき $z\in\mathbb{D}(z_0,r)$ について

$$h_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r^2-|z-z_0|^2}{|re^{it}-(z-z_0)|^2}h_n(z_0+re^{it})\, dt$$

と置いて h_n を $\overline{\mathbb{D}}(z_0,r)$ の函数に拡張するとき, h_n は $\overline{\mathbb{D}}(z_0,r)$ で連続で $\mathbb{D}(z_0,r)$ で調和である．そして $\limsup_{\mathbb{D}(z_0,r)\ni z\to\zeta}u(z)-h_n(z)\le u(\zeta)-h_n(\zeta)\le 0,\quad z\in\partial\mathbb{D}(z_0,r)$ が成り立つので $\mathbb{D}(z_0,r)$ 上で $u(z)\le h_n(z)$ であった．ここで $n\to\infty$ とすれば, 単調収束定理より

$$u(z)\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r^2-|z-z_0|^2}{|re^{it}-(z-z_0)|^2}u(z_0+re^{it})\, dt=h(z),\quad z\in\mathbb{D}(z_0,r)$$

が成り立つ．ここで h は減少調和函数列 $\{h_n\}$ の極限であるから Harnack の定理より $h=-\infty$ または $\mathbb{D}(z_0,r)$ で調和である．u は 2 次元 Lebesgue 測度に関して Ω で局所可積分であったから, $\mathbb{D}(z_0,r)$ 上殆ど至るところ $u(z)>-\infty$ が成り立つ．従って h は調和であり．特に $h(z_0)=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}u(z_0+re^{it})\,dt$ は有限値であるから $u(z_0+re^{it})$ は t に関して T で可積分である．

さて $G\backslash\mathbb{D}(z_0,r)$ において $h=u$ と置いて, h を G 上の函数に拡張したとする．このとき $-\infty\le h<\infty$ と G の各成分において $h\ne-\infty$ が明らかに成り立つ．

h は $\mathbb{D}(z_0,r)$ で調和ゆえ特に上半連続であり, $\Omega\backslash\overline{\mathbb{D}}(z_0,r)$ においても当然上半連続である．また u の上半連続性と h の定義より $\zeta\in\partial\mathbb{D}(z_0,r)$ について

$$\limsup_{G\backslash\mathbb{D}(z_0,r)\ni z\to\zeta}h(z)=\limsup_{G\backslash\mathbb{D}(z_0,r)\ni z\to\zeta}u(z)\le u(\zeta)=h(\zeta)$$

が成り立つ．また Corollary 12.1.6 より $\zeta=z_0+re^{i\theta_0}$ について

$$\limsup_{\mathbb{D}(z_0,r)\ni z\to\zeta}h(z)\le\limsup_{\theta\to\theta_0}u(z_0+re^{i\theta})\le\limsup_{z\to\zeta}u(z)\le u(\zeta)=h(\zeta)$$

が成り立つ．以上より h は G で上半連続である．

最後に劣調和性の定義の条件 (iii) の不等式について考えよう． $z\in G\backslash\partial\mathbb{D}(z_0,r)$ の場合は明らかに成り立つ． $z\in\partial\mathbb{D}(z_0,r)$ の場合は G 上 $u\le h$ が成り立つことより

$$h(z_0)=u(z_0)\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(z_0+re^{i\theta})\,d\theta\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(z_0+re^{i\theta})\,d\theta,\quad 0<r<\operatorname{dist}(z,G^c)$$

が従う． □

Definition 13.3.5. G を開集合とし u を G 上の劣調和函数とする．$\overline{\mathbb{D}}(z_0,r)\subset G$ を満たす円板 $D=\mathbb{D}(z_0,r)$ について

$$u_D(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r^2-|z-z_0|^2}{|re^{it}-(z-z_0)|^2}\,dt, & z\in D\\ u(z), & z\in G\backslash D\end{cases}$$

と置いて, u の D における調和化と言う．*Theorem 13.3.4* より調和化 u_D は G で劣調和で $u\le u_D$ を満たし, D で調和である．

Corollary 13.3.6. Ω を領域とし u を領域 Ω 上の劣調和函数とする．このとき

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(z_0+re^{it})\,dt,\quad 0<r<\operatorname{dist}(z_0,\partial\Omega)$$

は r について非減少である．

Proof. r_1, r_2 は $0<r_1<r_2<\operatorname{dist}(z_0,\partial\Omega)$ を満たすとする．U を $\mathbb{D}(z_0,r_2)$ における u の調和化とすると $\mathbb{D}(z_0,r_2)$ において $u\le U$ であること及び U の定義式より

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(z_0+r_1e^{it})\,dt\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}U(z_0+r_1e^{it})\,dt=U(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(z_0+r_2e^{it})\,dt$$

が成り立つ． □

Theorem 13.3.7. Ω, D を複素平面内の領域とし u は D で劣調和, $f:\Omega\to D$ は非定数正則函数とする．このとき合成函数 $u\circ f$ は Ω で劣調和である．

Proof. **1** はじめに Ω 上で局所単葉, つまり Ω 上で $f'(z) \neq 0$ の場合に Theorem を示そう. $u \circ f$ の上半連続性と $[-\infty, \infty)$ に値を持つことは明らかである. また u の局所可積分性と f が開写像であることから $u \circ f \neq -\infty$ であることが従う. 残るは $u \circ f$ について積分不等式を示すのみである.

任意の $z_0 \in \Omega$ について $f'(z_0) \neq 0$ より $r_0 > 0$ を f が $\mathbb{D}(z_0, r_0)$ において単葉であるように取ることが出来る. このとき $r \in (0, r_0)$ について $\Gamma_r = f(\partial\mathbb{D}(z_0, r))$, $D_r = f(\mathbb{D}(z_0, r))$ と置けば Γ_r は単純閉曲線であり, Γ_r の囲む領域が D_r である. また f は $\mathbb{D}(z_0, r_0)$ から D_r への等角写像を与え, さらに $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r_0)$ から $\overline{D_r} = D_r \cup \Gamma_r$ への同相写像を与える. ここで $u \circ f$ は上半連続であるから compact 集合 $\partial\mathbb{D}(z_0, r)$ 上で上に有界である. よって $\partial\mathbb{D}(z_0, r)$ 上で $M \geq h_1(\zeta) \geq h_2(\zeta) \geq \cdots h_n(\zeta) \searrow u(f(\zeta))$ となる連続函数列 $\{h_n\}$ と定数 M が存在する. ここで

$$U_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|re^{it} - (z - z_0)|^2} h_n(z_0 + re^{it})\, dt, \quad z \in \mathbb{D}(z_0, r)$$

と置く. このとき h_n の連続性より

$$\lim_{\mathbb{D}(z_0, r) \ni z \to \zeta} U_n(z) = h_n(\zeta) \geq u(f(\zeta)), \quad \zeta \in \partial\mathbb{D}(z_0, r)$$

が成り立つ. $\varphi = \left(f|_{\mathbb{D}(z_0, r)}\right)^{-1}$ と置くと, 上式より

$$\lim_{D_r \ni w \to \eta} U_n(\varphi(w)) = h_n(\varphi(\eta)) \geq u(\eta), \quad \eta \in \Gamma_r$$

が成り立つ. $U_n \circ \varphi$ は調和函数と正則函数の合成であるから D_r で調和である. よって最大値の原理より D_r 上で $u \leq U_n \circ \varphi$ が成り立つ. これより $\mathbb{D}(z_0, r)$ 上で $u \circ f \leq U_n$ が成り立つことが分かり

$$u(f(z_0)) \leq U_n(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_n(z_0 + re^{it})\, dt$$

が成り立つ. $n \to \infty$ とすれば単調収束定理より

$$u(f(z_0)) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(f(z_0 + re^{it}))\, dt$$

が成り立つ.

2 $k \in \mathbb{N}$, $w_0 \in D$ とする. $\delta = \operatorname{dist}(w_0, \partial D)$ と置くとき函数 $u(w_0 + w^k)$, $w \in \mathbb{D}(0, \delta^{1/k})$ が劣調和であることを示そう. 上半連続性と $[-\infty, \infty)$ に値を持つことは明らかである. また $\neq -\infty$ であることも **1** と同様である.

正則函数 $\mathbb{D}(0, \delta^{1/k}) \backslash \{0\} \ni w \mapsto w_0 + w^k \in D$ に **1** を用いると $\mathbb{D}(0, \delta^{1/k}) \backslash \{0\}$ の各点において積分不等式が成り立つことが分かる. 従って $w = 0$ において

$$\exists r_0 > 0 : \forall r \in (0, r_0) : u(w_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(w_0 + r^k e^{ikt})\, dt$$

を示せば十分である. これは置換積分と周期性より

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(w_0 + r^k e^{ikt})\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-k\pi}^{k\pi} u(w_0 + r^k e^{i\theta}) \frac{1}{k}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(w_0 + r^k e^{i\theta})\, d\theta \geq u(w_0)$$

となることより従う.

3 一般の場合を示そう. それには $f'(z_0) = 0$ となる点のある近傍において劣調和であることを示せば十分である. $f'(z_0) = 0$ ならば $w_0 = f(z_0)$ と置くと, ある $k \in \mathbb{N}$ について $f(z) = w_0 + g(z)^k$, g は z_0 の近傍で単葉で $g(z_0) = 0$ と表せる. 従って z_0 のある近傍で $u(f(z)) = u(w_0 + g(z)^k)$ と表せる. **2** より $u(w_0 + w^k)$ は $w = 0$ の近傍で劣調和であり, これに等角写像 $w = g(z)$ を合成したものが $u(f(z))$ であるから, **1** より $u(f(z))$ は z_0 の近傍で劣調和である. □

Theorem 13.3.8. $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ を領域 Ω 上の劣調和函数列で, Ω において局所一様に函数 $u : \Omega \to (-\infty, \infty)$ に収束するとする. このとき u も Ω で劣調和.

Proof. 劣調和函数の定義の条件 (i) $-\infty \leq u(z) < \infty$, $u \neq -\infty$ は明らかに成り立つ. また (ii) 上半連続性についても $z_0 \in \Omega$ について $\delta > 0$ を $\overline{\mathbb{D}}(z_0, \delta)$ 上で収束が一様になるように取る. このとき任意の $\varepsilon > 0$ について $N \in \mathbb{N}$ を

$$|u_N(z) - u(z)| < \varepsilon, \quad z \in \overline{\mathbb{D}}(z_0, \delta)$$

となるように取る. そして u_N の上半連続性より $\delta_1 \in (0, \delta)$ を

$$u_N(z) < u_N(z_0) + \varepsilon, \quad z \in \overline{\mathbb{D}}(z_0, \delta_1)$$

を満たすように取れば,

$$u(z) - \varepsilon < u_N(z) < u_N(z_0) + \varepsilon < u(z_0) + 2\varepsilon, \quad z \in \overline{\mathbb{D}}(z_0, \delta_1)$$

が成り立つ. よって u は z_0 で上半連続である.

最後に (iii) を示そう. これは $r \in (0, d(z_0, \Omega^c))$ について $u_n(z_0) \leq (2\pi)^{-1} \int_T u_n(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$ であるから, $n \to \infty$ とすれば, 収束の一様性より直ちに $u(z_0) \leq (2\pi)^{-1} \int_T u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$ を得る. □

Theorem 13.3.9. $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ を領域 Ω 上の劣調和函数列で, Ω において減少, つまり

$$u_1(z) \geq u_2(z) \geq \cdots \geq u_n(z) \geq \cdots$$

が成り立つとする. このとき極限函数 $u(z) = \lim_{n\to\infty} u_n(z)$ は $u \neq -\infty$ ならば Ω で劣調和である.

Proof. $-\infty \leq u(z) < \infty$, $u \neq -\infty$ は明らかに成り立つ. $u(z_0) > -\infty$ の場合, z_0 における上半連続性については Theorem 13.3.8 と全く同様に証明される. $u(z_0) = -\infty$ の場合は任意の $A > 0$ について

$$u_N(z_0) < -A$$

となる N が存在する. u_N の上半連続性より $\delta > 0$ を

$$u_N(z) < u_N(z_0) + \frac{A}{2}, \quad z \in \overline{\mathbb{D}}(z_0, \delta)$$

が取れる. ($u_N(z_0) = -\infty$ の場合は右辺を $-A$ に置き換えよ.) このとき

$$u(z) \leq u_N(z) < u_N(z_0) + \frac{A}{2} < -\frac{A}{2}, \quad z \in \overline{\mathbb{D}}(z_0, \delta)$$

が成り立つ. よって u は z_0 で上半連続である.

最後に $r \in (0, d(z_0, \Omega^c))$ について $u_n(z_0) \leq (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$ であるから, $n \to \infty$ とすれば, 単調収束定理より直ちに $u(z_0) \leq (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$ を得る. □

13.4 一般化された Lapalace 作用素

Theorem 13.4.1. u が領域 Ω で劣調和で, $z_0 \in \Omega$ とする. このとき

$$\mathcal{M}_r u(z_0) := \frac{1}{2\pi} \int_T u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta, \quad \mathcal{A}_r u(z_0) := \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\mathbb{D}(z_0, r)} u(z)\, dxdy$$

は $r \in (0, d(z_0, \Omega^c))$ について増加であり

$$u(z_0) \le \mathcal{A}_r u(z_0) \le \mathcal{M}_r u(z_0) \tag{13.4.1}$$

$$\lim_{r \downarrow 0} \mathcal{A}_r u(z_0) = \lim_{r \downarrow 0} \mathcal{M}_r u(z_0) = \limsup_{r \downarrow 0} u(z) = u(z_0) \tag{13.4.2}$$

が成り立つ．

Proof. $0 < r_1 < r_2 < d(z_0, \Omega^c)$ とし h を $\mathbb{D}(z_0, r_2)$ における u の調和化とする．つまり u の $\mathbb{D}(z_0, r_2)$ における値を，$u(z_0 + r_2 e^{i\theta})$ の Poisson 積分に置き換えて出来る函数を h と置く．このとき $u \le h$ であり h は $\mathbb{D}(z_0, r_2)$ で調和であるから

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{r_1} u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_T u(z_0 + r_1 e^{i\theta})\, d\theta &\le \frac{1}{2\pi} \int_T h(z_0 + r_1 e^{i\theta})\, d\theta \\ &= h(z_0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_T u(z_0 + r_2 e^{i\theta})\, d\theta = \mathcal{M}_{r_2} u(z_0) \end{aligned}$$

が成り立つ．

次に $u(z_0) \le \mathcal{M}_\rho u(z_0)$ の両辺を ρ 倍して 0 から r まで積分すれば

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{2} u(z_0) &= u(z_0) \int_0^r \rho\, d\rho \\ &\le \int_0^r \mathcal{M}_\rho u(z_0) \rho\, d\rho \\ &\le \frac{1}{2\pi} \int_0^r \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta}) \rho\, d\theta d\rho \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{D}(z_0, r)} u(z)\, dx dy \\ &= \frac{r^2}{2} \mathcal{A}_r u(z_0) \\ &\le \int_0^r \rho \mathcal{M}_r u(z_0)\, d\rho = \frac{r^2}{2} \mathcal{M}_r u(z_0) \end{aligned}$$

となり (13.4.1) が成り立つ．

$\mathcal{M}_r u(z_0)$ が r に関して増加であることより $r \downarrow 0$ としたときの極限が存在することが分かり，明らかに $u(z_0) \le \lim_{r \downarrow 0} \mathcal{M}_r u(z_0)$ が成り立つ．また $\limsup_{z \to z_0} u(z) \le u(z_0)$ より

$$\lim_{r \downarrow 0} \mathcal{M}_r u(z_0) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_T u(z_0 + r e^{i\theta})\, d\theta \le \limsup_{z \to z_0} u(z) \le u(z_0)$$

も成り立つ．これらの不等式と (13.4.1) を組み合わせれば (13.4.2) が従う．

最後に $\mathcal{A}_r u(z_0)$ が r に関して増加であることは

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_r u(z_0) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\mathbb{D}(z_0, r)} u(z)\, dx dy &= \frac{2}{r^2} \int_0^r \rho \mathcal{M}_\rho u(z_0)\, d\rho \\ &= 2 \int_0^1 t \mathcal{M}_{rt} u(z_0)\, dt \end{aligned}$$

と書きなおせば分かるであろう． □

Corollary 13.4.2. u, v が領域 Ω 上の劣調和函数で，Ω で殆ど至るところ一致すれば，Ω で恒等的に一致する．

Remark 13.4.3. $\{z \in \mathbb{C} : r_1 \le |z - z_0| \le r_2\} \subset \Omega$ ならば, $\mathbb{D}(z_0, r_1) \subset \Omega$ であっても, そうでなくても, "$r \in [r_1, r_2]$ を固定すれば $u(z_0 + re^{i\theta})$ は θ に関し T で可積分であり, $(2\pi)^{-1} \int_T u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$ は $\log r$ の凸函数である." また "$\overline{\mathbb{D}}(0, r_0) \subset \Omega$ ならば $(\pi r^2)^{-1} \iint_{\mathbb{D}(z_0,r)} u(z)\, dxdy$ は $\log r$ の増加な凸函数である". これらの事実を証明するには, 円環領域での *Dirichlet* 問題の解の存在を必要とするので本書では述べない. 詳細は *Tsuji [27] Chapter 2* を参照のこと.

さて Theorem 13.2.7 の証明中で Pizetti の公式と呼ばれる等式 (13.2.2) を導いた.

$$\mathcal{M}_r u(z_0) = u(z_0) + \frac{r^2}{4} Lu(z_0) + \mathrm{o}(r^2), \quad |z - z_0| = r \downarrow 0$$

これより直ちに u が C^2-級ならば

$$Lu(z_0) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z_0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z_0) = \lim_{r \to +0} \frac{4}{r^2} \{\mathcal{M}_r u(z_0) - u(z_0)\}$$

が成り立つ. また同様に

$$\mathcal{A}_r u(z_0) = u(z_0) + \frac{r^2}{8} Lu(z_0) + \mathrm{o}(r^2), \quad |z - z_0| = r \downarrow 0$$

が成り立つので

$$Lu(z_0) = \lim_{r \to +0} \frac{8}{r^2} \{\mathcal{A}_r u(z_0) - u(z_0)\}$$

が成り立つ. そこで Blaschke 作用素 B と Privarov 作用素 P を

$$Bf(z_0) = \limsup_{r \downarrow 0} \frac{8}{r^2} \{\mathcal{A}_r u(z_0) - u(z_0)\} \tag{13.4.3}$$

$$Pf(z_0) = \limsup_{r \downarrow 0} \frac{4}{r^2} \{\mathcal{M}_r u(z_0) - u(z_0)\} \tag{13.4.4}$$

で定義する. 但し B は f が局所可積分の時に定義され, P は f が上半連続や下半連続の場合のように十分小さな全ての $r > 0$ について $f(z_0 + re^{i\theta})$ が θ について可積分または積分値が ∞ または $-\infty$ で確定する場合に定義される. $Bu(z_0)$ と $Pu(z_0)$ の両方が定義される函数 u については

$$Bu(z_0) \le Pu(z_0) \tag{13.4.5}$$

が成り立つ. 実際, これは

$$\begin{aligned}
\frac{8}{r^2}\{\mathcal{A}_r u(z_0) - u(z_0)\} &= \frac{16}{r^2} \int_0^r \rho \{\mathcal{A}_\rho u(z_0) - u(z_0)\}\, d\rho \\
&= \frac{4}{r^2} \int_0^r \rho^3 \frac{4\{\mathcal{A}_\rho u(z_0) - u(z_0)\}}{\rho^2}\, d\rho \\
&\le \frac{4}{r^2} \int_0^r \rho^3 \sup_{0 < t \le r} \frac{4\{\mathcal{A}_t u(z_0) - u(z_0)\}}{t^2}\, d\rho \\
&= \sup_{0 < t \le r} \frac{4\{\mathcal{A}_t u(z_0) - u(z_0)\}}{t^2}
\end{aligned}$$

より直ちに分かる.

Theorem 13.4.4. u が領域 Ω で上半連続で $-\infty \le u(z) < \infty$ を満たし, $u \ne -\infty$ とする. このとき次の 3 条件は互いに同値である.

(a) u は Ω で劣調和.
(b) Ω 内で $Bu(z) \ge 0$.

(c) Ω 内で $Pu(z) \geq 0$.

Proof. (a) $\Longrightarrow$ (b) については u が劣調和ならば Theorem 13.4.1 の不等式 (13.4.1) から $u(z_0) \leq \mathcal{A}_r u(z_0)$ が, 十分小さな全ての $r > 0$ について成り立つことより分かる. また (b) $\Longrightarrow$ (c) については (13.4.5) より従う.

(c) $\Longrightarrow$ (a) を示そう. $z_0 \in \Omega$ とし $r \in (0, d(z_0, \Omega^c))$ を取る. $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\partial\mathbb{D}(z_0, r)$ 上の連続函数の減少列で各点で $h_n \downarrow u$ となるものとする. 各 h_n の Poisson 積分 を用いて $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$ で連続で $\mathbb{D}(z_0, r)$ で調和な函数に拡張する. 記号を節約するために拡張された函数も h_n で表すことにする. また $\eta(z) = \frac{|z-z_0|^2 - r^2}{4}$ と置くと $L\eta = 1$ であり, $\mathbb{D}(z_0, r)$ で $\eta < 0$, $\partial\mathbb{D}(z_0, r)$ で $\eta = 0$ である.

ここで $\varepsilon > 0$ について函数 $v_(z) = u(z) - h_n(z) + \varepsilon\eta(z)$ を考えよう. この函数は $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$ で上半連続であり $\partial\mathbb{D}(z_0, r)$ で $u(z) - h_n(z) + \varepsilon\eta(z) = u(z) - h_n(z) \leq 0$ である.

$$v(z) = u(z) - h_n(z) + \varepsilon\eta(z) \leq 0, \quad z \in \mathbb{D}(z_0, r) \tag{13.4.6}$$

となることを背理法で示そう. もし $\mathbb{D}(z_0, r)$ の内点で値が正になる点が存在すれば, 正の最大値を取る点 $z_1\mathbb{D}(z_0, r)$ が存在する. この点 z_1 において $Pu \geq 0$ の仮定と $Ph = 0$, $P\eta = 1$ より

$$Pv(z_1) = P(u - h_n + \varepsilon\eta)(z_1) = Pu(z_1) + \varepsilon > 0$$

であるが, 最大値を取る点 z_1 において $v(z_1) \geq \mathcal{M}_r v(z_1)$ より $Pv(z_1) \leq 0$ でなければならないので矛盾である. 従って $\mathbb{D}(z_0, r)$ で $v(z) \leq 0$ が 成り立つが, $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば $u \leq h_n$ が成り立つことが分かる. 特に

$$u(z_0) \leq h_n(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_T h_n(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

であるが, $n \to \infty$ とすれば単調収束定理より $u(z_0) \leq \mathcal{M}_r u(z_0)$ が従い, u は劣調和である. □

第 14 章

Hardy 空間

14.1　単位円板上の Hardy 空間

第 15 章

Riemann 面

15.1 Riemann 面と等角構造

n 次元の滑らかな多様体や, その上の滑らかな構造の定義や性質について基本的な事項をまとめておこう.

Definition 15.1.1. 集合 $S(\neq \emptyset)$ が $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 次元位相多様体であるとは

(a) S は *Hausdorff* 位相空間である.
(b) S は第 2 可算公理を満たす. つまり高々可算な開基が存在する.
(c) 各 $p \in S$ は $\mathbb{R}^n$ のある開集合と同相な近傍を持つ. つまり p の (開) 近傍 V, $\mathbb{R}^n$ の開集合 W 及び同相写像 $\varphi : V \to W$ の 3 つの組 (V, W, φ) が存在する.

$n = 0$ のときは $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ であるから 0 次元位相多様とは高々可算個の点よりなる離散空間に他ならない. 上の定義の 3 つの組 (V, W, φ) において $W = \varphi(V)$ であるから W は省略可能である. そこで組 (V, φ) のことを M の chart と呼ぶ. つまり S の開集合 V と V から $\mathbb{R}^n$ のある開集合への連続写像で $\varphi : V \to \varphi(V)$ が同相写像になっているものの組 (V, φ) を M の chart と言う. そして $\varphi : V \to \varphi(V)$ が同相である写像のことを, (ちょっと古い用語であるが) 中への同相写像と呼ぶことにする. 第 2 可算公理を満たす Hausdorff 位相空間が n 次元位相多様体であるとは S の各点 $p \in S$ について $p \in V$ を満たす chart (V, φ) が存在するときを言う.

Definition 15.1.2. n 次元位相多様体 S 上の 2 つの *chart* (V_1, φ_1), (V_2, φ_2) が滑らかに適合的であるとは $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ であるか, または $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(V_1 \cap V_2) \to \varphi_2(V_1 \cap V_2)$ が C^∞ 級の可微分同相写像である時を言う. S 上の *chart* の族 $\mathcal{A} = \{(V_j, \varphi_j) : j \in J\}$ が次の 2 条件を満たす時, 滑らかなアトラス *(smooth atlas)* であると言う.

(i) $\{V_j\}_{j \in J}$ は S の開被覆である.
(ii) 任意の $i, j \in J$ について (V_1, φ_1) と (V_2, φ_2) は滑らかに適合的である.

n 次元位相多様体 S 上の滑らかなアトラス $\mathcal{A}$ について $\mathcal{A}$ を含む極大なアトラス $\bar{\mathcal{A}}$ が一意的に存在することが証明できる. (証明は後述). この極大アトラス $\bar{\mathcal{A}}$ のことを S 上の滑らかな構造 *(smooth structure)* と呼び, $\underline{S\text{ が連結な時}}$ $(S, \bar{\mathcal{A}})$ のことを滑らかな多様体 *(smooth manifold)* と呼ぶ.

同様に複素多様体についての定義もしておこう. S を $2n$ 次元位相多様体とし chart (V, φ) の定義において φ の値域を $\mathbb{C}^n$ に変更し V, $\varphi(V)$ はそれぞれ S, $\mathbb{C}^n$ の開集合で $\varphi : V \to \varphi(V) (\subset \mathbb{C}^n)$ が同相写像と変更する. 同様に 2 つの chart (V_1, φ_1), (V_2, φ_2) が正則に適合的である (holomorphically compatible) とは "$V_1 \cap V_2 = \emptyset$ であるか, または

$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(V_1 \cap V_2) \to \varphi_2(V_1 \cap V_2)$ が双正則, つまり $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ とその逆写像 $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ が正則である時を言う." に変更する．そして S 上の chart の族 $\mathcal{A} = \{(V_j, \varphi_j) : j \in J\}$ が "$S = \bigcup_{j \in J} V_j$ かつ, 任意の $i, j \in J$ について (V_1, φ_1) と (V_2, φ_2) は正則に適合的である." を満たすとき複素アトラス (complex atlas) であると言う．S 上の複素アトラス $\mathcal{A}$ についても $\mathcal{A}$ を含む極大なアトラス $\bar{\mathcal{A}}$ が一意的に存在することが証明できる．この極大アトラス $\bar{\mathcal{A}}$ のことを S 上の複素構造 (smooth structure) と呼び, S が連結な時 $(S, \bar{\mathcal{A}})$ のことを n 次元複素多様体 (complex manifold) と呼ぶ．

Riemann 面とは複素 1 次元多様体のことであると定義しても良いのであるが, 伝統的に第 2 可算性を仮定せずに定義することが多い．本書もこれに従い，次のように定義する．

Definition 15.1.3. *S を Hausdorff 位相空間とし S の各点は $\mathbb{C}$ のある開集合と同相な近傍を持つとする．(つまり Definition 15.1.1 において (b) 第 2 可算性を除き, (a) と (c) を満たすものを考える.) そして chart (V, φ) とは S の開集合 V と写像 $\varphi : V \to \mathbb{C}$ の組で $\varphi(V)$ は $\mathbb{C}$ の開集合であり φ が V から $\varphi(V)$ への同相写像になっているものと定義する．また 2 つの chart (V_1, φ_1), (V_2, φ_2) が等角に適合的である (conformally compatible) とは "$V_1 \cap V_2 = \emptyset$ であるか, または $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(V_1 \cap V_2) \to \varphi_2(V_1 \cap V_2)$ が等角 (= 双正則) が成り立つときを言う．S 上の chart の族 $\mathcal{A} = \{(V_j, \varphi_j) : j \in J\}$ が次の 2 条件を満たす時, 等角なアトラス (conformal atlas) であると言う．*

(i) $S = \bigcup_{j \in J} V_j$.
(ii) 任意の $i, j \in J$ について (V_i, φ_i), (V_j, φ_j) は等角に適合的である

それでは S 上の等角アトラス $\mathcal{A}$ について $\mathcal{A}$ を含む極大な等角アトラス $\bar{\mathcal{A}}$ が一意的に存在することを順を追って示そう．以下で与える証明において用語を適当に変更すれば極大な滑らかなアトラスや, 極大な複素アトラスの存在も証明されることを注意しておこう．証明に先立って次のように定義しておこう

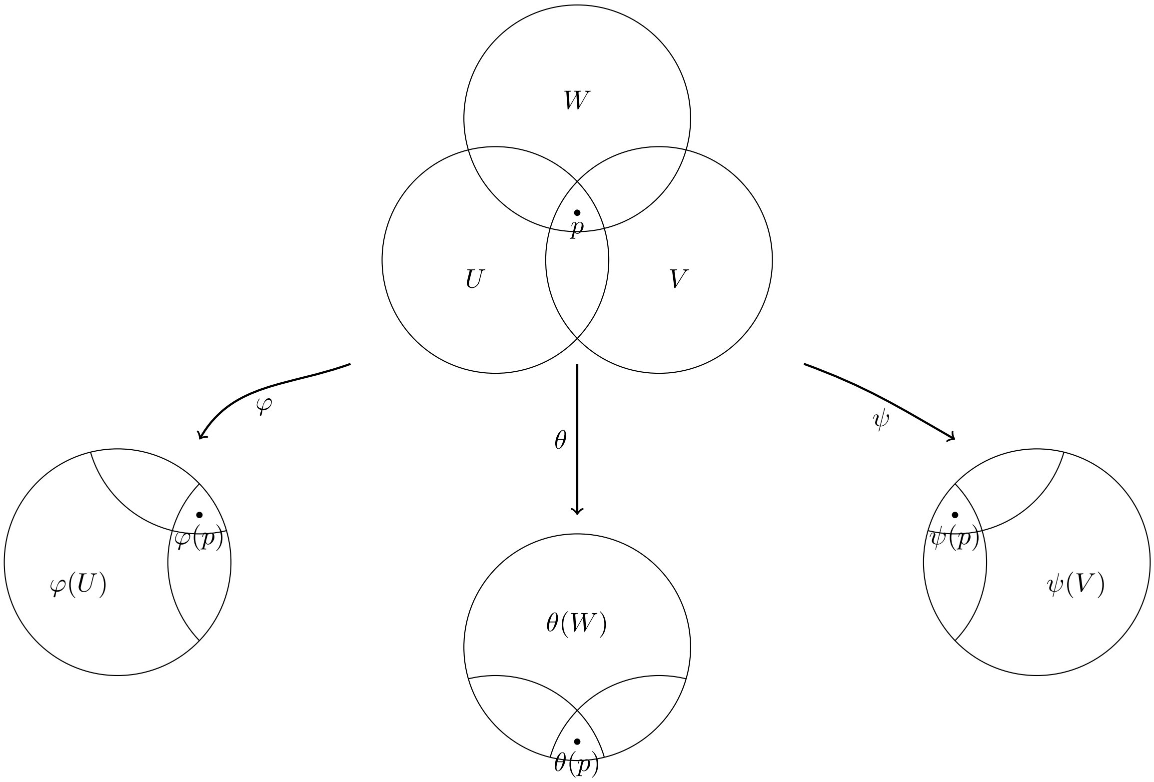
Definition 15.1.4 (Riemann 面)**.** *連結な Hausdorff 位相空間 S で各点は $\mathbb{C}$ のある開集合と同相な近傍を持つもの, 及び S 上の極大等角アトラスの組 $(S, \bar{\mathcal{A}})$ のことを Riemann 面という．また $\bar{\mathcal{A}}$ のことを S の等角構造と言う．つまり 1 次元複素多様体の定義において第 2 可算性を落として定義されるのが Riemmann 面である．しかしながら後章で Riemann 面は第 2 可算公理を満たすことを証明するので Riemann 面と複素 1 次元多様体は同じものである．省略しても混乱の怖れがないときは単に S を Riemann 面と言ったりもする．伝統的に compact な Riemann 面のことを閉 Riemann 面と呼び, noncompact な場合は開 Riemann 面と呼ぶ．*

極大アトラスの存在　以下の議論には Hausdorff 性や連結性を用いないので S は位相空間で等角アトラス $\mathcal{A}$ を持つとのみ仮定する．詳しく言えば各 $\mathcal{A}$ は chart (V, φ) (つまり V は S の開集合で $\varphi : V \to \mathbb{C}$ は中への同相写像) よりなる族で $S = \bigcup_{(\varphi, V) \in \mathcal{A}} V$ を満たし $\mathcal{A}$ の中のどの 2 つも等角に適合的とする．このとき chart (U, φ) が等角アトラス $\mathcal{A}$ と等角に適合的であるとは任意の $(V_j, \varphi_j) \in \mathcal{A}$ について (U, φ), (V_j, φ_j) が等角に適合的であるときを言う．等角なアトラス $\mathcal{A}$ について $\bar{\mathcal{A}}$ で $\mathcal{A}$ と等角に適合的な S の chart の全体を表す．容易にわかるように $\mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}}$ が成り立つ．

Theorem 15.1.5. *S 上の等角アトラス $\mathcal{A}$ について $\bar{\mathcal{A}}$ も S 上の等角アトラスであり等角なアトラスの中で極大, つまり等角アトラス $\mathcal{B}$ が $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathcal{B}$ を満たせば $\mathcal{B} = \bar{\mathcal{A}}$ が成り立つ．(つまり $\bar{\mathcal{A}}$ を真に含む等角アトラスは存在しない.)*

Proof. $\bar{\mathcal{A}}$ も等角アトラスであることを示そう．それには (U, φ), $(V, \psi) \in \bar{\mathcal{A}}$ が $U \cap V \neq \emptyset$ のとき $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$ が正則であることを示せば十分である．そこで $p \in U \cap V$ を任意に取る．このとき $(W, \theta) \in \mathcal{A}$ で $p \in W$ を満たすものが存在する．(U, φ), (V, ψ) は $\mathcal{A}$ と等角に適合的であるから $\varphi \circ \theta^{-1} : \theta(U \cap W) \to \varphi(U \cap W)$, $\psi \circ \theta^{-1} : \theta(U \cap W) \to \psi(U \cap W)$ は等角である．従って $\varphi \circ \psi^{-1} = (\varphi \circ \theta^{-1}) \circ (\psi \circ \theta^{-1})^{-1}$ は $\psi(U \cap V \cap W)$ から

$\varphi(U \cap V \cap W)$ への等角写像であるから, p において正則である. $p \in U \cap V$ は任意であるから $\varphi \circ \psi^{-1}$ は $U \cap V$ で正則である.



次に $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathcal{B}$ を満たす S 上の等角アトラス $\mathcal{B}$ について $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ ならば $\mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}} \subset \mathcal{B}$ より

$$\begin{aligned} & (V,\psi) \text{ は任意の } (U,\varphi) \in \mathcal{B} \text{ と等角に適合的である.} \\ \Longrightarrow\ & (V,\psi) \text{ は任意の } (U,\varphi) \in \mathcal{A} \text{ と等角に適合的である.} \\ \Longrightarrow\ & (V,\psi) \in \bar{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

よって $\mathcal{B} \subset \bar{\mathcal{A}}$ が成り立つ. □

Theorem 15.1.6. *S 上の 2 つの等角アトラス $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ について $\bar{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{B}}$ であるための必要十分条件は $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ が等角アトラスであること.*

Proof. $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ が等角アトラスであるとする. このとき (V, φ) が $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ と等角に適合的な chart ならば $\mathcal{A}$ とも等角に適合的であるから $\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} \subset \bar{\mathcal{A}}$ が成り立つ. また上の定理より $\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}$ を真に含む等角アトラスは存在しない. よって $\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} = \bar{\mathcal{A}}$ が成り立つ. 全く同様にして $\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} = \bar{\mathcal{B}}$ も成り立つので $\bar{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{B}}$ である.

次に $\bar{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{B}}$ と仮定する. このとき $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ が等角アトラスであることを示すには任意の $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ と $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ が等角に適合的であることを示せばよい. まず $(U, \varphi) \in \mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{B}}$ より (U, φ) は $\mathcal{B}$ に属す全ての chart と等角に適合的である. 従って特に (V, ψ) とも適合的である. □

上の Theorem より次が成り立つ.

Proposition 15.1.7. *S 上の 2 つの等角アトラス $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ について $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ ならば $\bar{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{B}}$ が成り立つ.*

S 上のアトラスとしては条件 (i), (ii) を満たしさえすれば出来るだけ chart が少ない方が効率的であるが, 実用上は使い勝手の良い性質を持つ chart を入れておくほうが便利なことも多い. (例えば Theorem 17.3.2 を見よ.)

(U, φ) を S 上の等角アトラスに適合的な chart とする．このとき U 内の各点について U はその点の座標近傍 (coordinate neighborhood) であると言い, $p_0 \in U$ が $\varphi(p_0) = 0$ を満たすとき (U, φ) を p_0 を中心とする chart であると言う．また φ を (局所) 座標写像, $z = \varphi(p)$, $p \in U$ と表したとき z を局所座標と言う．特に $\varphi(U)$ が $\mathbb{C}$ 内の開円板であるとき U を座標円板 (coordinate disk) であると言う．

極大アトラスとの組 $(S, \bar{\mathcal{A}})$ でなく等角アトラス $\mathcal{A}$ との組 $(S, \mathcal{A})$ のことを Riemann 面と呼ぶこともあるが, これは $\mathcal{A}$ の定める等角構造である $\bar{\mathcal{A}}$ との組 $(S, \bar{\mathcal{A}})$ のことを考えているものとする．この場合異なる等角アトラス $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ であっても $\bar{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{B}}$ ならば $(S, \mathcal{A})$ と $(S, \mathcal{B})$ は同一の Riemann 面である．

Riemann 面の簡単な例

(a) 複素平面 $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}$ には標準的な chart $(\mathbb{C}, \mathrm{id}_{\mathbb{C}})$ のみからなる等角アトラスが取れるので, 以後 $\mathbb{C}$ はこのアトラスで定まる等角構造を持つ Riemann 面とする．

(b) Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. まず $(\mathbb{C}, \mathrm{id}_{\mathbb{C}})$ が $\hat{\mathbb{C}}$ の 1 つの chart を与える．また $\hat{\mathbb{C}} \backslash \{0\}$ 上の函数を $\varphi(w) = \frac{1}{w}$ と置く時 $(\hat{\mathbb{C}} \backslash \{0\}, \varphi)$ も chart である．これら 2 つの chart は等角に適合的であるから, 2 つの chart からなるアトラスは等角アトラスである．以後 $\hat{\mathbb{C}}$ はこのアトラスが定める等角構造を持つとする．

(c) 部分 Riemann 面. D を Riemann 面 S の部分領域とすれば, D も次のように Riemann 面とみなすことが出来る. S の chart (U, φ) で $U \cap D \neq \emptyset$ であるものについて $(U \cap D, \varphi|_{U \cap D})$ は U の chart であり, このような chart の全てがなす族は D の等角アトラスを与える．D をこの等角アトラスのもとで考える時 S の部分 Riemann 面であると言う．特に重要なのは $S = \hat{\mathbb{C}}$ の場合であり, $\hat{\mathbb{C}}$ の部分領域は, $\hat{\mathbb{C}}$ の部分 Riemann 面とみなすことにする．

(d) トーラス. $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ を $\mathbb{R}$ 上で線形独立な (つまり $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{C}$ を満たす) 定数とする．

$$L = \{k\omega_1 + \ell\omega_2 : k, \ell \in \mathbb{Z}\}$$

と置き $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ について $z_1 - z_2 \in L$ のとき $z_1 \sim z_2$ と表すことにすれば, $\sim$ は同値関係である．このときの商集合 (= 同値類の全てがなす集合) $\mathbb{C}/\sim$ を $\mathbb{C}/L$ と表し, ω_1, ω_2 の生成する torus と呼ぶ. $\mathbb{C}/L$ には商位相 (quotient topology) を入れて位相空間として考える．つまり $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/L$ を商写像 $\pi(z) = z + L$(z の属す同値類) とおいて $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/L$ を定義し, $G \subset \mathbb{C}/L$ が開集合であるとは $\pi^{-1}(G)$ が $\mathbb{C}$ の開集合であることと定義し $\mathbb{C}/L$ に位相を導入する．

Definition 15.1.8. *Riemann* 面 $(S, \mathcal{A})$ 上の函数 $f : S \to \mathcal{C}$ が正則であるとは　の任意の *chart* (U, φ) について $f \circ \varphi^{-1}$ が $\varphi(U)$ 上で正則であることと定義する．調和函数や有理型函数についても同様に定義を行う．また 2 つの *Riemann* 面 $(S, \mathcal{A})$, $(S', \mathcal{A}')$ 間の写像 $f : S \to S'$ が正則であるとは $f(U) \cap V \neq \emptyset$ を満たす $\mathcal{A}$ の *chart* (U, φ) と $\mathcal{A}'$ の *chart* (V, ψ) について $\psi \circ f \circ \varphi|_{U \cap f^{-1}(V)}$ が正則であることと定義する．

15.2　層と解析接続

層を説明するときに必要になる空写像 = 空函数を定義しよう．はじめに写像の概念を拡張する．

Definition 15.2.1. *X*, *Y* を集合とする．このとき組 (X, Y, f) が X から Y への写像であるとは $\mathrm{f} \subset X \times Y$ であり, 以下の 2 条件が成り立つときを言う．

(a) 任意の $x \in X$ について $(x, y) \in \mathrm{f}$ を満たす $y \in Y$ が存在する．
(b) $(x, y_1), (x, y_2) \in \mathrm{f}$ ならば $y_1 = y_2$ である．

このとき各 $x \in X$ について $(x, y) \in \mathrm{f}$ を満たす $y \in Y$ がただ一つ存在するのでそれを $y = f(x)$ *(*直積集合の部分集合である f と区別するためにフォントを変更している*)* と表し, f は X から Y への写像であると言い, $f : X \to Y$ と表す．また X を f の始域 *(domain)* または定義域 *(domain of definition)*, Y を終域 = 余域 *(codomain)* または値域 *(range)*, $f(X) = \{y \in Y : \exists x \in X \ with \ (x, y) \in f\} = \{y \in Y : \exists x \in X \ with \ f(x) = y\}$ を f の像 *(image)* と呼ぶ.

この定義によれば写像 (X_1, Y_1, f_1), (X_2, Y_2, f_2) が等しいとは $X_1 = X_2$, $Y_1 = y_2$ かつ $\mathrm{f}_1 = \mathrm{f}_2$ が成り立つことである．従って特に $X_1 = X_2$, $Y_1 = y_2$ のときは

$$\mathrm{f}_1 = \mathrm{f}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in X_1 = X_2 : f_1(x) = f_2(y)$$

が成り立つことである.

通常, 写像 $f : X \to Y$ とは各 $x \in X$ について $y = f(x)$ が一つ定められていると定義されるが, このときのグラフ $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ が上の定義における f であり, 上の定義は通常の定義の拡張になっていることが分かる．写像 $f : X \to Y$ が単射や全射であることや, 写像の合成や逆写像などは通常の定義と同じとする.

以上のように写像の定義を拡張する利点は空写像を考えることが可能になることである.

Definition 15.2.2 (空写像)**.** 集合 Y について $\mathrm{f} = \emptyset \times Y = \emptyset$ を考えると $(\emptyset, Y, \emptyset)$ は *Definition 15.2.1* の (a), (b) を無内容的に満たす．この写像を $e_Y : \emptyset \to Y$ とおいて $\emptyset$ から Y への空写像 (empty mapping) と呼ぶ．写像と函数を区別しない立場では e_Y を空函数 (empty function) と呼ぶこともある．e_Y は $\emptyset$ をグラフに持つ写像であり, e_Y の始域は $\emptyset$, 終域は Y, 像は $\emptyset$ である．また空写像は単射 (合成命題 "$\forall x_1, x_2 \in \emptyset$ with $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow e_Y(x_1) \neq e_Y(x_2)$" は無内容的に成り立つ．つまり仮定が偽であるから, 結論の如何に関わらず合成命題は真である) であり, 特に終域 $Y = \emptyset$ のとき $e_\emptyset$ は全単射である．実際 $e_\emptyset(\emptyset) = \emptyset = Y$ を満たすので全射である.

Definition 15.2.3 (前層)**.** X を位相空間 $\mathcal{T}$ を X の位相族, つまり X の開集合の全体のなす族とする．各 $U \in \mathcal{T}$ について集合 $\mathcal{F}_U$ が与えられていて $U \subset V$ を満たす, 各 $U, V \in \mathcal{T}$ について写像 $\rho_U^V : \mathcal{F}_V \to \mathcal{F}_V$ が与えられていて

(1) 各 $U \in \mathcal{T}$ について $\rho_U^U = \mathrm{id}_{\mathcal{F}_U}$
(2) $U \subset V \subset W$ を満たす $U, V, W \in \mathcal{T}$ について $\rho_U^W = \rho_U^V \circ \rho_V^W$

が成り立つとき $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_U\}_{U \in \mathcal{T}}$, $\{\rho_U^V\}_{U,V \in \mathcal{T} with U \subset V}$ の組を前層 *(presheaf)* と言う．また文脈から省略しても差し支えない場合は $\mathcal{F}$ のことを前層と言う．通常, 各 $\mathcal{F}_U$ に何らかの代数的な構造が与えられていることが多い．例えば, 各 $\mathcal{F}_U$ が *abel* 群で $\rho_U^V : \mathcal{F}_V \to \mathcal{F}_V$ が *abel* 群の準同型であるとき $\mathcal{F}$ は *abel* 群の前層であると言う．同様に環やベクトル空間などの前層も定義される．このとき最初に述べた $\mathcal{F}_U$ に *abel* 群などの代数的な構造を考えない前層のことを集合の前層と呼ぶ.

前層の例を与えておこう.

Example 15.2.4. 位相空間 X の各開集合 U について $\mathcal{F}_U$ を U 上の複素数値連続函数の全体 $C(U)$ とし, $\mathcal{F} = \{C_U\}_{U \in \mathcal{T}}$ と置く．そして $U \subset V$ を満たす $U, V \in \mathcal{T}$ について ρ_U^V は函数の定義域を V から U へ制限する制限写像 $\rho_U^V(f) = f|_U$, $f \in C(V)$ で定義する．このとき $\mathcal{F}$ はベクトル空間の前層となる．しかしながらこの例には落とし穴がある．$U \neq \emptyset$ の場合は $\mathcal{F}_U = C(U)$ でよいのだが $\mathcal{F}_\emptyset = C(\emptyset)$ とは何であろうか？ 素直に考えれば $\emptyset$ を定義域とし, $\mathbb{C}$ を値域とする函数であるから空函数 $e_\mathbb{C}$ のみがその候補である．そこで $C(\emptyset)$ については, 空集合から $\mathbb{C}$ への空写像 $e_\mathbb{C}$ のみからなる 1 点集合とし $e_\mathbb{C}$ を零元とし, 他に元を持たないベクトル空間とする．このとき $e_\mathbb{C} + e_\mathbb{C} = e_\mathbb{C}$ であり任意の複素数 α について $\alpha e_\mathbb{C} = e_\mathbb{C}$ であることに注意すれば "$\rho_\emptyset^U(f) = e_\mathbb{C}$, $f \in C(U)$" で定

義される $\rho^U_\emptyset : C(U) \to C(\emptyset)$ は準同型であることが直ちに分かる．また $\rho^\emptyset_\emptyset = \mathrm{id}_{C(\emptyset)}$ と置く．以上の定義のもとで $\mathcal{F} = \{C(U)\}_{U\in\mathcal{T}}$ はベクトル空間の前層である．

以下, 煩雑を避けるために写像 $\rho^V_U : \mathcal{F}_U \to \mathcal{F}_V$ を $\rho^V_U(f) = f|_U$ と表すことにする

Definition 15.2.5 (層)**.** $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_U\}_{U\in\mathcal{T}}$ を位相空間 X 上の集合の前層とする．各開集合 U とその任意の開被覆 $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ について

(a) $f, g \in \mathcal{F}_U$ が任意の $i \in I$ について $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ を満たせば $f = g$

(b) 各 $i \in I$ について $f_i \in \mathcal{F}_{U_i}$ が与えられていて任意の $i, j \in I$ について $f_i|U_i \cap U_j = f_j|U_i \cap U_j$ ならば, ある $f \in \mathcal{F}_U$ で任意の $i \in I$ について $f|U_i = f_i$ を満たすものが存在する.

が成り立つ時, $\mathcal{F}$ は層 *(sheaf)* であると言う.

Proposition 15.2.6. 位相空間 X 上の集合の層 $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_U\}_{U\in\mathcal{T}}$ について $\mathcal{F}_\emptyset$ は 1 点のみからなる.

Proof. 空集合の開被覆として特に, 添字集合 I が空である被覆 $\emptyset = \bigcup_{i\in\emptyset} U_i$ を取ることができる．実際, 右辺の和集合が空であることは, 命題 $x \in \bigcup_{i\in\emptyset} U_i$ が

$$x \in \bigcup_{i\in\emptyset} U_i \quad\Longleftrightarrow\quad \exists i \in \emptyset : x \in U_i$$

と同値変形されるが, 右の命題は $i \in \emptyset$ が成り立たないので偽である．従って $x \in \bigcup_{i\in\emptyset} U_i$ を満たす x は存在しないので $\bigcup_{i\in\emptyset} U_i = \emptyset$ であることが分かる.

次に $I = \emptyset$ なる空集合の被覆について命題 (b) の仮定を

$$\exists\{f_i\}_{i\in I} \text{ with "}\forall i \in I : f_i \in \mathcal{F}_{U_i}\text{"} : \text{"}\forall j, k \in I : f_j|U_j \cap U_k = f_k|U_j \cap U_k{}''$$

と書き直す．このとき $\{f_i\}_{i\in I}$ with “$\forall i \in I : f_i \in F_{U_i}$” とは $(f_i)_{i\in I}$ が直積 $\prod_{i\in I} \mathcal{F}_{U_i}$ の元であることに他ならず, 始域 I から終域 $\bigcup_{i\in I} \mathcal{F}_{U_i}$ への写像の 1 つとみなすことができる．$I = \emptyset$ の場合, 始域, 終域ともに空であるから, このような写像は $\emptyset$ から $\emptyset$ への空写像 $e_\emptyset$ のみである．(つまり直積 $\prod_{i\in\emptyset} \mathcal{F}_{U_i} = \{e_\emptyset\}$) この唯一の元である $e_\emptyset$ は $\forall i \in I : e_\emptyset(i) \in \mathcal{F}_{U_i}$ を無内容的に満たし, さらに “$\forall j, k \in I : f_j|U_j \cap U_k = f_k|U_j \cap U_k$” も無内容的に満たす．従って命題 (b) の仮定が成り立つので命題 (b) の結論 “ある $f \in \mathcal{F}_U$ で任意の $i \in I$ について $f|U_i = f_i$ を満たすものが存在する” が成り立つ．(後半部の” 任意の $i \in I$ について $f|U_i = f_i$” は $f \in \mathcal{F}_U$ が存在すれば無内容的に成り立っていることに注意しよう)．これで $\mathcal{F}_\emptyset \neq \emptyset$ が示された.

最後に $f, g \in \mathcal{F}_\emptyset$ を取り, 空なる開被覆 $\emptyset = \bigcup_{i\in\emptyset} U_i$ について (a) の仮定は “$i \in \emptyset \Longrightarrow f|_{U_i} = g|_{U_i}$” と書き直せる．この命題が無内容的に成り立つことより, (a) の結論である $f = g$ が成り立つ．つまり $\mathcal{F}_\emptyset$ は 1 点のみからなる集合である. □

Example 15.2.4 の前層は層の例でもある．前層であるが層ではない例も挙げておこう.

Example 15.2.7. $\mathbb{R}^n$ の各開集合 U について複素数値で *Lebesgue* 測度に関し可積分な函数 f の全体のなす空間を $L^1(U)$ で表し, $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなす．ただし $L^1(\emptyset) = \{e_\mathbb{C}\}$ とし, 零元のみからなるベクトル空間とみなす.．また空でない 2 つの開集合 U, V で $U \subset V$ を満たすものについて通常の制限写像を ρ^V_U としまた $\rho^V_\emptyset$ は零写像と置く．この時 $\{L^1(U)\}_{U\in\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)}$ は容易に分かるように前層であるが, 層ではない．実際, 開被覆 $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1} U_k$, $U_k = \{x \in \mathbb{R}^\kappa : |x| < k\}$ において $L^1(U_k)$ は定数函数 1 を含むが定数函数 1 は $\mathbb{R}^n$ で可積分でないので $1 \notin L^1(\mathbb{R}^n)$ である.

Example 15.2.8. S を *Riemann* 面とし各開部分集合 $U \subset S$ について $\mathcal{H}(U)$ で U 上の正則函数の全体がなす環とし, $\mathcal{M}(U)$ で U 上の有理型函数の全体がなす体とする. また $U \subset V$ を満たす $U,V \in \mathcal{T}(S)$ について $\rho_U^V : \mathcal{H}(V) \to \mathcal{H}(U)$ を通常の制限写像とすれば $\{\mathcal{H}(U)\}_{U\in\mathcal{T}(X)}$, $\{\mathcal{M}(U)\}_{U\in\mathcal{T}(X)}$ はそれぞれ X 上の環及び体の層である. ただし $\emptyset \in \mathcal{T}(X)$ には対応する空写像のみから集合が対応するとする. つまり $\mathcal{H}(\emptyset) = \{e_{\mathbb{C}}\}$, $\mathcal{M}(\emptyset) = \{e_{\hat{\mathbb{C}}}\}$ であり, 零元のみからなる環または体とみなす. また $\rho_\emptyset^V$ は $\mathcal{H}(V)$ または $\mathcal{M}(V)$ からの零写像 *(*= 始域の全ての元を零元にうつす写像*)* とする.

これ以降に与える具体例では上と同様に $\emptyset$ に関する $\mathcal{F}_\emptyset$ は始域を $\emptyset$, 終域をそれぞれの場合に相応しい集合 S として $\mathcal{F}_\emptyset = \{e_S\}$ と置き, 考える層の代数的構造が入っているとする. そして $\rho_\emptyset^V$ も始域 $\mathcal{F}_V$ の全ての元を, この空写像にうつす零写像とする.

Example 15.2.9. S を *Riemann* 面とし各開部分集合 $U \subset S$ について $\mathcal{H}^*(U)$ で U 上の正則函数 f で零点を持たないものの全体とする. このとき $\frac{1}{f} \in \mathcal{H}^*(U)$ であるから $\mathcal{H}^*(U)$ は乗法に関する *abel* 群の構造を持つとみなす. また $\mathcal{M}^*(U)$ で U 上の有理型函数 f で U の各連結成分上で恒等的に 0 でないものの全体とし, 同様に乗法に関する *abel* 群とみなす. このとき $\{\mathcal{H}^*(U)\}_{U\in\mathcal{T}(X)}$, $\{\mathcal{M}^*(U)\}_{U\in\mathcal{T}(X)}$ はそれぞれ X 上の *abel* 群の層である.

Definition 15.2.10. $\mathcal{F}$ を位相空間 X 上の集合の前層とし $p \in X$ とする. このとき互いに交わらない和 $\displaystyle\bigcup_{p\in U\in\mathcal{T}(X)} \mathcal{F}(U)$ において同値関係 $\underset{p}{\sim}$ を以下のように定義する.

$$f \in \mathcal{F}(U),\ g \in \mathcal{F}(V) \text{ について } f \underset{p}{\sim} g \text{ とは} \iff \exists W \in \mathcal{T}(X) \textit{ with } W \subset U \cap V : f|_W = g|_W \tag{15.2.1}$$

と定義する. このとき個々の同値類のことを点 p における芽 *(germ)* と呼び, 全ての同値類のなす集合 $\left(\displaystyle\bigcup_{p\in U\in\mathcal{T}(X)} \mathcal{F}(U)\right) / \underset{p}{\sim}$ はいわゆる帰納極限 *(inductive limit)*

$$\mathcal{F}_p = \varinjlim_{U\ni p} \mathcal{F}(U) \tag{15.2.2}$$

と表され, $\mathcal{F}$ の点 p における茎 *(stalk)* と呼ばれる. また U が p の *(*開*)* 近傍のとき, 写像 $\rho_p : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_p$ を $f \in \mathcal{F}(U)$ について f の属す $\underset{p}{\sim}$ に関する同値類を対応させる写像とする. この同値類のことを点 p における f の芽 *(germ)* と呼ぶ.

前層 $\mathcal{F}$ に何らかの代数的構造が入っている場合, 同じ代数的構造を $\mathcal{F}_p$ に導入することが出来る. 例えば $\mathcal{F}$ が X 上の環の前層のときを考えよう. $\mathcal{F}_p$ において和と積を定義する為に $\alpha, \beta \in \mathcal{F}_p$ としよう. そして $\alpha = \rho_p(f)$, $f \in \mathcal{F}(U)$ $\beta = \rho_p(g)$, $g \in \mathcal{F}(V)$ を満たす f, g を取る. このとき $\alpha + \beta = \rho_p(f|_{U\cap V} + g|_{U\cap V})$, $\alpha \cdot \beta = \rho(f|_{U\cap V} \cdot g|_{U\cap V})$ と定義する. この置き方が代表元の取り方に依らないことは, 次のように容易に検証することが出来る.

$f_1 \in \mathcal{F}(U_1)$, $f_2 \in \mathcal{F}(U_2)$ が $\alpha = [f_1] = [f_2]$ を満たすとすると, ある p の近傍 $W_1 (\subset U_1 \cap U_2)$ において $f_1|_{W_1} = f_2|_{W_1}$ が成り立つように取れる. 同様に $g_1 \in \mathcal{F}(V_1)$, $g_2 \in \mathcal{F}(V_2)$ が $\beta = [g_1] = [g_2]$ を満たすとすると, ある p の近傍 $W_2 (\subset V_1 \cap V_2)$ において $g_1|_{W_2} = g_2|_{W_2}$ が成り立つ. このとき $(f_1 + g_1)|_{W_1\cap W_2} = (f_2 + g_2)|_{W_1\cap W_2}$ かつ $(f_1 \cdot g_1)|_{W_1\cap W_2} = (f_2 \cdot g_2)|_{W_1\cap W_2}$ である.

上のように演算を定義すると和, 積に関して結合法則を満たすこと, 和に関して可換であること及び分配息を満たすことは容易に分かる. また $f \in \mathcal{F}(U)$ で p のある近傍 W 上で $f|_W = 0$ となる f の全体は 1 つの芽 $(=$ 同値類$)$ をなし $\rho_p(f)$ が $\mathcal{F}_p$ の零元を与えることや, この零元に関する逆元が存在し $\rho_p(-f) = -\rho_p(f)$ で与えられることなども検証するのは容易であろう. 積についても同様であり, $\mathcal{F}_p$ に前層 $\mathcal{F}$ と同じ代数的構造を導入することが出来る.

X が $\mathbb{C}$ 内の領域のとき $z_0 \in X$ における正則函数 f の芽を考えよう． f が z_0 のまわりでの Taylor 展開 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ は正の収束半径を持つベキ級数であり, $f \underset{z_0}{\sim} g$ ならば g の Taylor 展開は f のそれと一致する．逆に f, g の z_0 のまわりでの Taylor 展開が一致すれば $f \underset{z_0}{\sim} g$ である．つまり $\mathcal{H}_{z_0}$ の各元について代表元 $f \in \mathcal{H}(U)$ を取り, f の Taylor 展開を対応させる写像は全単射であり, 容易に分かるように環の同型である．同様に有理型函数の芽の全体 $\mathcal{M}_{z_0}$ は z_0 のまわりの収束 Laurent 級数で有限主要部を持つものの全てがなす環と同型である．

以下では Riemann 面 X 上の正則函数のなす層 $\mathcal{H}$ の点 $p \in X$ における芽 $\varphi \in \mathcal{H}_p$ について φ の代表元の取り方に依らず p における値は一定であるから, その値を $\varphi(p)$ で表す．

Lemma 15.2.11. $\mathcal{F}$ を位相空間 X 上の *abel* 群の層とする．このとき $U \in \mathcal{T}(X)$ について $f \in \mathcal{F}(U)$ が零元であるための必要十分条件は任意の $x \in U$ について $\rho_x(f) \in \mathcal{F}_x$ が零元であること．

Proof. $\mathcal{F}_x$ において

$$\rho_x(f) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists W\ x \text{ の近傍で } W \subset U \text{ を満たす} : f|_W = 0$$

が成り立つことに注意しよう．

$\mathcal{F}(U)$ において $f = 0$ ならば $V \subset U$ を満たす x の任意の近傍 V について $\rho_V^U(f) = \rho_V^U(0) = 0$ であるから $\rho_x(f) = 0$ である．

逆に任意の $x \in U$ について $\rho_x(f) = 0$ が $\mathcal{F}_x$ において成り立つとする．このとき各 $x \in U$ について x の近傍 U_x で $U_x \subset U$ $\rho_{U_x}^U(f) = 0$ を満たすものが取れる．開被覆 $U = \bigcup_{x \in U} U_x$ に層の定義の (a) を適用すれば $\mathcal{F}(U)$ において $f = 0$ が従う． □

15.3 代数函数

第 16 章

Dirichlet 問題の Perron による解法

16.1 Perrosn 族

本章では 2 つの実数 a, b について $a \vee b = \max\{a, b\}$, $a \wedge b = \min\{a, b\}$ と置き, 2 つの実函数 f, g について $f \vee g$ と $f \wedge g$ を以下のように定義し用いる.

$$f \vee g(p) = \max\{f(p), g(p)\}, \quad f \wedge g(p) = \min\{f(p), g(p)\}. \tag{16.1.1}$$

S を Riemann 面とし G を S の開部分集合とする. G 上の劣調和函数 u について $\overline{D} \subset G$ を満たす座標円板 D において ∂D 上の u の値を境界値とする Poisson 積分を考える. D において u を, この Poisson 積分で置き換えた函数を u の D における調和化 (Definition 13.3.5 を参照) と言い u_D と表したことを思い出しておこう. 調和化 u_D は $u \le u_D$ を満たし G で劣調和かつ D で調和であった.

Definition 16.1.1 (Perron 族)**.** 開集合 G で劣調和な函数の族 $\mathcal{P}$ は次の 2 つの性質を満たすとき *Perron* 族と呼ばれる.

(i) u_1, $u_2 \in$ ならば $u_1 \vee u_2 \le u$ を満たす $u \in \mathcal{P}$ が存在する.
(ii) 全ての $u \in \mathcal{P}$ と $\overline{D} \subset G$ を満たす座標円板 D について $u_D \in \mathcal{P}$.

Theorem 16.1.2. *族 $\mathcal{P}$ が開集合 G 上の空でない Perron 族ならば*

$$h(p) := \sup_{u \in \mathcal{P}} u(p), \quad p \in \Omega$$

は G の各成分 Ω において調和であるか, または Ω 上で $h(p) \equiv \infty$ のどちらかである.

Proof. $E = \{p \in \Omega : h(p) = \infty\}$ と置く.

1 任意の $p_0 \in \Omega \backslash E$ について p_0 を中心とする局所座標 $\varphi : U \to \mathbb{C}$ を取り, $\varphi^{-1}(\overline{\mathbb{D}}(0, r)) \subset \Omega$ を満たす $r > 0$ を取れば $\varphi(\mathbb{D}(0, r))^{-1}(\mathbb{D}(0, r)) \subset \Omega \backslash E$ であり, $\varphi^{-1}(\mathbb{D}(0, r))$ 上 h は有限値で, 調和であることを示そう. まず $\varphi^{-1}(0) = p_0 \in E$ より

$$h \circ \varphi^{-1}(0) = \sup_{u \in \mathcal{P}} u(\varphi^{-1}(0)) = \sup_{u \in \mathcal{P}} u(p_0) < \infty$$

であるから $\mathcal{P}$ の列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $u_n \circ \varphi^{-1}(0) \to h(\varphi^{-1}(0))$ となるものが存在する. $\tilde{u}_1 = u_1$ と置き, 次に $\tilde{u}_2 \ge \max\{\tilde{u}_1, u_2\}$ を満たす $\tilde{u}_2 \in \mathcal{P}$ を取る. 以下帰納的に $\tilde{u}_n \ge \max\{\tilde{u}_{n-1}, u_n\}$ を満たす $\tilde{u}_n \in \mathcal{P}$ を取り, この操作を続ける. このようにして $\tilde{u}_1 \le \tilde{u}_2 \le \cdots \le \tilde{u}_n \le \cdots$ を満たす列 $\{\tilde{u}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}$ が取れる. そして $u_n(\varphi^{-1}(0)) \le$

$\tilde{u}_n(\varphi^{-1}(0)) \le h(p_0)$ であるから $\tilde{u}_n(\varphi^{-1}(0)) \uparrow h(\varphi^{-1}(0))$ が成り立つ．ここでさらに $\tilde{u}_n$ の $\varphi^{-1}(\mathbb{D}(0,r))$ における調和化を $\hat{u}_n$ と置けば

$$\hat{u}_1 \le \hat{u}_2 \le \cdots \le \hat{u}_n \le \cdots$$

が成り立ち, $u_n(\varphi^{-1}(0)) \le \tilde{u}_n(\varphi^{-1}(0)) \le \hat{u}_n(\varphi^{-1}(0)) \le h(\varphi^{-1}(0))$ より

$$\hat{u}_n(\varphi^{-1}(0)) \nearrow h(\varphi^{-1}(0)) = h(p_0), \quad n \to \infty$$

が成り立つ． $\hat{u}_n \circ \varphi^{-1}$ は $\mathbb{D}(0,r)$ において調和であるから Harnack の定理 (Theorem 11.4.2) より $u^*(z) := \lim_{n\to\infty} \hat{u}_n \circ \varphi^{-1}(z)$ は $\mathbb{D}(0,r)$ で調和であり, $u^*(0) = h(\varphi^{-1}(0))$ が成り立つ．

次に $\mathbb{D}(0,r)$ 上で $h \circ \varphi^{-1} = u^*$ を示そう．これが示されれば **1** の証明は終わりである．$z_1 \in \mathbb{D}(0,r)$ を任意に取り, $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}$ を $v_n(\varphi^{-1}(z_1)) \to h(\varphi^{-1}(z_1))$ となるように取る．そして $\tilde{v}_1 \ge \max\{v_1, \hat{u}_1\}$ を満たす $\tilde{v}_1 \in \mathcal{P}$ を取り, 次に $\tilde{v}_2 \ge \max\{v_2, \tilde{v}_1, \tilde{u}_2\}$ を満たす $\tilde{v}_2 \in \mathcal{P}$ を取る．以下帰納的に $\tilde{v}_n \ge \max\{v_n, \tilde{v}_{n-1}, \tilde{u}_n\}$ を満たす $\tilde{v}_n \in \mathcal{P}$ を取り, この操作を続け, 列 $\{\tilde{v}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}$ を取る．そして $\tilde{v}_n$ の $\varphi^{-1}(\mathbb{D}(0,r))$ における調和化を $\hat{v}_n$ で表せば, 結局列 $\{\hat{v}_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathcal{P}$ の増加列であり, $\hat{u}_n \le \hat{v}_n$ を満たし $\hat{u}_n \circ \varphi^{-1}$ は $\mathbb{D}(0,r)$ で調和, $\hat{v}_n(\varphi^{-1}(z_1)) \uparrow h(\varphi^{-1}(z_1))$ が成り立つ．また $u_n(\varphi^{-1}(0)) \le \hat{v}_n(\varphi^{-1}(0)) \le h(\varphi^{-1}(0)) < \infty$ であるから再び Harnack の定理より $v^*(z) = \lim_{n\to\infty} \hat{v}_n \circ \varphi^{-1}$ は $\mathbb{D}(0,r)$ で調和であり, $u^* = \lim \hat{u}_n \le lim \hat{v}_n \le v^*$ が成り立つ．また $v^*(0) \le h(0) = u^*(0)$ であるから最大値の原理よりより $u^* = v^*$ である．これより特に $u^*(z_1) = v^*(z_1) = h(\varphi^{-1}(z_1))$ が従い, $z_1 \in \mathbb{D}(z_0,r)$ の任意性より $\mathbb{D}(0,r)$ 上 $u^* = h \circ \varphi^{-1}$ である．

2 今度は任意の $p_0 \in E$ について $\varphi^{-1}(\overline{\mathbb{D}}(0,r)) \subset \Omega$ を満たす $r > 0$ を取れば $\varphi^{-1}(\mathbb{D}(0,r)) \subset E$, つまり $\varphi^{-1}(\mathbb{D}(0,r))$ 上 $h = \infty$ が成り立つ．何故ならば前半の議論と同様にして族 $\mathcal{P}$ の増加列 $\{\hat{u}_n\}$ で各 $\hat{u}_n \circ \varphi^{-1}$ は $\mathbb{D}(0,r)$ で調和であり $\hat{u}_n(\varphi^{-1}(0)) \to \infty$ を満たすものが存在する．再び Harnack の定理より $\mathbb{D}(0,r)$ 上 $\hat{u}_n(\varphi^{-1}(z)) \to \infty$ が成り立つことが従い, これより $h(\varphi^{-1}(z)) \equiv \infty$ を得る．

1, **2** より特に E は Ω の開かつ閉部分集合である．Ω は連結であるから $E = \emptyset$ つまり h は Ω で調和であるか, または $E = \Omega$ つまり $h = \infty$ のどちらか一方が成り立つ． □

Perron 族について (i), (ii) に

(iii) G 上の優調和函数 s で任意の $u \in \mathcal{P}$ について $u \le s$ が成り立つものが存在する．

を加える立場もある．このとき s は $(-\infty, \infty]$ に値を取る函数であるが G の各成分で $\ne \infty$ であるから, 少なくとも 1 点で有限値である．従ってこの定義のもとでは, 上包函数はつねに調和である．

16.2 Dirichlet 問題

Dirichlet 問題とは開集合 G の境界 ∂G 上の連続函数 φ に対して G 上の調和函数 h で φ を境界値とするもの, つまり

$$\lim_{\Omega \ni p \to q} h(p) = \varphi(q), \quad q \in \partial\Omega \tag{16.2.1}$$

を満たすものを求めるというものである．このとき h を境界値 φ に関する G 上の Dirichlet 問題の解と呼ぶ．例えば G が複素平面内の円板の場合, φ の Poisson 積分が唯一の解である．ここでは一般の領域について, 解が存在するための条件や一意性の条件について調べよう．

これから Diriclet 問題の解の Perron 族を用いた構成法について述べるが $\overline{G}$ がコンパクトの場合と, コンパクトでない場合で議論に少々異なる箇所がある. これを統一的に述べるため, 以下のように G のコンパクト化された境界 $\Gamma(G)$ というものを考える.

まず G の境界 ∂G とは点 $q \in S$ で

$$q \text{ の任意の近傍は } G \text{ の点と } S \backslash G \text{ の点を含む}$$

という性質を持つ点の全体であることを思い出しておこう. $\overline{G}$ がコンパクトでないとき Riemann 面 S もコンパクトではあり得ない. 何故ならば Hausdorff 空間 S がコンパクトならば, その閉部分集合 $\overline{G}$ もコンパクトになるからである.

S がコンパクトでないとき S に ∞ を付け加えた Alexandroff の 1 点コンパクト化を考えることが可能である. ただし ∞ とは 1 点コンパクト化により Riemann 面 S に付け加える, 無限遠点と呼ばれる仮想的な点である. そして ∞ の近傍系は

$$(S\backslash K) \cup \{\infty\}, \quad K \text{ は } \Omega \text{ のコンパクト部分集合}$$

という形の集合よりなる集合族とする. この位相のもとで $S \cup \{\infty\}$ はコンパクトであり, $\Omega \cup \Gamma(G)$, $\Gamma(G)$ もコンパクトである. このとき

$$\Gamma(G) = \begin{cases} \partial G, & \overline{G} \text{ がコンパクトなとき} \\ \partial G \cup \{\infty\}, & \overline{G} \text{ がコンパクトでないとき} \end{cases} \tag{16.2.2}$$

と置く. $S = \mathbb{C}$ の場合 1 点コンパクト化 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ とは Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ に他ならない.

以後 $\overline{G}$ がコンパクトでないとき $\varphi(\infty)$ も定義されているものとし, φ は $\Gamma(G)$ 上の連続函数とする. 単に (16.2.1) に 1 点における条件を追加しただけであるが

$$\lim_{G \ni p \to q} h(z) = \varphi(q), \quad q \in \Gamma(G) \tag{16.2.3}$$

を満たす G 上の調和函数 u を求めるという問題を考えよう. この問題をコンパクト化された Dirichlet 問題と呼ぶ.

さて Dirichlet 問題を Perron 族を利用して解くために, 境界条件 (16.2.3) を以下のように緩め, さらに φ を 境界 $\Gamma(G)$ 上の (連続とは限らない) 有界な函数とし定数 $m, M \in \mathbb{R}$ について $m \leq \varphi(q) \leq M$, $q \in \Gamma(G)$ を満たすとする. そして

$$\limsup_{G \ni p \to q} u(p) \leq \varphi(q), \quad q \in \Gamma(G) \tag{16.2.4}$$

を満たす G 上の劣調和函数 u の全体を $\mathcal{P}(G, \varphi) = \mathcal{P}_\varphi$ と置く. このとき次が成り立つ.

Theorem 16.2.1. *$\mathcal{P}(G, \varphi)$ は空でない Perron 族であり, 任意の $u \in \mathcal{P}(G, \varphi)$ について G 上で $u \leq M$ が成り立つ. 従って特に, 上包函数 $H_{G,\varphi}$ は G で調和である.*

Proof. 実際 $u_1, u_2 \in \mathcal{P}(G, \varphi)$ ならば $u = u_1 \vee u_2$ は G で劣調和であり, (16.2.4) を満たす. よって $u \in \mathcal{P}(G, \varphi)$ であるから (i) が成り立つ. 次に $\overline{D} \subset G$ を満たす座標円板 D において $u \in \mathcal{P}(G, \varphi)$ に調和化を行っても u_D は G で劣調和であり $\limsup_{G \ni p \to q} u_D(p) = \limsup_{G \ni p \to q} u(p) \leq \varphi(q)$ を満たすので $u_D \in \mathcal{P}(G, \varphi)$ であり, よって (ii) が成り立つ. 以上より $\mathcal{P}(G, \varphi)$ は Perron 族である.

定数函数 m は明らかに G で劣調和であり境界条件 (16.2.4) を満たす. よって $m \in \mathcal{P}(G, \varphi)$ であるから $\mathcal{P}(G, \varphi) \neq \emptyset$ である. $\mathcal{P}(G, \varphi)$ は空でない Perron 族であるから Theorem 16.1.2 より上包函数

$$H_{G,\varphi}(p) = \sup_{u \in \mathcal{P}(G,\varphi)} u(p), \quad p \in G$$

は G の各成分 Ω で調和函数であるか, $H_{G,\varphi}(p) \equiv \infty$ である. ここで $\mathcal{P}(G,\varphi)$ は定数函数 M を共通の上界に持つことを示そう. これが示されれば $H_{G,\varphi}$ は G で調和である.

実際, 定数函数 M は G で調和であり, G の任意の成分 Ω について $\Gamma(\Omega) \subset \Gamma(G)$ が成り立つので任意の $u \in \mathcal{P}(G,\varphi)$ と $q \in \Gamma(\Omega)$ について $\limsup_{\Omega \ni p \to q} u(p) \leq \varphi(q) \leq M$ が成り立つ. ここで $\overline{\Omega}$ がコンパクトならば, 最大値の原理より Ω 上で $u \leq M$ が成り立つことが分かる. $\overline{\Omega}$ がコンパクトでなくても (16.2.4) において $q = \infty$ として成り立つ不等式 $\limsup_{\Omega \ni p \to \infty} u(p) \leq \varphi(\infty) \leq M$ を考慮すれば, やはり最大値の原理より Ω 上で $u \leq M$ が成り立つことが分かる. Ω は任意であったから G 上 $u \leq M$ が成り立つ. □

上の証明で見たように $\overline{G}$ がコンパクトでないとき G の境界に ∞ を付け加えるのは最大値の原理が成り立つようにしたいからである.

通常 Dirichlet 問題は, 開集合ではなく領域における問題として取り扱われることが多い. ここでは後の応用を考え, 開集合における問題として取り扱う. このとき

Lemma 16.2.2. *G を Riemann 面 S の開集合とし, Ω を G の成分とする. このとき $\Gamma(G)$ 上の有界函数 φ について*

(16.2.5) $$\mathcal{P}(\Omega, \varphi|_{\Gamma(\Omega)}) = \mathcal{P}(G,\varphi)|_\Omega \ (:= \{u|_\Omega : u \in \mathcal{P}(G,\varphi)\})$$

が成り立ち,

(16.2.6) $$H_{G,\varphi}|_\Omega = H_{\Omega, \varphi|_{\Gamma(\Omega)}}$$

が成り立つ.

Proof. $\Gamma(G)$ 上で $m \leq \varphi \leq M$ となる m, M を取る.

$u \in \mathcal{P}(G,\varphi)$ ならば $\Gamma(\Omega) \subset \Gamma(G)$ より

$$\limsup_{\Omega \ni p \to q} u|_\Omega(p) \leq \limsup_{G \ni p \to q} u(p) \leq \varphi(q), \quad q \in \Gamma(\Omega)$$

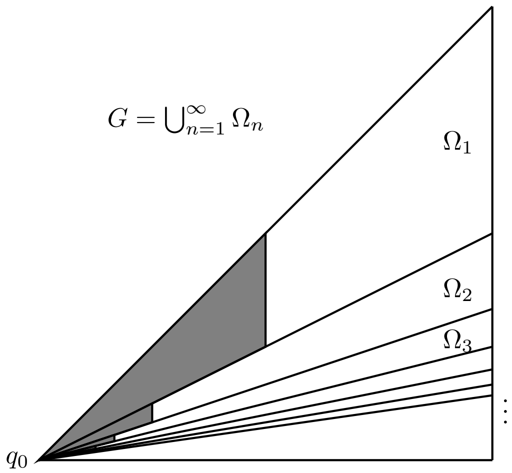
を満たす. よって $H_{\Omega,\varphi|_{\Gamma(\Omega)}} \subset H_{G,\varphi}$ が成り立つ.

今度は $v \in \mathcal{P}(\Omega, \varphi|_{\Gamma(\Omega)})$ としよう. Ω 上で $u = v$, $G \backslash \Omega$ 上で $u = m$ とおく. このとき $q \in \Gamma(\Omega)$ ならば任意の $\varepsilon > 0$ について q の近傍 V を $\Omega \cap V$ 上で $u(p) < \varphi(q) + \varepsilon$ が成り立つように取れば $(G \backslash \Omega) \cap V$ 上では $u(p) = m \leq \varphi(q)$ であるから $G \cap V$ 上で $u(p) < \varphi(q) + \varepsilon$ が成り立つ. よって $\limsup_{G \ni p \to q} u(p) \leq \varphi(q)$ が成り立つ. $q \in \Gamma(G) \backslash \Gamma(\Omega)$ のときは $\Gamma(\Omega)$ はコンパクトゆえの近傍 V を $V \cap \Gamma(\Omega) = \emptyset$ となるように取れる. よって

$$\limsup_{G \ni p \to q} u(p) = \limsup_{G \backslash \Omega \ni p \to q} u(p) = m \leq \varphi(q)$$

が成り立つ. よって $v = u|_\Omega \in \mathcal{P}(G,\varphi)|_\Omega$ である.

(16.2.6) は (16.2.5) より従う. □



Remark 16.2.3. 上の *Lemma* より, 境界 $\Gamma(G)$ 上の有界函数 φ に関する G 上の *Dirichlet* 問題を考えることは各成分 Ω において境界値 $\varphi|_{\Gamma(\Omega)}$ に関する *Dirichlet* 問題を考えることと同等である. しかしながら逆については微妙である. 何故ならば各成分 Ω ごとに $\Gamma(\Omega)$ 上の有界函数 φ_Ω を与えても, 与え方によっては $\varphi|_{\Gamma(\Omega)} = \varphi_\Omega$ を満たす $\Gamma(G)$ 上の有界函数 φ が存在するとは限らないからである. 例えば G の相異なる成分 Ω_1, Ω_2 が境界点を共有することもある. このような場合, 共有点において $\varphi_{\Omega_1} = \varphi_{\Omega_2}$ でなければならない. また次のような困難が生じることがある. 点 $q \in \Gamma(G)$ で, いかなる G の成分 Ω についても $q \notin \partial\Omega$ であるものが存在する G の例を作ることが出来る. このような q については q に収束する G の点列 $\{p_n\}$ を p_n を含む G の成分 Ω_n, $n \in \mathbb{N}$ が全て相異なるように取ることが出来る. q の任意の連結近傍 V について $p_n \in V$ を満たす n が無数にあり, このような n について $p_n \in \Omega_n$ と $q \notin \Omega_n$ より V 内に $q_n \in \Gamma(\Omega_n)$ が存在する. 従って部分列 $q_{n_k} \in \Gamma(\Omega_n)$ を $q_{n_k} \to q$ となるように取ることが出来る. φ が連続になるためにはこのとき $\varphi(p) = \lim_{k\to\infty} \varphi_{\Omega_n}(p_{n_k})$ を満たす必要がある. 以上よりあまり勝手な φ_Ω を与えると φ が構成できないときがある.

さて Dirichlet 問題を解くために残された課題は φ が $\Gamma(\Omega)$ 上で連続なとき $H_{G,\varphi}$ が Dirichlet 問題の境界条件 (16.2.3) を満たすかどうかである. これを調べる為に次節で新しい概念を導入する.

16.3 barrier と Dirichlet 問題の正則点

Definition 16.3.1. 函数 β が開集合 G の境界点 $q_0 \in \Gamma(G)$ における *barrier* であるとは, β が G 上の 劣調和函数であり, 次の 2 条件を満たすときを言う.

(a) $\displaystyle\lim_{G\ni p\to q_0} \beta(p) = 0$.

(b) $G\backslash V \neq \emptyset$ を満たす q_0 の任意の近傍 V について $\displaystyle\sup_{p\in G\backslash V} \beta(p) < 0$ を満たす.

念の為に補足すれば $\infty \in \Gamma(G)$ のとき (つまり $\overline{G}$ がコンパクトでないとき) G における劣調和函数 β が ∞ における barrier であるとは次の 2 条件が成り立つことである. (a) $\displaystyle\lim_{G\ni p\to\infty} \beta(p) = 0$ つまり任意の $\varepsilon >$ について, あるコンパクト集合 K で

$$|\beta(p)| < \varepsilon \quad \forall p \in G\backslash K$$

となるものが存在する. さらに (b) 任意のコンパクト集合 K について $\displaystyle\sup_{p\in G\cap K} \beta(p) < 0$ が成り立つ.

Theorem 16.3.2. G を *Riemann* 面 S の部分領域とし, φ を境界 $\Gamma(G)$ 上の有界函数とする. このとき境界点 $q_0 \in \Gamma(G)$ において *barrier* が存在すれば

$$\varphi(q_0) \wedge \liminf_{\partial G \ni q \to q_0} \varphi(q) \le \liminf_{G \ni p \to q_0} H_\varphi(p) \le \limsup_{G \ni p \to q_0} H_\varphi(p) \le \varphi(q_0) \vee \limsup_{\partial G \ni q \to q_0} \varphi(q) \tag{16.3.1}$$

が成り立つ.

Proof. $m \le \varphi \le M$ を満たす m, M を取る. はじめに $q_0 \in \partial G$ の場合を考え β を q_0 における barrier とし $A = \varphi(q_0) \vee \limsup_{\partial G \ni q \to q_0} \varphi(q)$ と置く. $\varepsilon > 0$ が任意に与えられたとし q_0 の近傍 V を $G \backslash V \neq \emptyset$ かつ

$$\varphi(q) < A + \varepsilon, \quad q \in \partial G \cap V$$

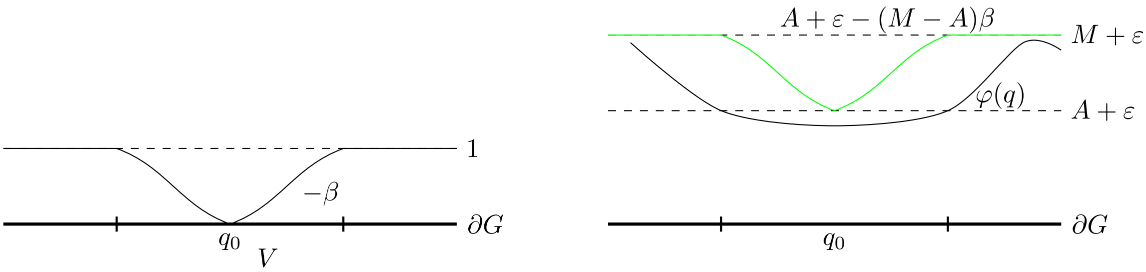
が成り立つように取る. このとき barrier の条件 (b) より

$$\sup_{p \in G \backslash V} \beta(p) = -\ell, \quad \ell > 0$$

と置くことが出来る. そこで β の代わりに $\frac{\beta}{\ell}$ を考えれば,

$$\sup_{p \in G \backslash V} \beta(p) = -1$$

と仮定して差し支えない.



このとき任意の $u \in \mathcal{P}_{G,\varphi}$ について

$$v(p) = u(p) - A - \varepsilon + (M - A)\beta(p), \qquad p \in G$$

を考えよう. v は G で劣調和であり $q \in (\partial G) \backslash \overline{V}$ ならば $G \backslash V$ 上 $\beta(p) \le -1$ であるから

$$\limsup_{G \ni p \to q} v(p) = \limsup_{G \backslash \overline{V} \ni p \to q} u(p) - A - \varepsilon - (M - A) \le \varphi(q) - M - \varepsilon < 0$$

が成り立つ. また $q \in (\partial G) \cap \overline{V}$ ならば G 上 $\beta < 0$ であるから

$$\limsup_{G \ni p \to q} v(p) = \limsup_{G \ni p \to q} u(p) - A \le \varphi(q) - A - \varepsilon < 0$$

である. $\overline{G}$ がコンパクトならば, これで G 上で $v \le 0$ が成り立つことが分かる. $\overline{G}$ がコンパクトでない場合は $\infty \in \Gamma(G)$ であり

$$\limsup_{G \ni p \to \infty} v(p) \le \limsup_{G \ni p \to \infty} u(p) - A - (M - A) \le \varphi(\infty) - M \le 0$$

である. よって $\overline{G}$ がコンパクトでなくても G 上で $v \le 0$ が成り立つ.

以上より

$$u(p) \le A + \varepsilon - (M - A)\beta(p), \quad p \in G$$

であり, $u \in \mathcal{P}_{G,\varphi}$ の任意性より

$$H_\varphi(p) \leq A + \varepsilon - (M - A)\beta(p), \quad p \in G$$

が成り立つ. これより特に $\lim_{G \ni p \to q_0} \beta(p) = 0$ を用いて

$$\limsup_{G \ni p \to q_0} H_\varphi(p) \leq A + \varepsilon$$

が従う. $\varepsilon > 0$ は任意であるからの (16.3.1) の 3 つめの不等号は成り立つ.

次に $B = \varphi(q_0) \wedge \liminf_{\partial G \ni q \to q_0} \varphi(q)$ と置き, 前段のように q_0 の近傍 V と q_0 における barrier を $G \backslash V \neq \emptyset$ かつ

$$B - \varepsilon < \varphi(q), \quad q \in \partial G \cap \overline{V}$$

と

$$\sup_{p \in G \backslash V} \beta(p) \leq -1$$

が成り立つように取り, 今度は

$$v(p) = B - \varepsilon + (B - m)\beta$$

と置く. $q \in \partial G \backslash \overline{V}$ の場合は $G \backslash V$ 上 $\beta \leq -1$ より $\limsup_{G \ni p \to q} v(p) \leq m - \varepsilon < \varphi(q)$ が成り立つ ($q = \infty$ の場合でもこの議論が成り立つことに注意). また $q \in \partial G \cap \overline{V}$ の場合でも $\beta < 0$ より $\limsup_{G \ni p \to q} v(p) \leq B - \varepsilon < \varphi(q)$ が成り立つ. またそして $\infty \in \Gamma(G)$ の場合でも $\limsup_{G \ni p \to \infty} v(p) \leq m - \varepsilon < \varphi(\infty)$ が成り立つ. よって $v \in \mathcal{P}_\varphi$ であり G 上で $v \leq H_\varphi$ が成り立つ. 従って

$$B - \varepsilon = \liminf_{G \ni p \to q_0} v(p) \leq \liminf_{G \ni p \to q_0} H_\varphi(p)$$

が成り立つ. $\varepsilon > 0$ は任意であるからの (16.3.1) の 1 つめの不等号は成り立つ.

$q_0 = \infty \in \Gamma(G)$ の場合は $A = \varphi(\infty) \vee \limsup_{\partial G \ni q \to \infty} \varphi(q)$ と置き, 任意の $\varepsilon > 0$ についてコンパクト集合 K と ∞ における barrier β を

$$\varphi(q) < A + \varepsilon, \quad q \in \Gamma(G) \backslash \operatorname{Int} K$$

と

$$\sup_{p \in G \cap K} \beta(p) \leq -1$$

が成り立つように取る. このとき任意の $u \in \mathcal{P}_{G,\varphi}$ について

$$v(p) = u(p) - A - \varepsilon + (M - A)\beta(p), \qquad p \in G$$

を考えよう. v は G で subharmonic であり $q \in (\partial G) \cap \operatorname{Int} K$ ならば $G \cap K$ 上 $\beta(p) \leq -1$ であるから

$$\limsup_{G \ni p \to q} v(p) = \limsup_{G \backslash K \ni p \to q} u(p) - A - \varepsilon - (M - A) \leq \varphi(q) - M - \varepsilon < 0$$

が成り立つ. また $q \in \Gamma(G) \backslash \operatorname{Int} K$ の場合でも G 上 $\beta < 0$ であるから

$$\limsup_{G \ni p \to q} v(p) = \limsup_{G \ni p \to q} u(p) - A - \varepsilon \leq \varphi(q) - A - \varepsilon < 0$$

である. よって G 上で $v \leq 0$ が成り立つ. よって

$$u(p) \leq A + \varepsilon - (M - A)\beta(p), \quad p \in G$$

が成り立つが, $u \in \mathcal{P}_{G,\varphi}$ の任意性より

$$H_{G,\varphi}(p) \leq A + \varepsilon - (M - A)\beta(p), \quad p \in G$$

が分かる．これと $\lim_{G\ni p\to\infty}\beta(p)=0$ よりに特に

$$\limsup_{G\ni p\to q_0} H_\varphi(p)\le A+\varepsilon$$

が成り立つ．$\varepsilon>0$ は任意であるからの (16.3.1) の 3 つめの不等号は成り立つ．

次に $B=\varphi(\infty)\wedge\liminf_{\partial G\ni q\to\infty}$ と置き，コンパクト集合 K と ∞ における barrier β を

$$B-\varepsilon<\varphi(q),\quad q\in\Gamma(G)\setminus\operatorname{Int}K$$

と

$$\sup_{p\in G\cap K}\beta(p)\le -1$$

が成り立つように取る．そして

$$v(p)=B-\varepsilon+(B-m)\beta$$

と置くと $q\in\Gamma(G)\cap\operatorname{Int}K$ の場合 $G\cap K$ 上 $\beta\le -1$ より $\limsup_{G\ni p\to q}v(p)\le m-\varepsilon<\varphi(q)$ が成り立つ．また $q\in\Gamma(G)\setminus\operatorname{Int}K$ の場合でも $\beta\le 0$ より $\limsup_{G\ni p\to q}v(p)\le B-\varepsilon<\varphi(q)$ が成り立つ．よって $v\in\mathcal{P}_{G,\varphi}$ であり G 上で $v\le H_{G,\varphi}$ が成り立つ．

$$B-\varepsilon=\lim_{G\ni p\to\infty}v(p)\le\liminf_{G\ni p\to q_0}H_\varphi(p)$$

が成り立つ．$\varepsilon>0$ は任意であるからの (16.3.1) の 1 つめの不等号は成り立つ．□

Theorem 16.3.2 より直ちに次が得られる．

Theorem 16.3.3. *G を Riemann 面 S の開部分集合とし，φ を境界 $\Gamma(G)$ 上の有界連続函数とする．このとき各境界点 $q\in\Gamma(G)$ において barrier が存在すれば上包函数 $H_{G,\varphi}$ は Dirichlet 問題の唯一の解である．つまり $H_{G,\varphi}$ は G で調和であり各 $q\in\Gamma(G)$ について $\lim_{G\ni p\to q_0}H_{G,\varphi}(p)=\varphi(q)$ が成り立ち，このような境界条件を満たす G 上の調和函数は $H_{G,\varphi}$ のみである．*

Definition 16.3.4. *G を Riemann 面 S の開部分集合とする．このとき境界点 $q_0\in\Gamma(G)$ が Dirichlet 問題に関する正則点であるとは，$\Gamma(G)$ 上の任意の有界函数 φ について (16.3.1) が成り立つときを言う．*

Theorem 16.3.5. *Riemann 面 S の開部分集合 G の境界点 $q_0\in\partial G$ について q_0 における G 上の barrier が存在すれば q_0 は G における Dirichlet 問題の正則点である．また G が $\mathbb{C}$ 内の有界領域ならば逆が成り立つ．つまり $\zeta_0\in\partial G$ が G に関する Dirichlet 問題の正則点であれば ζ_0 における G 上の barrier が存在する．*

Proof. 前半は既に示しているので，後半を示そう．$\varphi(\zeta)=|\zeta-\zeta_0|$, $\zeta\in\partial G$ により ∂G 上の連続函数 φ を定義し，この境界函数に関する Dirichlet 問題を考え Perron 族 $\mathcal{P}_\varphi$ を取る．このとき G 上の函数 $u(z)=|z-\zeta_0|$ は劣調和であり，明らかに $\mathcal{P}_\varphi$ に属す．よって $|z-\zeta_0|\le H_\varphi(z)$ が成り立つので

$$0\le|\zeta-\zeta_0|=\liminf_{G\ni z\to\zeta}|z-\zeta|\le\liminf_{G\ni z\to\zeta}H_\varphi(z),\quad \zeta\in\partial G$$

が成り立つ．これより $-H_\varphi$ が ζ_0 における G 上の barrier であることが従う．□

16.4 局所 barrier と局所弱 barrier

barrier の定義を局所的なものに変更し, 緩めた概念である局所 barrier というものを定義しよう. そして前節で定義した barrier と紛らわしくて混乱の恐れがあるので, 前節のものを大域的 barrier と呼ぶことにする. そして局所 barrier が存在すれば, それを用いて大域的 barrier が構成出来ることを示そう.

Definition 16.4.1. 函数 β が *Riemann* 面 S の開部分集合 G の境界点 $q_0 \in \partial\Omega$ における局所 *barrier* であるとは, q_0 のある近傍 U について $\Omega \cap U$ 上で定義された劣調和 *(*つまり $\Omega \cap U$ の各成分で劣調和かつ $\neq -\infty$*)* 函数であり, 次の 2 条件を満たすものを言う.

(a) $\displaystyle\lim_{G\cap U \ni p \to q_0} \beta(p) = 0.$

(b) $\overline{V} \subset U$ を満たす q_0 の任意の近傍 V について $\displaystyle\sup_{G\cap(U\setminus V)} \beta(p) < 0.$

また $\infty \in \Gamma(G)$ のとき *(*つまり $\overline{G}$ がコンパクトでないとき*)* β が ∞ における局所 *barrier* であるとは, β があるコンパクト集合 K について $G\setminus K$ で定義された劣調和 *(*つまり $G\setminus K$ の各成分で, 劣調和かつ $u \neq -\infty$*)* であり, 次の 2 条件を満たすものを言う.

(a) $\displaystyle\lim_{G\setminus K \ni p \to \infty} \beta(p) = 0.$

(b) $K \subset \operatorname{Int} L$ を満たす任意のコンパクト集合 L について $\displaystyle\sup_{p\in G\cap(L\setminus K)} \beta(p) < 0$ を満たす.

β が $q_0 \in \partial G$ における大域的 barrier ならば $U = S$ と置くと $G = G \cap S$ で定義された局所 barrier である. 従って大域的 barrier は局所 barrier でもある. また q_0 の任意の近傍 U について β を $G \cap U$ に制限すれば, ここで定義された局所 barrier である. 同様に β が $\infty \in \Gamma(G)$ における大域的 barrier ならば例えば $q \in \partial G$ を適当に取り, $K = \{q\}$ と置けば β は $G = G\setminus K$ で定義された ∞ における局所 barrier である. また任意のコンパクト集合 K について β を $G\setminus K$ に制限すれば, ここで定義された局所 barrier である.

重要なのは, 局所 barrier が与えられたときよい性質を持つ大域的な barrier を構成出来ることである. これを認めると, barrier が存在するという性質は局所的に定まる性質ということになる. ここではまず大域的な barrier の構成のための準備として次を示す.

Proposition 16.4.2. $\overline{U}$ がコンパクトである $q_0 \in \partial G$ の近傍 U について $G \cap U$ 上で定義された $q_0 \in \partial G$ における局所 *barrier* β は

(b') 各 $q \in \partial(G \cap U)\setminus\{q_0\}$ について $\displaystyle\limsup_{\Omega\cap U \ni p \to q} \beta(p) < 0.$

また β がコンパクト集合 K について $G\setminus K$ で定義された $\infty \in \Gamma(G)$ における *barrier* ならば

(b') $q \in \partial(G\setminus K)$ について $\displaystyle\limsup_{G\setminus K \ni p \to q} \beta(p) < 0.$

逆に $\overline{U}$ がコンパクトな $q_0 \in \partial G$ の近傍 U について $G \cap U$ *(*または $\infty \in \Gamma(G)$ の場合はコンパクト集合 K について $K\setminus K$ *)* 上で定義された劣調和函数 β が (a), (b') を満たせば q_0 *(*または ∞ *)* における局所 *barrier* である.

Proof. (a) を仮定した上で (b) $\iff$ (b') を示せばよい．はじめに $q_0 \in \partial G$ の場合について証明する．

$\Longleftarrow$ を示すために $q \in \partial(G \cap U)\backslash\{q_0\}$ とする．このとき $q \notin \overline{V} \subset U$ を満たす q_0 の近傍 V を取れば

$$\limsup_{G\cap U \ni p \to q} \beta(p) = \limsup_{G\cap (U\backslash \overline{V}) \ni p \to q} \beta(p) \leq \inf_{z \in G \cap (U \backslash \overline{V})} \beta(p) < 0$$

より (b) が従う．

次に $\Longrightarrow$ を示そう．はじめに $G \cap U$ 上 $\beta < 0$ であることに注意する．実際 D を $G \cap U$ の成分とすると $\partial D \subset \partial(G \cap U)$ であるから任意の $q \in \partial D\backslash\{q_0\}$ について

$$\limsup_{D \ni p \to q} \beta(p) \leq \limsup_{G \cap U \ni p \to q} \beta(p) < 0$$

が成り立つ．q_0 は ∂D に属さないときは (どのような場合にそうなるか例を作って見よ), これで D のすべての境界点で $\limsup_{D \ni p \to q} \beta(p) \leq 0$ が成り立つことになる．また q_0 が ∂D に属す場合でも,

$$\limsup_{D \ni p \to q_0} \beta(p) \leq \limsup_{\Omega \cap U \ni p \to q_0} \beta(p) = \lim_{\Omega \cap U \ni p \to q_0} \beta(p) = 0$$

が成り立つので, やはり D のすべての境界点で $\limsup_{D \ni p \to q} \beta(p) \leq 0$ が成り立つ．ここで閉集合 $\overline{D}$ はコンパクト集合 $\overline{U}$ の部分集合であるからコンパクトであり, 上で見たように ∂D の全ての境界点において $\limsup_{D \ni p \to q} \beta(p) \leq 0$ である．よって最大値の原理より D 上で $\beta \leq 0$ である．また $\beta(p_0) = 0$ となる $p_0 \in D$ が存在すれば, $\beta = 0$ となり, 境界条件に反する．よって D 上で $\beta < 0$ であり, これが任意の成分について成り立つので $G \cap U$ 上で $\beta < 0$ である．

それでは (b') を背理法で示そう．もし $\sup_{p \in G \cap (U \backslash \overline{V})} \beta(p) = 0$ ならば $\beta(p_n) \to 0$ を満たす点列 $\{p_n\} \subset G \cap (U \backslash \overline{V})$ が存在する．$\overline{U}$ はコンパクトであるから必要ならば部分列を取ることにより $p_n \to q$ と仮定してよい．このとき $q \in \overline{G \cap U}\backslash V$ である．$q \in G \cap U$ ならば $0 = \limsup_{n \to \infty} \beta(p_n) \leq \beta(q_0) < 0$ となり矛盾を生じる．よって

$$q \in \partial(G \cap U)\backslash V \subset \partial(G \cap U)\backslash\{q_0\}$$

これは (b) $\limsup_{\Omega \cap U \ni p \to q} \beta(p) < 0$ に矛盾する．

今度は β がコンパクト集合 K について $G\backslash K$ で定義された ∞ における局所 barrier である場合を考えよう．$\Longleftarrow$ を示すために $q \in \partial(G\backslash K)$ とする．このとき $K \cup \{q\} \subset \operatorname{Int} L$ を満たすコンパクト集合 L を取れば

$$\limsup_{G \backslash K \ni p \to q} \beta(p) = \limsup_{G \cap (\operatorname{Int} L \backslash K) \ni p \to q} \beta(p) \leq \sup_{G \cap (\operatorname{Int} L \backslash K)} \beta(p) < 0$$

次に $\Longrightarrow$ を示そう．まず $G\backslash K$ 上 $\beta < 0$ であることに注意する．実際 D を $G\backslash K$ の成分とすると $\partial D \subset \partial(G\backslash K)$ であるから任意の $q \in \partial D$ について

$$\limsup_{D \ni p \to q} \beta(p) \leq \limsup_{\Omega \backslash K \ni p \to q} \beta(p) < 0$$

が成り立つ．$\overline{D}$ がコンパクトの場合は, 最大値の原理より D 上で $\beta \leq 0$ である．また $\overline{D}$ がコンパクトでないときでも

$$\limsup_{D \ni p \to \infty} \beta(p) \leq \limsup_{G \backslash K \ni p \to \infty} \beta(p) = \lim_{G \backslash K \ni p \to q_0} \beta(p) = 0$$

が成り立つ．よってやはり最大値の原理より D 上で $\beta \leq 0$ である．また $\beta(p_0) = 0$ となる $p_0 \in D$ が存在すれば, D 上 $\beta = 0$ となり, 境界条件に反する．よって D 上で $\beta < 0$ であり, これが任意の成分について成り立つので $G\backslash K$ 上で $\beta < 0$ である．

それでは (b') を背理法で示そう．もし $\sup_{p \in G \cap (\operatorname{Int} L \backslash K)} \beta(p) = 0$ ならば $\beta(p_n) \to 0$ を満たす点列 $\{p_n\} \subset G \cap (\operatorname{Int} L\backslash K)$ が存在する．L はコンパクトであるから必要ならば部分列を取ることにより $p_n \to q$ と仮定してよい．このとき $q \in \overline{G\backslash K} \cap L$ である．$q \in G\backslash K$ ならば $0 = \limsup_{n \to \infty} \beta(p_n) \leq \beta(q) < 0$ となり矛盾を生じる．よって

$$q \in \partial(G\backslash K) \cap L \subset \partial(G\backslash K)$$

これは (b) $\limsup_{G\setminus K\ni p\to q}\beta(p)<0$ に矛盾する． □

それでは局所 barrier からよい性質を持った大域的 barrier を構成する方法について述べよう．

Theorem 16.4.3. *$q_0\in\partial\Omega$ とし，U を $\overline{U}$ がコンパクトである q_0 の近傍，β_0 を $\Omega\cap U$ で定義された q_0 における局所 barrier とする．このとき $\overline{V}\subset U$ を満たす q_0 の近傍 V について q_0 における Ω で定義された barrier β で $\Omega\setminus V$ 上で $\beta\le -1$ を満たすものが存在する．また $\infty\in\Gamma(\Omega)$ のとき，コンパクト集合 K について $\Omega\setminus K$ で定義された ∞ における局所 barrier β_0 が存在すれば任意の $K\subset \operatorname{Int}L$ を満たす任意のコンパクト集合 L について Ω で定義された ∞ における barrier β で $\Omega\cap L$ 上 $\beta\le -1$ を満たすものが存在する．*

Proof. $q_0\in\partial\Omega$ における局所 barrier β_0 の場合に示そう．β_0 は $\overline{U}$ がコンパクトな q_0 の近傍 U について $\Omega\cap U$ で定義されているとする．$\overline{V}\subset U$ を満たす q_0 の近傍 V について Proposition 16.4.2 (b') より

$$\sup_{p\in\Omega\cap(U\setminus\overline{V}}\beta_0(p)=-m,\quad m>0$$

と置くことが可能である．そこで以下のように Ω 上の関数 β を定義する．

$$\beta(p)=\begin{cases}\left(\frac{1}{m}\beta_0(p)\right)\vee(-1), & p\in\Omega\cap\overline{V}\\ -1, & p\in\Omega\setminus\overline{V}\end{cases}$$

このとき開集合 $\Omega\setminus\overline{V}$ 上で $\beta=-1$ であるから，β はここで劣調和である．また $\Omega\cap U$ 上で

$$\beta(p)=\left(\frac{1}{m}\beta_0(p)\right)\vee(-1),\quad p\in\Omega\cap U \tag{16.4.1}$$

が成り立つことに注意すれば β は $\Omega\cap U$ でも劣調和である．従って $(\Omega\setminus\overline{V})\cup(\Omega\cap U)=\Omega$ で劣調和である．

次に境界挙動を調べよう．まず $\lim_{\Omega\ni p\to q_0}\beta_0(p)=0$ より q_0 のある近傍と Ω の共通部分上で $\beta(p)=\frac{1}{m}\beta_0(p)$ であるから

$$\lim_{\Omega\ni p\to q_0}\beta(p)=\lim_{\Omega\cap V\ni p\to q_0}\frac{1}{m}\beta_0(p)=0$$

である． また $q\in\Gamma(\Omega)\setminus\{q_0\}$ について $q\in U$ ならば (16.4.1) より q のある近傍と Ω の共通部分で $\beta(p)=\left(\frac{1}{m}\beta_0(p)\right)\vee(-1)$ であるから

$$\limsup_{\Omega\ni p\to q}\beta(p)\le\left(\frac{1}{m}\limsup_{\Omega\ni p\to q}\beta_0(p)\right)\vee(-1)<0$$

が成り立つ．$q\notin\overline{V}$ ならば (以下の議論は $q=\infty$ の場合も通用することに注意) q のある近傍と Ω の共通部分で $\beta(p)=-1$ であるから $\limsup_{\Omega\ni p\to q}\beta(p)=-1$ である．

今度は β_0 をコンパクト集合 K について $\Omega\setminus K$ で定義された ∞ における局所 barrier とする．$K\subset\operatorname{Int}L$ を満たすコンパクト集合 L を取れば $\sup_{p\in\Omega\cap(\operatorname{Int}L\setminus K)}\beta(p)=-m$ と置くと $m>0$ である．そこで

$$\beta(p)=\begin{cases}\max\left\{\frac{\beta_0(p)}{m},-1\right\}, & p\in\Omega\setminus\operatorname{Int}L\\ -1, & p\in\Omega\cap\operatorname{Int}L\end{cases}$$

と置く．定義式より開集合 $\Omega\cap\operatorname{Int}L$ の各成分で劣調和であること及び $q\in\partial\Omega\cap\operatorname{Int}L$ について

$$\limsup_{\Omega\ni p\to q}\beta(p)=\limsup_{\Omega\cap\operatorname{Int}L\ni p\to q}\beta(p)=-1$$

が直ちに従う．また $\Omega\setminus K$ 上で

$$\beta(p)=\left(\frac{1}{m}\beta_0(p)\right)\vee(-1),\quad p\in\Omega\setminus K \tag{16.4.2}$$

が成り立つことに注意すれば $\Omega\backslash K$ で劣調和であり, $q \in (\partial\Omega)\backslash K$ について

$$\limsup_{\Omega\ni p\to q}\beta(p) = \limsup_{\Omega\cap\backslash K\ni p\to q}\beta(p) = \left(\limsup_{\Omega\cap\backslash K\ni p\to q}\frac{1}{-}\beta_0(p)\right)\vee(-1) < 0$$

が成り立つことも分かる．従って $(\Omega\cap\operatorname{Int}L)\cup(\Omega\backslash K) = \Omega$ で劣調和であり $q \in (\Omega\cap\operatorname{Int}L)\cup(\Omega\backslash K) = \partial\Omega$ について $\limsup_{\Omega\ni p\to q}\beta(p) < 0$ が成り立つ．最後に $\lim_{\Omega\backslash K}\ni\to\infty\beta_0(p) = 0$ より ∞ のある近傍と Ω の共通部分において $\beta(p) = \frac{1}{m}\beta_0(p)$ であり $\lim_{\Omega\backslash K}\ni\to\infty\beta(p) = 0$ である．よって β は ∞ における大域的 barrier である． □

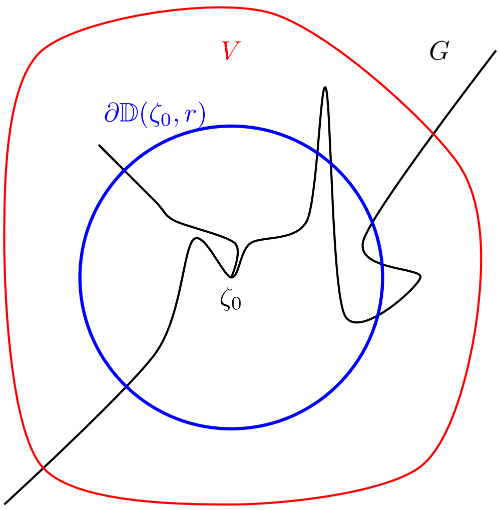
以下では局所 barrier の定義から条件 (b) (または (b')) を除いて定義される局所弱 bariier を導入する．そして局所弱 barrier から局所 barrier を構成する方法を述べよう．

Definition 16.4.4. *G を Riemann 面 S の開集合とし $q_0 \in \partial G$ とする．このとき函数 β_0 が q_0 における局所弱 barrier であるとは β_0 が q_0 のある近傍 V について $G\cap V$ 上で定義された劣調和函数であり, $G\cap V$ 上 $\beta_0 < 0$ かつ $\lim_{G\cap V p\to q_0}\beta_0(p) = 0$ を満たすときを言う．*

同様に $q_0 = \infty \in \Gamma(G)$ のとき ∞ における局所弱 barrier も定義することは可能であるが, 次に紹介する Bouligand の定理 ([4]) の証明には q_0 を中心とする局所座標が必要なので, 導入はしないでおく．

局所弱 barrier から局所 barrier を構成するには次の定理を用いる．

Theorem 16.4.5 (Bouligand)**.** *G を $\mathbb{C}$ の有界開集合とし, $\zeta_0 \in \partial G$ とする．β_0 が ζ_0 における局所弱 barrier ならば, U 上の調和函数 h で ζ_0 における大域的 barrier であるものが存在する．*



Proof. G は有界であるから $M = \max_{\zeta\in\partial G}|\zeta-\zeta_0|$ と置くと $\varphi(\zeta) = |\zeta-\zeta_0|$, $\zeta\in\partial G$ は $0 \le \varphi \le M$ を満たす．このとき G 上の劣調和函数 u で $\limsup_{G\ni z\to\zeta}u(z) \le \varphi(\zeta)$, $\forall\zeta\in\partial\Omega$ を満たすものの全体 $\mathcal{P}_\varphi$ は Peroon 族である．従って上包函数 $H_\varphi(z) = \sup_{u\in\mathcal{P}_\varphi}u(z)$, $z\in G$ は Ω で調和である．また函数 $u_0(z) := |z-\zeta_0|$, $z\in G$ は G で劣調和であり, 明らかに $u_0 \in \mathcal{P}_\varphi$ である．従って

$$u_0(z) = |z-\zeta_0| \le H_\varphi(z) \le M, \quad z\in G$$

が成り立つ．よって $h = -\varphi$ と置けば,

$$\sup_{z\in G\backslash\overline{\mathbb{D}}(\zeta_0,\rho)} h(z) \le -\rho, \quad 0<\rho<M$$

を満たすので, h は条件 (b') を満たす.

それでは $\lim_{G\ni z\to\zeta_0} H_\varphi(z) = 0$ を示そう. これが示されれば $h = -H_\varphi$ は条件 (a) も満たし, 調和な大域的 barrier である. β_0 は q_0 の近傍 V により $G\cap V$ で定義された局所弱 barrer であるとする. $\overline{\mathbb{D}}(\zeta_0, r) \subset V$, $0 < r < M$ を満たす r を任意に取る. このとき $r < M$ より $G \cap \partial\mathbb{D}(\zeta_0, r) \neq \emptyset$ が成り立つことに注意しよう. 円周 $\partial\mathbb{D}(\zeta_0, r)$ の角測度を θ で表す. $G \cap \partial\mathbb{D}(\zeta_0, r)$ は高々可算個の開円弧の和であるから, $\partial\mathbb{D}(\zeta_0, r)$ 内の互いに交わらない閉円弧の有限和 F で

$$F \subset \partial\mathbb{D}(\zeta_0, r) \cap G, \qquad \theta(F) > \theta(\partial\mathbb{D}(\zeta_0, r) \cap \Omega) - \frac{2\pi r}{M}$$

を満たすものが存在する. このとき $\mathbb{D}(\zeta_0, r)$ における Poisson 積分で境界値として $(\partial\mathbb{D}(\zeta_0, r) \cap G)\backslash F$ 上で値 M, 残りの $F \cup (\partial\mathbb{D}(\zeta_0, r)\backslash G)$ 上で値 0 を与えたものを $p(z)$ と置く. このとき中心点 ζ_0 における p の値は

$$p(\zeta_0) = M\frac{\theta(\partial\mathbb{D}(\zeta_0, r) \cap G) - \theta(F)}{2\pi} < r$$

を満たす. また集合 $(G \cap \partial\mathbb{D}(\zeta_0, r))\backslash F$ は $\partial\mathbb{D}(\zeta_0, r)$ の開集合であるから, 各 $\zeta \in \partial\mathbb{D}(\zeta_0, r) \cap \Omega\backslash F$ について

$$\lim_{\mathbb{D}(\zeta_0, r)\ni z\to\zeta} p(z) = M \tag{16.4.3}$$

が成り立つ.

ここで $-m = \inf_{z\in F} \beta_0(z)$ と置くと, β_0 の上半連続性と $\beta_0 < 0$ より $m > 0$ である. 任意の $u \in \mathcal{P}_\varphi$ について

$$u_1(z) = u(z) + \frac{M}{m}\beta_0(z) - p(z), \quad z \in G \cap \mathbb{D}(\zeta_0, r)$$

と置く. このとき $G \cap \mathbb{D}(\zeta_0, r)$ の任意の成分 D 上で $u_1 \leq r$ が成り立つことを示そう. これには u_1 の劣調和性より, 各 $\zeta \in \partial D$ について $\limsup_{D\ni z\to\zeta} u_1(z) \leq r$ が成り立つことを示せば十分である.

$$\begin{aligned}\partial D \subset \partial(G \cap \mathbb{D}(\zeta_0, r)) \subset &(\partial G \cap \overline{\mathbb{D}}(\zeta_0, r)) \cup (\overline{G} \cap \partial\mathbb{D}(\zeta_0, r))\\ = &(\partial G \cap \overline{\mathbb{D}}(\zeta_0, r)) \cup (G \cap \partial\mathbb{D}(\zeta_0, r))\end{aligned}$$

に注意すれば, 以下のように 2 つの場合に示せばよい.

$\zeta \in \partial G \cap \overline{\mathbb{D}}(\zeta_0, r)$ の場合は, $\beta < 0$, $p > 0$ より $u_1(z) < u(z)$ が成り立つことと $u \in \mathcal{P}_\varphi$ より

$$\limsup_{D\ni z\to\zeta} u_1(z) \leq \limsup_{D\ni z\to\zeta} u(z) \leq \limsup_{G\ni z\to\zeta} u(z) \leq \varphi(\zeta) = |\zeta - \zeta_0| \leq r$$

が成り立つ. $\zeta \in G \cap \partial\mathbb{D}(\zeta_0, r)$ の場合は, さらに細かく $\zeta \in F$ とそうでないときに分けて考えよう. $\zeta \in F$ のときは

$$\begin{aligned}\limsup_{D\ni z\to\zeta} u_1(z) \leq &\limsup_{D\ni z\to\zeta} u(z) + \frac{M}{m}\limsup_{D\ni z\to\zeta} \beta_0(z) \qquad (\because p \text{ の正値性より})\\ \leq &\limsup_{G\ni z\to\zeta} u(z) + \frac{M}{m}\limsup_{G\cap V\ni z\to\zeta} \beta_0(z)\\ \leq &M + \frac{M}{m}\beta_0(\zeta) \qquad (\because u \leq M \text{ と } \beta_0 \text{ の下半連続性より})\\ \leq &M - \frac{M}{m}m \qquad (\because F \text{ 上 } \beta_0 \leq -m \text{ より})\\ = &0\end{aligned}$$

最後に $\zeta \in (\Omega \cap \partial\mathbb{D}(\zeta_0, r))\backslash F$ の場合は

$$\begin{aligned}\limsup_{D\ni z\to\zeta} u_1(z) \leq &\limsup_{D\ni z\to\zeta} u(z) - \liminf_{D\ni z\to\zeta} p(z) \qquad (\because \beta_0 < 0 \text{ より})\\ \leq &\limsup_{\Omega\ni z\to\zeta} u(z) - \liminf_{\mathbb{D}(\zeta_0, r)\ni z\to\zeta} p(z)\\ \leq &M - M = 0 \qquad (\because u \leq M \text{ と } (16.4.3) \text{ より})\end{aligned}$$

以上で $\Omega\cap\mathbb{D}(\zeta_0,r)$ の任意の成分 D 上で $u_1\le r$ 従って $u\le -\frac{M}{m}\beta_0+p+r$ が成り立つことが示された．この不等式と $u\in\mathcal{P}_\varphi$ の任意性より $G\cap\mathbb{D}(\zeta_0,r)$ 上で $H_\varphi\le -\frac{M}{m}\beta_0+p+r$ が成り立つ．ここで $\lim_{G\ni z\to\zeta_0}\beta_0(z)=0$ と $\lim_{\mathbb{D}(\zeta_0,r)\ni z\to\zeta_0}p(z)=p(\zeta_0)<r$ より

$$\limsup_{G\cap\mathbb{D}(\zeta_0,r)\ni z\to\zeta_0} H_\varphi(z)\le 2r$$

が従う．r の任意性と $0<|z-\zeta_0|\le H_\varphi(z)$ より，$\lim_{\Omega\ni z\to\zeta_0}H_\varphi(z)=0$ が成り立つ．よって H_φ は ζ_0 における Ω の barrier である． □

16.5 barrier と上包函数の境界挙動

Corollary 16.5.1. *G を Riemann 面 S の開集合とする．$\overline{G}$ がコンパクトならば全ての境界点 $q\in\partial G$ において局所弱 barrier が存在するとし，$\overline{G}$ がコンパクトでないときは加えて ∞ において局所 barrier が存在するとする．このとき境界 $\Gamma(G)$ 上の任意の連続函数 φ について Diriclet 問題の解，つまり G 上の調和函数 h で*

$$\lim_{G\ni z\to\zeta}h(z)=\varphi(\zeta),\quad \zeta\in\partial G$$

を満たすものが一意的に存在する．

Proof. $q_0\in\partial G$ とし，q_0 の近傍 U について $G\cap U$ で定義された局所弱 barrier β_0 が存在するとしよう．q を中心とする座標円板 V で $\overline{V}\subset U$ を満たすもの及び $\overline{V}$ を含む領域で定義された座標函数 $\psi:V\to\mathbb{C}$ を取れば $\beta_0\circ\psi^{-1}$ は $\psi(G\cap V)$ において定義された $\psi(q_0)$ における局所弱 barrier である．よって Bouligand の定理 (Theorem 16.4.5) より $\psi(G\cap V)$ において定義された $\psi(q_0)$ に関する barrier α_0 が存在する．このとき $\alpha_0\circ\psi$ は $G\cap V$ で定義された q_0 における局所 barrier であるから，Theorem 16.4.3 により G で定義された q_o における大域的 barrier が存在する．

$\infty\in\Gamma(G)$ の場合は仮定より ∞ における局所 barrier が存在するから再び Theorem 16.4.3 により G で定義された ∞ における大域的 barrier が存在する． □

Corollary 16.5.2. *G を Riemann 面 S の部分領域とし，$\overline{G}$ はコンパクトであり全ての境界点 $q\in\partial G$ において barrier が存在するとする．このとき境界 ∂G 上の任意の連続函数 φ について Diriclet 問題の解，つまり G 上の調和函数 h で*

$$\lim_{G\ni z\to\zeta}h(z)=\varphi(\zeta),\quad \zeta\in\partial G$$

を満たすものが一意的に存在する．

16.6 非有界領域における Dirichlet 問題の解の存在

$\overline{\Omega}$ がコンパクトでないとき，コンパクト化する前の本来の Dirichlet 問題について考えよう．この場合，一意性を犠牲にすれば ∞ における barrier の存在を仮定しなくても解を持つことを容易に示すことが出来る．

Theorem 16.6.1. *Ω を Riemann 面 S の部分領域とし，$\overline{\Omega}$ はコンパクトでないとする．また全ての境界点 $q\in\partial\Omega$ において barrier が存在するとする．このとき境界 $\partial\Omega$ 上の任意の有界連続函数 φ について Diriclet 問題の解，つまり Ω 上の調和函数 h で*

$$\lim_{\Omega\ni p\to q}h(p)=\varphi(q),\quad q\in\partial\Omega$$

を満たすものが存在する．

Proof. $\ell \in \mathbb{R}$ を任意に取り, $\varphi(\infty) = \ell$ と置く．また $m \le \varphi(q) \le M$, $q \in \Gamma(\Omega)$ を満たす $m, M \in \mathbb{R}$ を取り, コンパクト化された Dirichlet 問題を考える．このときの $\mathcal{P}_\varphi$ は

$$\mathcal{P}_\varphi = \{u : u \text{ は } \Omega \text{ 上の劣調和函数で, 任意の } q \in \Gamma(\Omega) \text{ について) } \limsup_{\Omega \ni p \to q} u(p) \le \varphi(q) \text{ を満たす．}\}$$

により定義され, 空でない Perron 族であり, 上包函数 $H_\varphi(p) = \sup_{u \in \mathcal{P}_\varphi} u(p)$, $p \in \Omega$ は Ω で調和である．そして φ は $\partial\Omega$ において連続であるから Theorem 16.3.2 より

$$\lim_{\Omega \ni p \to q} H_\varphi(p) = \varphi(q), \quad q \in \partial\Omega$$

を満たす．従って H_φ はコンパクト化する前の Dirichlet 問題の解である． □

さて上の証明中の $u \in \mathcal{P}_\varphi$ は ∞ において

$$\limsup_{\Omega \ni p \to \infty} u(p) \le \varphi(\infty) = \ell$$

を満たすが, だからといって $\limsup_{\Omega \ni p \to \infty} H_\varphi(p) \le \varphi(\infty) = \ell$ が成り立つことは保証されない．

Example 16.6.2. $S = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\Omega = \mathbb{D}\backslash\{0\}$ とすると *Riemann* 面 S に関する無限遠点は 0 と *Riemann* 球面の ∞ の和である．しかしながら Ω を考える限り S の無限遠点は 0 の 1 点のみとして差し支えない．また S 内での Ω の境界 $\partial\Omega$ は単位円周 $\partial\mathbb{D}$ であり, 0 は含まれない．ここで φ を $\partial\mathbb{D}$ 上の任意の実連続函数とし $\varphi(0) = \ell \in \mathbb{R}$ を任意に与え *Dirichlet* 問題を考えよう．このときの *Perron* 族 $\mathcal{P}_\varphi$ は $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ 上の劣調和函数 u で

$$\limsup_{z \to \zeta} u(z) \le \varphi(\zeta), \quad \zeta \in \partial\mathbb{D}$$
$$\limsup_{z \to 0} u(z) \le \ell$$

を満たすもの全てよりなる．このとき上包函数 H_φ は φ の単位円板における *Poisson* 積分 h に一致し $H_\varphi(0)$ は ℓ とは無関係である．またこれより 0 において *barrier* は存在しないことも従う．

$H_\varphi = h$ の証明. h を φ の単位円板における Poisson 積分とすると任意の $\alpha > 0$ について $h(z) + \alpha \log|z|$ は上の境界条件を満たし $\mathcal{P}_\varphi$ に属する．よって

$$h(z) + \alpha \log|z| \le H_\varphi(z), \quad 0 < |z| < 1$$

が成り立つ．また任意の $\alpha > 0$ について $v(z) = h(z) - \alpha \log|z|$ は優調和で

$$\limsup_{z \to \zeta} (u(z) - v(z)) \le \varphi(\zeta) - \varphi(\zeta) = 0$$
$$\limsup_{z \to 0} u(z) - (h(z) - \alpha \log|z|) = -\infty$$

であるから $u \le v$ が成り立つ．$u \in \mathcal{P}_\varphi$ は任意であるから

$$H_\varphi(z) \le h(z) - \alpha \log|z|, \quad 0 < |z| < 1$$

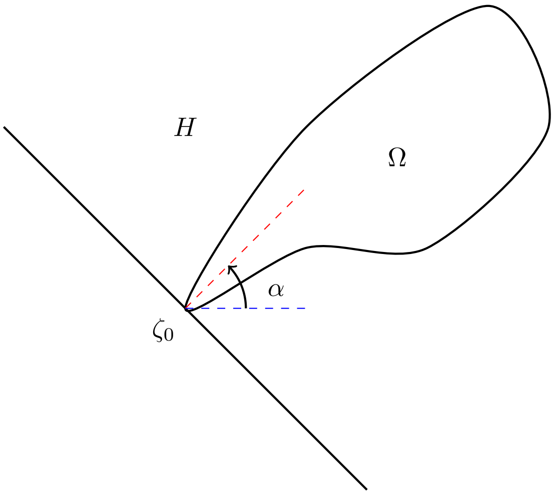
が成り立つ．これらの 2 つの不等式において $\alpha \searrow 0$ とすれば $H_\varphi = h$ を得る． □

Example 16.6.3. $0 < r < 1 < R$ について $S = \mathbb{D}(0, R)\backslash\overline{D(0, r)}$ を *Riemann* 面とし, $\Omega = S\backslash\overline{\mathbb{D}}$ とする．S の部分領域 Ω において *Dirichlet* 問題を考える限り S の無限遠点は $\partial\mathbb{D}(0, R)$ として差し支えない．以後 ∞ を用いてこれを表す．また S 内での Ω の境界 $\partial\Omega$ は単位円周 $\partial\mathbb{D}$ である．このとき $\log\frac{|z|}{R}$ は ∞ における *barrier* を与える．

16.7　barrier の存在を保証する条件

領域 Ω の境界点 $\zeta_0 \in \partial\Omega$ における barrier が存在するための十分条件で有用なものを幾つか述べておこう．

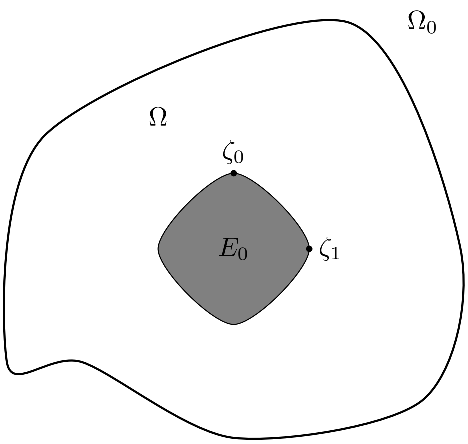
それでは有界領域 Ω の境界点 $\zeta_0 \in \partial\Omega$ における barrier が存在するための十分条件で $\partial\Omega$ または $\mathbb{C}\backslash\Omega$ に関する幾何学的で判定しやすいものを幾つか考えてみよう．まず有界領域 Ω が開半平面 H に含まれ, $\zeta_0 \in \partial\Omega \cap \partial H$ の場合を考えよう．



H の ζ_0 における内向きの法線と実軸とがなす角を α と置けば $\beta_0(z) = \operatorname{Im} e^{-i\alpha}(z - -\zeta_0)$ は H で正値であり明らかに $\lim_{\Omega \ni z \to \zeta_0} \beta_0(z) = 0$ である．従って Theorem **??** より ζ_0 における Ω の barrier が存在する．

次の条件を与える前に, 2 点以上を含む連結コンパクト集合のことを連続体 (continuum) と呼んだことを思い出しておこう．

Theorem 16.7.1. Ω を有界な領域とし, $\zeta_0 \in \partial\Omega$ とする．このとき $\zeta_0 \in E \subset \mathbb{C}\backslash\Omega$ を満たす連続体 E が存在すれば ζ_0 における Ω の *barrier* が存在する．



Proof. E は ζ_0 以外の点も含むので, その中の 1 つを ζ_1 と置く．$E \subset \hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ であるから E を含む $\hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ の成分が存在

するので E_0 と置く．E_0 も $\hat{\mathbb{C}}$ の連結閉集合であり $E_0 \subset \hat{\mathbb{C}} \backslash \Omega$ より $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}} \backslash E_0$ が成り立つ．よって $\hat{\mathbb{C}} \backslash E_0$ の成分 Ω_0 で Ω を含むものが一意的に存在する．

このとき Ω_0 は $\hat{\mathbb{C}}$ の連結閉集合の補集合の成分であるから $\hat{\mathbb{C}}$ の部分領域として単連結である．これは次のようにして分かる．一次変換 $\tau(z) = \frac{z-\zeta_0}{z-\zeta_1}$ による像領域 $\tau(\Omega_0)$ は $\hat{\mathbb{C}} \backslash \tau(E_0)$ の成分である．$\tau(\Omega_0)$ 内の任意の Jordan 曲線 γ について, $\gamma \cap \tau(E_0) = \emptyset$ であるから Jordan の曲線定理より連結集合 $\tau(E_0)$ は, γ の内側または外側の領域のどちらか一方に含まれる．しかしながら $\infty = \tau(\zeta_1) \in \tau(E_0)$ であるから, $\tau(E_0)$ は非有界であり, 前者の場合は起こりえない．従って $\tau(E_0)$ は γ の外側の領域に含まれ, 特に γ と γ の内側の領域の和集合 (これも連結である) は $\tau(E_0)$ と共通部分を持たないことが分かる．よってこの和集合は $\hat{\mathbb{C}} \backslash \tau(E_0)$ の連結成分の 1 つに含まれるが, $\gamma \subset \Omega_0$ であるから, その成分とは Ω_0 に他ならない．以上で $\tau(\Omega_0)$ 内の任意の Jordan 曲線について γ の内側の領域は $\tau(\Omega_0)$ に含まれる．よって $\tau(\Omega_0)$ は $\mathbb{C}$ 内の単連結領域である．

Ω_0 の単連結性と $0 \notin \Omega_0$ より $\log w$ の一価な分枝が存在する．これに τ を合成して

$$f(z) = u(z) + iv(z) := \log \frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_0}, \quad z \in \Omega_0$$

と置けば $u(z) = \log \left| \frac{z-\zeta_0}{z-\zeta_1} \right|$ は開集合 $\Omega_0 \cap \mathbb{D}(\zeta_0, r_0)$, $r_0 = \frac{|\zeta_0-\zeta_1|}{2}$ において $u(z) < 0$ であり,

$$\lim_{\Omega \ni z \to \zeta_0} u(z) = \lim_{\Omega \ni z \to \zeta_0} \log \left| \frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_0} \right| = -\infty$$

を満たす．よって函数 $\beta_0(z) = -\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{f(z)}\right\} = \frac{-u(z)}{u(z)^2+v(z)^2}$ は $\Omega \cap \mathbb{D}(\zeta_0, r_0)$ において正値であり, $0 \leq \beta_0(z) \leq \frac{-u(z)}{u(z)^2+v(z)^2} \leq \frac{1}{-u(z)}$ より

$$\lim_{\Omega \ni z \to \zeta_0} \beta_0(z) = 0$$

が成り立つ．よって Theorem **??** より ζ_0 における Ω の barrier が存在する． □

第 17 章

Radó の定理と Runge 領域

17.1 微分形式

17.2 Riemann 面の第 2 可算性 –Radó の定理 –

この節では Dirichlet 問題の解の存在の応用として Riemann 面が第 2 可算公理を満たす, つまり可算開基を持つことを示そう.

Proposition 17.2.1. *X, Y を位相空間とし写像 $f : X \to Y$ は連続な開写像で全射とする. このとき X が第 2 可算ならば Y も第 2 可算である.*

Proof. $\mathcal{A}$ を X の位相の可算基底とする. このとき

$$\mathcal{B} = \{f(U) : U \in \mathcal{B}\}$$

と置けば, f が開写像であることより $\mathcal{B}$ の各元は Y の開集合よりなり, $\mathcal{A}$ が可算であるから $\mathcal{B}$ も可算である. 従って $\mathcal{B}$ が Y の位相の基底であることを示せば証明は完了する. これには開集合 $G \subset Y$ と点 $y \in G$ が与えられたとしてある $U \in \mathcal{B}$ で $y \in f(U) \subset G$ を満たすものの存在を示せばよい.

f は全射であるから $x \in X$ を $f(x) = y$ を満たすように取れる. f は連続であるから x の近傍 U_0 で $f(U_0) \subset G$ を満たすものが存在する. $\mathcal{A}$ は X の位相の基底であるから $U \in \mathcal{A}$ で $x \in U \subset U_0$ を満たすものが存在する. このとき $y = f(x) \in f(U) \subset f(U_0) \subset G$ である. □

Theorem 17.2.2. *X を連結な位相多様体, Y を Hausdorff 位相空間とする. また写像 $f : X \to Y$ は連続で離散的 (つまり任意の $y \in Y$ について $f^{-1}(\{y\})$ が離散的) とする. このとき Y が第 2 可算ならば X も第 2 可算である.*

Proof. $\mathcal{B}$ を Y の位相の可算基底とし

$$\mathcal{A} = \{U \in \mathcal{P}(X) : \exists V \in \mathcal{B} \text{ について } U \text{ は } f^{-1}(V) \text{ の成分であり, } U \text{ の部分空間位相に関し第 2 可算である.}\}$$

と置く. f は連続であるから $V \in \mathcal{B}$ について $f^{-1}(V)$ は開集合である. そして X は位相多様体であるから道連結なので $f^{-1}(V)$ の各成分も開集合である. 従って $\mathcal{A}$ は開集合よりなる族である.

1. $\mathcal{A}$ が X の位相の基底をなすことを示そう. それには G を X の開集合とし, $x \in G$ とし, $x \in U \subset G$ を満たす $U \in \mathcal{A}$ の存在を示せばよい. $y = f(x)$ を置くと $f^{-1}(\{y\})$ は離散的であるから x の近傍 W_0 を $f^{-1}(\{y\}) \cap W_0 = \{x\}$ となるように取れる. X は位相多様体であるから x の近傍 W で W はコンパクト, $W \subset W_0 \cap G$ でありさらに W が

ユークリッド空間の開球と同相なものが存在する．このとき $x \notin \partial W$ と $f^{-1}(\{y\}) \cap \overline{W} \subset f^{-1}(\{y\}) \cap W_0 = \{x\}$ より $y \notin f(\partial W)$ である．Y は Hausdorff 空間であり $f(\partial W)$ はコンパクトであるから y の近傍 V で $V \cap f(\partial W) = \emptyset$ を満たすものが取れる．このとき $f^{-1}(V) \cap \partial W = \emptyset$ である．そこで U を $f^{-1}(V)$ の x を含む成分とすれば $U \cap \partial W = \emptyset$ であるから U の連結性より $U \subset W$ または $U \subset X \backslash \overline{W}$ のどちらか一方が成り立つ．$x \in U \cap W$ であるから $U \subset W$ を得る．このとき W はユークリッド空間の開球と同相であるから第 2 可算であり，従って U も第 2 可算である．また $x \in U \subset W \subset W_0 \cap G \subset G$ であるから $U \in \mathcal{A}$ である．

2. 任意の $U_0 \in \mathcal{A}$ について $U_0 \cap U \neq \emptyset$ を満たす $U \in \mathcal{A}$ は高々可算個であることを示そう．

U_0 は $V_0 \in \mathcal{B}$ について $f^{-1}(V_0)$ の成分であるとする．連結成分同士は共通部分を持たないので，U_0 も $f^{-1}(V_0)$ の他の成分とは共通部分を持たない．次に U_0 の位相の可算基底を $\{W_k\}_{k=1}^{\infty}$ と置き，$\mathcal{B} = \{V_0\} \cup \{V_j\}_{j=1}^{\infty}$ と置く．暫くの間 $j \in \mathbb{N}$ を固定して考える．$f^{-1}(V_j)$ の連結成分への分解を $f^{-1}(V_j) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_{j,\lambda}$ とする．各 $k \in \mathbb{N}$ について $W_k \subset U_{j,\lambda}$ を満たす $\lambda \in \Lambda$ は存在すればただ 1 つである．そこでこのような λ が存在する k を小さい順から全て並べ $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots$ とする．また各 p について $W_{k_p} \subset U_{j,\lambda}$ を満たす λ はただ一つであるから，それを λ_p と置く．このとき $U_0 \cap U_{j,\lambda} \neq \emptyset$ を満たす λ は $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ で尽くされるので高々可算個である．実際 $U_0 \cap U_{j,\lambda'} \neq \emptyset$ ならば **1** より $W_k \subset U_0 \cap U_{j,\lambda'}$ を満たす $k' \in \mathbb{N}$ が存在する．この k' はある $p \in \mathbb{N}$ により $k' = k_p$ と表される．このとき $W_{k'} = W_{k_p} \subset U_0 \cap U_{j,\lambda'}$ であるが，このような λ' は λ_p に限るので $\lambda' = \lambda_p$ である．以上より，各 $j \in \mathbb{N}$ について U_0 と共通部分を持つ $f^{-1}(V_j)$ の成分は高々可算個である．従って $j \in \mathbb{N}$ について和を取ってもやはり高々可算個である．

3. $\mathcal{A}$ が高々可算であることを示そう．$U_0 \in \mathcal{A}$ を任意に取り固定する．$\mathcal{A}_0 = \{U_0\}$ と置き，

$$\mathcal{A}_k = \{U \in \mathcal{A} : \exists U_1, \ldots, U_{k-1} \in \mathcal{A} \text{ with } U_0 \cap U_1 \neq \emptyset, \ldots, U_{k-1} \cap U \neq \emptyset\}$$

と置く．つまり $\mathcal{A}_k$ とは隣り合うもの同士が共通部分を持つ $\mathcal{A}$ の元を U_0 から並べ k 個目にくるような $U \in \mathcal{A}$ の全体のことである．この定義は重複を許すので非減少 $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \cdots$ である．ここで

$$X_0 = \bigcup_{U \in \cup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k} U = \bigcup_{\exists k \in \mathbb{N} : U \in \mathcal{A}_k} U \quad \text{and} \quad X_1 = \bigcup_{U \in \mathcal{A} \backslash \cup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k} U$$

と置けば $X_0 \cup X_1 = X$, $X_0 \cap X_1 = \emptyset$ であり X_0, X_1 ともに開集合である．よって X の連結性と $U_0 \subset X_0$ より $X = X_0$, $X = 1 = \emptyset$ である．これより特に $A = \cup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k$ が従う．最後に **2** より $\mathcal{A}_1$ は高々可算であり，帰納法により全ての $\mathcal{A}_1$ が高々可算であることが分かる．よって $A = \cup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k$ も高々可算である． □

Theorem 17.2.3 (Radó の定理)**.** *Riemann* 面の位相は第 2 可算である．

Proof. S を Riemann 面とし U を座標近傍とする．U 内に 2 つの交わらない閉円板 K_1, K_2 を取り，領域 $R = S \backslash (K_0 \cup K_1)$ において境界値 ∂K_0 上で 0, ∂K_1 上で 1 を与え Dirichlet 問題を解き，その解を $u : \overline{R} \to [0,1]$ と置く．このとき R 上の正則一次微分形式 $\omega = du + id^*u$ を考える．R の普遍被覆面を $\tilde{R}$ とし，$p : \tilde{R} \to R$ を被覆写像とする．ω の引き戻し $p^*\omega$ は $\tilde{R}$ の正則一次微分形式であるからその積分である $\tilde{R}$ 上の正則函数 f が存在する．ω が 0 ではないので f は非定数正則であるから $f : \tilde{R} \to \mathbb{C}$ は Theorem 17.2.2 の仮定を満たすので $\tilde{R}$ の位相は第 2 可算である．今度は被覆写像 $p : \tilde{R} \to R$ に Proposition 17.2.1 を適用すると R の位相は第 2 可算であることが分かる．R に 2 つの閉円板 K_0, K_1 を加えた S の位相もやはり第 2 可算である． □

17.3　第 2 可算性の帰結

Lemma 17.3.1. X を第 2 可算公理を満たす位相空間とし $\mathcal{U}$ を X の開被覆，つまり $\mathcal{U}$ は X の開部分集合よりなる族で $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ を満たすとする．このとき $\mathcal{U}$ の高々可算な部分族で X の開被覆となっているものが存在する．

Proof. $\mathcal{B}$ を X の可算な開基とする．つまり

$$\text{任意の開集合 } G \text{ と } p \in G \text{ について } p \in V \subset G \text{ を満たす } V \in \mathcal{B} \text{ が存在する．}$$

を満たす開集合の可算な族であるとする．このとき $\mathcal{B}'$ で $B \in \mathcal{B}$ で $B \subset U$ を満たす $\mathcal{U}$ が存在するものの全体とする．そして各 $B \in \mathcal{B}'$ について $B \subset U_B$ を満たす $U_B \in \mathcal{U}$ を選んでおく．このとき $\mathcal{B}'$ は $\mathcal{B}$ の部分族であるから高々可算であり，対応する $\mathcal{U}$ の部分族 $\mathcal{U}' := \{U_B : B \in \mathcal{B}'\}$ も高々可算である．証明を完了するには $\mathcal{U}'$ が X の被覆であることを示せば十分である．そこで任意の $x \in X$ について $x \in V$ を満たす $V \in \mathcal{U}$ を取る．このとき $x \in B \subset V$ を満たす $B \in \mathcal{B}$ が存在する．$\mathcal{B}'$ の定義より $B \in \mathcal{B}'$ であり $x \in B \subset U_B \in \mathcal{U}'$ が成り立つ．よって X は $\mathcal{U}'$ により被覆される．□

Theorem 17.3.2. *S が等角アトラス $\mathcal{A}$ を持つ Riemann 面ならば，$\mathcal{A}$ と等角に適合的な可算アトラス $\mathcal{B} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{\infty}$ で，各 U_i は precompact な座標円板であり，さらに $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ 開基であるものが存在する．*

Proof. 等角アトラス $\mathcal{A}$ が 1 つの chart (U, φ) のみよりなる場合は $W = \varphi(U) \subset \mathbb{C}$ と置いて $\mathcal{B}$ を円板 $\mathbb{D}(z, r)$ で $\overline{\mathbb{D}}(z, r) \subset W$ を満たし r は正の有理数，z は実部，虚部ともに有理数であるものの全体とする．このとき $\mathcal{B}$ は W の可算開基であるから族 $\varphi^{-1}(\mathcal{B}) = \{\varphi^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ は $U = S$ の可算開基である．また各 $\mathbb{D}(z, r) \in \mathcal{B}$ は W で precompact であるから $\varphi^{-1}(\mathbb{D}(z, r))$ は S で precompact である．また座標函数としては $\varphi|_{\varphi^{-1}(\mathbb{D}(z,r))}$ を考えれば $\varphi^{-1}(\mathbb{D}(z, r))$ から $\mathbb{D}(z, r)$ への同相写像であり，(U, φ) と等角に適合的である．

$\mathcal{A}$ S の開被覆であるから，Lemma 17.3.1 より高々可算な開部分被覆であるアトラス $\{(U_i, \varphi_i)\}$ が存在する．各 (U_i, φ_i) について上の段落の議論を適用すれば U_i は可算個の U_i 内で precompact な座標円板よりなる開基を持つ．これらの開基の i に関する和は S の可算開基をなす．B がこのような U_i 内の座標円板であるとき B が S で precompact であることを示せば証明は完了する．

B について U_i 内での閉包を $\hat{B}$ とする．$\varphi_i(B) = \mathbb{D}(z, r)$ は開集合 $W = \varphi(U_i)$ 内の円板であり $\overline{\mathbb{D}}(z, r) \subset W$ を満たす．そして $\hat{B} = \varphi^{-1}(\overline{\mathbb{D}}(z, r))$ である．よって $\hat{B}$ は compact (in S) であり S は Hausdorff 空間であるから閉集合である．B の S 内の閉包 $\bar{B}$ とは B を含む最小の閉集合であるから $\bar{B} \subset \hat{B}$ が成り立つ．従って $\bar{B}$ は compact 集合 $\hat{B}$ に含まれる閉集合であるから compact である．よって B は precompact である．□

Theorem 17.3.3. *S を等角アトラス $\mathcal{A}$ を持つ Riemann 面とすれば，S の基本群は高々可算である．*

Proof. Theorem 17.3.2 より S は座標円板よりなる可算開基 $\mathcal{B}$ を持つ．$\mathcal{B}$ は S の被覆をなしていることに注意しよう．各 $B, B' \in \mathcal{B}$ について $B \cap B'$ は開集合であり，高々可算個の成道連結成分に分解される．$\mathcal{X}$ で全ての $B, B' \in \mathcal{B}$ の組について $B \cap B'$ の各成分から 1 点を取り出して集めたものとする．$B = B'$ の場合もあり得るので，各 $B \in \mathcal{B}$ について $\mathcal{X}$ に含まれる点は少なくとも 1 つはあることになる．$B \in \mathcal{B}$ と $x, x' \in \mathcal{X} \cap B$ について x から x' への B 内の道を取り $\alpha_{x,x'}^B$ と置く．

$x_0 \in \mathcal{X}$ を任意に取る．x_0 を基点とする任意の閉道は，有限個の $\alpha_{x,x'}^B$ の形の道をつなぎ合わせて出来る閉道に homotopic であることを示そう．これが示されれば $\pi_1(S, x_0)$ が高々可算であることが分かる．

$\alpha : [0, 1] \to S$ を x_0 を基点とする閉道とする．$[0, 1] \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \alpha^{-1}(B)$ は開被覆であるから $[0, 1]$ の分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ を十分細かく取れば各 i について $[t_{i-1}, t_i] \subset \alpha^{-1}(B_i)$ を満たす $B_i \in \mathcal{B}$ が存在するように出来る．(compact 距離空間における開被覆の Lebesgue 数の存在定理である．Lemma **??** を参照.) さて $\alpha_i : [0, 1] \to B_i$ を α の区間 $[t_[i-1], t_i]$ への制限のパラメータを取り直し $[0, 1]$ からの写像にしたものとする．(例えば $\alpha_i(t) = \alpha((1 - t)t_{i-1} + tt_i)$ と置けばよい.) 各 i について $\alpha(t_i) \in B_i \cap B_{i+1}$ であるから点 $x_i \in \mathcal{X} \cap (B_i \cap B_{i+1})$ で $\alpha(t_i)$ と同じ $B_i \cap B_{i+1}$ の成分に属するものが存在する．β_i を $\alpha(t_i)$ と x_i をこの成分内で結ぶ道とする．このとき α_i

と $\beta_{i-1}^{-1}\cdot\alpha^{B}_{x_{i-1},x_i}\cdot\beta_i$ は単連結な開集合 B_i 内の始点と終点を共有する道であるから (path) homotopic である．β_0, β_n を基点 x_0 に留まったままの道とすると

$$\begin{aligned}\alpha &\sim \alpha_1\cdot\cdots\cdot\alpha_n\\ &\sim \beta_0^{-1}\cdot\alpha^{B_1}_{x_0,x_1}\cdot\beta_1\cdot\beta_1^{-1}\cdot\alpha^{B_2}_{x_1,x_2}\cdot\beta_2\cdot\cdots\cdot\beta_n^{-1}\cdot\alpha^{B_n}_{x_{n-1},x_n}\cdot\beta_n\\ &\sim \alpha^{B_1}_{x_0,x_1}\cdot\alpha^{B_2}_{x_1,x_2}\cdots\alpha^{B_n}_{x_{n-1},x_n}\end{aligned}$$

である． □

17.4 Runge 包

はじめに位相空間の連結成分について復習をしておこう．位相空間 X の 2 点 x, y について $x, y \in E$ を満たす X の連結部分集合が存在するとき $x \sim y$ と表すことにすれば, 関係 $\sim$ は同値関係である．$\sim$ に関する同値類のことを X の (連結) 成分と呼んだ．X の部分集合 Y については X の部分空間位相 (= 相対位相) のもとで成分を考え $x \in Y$ の属す同値類を

(17.4.1) $$C_x(Y) = \{y \in Y : \exists E \subset Y,\ E \text{ は連結かつ } x, y \in E\}$$

のことを x を含む Y の成分と呼ぶ．$C_x(Y)$ は明らかに x を含む Y の連結部分集合の中で最大のものである．次の命題の証明は読者に任せよう．

Proposition 17.4.1. $x \in Y \subset Z$ ならば $C_x(Y) \subset C_x(Z)$ が成り立つ．特に $C_x(Z) \subset Y$ ならば $C_x(Y) = C_x(Z)$ が成り立つ．

Proposition 17.4.2. 集合 B が連結ならば $B \subset C \subset \overline{B}$ を満たす任意の集合 C は連結である．

Proof. C が連結でなければ分割 $C = H|K$ が存在する．ただし分割 $C = H|K$ とは H, K は C の部分空間位相のもとでともに空でない開かつ閉集合であり $C = H \cup K$, $H \cap K = \emptyset$ を満たすという意味である．以下ではこのような記法を用いることにする．このとき B の連結性より $B \subset H$ または $B \subset K$ のどちらか一方が成り立つ．$B \subset H$ を仮定して議論を進めると $\overline{B} \subset \overline{H} \subset \overline{C} \subset \overline{B}$ を得るので $\overline{B} = \overline{H}$ が成り立つ．ここで $H = C \cap F$ を満たす閉集合 F を取れば

$$C = C \cap \overline{B} = C \cap \overline{H} = C \cap \overline{C \cap F} \subset C \cap \overline{F} = C \cap F = H$$

を得る．これは $K \neq \emptyset$ に反する． □

さて部分空間 Y における $C_x(Y)$ の閉包は $\overline{C_x(Y)} \cap Y$ と表され $C_x(Y) \subset \overline{C_x(Y)} \cap Y \subset \overline{C_x(Y)}$ が成り立つことより上の命題を適用すれば $\overline{C_x(Y)} \cap Y$ は連結である．さらに $\overline{C_x(Y)} \cap Y$ は x を含み Y に含まれる．よって $C_x(Y)$ の最大性より $\overline{C_x(Y)} \cap Y \subset C_x(Y)$ が成り立つ．よって $\overline{C_x(Y)} \cap Y = C_x(Y)$ が成り立つ．つまり成分 $C_x(Y)$ は Y の (部分空間位相に関し) 閉集合である．

他にも連結集合の性質について思い出しておくべき事項は多いが, 最後に局所連結連結空間において開集合 G の任意の成分 V は開集合であることに注意する．これと上で述べたことを組み合わせると次が従う．

Proposition 17.4.3. 局所連結連結空間において開集合 G の任意の成分 V は G の部分空間位相に関し開かつ閉 *(clopen set)* 集合である．

Definition 17.4.4. 位相空間 X の部分集合 A について補集合 $X\backslash A$ の連結成分への分解を $X\backslash A = \bigcup_{j\in J} C_j$ とし，$J_0 = \{j \in J : \overline{C_j}$ はコンパクト$\}$ と置く．そして

$$\mathcal{R}_X(A) = A \cup \bigcup_{j\in J_0} C_j \quad \left(= A \cup \bigcup_{\substack{C \text{ は } X\backslash A \text{ の成分で} \\ \overline{C} \text{ はコンパクト}}} C\right)$$

と定義し，X における A の *Runge* 包 *(Runge hull)* と呼ぶ．

定義より明らかに $A \subset \mathcal{R}_X(A)$ が成り立つ．また

$$x \in \mathcal{R}_X(A)\backslash A \quad \Longleftrightarrow \quad x \notin A \text{ であり } x \text{ を含む } X\backslash A \text{ の成分 } C \text{ について } \overline{C} \text{ はコンパクト}$$

である．Runge 包の実例としては

$$\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(\partial\mathbb{D}) = \overline{\mathbb{D}}, \quad \mathcal{R}_{\mathbb{C}\backslash\{0\}}(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$$

である．少し複雑な例としては $G = \mathbb{D}\backslash\left\{n^{-1} : n = 2, 3, \ldots\right\}$ について $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(G) = \mathbb{D}$ を挙げておこう．

Proposition 17.4.5. 位相空間 X の部分集合 A について $\mathcal{R}_X(\mathcal{R}_X(A)) = \mathcal{R}_X(A)$ が成り立つ．

Proof. 明らかに $\mathcal{R}_X(A) \subset \mathcal{R}_X(\mathcal{R}_X(A))$ が成り立つので 2 つの集合が一致することを示すには $\mathcal{R}_X(\mathcal{R}_X(A))\backslash\mathcal{R}_X(A) = \emptyset$ を言えばよい．そこで $x \in \mathcal{R}_X(\mathcal{R}_X(A))\backslash\mathcal{R}_X(A) = \emptyset$ が存在すると仮定し矛盾を示す．

まず x を含む $X\backslash\mathcal{R}_X(A)$ の成分 C_0 について $\overline{C_0}$ はコンパクトである．また $C_0 \subset X\backslash\mathcal{R}_X(A) \subset X\backslash A$ より C_0 を含む $X\backslash A$ の成分 C が存在する．C は x を含む $X\backslash A$ の成分でもあるが，$x \notin \mathcal{R}_X(A)$ であるから $\overline{C}$ はコンパクトでない．従って $C \cap \mathcal{R}_X(A) = \emptyset$ が成り立つ．ここで C は連結集合で $x \in C \subset X\backslash\mathcal{R}_X(A)$ を満たす．従って成分 C_0 の最大性より $C \subset C_0$ が成り立つことになり，$C = C_0$ を得る．しかしながら先に見たように $\overline{C_0}$ はコンパクトであり，$\overline{C}$ はコンパクトでないので，これは不合理である． □

Proposition 17.4.6. X が *Hausdorff* 空間のとき $A \subset B$ ならば $\mathcal{R}_X(A) \subset \mathcal{R}_X(B)$ が成り立つ．

Proof. $x \in \mathcal{R}_X(A)$ とする．$x \in B$ の場合は $x \in B \subset \mathcal{R}_X(B)$ である．$x \in \mathcal{R}_X(A)\backslash B(\subset \mathcal{R}_X(A)\backslash A)$ のときは x を含む $X\backslash A$ の連結成分 C について $\overline{C}$ はコンパクトである．また x を含む $X\backslash B$ の連結成分 C_0 は $C_0 \subset C$ を満たすので $\overline{C_0} \subset \overline{C}$ が成り立つ．$\overline{C_0}$ は Hausdorff 空間 X のコンパクト集合 $\overline{C}$ に含まれる閉集合であるからコンパクトである．よって $x \in \mathcal{R}_X(B)$ である． □

次に閉集合の Runge 包が閉集合となることを証明しよう．その前に局所コンパクト空間についての復習をしておこう．

Definition 17.4.7. 位相空間 X が局所コンパクトであるとは，各 $x \in X$ についてコンパクト集合 K と開集合 G で $x \in G \subset K$ を満たすものが存在するときを言う．

Proposition 17.4.8. X を局所コンパクト *Hausdorff* 空間 とする．U が開集合で $x \in U$ ならば開集合 V で $x \in V \subset \overline{V} \subset U$ を満たし $\overline{V}$ がコンパクトであるものが存在する．

Proof. $x \in G \subset K$ を満たす コンパクト集合 K と開集合 G を取る．このとき $x \in U \cap G \subset K$ であり $K\backslash(U \cap G)$ はコンパクト集合 K 内の閉集合であるからコンパクトである．$y \in K\backslash(U \cap G)$ について x の近傍 V_y と y の近傍

U_y を $V_y \subset U \cap G$ かつ $V_y \cap U_y = \emptyset$ が成り立つように取る．$\overline{V_y} \cap U_y = \emptyset$ が成り立つことに注意する．このとき $K \backslash (U \cap G) \subset \bigcup_{y \in K \backslash (U \cap G)} U_y$ は開被覆をなすので, 有限個の $y_1, \ldots, y_n \in K \backslash (U \cap G)$ を

$$K \backslash (U \cap G) \subset U_{y_1} \cup \cdots \cup U_{y_n}$$

が成り立つように取ることが出来る．このとき $V = V_{y_1} \cap \cdots \cap V_{y_n}$ は x の近傍であり $V \subset U \cap G (\subset K)$ を満たし, さらに $\overline{V} \subset K$ と

$$\overline{V} \cap (K \backslash (U \cap G)) \subset \bigcap_{k=1}^{n} \overline{V_{y_k}} \cap \bigcup_{k=1}^{n} U_{y_k} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \overline{V_{y_k}} \cap U_{y_k} = \emptyset$$

より $\overline{V} \subset U \cap G$ である．最後に $\overline{V}$ がコンパクト集合 K に含まれる閉集合であるからコンパクトである． □

Theorem 17.4.9. X 局所連結な連結位相空間とし $A \subset X$ とする．

(i) A が 閉集合ならば $\mathcal{R}_X(A)$ も閉集合であり, さらに X, A が連結ならば $\mathcal{R}_X(A)$ も連結である．

(ii) X がさらに局所コンパクトかつ *Hausdorff* 空間のとき A がコンパクトならば $\mathcal{R}_X(A)$ もコンパクト．

Proof. (i) A が閉集合ならば $X \backslash A$ は開集合であり X は局所連結であるから連結成分への分解を $X \backslash A = \bigcup_{j \in J} V_j$ と置けば, 全ての成分 V_j は開集合である．ここで $J_0 = \{ j \in J : \overline{V_j}$ はコンパクト $\}$ と置けば

$$\mathcal{R}_X(A) = A \cup \bigcup_{j \in J_0} V_j, \quad X = A \cup \bigcup_{j \in J_0} V_j \cup \bigcup_{j \in J \backslash J_0} V_j$$

であり, 2 つの等式の右辺は互いに交わらない集合の和であるから

$$X \backslash \mathcal{R}_X(A) = \bigcup_{j \in J \backslash J_0} V_j$$

が成り立つ．右辺は開集合の和であるから開集合である．よって $\mathcal{R}_X(A)$ は閉集合である．

さらに X, A が連結と仮定しよう．X の局所連結性より各 $j \in J$ について $\partial V_j \subset A$ であるから

$$\mathcal{R}_X(A) = A \cup \bigcup_{j \in J_0} V_j = \bigcup_{j \in J_0} (A \cup \overline{V_j})$$

である．V_j は連結であるから $\overline{V_j}$ も連結であり, X が連結であるから $\partial V_j \neq \emptyset$ である．(さもなければ $X = \operatorname{Ext} V_j \cup V_j$ と分解され $\emptyset \neq A \subset \operatorname{Ext} V_j$ ゆえ X の連結性に反する.) よって $A \cap \overline{V_j} = \partial V_j \neq \emptyset$ より $A \cup \overline{V_j}$ も連結である．従って $j \in J_0$ に関する和である $\mathcal{R}_X(A)$ も連結である．(Theorem 1.2.10 を見よ.)

(ii) X は Hausdorff 空間であるからコンパクト集合 A は閉集合である．前半と同様に連結成分への分解を $X \backslash A = \bigcup_{j \in J} V_j$ と置けば, 全ての成分 V_j は開集合である．次に A はコンパクトであり, X は局所コンパクトであるから開集合 U で $A \subset U$ を満たし $\overline{U}$ はコンパクトなものが取れる．ここで X の局所連結性より

$$\partial V_j \subset \partial (X \backslash A) = \partial A \subset A \subset U$$

である．これより直ちに全ての $j \in J$ について $V_j \cap U \neq \emptyset$ であることが従う．$A \subset U$ より $\partial U \cap A = \emptyset$ であるから

$$\partial U \subset X \backslash A = \bigcup_{j \in J} V_j$$

という開被覆を得る．$\overline{U}$ はコンパクトであるからその閉部分集合である ∂U もコンパクトであるから

$$\partial U \subset V_{j_1} \cup \cdots \cup V_{j_m},$$

という有限部分被覆を取ることができる．一般性を失うことなく $\partial U \cap V_{j_k} \neq \emptyset$, $k = 1, \ldots, m$ と仮定してよい．このとき $\{V_j\}_{j\in J}$ は互いに交わらないので

$$\partial U \cap V_j = \emptyset \quad \forall j \in J \backslash \{j_1, \ldots, j_m\}$$

が成り立つ．従って $j \in J\backslash\{j_1, \ldots, j_m\}$ について $V_j \subset U \cup \operatorname{Ext} U$ であるが V_j の連結性より $V_j \subset U$ または $V_j \subset \operatorname{Ext} U$ のどちらか一方が成り立つことになるが $\partial V_j \subset U$ であるから $V_j \subset U$ が成り立つ．従って

$$\bigcup_{j\in J\backslash\{j_1,\ldots,j_m\}} V_j \subset U$$

が成り立つ．ここで $J_0 = \{j \in J : \overline{V_j}$ はコンパクト $\}$ と置けば $\partial V_j \subset A$ を考慮すると

$$\mathcal{R}_X(A) = A \cup \bigcup_{j\in J_0} V_j = A \cup \bigcup_{j\in J_0} \overline{V_j} = A \cup \bigcup_{j\in J_0\backslash\{j_1,\ldots,j_m\}} \overline{V_j} \cup \bigcup_{j\in J_0\cap\{j_1,\ldots,j_m\}} \overline{V_j} \subset A \cup \overline{U} \cup \bigcup_{j\in J_0\cap\{j_1,\ldots,j_m\}} \overline{V_j}$$

が成り立つ．上式の最右辺はコンパクトであるが, (i) より $\mathcal{R}_X(A)$ はこれに含まれる閉集合であるから, やはりコンパクトである． □

上の定理と同様に A が開集合ならば $\mathcal{R}_X(A)$ も開集合であり, 特に A が領域ならば $\mathcal{R}_X(A)$ も領域である．しかしながらこの事実の証明は簡単ではない．まずは成分と類似の概念である準成分についての解説から始めよう．

位相空間 X の 2 点 x, y について $x \in H$, $y \in K$ を満たす分割 $X = H|K$ が存在しないとき $x \underset{q}{\sim} y$ と表すことにしよう．容易に分かるように関係 $\underset{q}{\sim}$ は同値関係であり

$$x \sim y \quad \Longrightarrow \quad x \underset{q}{\sim} y$$

が成り立つ．以下では $x \underset{q}{\not\sim} y$ のときに $x \in H$, $y \in K$ を満たす X の分割 $X = H|K$ を x, y を分離する分割と呼ぶことにする．

関係 $\underset{q}{\sim}$ に関する同値類のことを準成分 (quasicompnent) と呼ぶ．部分集合 $A \subset X$ と点 $x \in A$ について A の部分空間位相に関する x を含む準成分を $Q_x(A)$ と表す．つまり

$$Q_x(A) = \{y \in A : \exists E\ E \text{ は連結で } x, y \in E \subset A \text{ を満たす}\}$$

である．このとき

$$C_x(A) \subset Q_x(A)$$

が成り立つ．また

$$Q_x(A) = \bigcap_{\substack{x \in F \subset A,\ F \text{ は} \\ \text{clopen in } A}} F \tag{17.4.2}$$

が成り立つことを見ておこう．証明の前に上式の右辺の表現より $C_x(A)$ と同様に $Q_x(A)$ も A の部分空間位相に関する閉集合であることを注意しておく．

∵ $y \in Q_x(A)$ ならば x を含む任意の A の開かつ閉部分集合 F について $y \in F$ である．実際 $y \notin F$ ならば $A = F \cup (A\backslash F)$ が x, y を分離する A の分割を与えることになり $x \underset{q}{\sim} y$ in A に矛盾を生じる．これで $\subset$ が示された．逆に $y \notin Q_x(A)$ ならば x, y を分離する分割 $A = H|K$, $x \in H$, $y \in K$ が存在する．そこで $F = H$ と置けば clopen in A であり $y \notin F$ である．

Proposition 17.4.10. $x \in A \subset B$ ならば $Q_x(A) \subset Q_x(B)$ が成り立つ．

Proof. $y \in B$ について $y \notin Q_x(B)$ ならば $y \notin Q_x(A)$ を示そう．$y \notin A$ のときは自明であるから $y \in A$ と仮定すると

$$
\begin{aligned}
& y \notin Q_x(B) \\
\iff\ & x \underset{q}{\not\sim} y \text{ in } B \\
\iff\ & \text{分割 } B = H|K \text{ で } x \in H\ ,\ y \in K \text{ を満たすものが存在する.} \\
\implies\ & A = (H \cap A) \cup (A \cap K) \text{ は } x, y \text{ を分離する } A \text{ の分割} \\
\iff\ & x \underset{q}{\not\sim} y \text{ in } A \\
\iff\ & y \notin Q_x(A)
\end{aligned}
$$

□

Theorem 17.4.11. X がコンパクト *Hausdorff* 空間ならば $x \in X$ について $C_x(X) = Q_x(X)$ が成り立つ．つまり準成分と成分は一致する．

Proof. 上で見たように $C_x(X) \subset Q_x(X)$ であるから逆の包含関係を示そう．これには $Q_x(X)$ が連結であることを示せばよい．実際 $Q_x(X)$ が連結ならば x を含む X の最大の連結部分集合である $C_x(X)$ に含まれる．

$Q_x(X)$ の 2 つの開かつ閉部分集合 H, K で交わらないものにより $Q_x(X) = H \cup K$ となったとする．必要ならば H, K を取り替えることにより $x \in H$ と仮定してよい．このとき $K = \emptyset$ を示せば証明は完了する．

$Q_x(X)$ は X の閉部分集合であるから H, K も閉集合であり，X はコンパクトゆえ H, K もコンパクトである．$H \cap K = \emptyset$ と X が Hausdorff 空間であることより $H \subset U$, $K \subset V$ と $U \cap V = \emptyset$ を満たす開集合 U, V が存在する．このとき

$$Q_x(X) = \bigcap_{\substack{x \ \in \ F, \quad F \text{ は} \\ \text{clopen in } X}} F \subset U \cup V$$

であるから $x \in F$ を満たす開かつ閉部分集合 F の全てがなす族を $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と置く．このとき各 F_λ はコンパクトであり，上式を書き直すと

$$Q_x(X) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \subset U \cup V$$

である．このとき有限個の $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ で

$$Q_x(X) \subset F_{\lambda_1} \cup \cdots \cup F_{\lambda_n} \subset U \cup V \tag{17.4.3}$$

を満たすものが存在する．実際，このような $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在しなければコンパクト空間 X の閉部分集合の族 $\{F_\lambda \backslash (U \cup V)\}_{\lambda_n \in \Lambda}$ は有限交差性を持つ．つまり任意有限個を取り出しても，それらの共通部分は空でない．従って無限交差性を持つことになり $\bigcap_{\lambda_n \in \Lambda} (F_\lambda \backslash (U \cup V)) \neq \emptyset$ が成り立つ．これは $\bigcap_{\lambda_n \in \Lambda} F_\lambda \subset U \cup V$ に反する．

ここで (17.4.3) において $F = F_{\lambda_1} \cup \cdots \cup F_{\lambda_n}$ と置けば開かつ閉集合であり

$$\overline{U \cap F} \subset \overline{U} \cap \overline{F} = \overline{U} \cap F = \overline{U} \cap (U \cup V) \cap F = U \cap F$$

より $U \cap F$ も開かつ閉集合であり，x を含んでいる．よって $Q_x(X) \subset U \cap F$ となり $K = Q_x(X) \cap V \subset U \cap V = \emptyset$ である． □

Theorem 17.4.12. X を局所コンパクト *Hausdorff* 空間とし C を X の成分でコンパクトであるとする．また U を開集合で $C \subset U$ が成り立つとする．このとき $C \subset V \subset U$ を満たす開かつ閉集合 V でコンパクトなものが存在する．

Proof. C の各点 x について $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U$ を満たす x の開近傍 V_x で $\overline{V_x}$ がコンパクトなものが取れる, C はコンパクトであるから, このような開近傍の有限和で C を被覆できる. 必要ならば U をこのような有限和で取り替えることにより $\overline{U}$ はコンパクトと仮定してよい. $x \in C$ を任意に取れば $C = C_x(X)$ であり $C_x(X) \subset \overline{U}$ より $C_x(X) = C_x(\overline{U})$ である. $\overline{U}$ は部分空間位相のもとでコンパクト Hausdorff 空間であるから $C = C_x(\overline{U})$ は x を含む $\overline{U}$ の準成分 $Q_x(\overline{U})$ と一致する.

さて $C \subset U$ より $C \cap \partial U = \emptyset$ であるから各 $y \in \partial U$ について $y \notin C = Q_x(\overline{U})$ である. よって $\overline{U}$ の分割 $\overline{U} = H_y | V_y$ で $x \in H_y$ と $y \in K_y$ を満たすものが存在する. K_y は clopen であり, 特に $\partial U \subset \bigcup_{y \in \partial U} K_y$ はコンパクト集合 ∂U の開被覆をなす. よって有限被覆

$$\partial U \subset \bigcup_{k=1}^{n} K_{y_k}$$

が取れる. このとき $V := \bigcap_{k=1}^{n} H_{y_k}$ は開かつ閉で x を含むので

$$C = Q_x(\overline{U}) \subset V$$

が成り立つ. また

$$V \subset \overline{U} \text{ and } V \cap \partial U \subset \bigcap_{k=1}^{n} H_{y_k} \cap \bigcup_{k=1}^{n} K_{y_k} \subset \bigcup_{k=1}^{n} H_{y_k} \cap K_{y_k} = \emptyset$$

であるから

$$C \subset V \subset U$$

が成り立つ. V は閉集合 $\overline{U}$ の閉集合ゆえ X においても閉集合であり, かつコンパクトである. さらに V は $\overline{U}$ の開集合で開集合 U に含まれるので X の開集合でもある. □

Theorem 17.4.13. *X を局所コンパクト Hausdorff 空間とし $A \subset X$ を開集合とする. このとき $\mathcal{R}_X(A)$ も開集合である. さらに X が局所連結で A が領域ならば $\mathcal{R}_X(A)$ も領域である.*

Proof. 各 $x \in \mathcal{R}_X(A)$ が $\mathcal{R}_X(A)$ の内点であることを示せばよい. $x \in A$ のときは明らかであるから $x \notin A$ とする. このとき x を含む閉集合 $X \backslash A$ の成分 C はコンパクトである. 従って Theorem 17.4.12 より $C \subset V \subset X \backslash A$ を満たす $X \backslash A$ の開かつ閉集合 V でコンパクトなものが取れる.

Claim: V の成分は $X \backslash A$ の成分でもある.

$\because$ E が V の成分ならば $E \subset \tilde{E}$ を満たす $X \backslash A$ の成分が存在する. このとき

$$\tilde{E} = (\tilde{E} \cap V) \cup (\tilde{E} \backslash V)$$

を考えると右辺の 2 つの集合はともに $\tilde{E}$ の開かつ閉集合であるから $\tilde{E}$ の連結性より $\tilde{E} \subset \tilde{E} \cap V$ または $\tilde{E} \subset \tilde{E} \backslash V$ のどちらか一方が成り立つ. つまり $\tilde{E} \cap V$ または $\tilde{E} \backslash V$ のどちらか一方は空である. $\emptyset \neq E \subset \tilde{E}$, $E \subset V$ より $\tilde{E} \backslash V = \emptyset$ の方が成り立つ. つまり $\tilde{E} \subset V$ である. よって $\tilde{E} \subset E$ となり, 結局 $\tilde{E} = E$ である.

さて V の成分は閉集合 $X \backslash A$ の成分でもあるから閉集合であり V はコンパクトであるからやはりコンパクトである. 従って V の成分は $\mathcal{R}_X(A)$ に含まれる. よって $V \subset \mathcal{R}_X(A)$ である. ここで $V = (X \backslash A) \cap U$ を満たす X の開集合 U を取る. このとき $U \cap A \subset \mathcal{R}_X(A)$ かつ $U \cap (X \backslash A) = V \subset \mathcal{R}_X(A)$ であるから

$$C \subset U = (U \cap A) \cup (U \cap (X \backslash A)) \subset \mathcal{R}_X(A)$$

が成り立つ. よって C のすべての点, 特に x は $\mathcal{R}_X(A)$ の内点である.

最後に X が局所連結で A が連結のとき $\mathcal{R}_X(A)$ も連結であることを示そう. $X \backslash A = \bigcup_{j \in J} C_j$ と連結成分に分解し $J_0 = \{j \in J : C_j \text{ はコンパクト}\}$ と置くと $\mathcal{R}_X(A) = A \cup \bigcup_{j \in J_0} C_j$ である. 上で見たように $j \in J_0$ について

$C_j \subset U_j \subset \mathcal{R}_X(A)$ を満たす開集合 U_j が存在する．∂C_j の点を任意に取りその点の局所連結な近傍 W_j で $W_j \subset U_j$ を満たすものを取れば $C_j \cap W_j \neq \emptyset \neq W_j \cap A$ より $C_j \cup W_j \cup A$ は連結で $U_j \subset \mathcal{R}_X(A)$ に含まれる．よって

$$\mathcal{R}_X(A) = A \cup \bigcup_{j \in J_0} C_j = \bigcup_{j \in J_0} (A \cup W_j \cup C_j)$$

は連結である． □

17.5　Runge 領域と正則近似

Definition 17.5.1. *Riemann* 面 S 内の領域 Ω が $\mathcal{R}_S(\Omega) = \Omega$ を満たすとき *Runge* 領域と言う．つまり補集合の任意の成分がコンパクトでないような領域である．

17.6　調和測度

書きかけ 調和測度

17.7　円環領域での劣調和函数

書きかけ Dirirchlet 問題を解いたあとで $\partial\mathbb{D}(z_0, r) \subset \Omega$ ならば u は $\partial\mathbb{D}(z_0, r)$ で可積分

$\{r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\} \subset \Omega$ ならば $L(u, z_0, r) = (2\pi)^{-1} \int_T u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$ は連続かつ $\log r$ の凸函数.

17.8　Green 函数

書きかけ

Green 函数

定義 1

$\Omega \backslash \{a\}$ で調和

$G(z, a) = \log|z - a|$ は a の近傍で調和

$\lim_{\Omega \ni z \to \zeta} G(z, a) = 0,\ \forall \zeta \in \partial\Omega$

定義 2

$L_z G(z, a) = \delta_a$ を満たす解

有界領域における一意性

Dirichlet 問題が解ける領域には Green 函数が存在する．

性質

正値性, 領域に関する単調性

可解とは限らない領域での Green 函数の定義 exaustion に依らないこと, a に無関係なことと

17.9 Green 函数による領域の分類

書きかけ

領域の分類

双曲型 (Green 函数の存在) と方物型 (Greeen 函数の非存在)

有界領域の双曲性

$\mathbb{C}\setminus\{a_1,\ldots,a_n\}$ の方物性

第 18 章

Koebe の一意化定理

18.1 被覆 Riemann 面

それでは被覆空間と Riemann 面を組み合わせた概念である被覆 Riemann 面について説明しよう.

Theorem 18.1.1. *S を等角アトラス $\mathcal{A}$ を持つ Riemann 面とし $h : \tilde{S} \to S$ を被覆写像とするこのとき $\tilde{S}$ は第 2 可算公理を満たす Hausdorff 空間である. さらに $\tilde{S}$ には h が正則となるような等角構造が一意的に存在し, この構造のもとで Riemann 面である.*

Proof. はじめに $\mathcal{A}$ と等角に適合的な高々可算なアトラス $\mathcal{C} = \{(V_j, \psi_j)\}_{j=1}^{J}$, $J \in \mathbb{B} \cup \{\infty\}$ で, 各 V_i は h に関し均一被覆近傍であり $\{V_j\}_{j=1}^{J}$ が開基となっているものが存在することを示そう.

まず Theorem 17.3.2 より $\mathcal{A}$ と等角に適合的な可算アトラス $\mathcal{B} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ で, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ が開基となっているものが存在する. このとき U_i が均一被覆近傍となっている chart (U_i, φ_i) の全てがなす $\mathcal{B}$ の部分族を $\mathcal{C} = \{(V_j, \psi_j)\}_{j=1}^{J}$, $J \in \mathbb{B} \cup \{\infty\}$ と置く. $\mathcal{C}$ が S を被覆することを示せば, $\mathcal{C}$ は S の chart であり $\mathcal{B}$ の部分族であるから $\mathcal{A}$ と等角に適合的である. そこで $x \in S$ を任意に取る. $x \in U_i$ を満たす $U_i \in \mathcal{U}$ と x の均一被覆近傍 W を取ると $x \in U_i \cap W$ も均一被覆近傍である. このとき $\in \mathcal{U}$ は開基であるから $x \in U_k U_i \cap W$ を満たす $U_k \in \in \mathcal{U}$ が存在する. この U_k も均一被覆近傍であるから $(U_k, \varphi_k) \in \mathcal{C}$ が成り立つ. $x \in S$ は任意であるから S は $\mathcal{C}$ により被覆される.

Propositon **??**より $\tilde{S}$ は Hausdorff 空間である. 各 Vj について $x_j \in V_j$ を満たす x_j を取ると

$$h^{-1}(V_j) = \bigcup_{\tilde{x} \in h^{-1}(\{x_j\})} h^{-1}(V_j) \text{ の } \tilde{x} \text{ を含む成分}$$

と分解される. x_j の fibre $h^{-1}(\{x_j\})$ は Proposition **??**より $\pi_1(S, x_j)$ の $h_*(\pi_1(\tilde{S}, \tilde{x}))$ に関する左剰余類の全体と等しい濃度を持つ. $\pi_1(S, x_j)$ は Theorem 17.3.3 より高々可算であるから fibre $h^{-1}(\{x_j\})$ も高々可算である. 従って

$$h^{-1}(V_j) = \bigcup_{k=1}^{K_j} \tilde{U}_{j,k}, \qquad K_j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

と表すことが出来る. このとき $\{\tilde{U}_{j,k}\}$ の全体は $\tilde{S}$ の可算開基であり $\tilde{\varphi}_{j,k} = \psi_j \circ h|_{U_{j,k}}$ が座標函数を与え $\tilde{\mathcal{C}} = \{(\tilde{U}_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j,k})\}$ が等角に適合的であることは容易に確かめられ. よって $\tilde{\mathcal{C}}$ は等角アトラスである. $\tilde{\mathcal{C}}$ と S の等角アトラス $\mathcal{C} = \{(V_j, \psi_j)\}_{j=1}^{J}$ のもとで h は

$$\psi_j \circ \circ h|_{\tilde{U}_{j,k}} \circ (\tilde{\varphi}_{j,k})^{-1} = \mathrm{id}_{\psi_j(V_j)}$$

と表されるので正則である.

最後に上で定義した等角構造の一意性を示そう．そこで $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ を $\tilde{S}$ の chart とし，この chart のもとで h が正則とする．つまり $h(\tilde{U}) \cap V_j \neq \emptyset$ を満たす任意の j について $\psi_j \circ h|_{\tilde{U}} \circ \tilde{\varphi}^1$ が $\tilde{\varphi}(\tilde{U})(\subset \mathbb{C})$ 上で正則であるとする．このとき各 $z_0 \in \tilde{\varphi}(\tilde{U})$ について $\tilde{\varphi}^{-1}(z_0) \in \tilde{U}_{j,k}$ となる j, k を取れば $\tilde{U}_{j,k}$ 上で $\psi_j \circ h|_{\tilde{U}} = \tilde{\varphi}_{j,k}$ が成り立つので，z_0 のある近傍上で

$$\tilde{\varphi}_{j,k} \circ \tilde{\varphi}^{-1} = \psi_j \circ h|_{\tilde{U}} \circ \tilde{\varphi}^{-1}$$

は正則である．従って chart $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ は $\tilde{\mathcal{C}}$ と等角に適合的であるから $\overline{\tilde{\mathcal{C}}}$ に含まれる．よって $\tilde{\mathcal{C}}'$ が $\tilde{S}$ の等角アトラスで，このもとで h が正則ならば $\tilde{\mathcal{C}}' \subset \overline{\tilde{\mathcal{C}}}$ が成り立つ．よって Proposition 15.1.7 より $\overline{\tilde{\mathcal{C}}'} = \overline{\tilde{\mathcal{C}}}$ が成り立つ． □

Riemann 面 S は道連結かつ局所単連結な Hausdorff 位相空間であるから普遍被覆空間 $(\tilde{S}, h)$ が存在する．$\tilde{S}$ には h が正則となる等角アトラスが一意的に存在する．$\tilde{S}$ をこの等角アトラスにより定まる Riemann 面とみなすとき S の普遍被覆 Riemann 面と呼ぶ．普遍被覆 Riemann 面は定義より単連結である．実のところ単連結 Riemann 面は本質的に $\hat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ の 3 種類しかない．詳しくは次節で述べよう．

18.2　単連結 Riemann 面の分類

Theorem 18.2.1 (Koebe の一意化定理)**.** *S が単連結な Riemann 面ならば S は $\hat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ のどれかに等角同値，つまり S から $\hat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ のどれかへの等角写像 (全単射正則写像) が存在する．*

単連結 Riemann 面 S に等角同値なのは $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ のどれか 1 つのみであることは Corollary **??**より従う．実際 S が $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ の中の 2 つと等角同値ならば Corollary **??** より，この 2 つは等角同値である．$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ は compact であるから他の $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ のどれとも等角同値ではない．また $\mathbb{C}$ と $\mathbb{D}$ が等角同値でないことは，Liouville の定理（$\mathbb{C}$ 上に定数以外の有界正則函数は存在しない）より分かる．

Koebe の一意化定理は大抵の Riemann 面の教科書に記載があるが，後半部に書かれていることが多いので，そこに進むまでに息切れする．この本の底本である Ahlfors [**?**] の 9, 10 章には非常にコンパクトな記述があるが，コンパクト過ぎて読破にはかなりの労力が必要である．そこでより丁寧な解説がなされた戸田先生の [**?**] をお勧めする．

Definition 18.2.2. *Riemann 面 Ω が $\mathbb{D}$ を普遍被覆面として持つとき Ω は双曲的 (hyperbolic) であると言う．*

Theorem 18.2.3. *Riemann 面 Ω が双曲的ならば，任意の $a_0 \in \Omega$ と a_0 のまわりの chart (U, φ) で $\varphi(a_0) = 0$ を満たすものについて次の正規化条件を満たす正則な被覆写像 $f : \mathbb{D} \to \Omega$ が一意的に存在する．*

$$f(0) = a \text{ and } (\varphi \circ f)'(0) > 0. \tag{18.2.1}$$

Proof. 仮定により正則な被覆写像 $g : \mathbb{D} \to \Omega$ が存在する．g は全射であるから $g(z_0) = a$ を満たす z_0 が取れる．g は局所的に単射であるから $(\varphi \circ g)'(z_0) \neq 0$ であり，このとき

$$f_0(z) = g\left(\frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0} z}\right), \qquad z \in \mathbb{D}$$

と置けば

$$(\varphi \circ f_0)'(z) = \frac{1 - |z_0|^2}{(1 + \overline{z_0} z)^2} (\varphi \circ g)' \left(\frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0} z}\right)$$

であるから $(\varphi \circ f_0)'(0) = (1 - |z_0|^2)(\varphi \circ g)'(z_0)$ である．そこで $f(z) = f_0(\eta z)$, $\eta = \frac{\overline{(\varphi \circ g)'(z_0)}}{|(\varphi \circ g)'(z_0)|}$ と置けば，f は要求された正規化条件を満たす．

f の一意性を示すために $\tilde{f}$ も f と同一の正規化条件を満たす正則な被覆写像とする．このとき Corollary **??** より $\tilde{f} = f \circ \omega$ を満たす正則写像 $\omega : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ で $\omega(0) = 0$ を満たすものが存在する．このとき Schwarz の補題より $(\varphi \circ \tilde{f})'(0) = (\varphi \circ f)'(\omega(0))\omega'(0) = (\varphi \circ f)'(0)\omega'(0) \leq (\varphi \circ f)'(0)$ が成り立つ．同様にして $(\varphi \circ f)'(0) \leq (\varphi \circ \tilde{f})'(0)$ も成り立つので $(\varphi \circ f)'(0) = (\varphi \circ \tilde{f})'(0) > 0$ を得る．これより特に $\omega'(0) = 1$ を得る．Schwarz の補題より $\omega = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$ が従うので $\tilde{f} = f$ である． □

Corollary 18.2.4. Ω が $\hat{\mathbb{C}}$ 内の領域で双曲的ならば, 任意の $a \in \Omega$ について次の正規化条件を満たす正則被覆写像 $f : \mathbb{D} \to \Omega$ が一意的に存在する．

(i) $a \in \mathbb{C}$ の場合は $f(0) = a,\ f'(0) > 0$,

(ii) $a = \infty$ の場合は $f(0) = \infty,\ f(z) = \dfrac{c}{z} + \cdots,\ c > 0$.

Proof. (i) $a \in \mathbb{C}$ の場合は $U = \Omega \backslash \{\infty\}$ において $\varphi(w) = w - a$ と置き, この chart (U, φ) に Theorem を適用すればよい．

(ii) $a = \infty$ の場合は $U = \Omega \backslash \{0\}$ において $\varphi(w) = \dfrac{1}{w}$ と置き, この chart (U, φ) に Theorem を適用すれば $\dfrac{1}{f(z)} = \varphi \circ f(z)$ について $\varphi \circ f(0) = \varphi(\infty) = 0$, $c_0 := (\varphi \circ f)'(0) > 0$ であるから $z = 0$ のまわりで $\dfrac{1}{f(z)} = \varphi \circ f(z) = c_0 z + \cdots$ と表せる．よって $c = \dfrac{1}{c_0} > 0$ と置けば $f(z) = \dfrac{c}{z} + \cdots$ と表される． □

Theorem 18.2.5. Ω を複素平面内の双曲的領域とし, $\pi : \mathbb{D} \to \Omega$ を正則被覆写像とする．このとき $\mathbb{D}$ 上の函数について f が $\mathbb{D}$ から Ω の上への正則被覆写像であるための必要十分条件は, ある $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ により $f = \pi \circ \tau$ と表せることである．

Proof. $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ により $f = \pi \circ \tau$ 表わされたとしよう．このとき τ が $\mathbb{D}$ から自身への位相同型であることより f も正則被覆写像であることは明らかであろう．

次に f が $\mathbb{D}$ から Ω への普遍被覆写像ならば Coroallay **??**により $f = \pi \circ \tau$ を満たす位相自己同型 $\tau : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ が存在する．f, π ともに局所同相な正則写像であるから τ は正則である．従って $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ である． □

Theorem 18.2.6. Ω を複素平面内の双曲的領域とし, $\pi : \mathbb{D} \to \Omega$ を正則被覆写像とする．このとき $\mathbb{D}$ 上の正則函数について $f(\mathbb{D}) \subset \Omega$ ならば $f(a_0) = \pi(\zeta_0)$ を満たす任意の $a_0, \zeta_0 \in \mathbb{D}$ についてある正則写像 $\omega : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ で $\omega(a_0) = \zeta_0$ と $f = \pi \circ \omega$ を満たすものが存在する．

Proof. Theorem **??**を用いると $\omega(a_0) = \zeta_0$ と $f = \pi \circ \omega$ を満たす連続写像 ω 存在が分かる．Theorem **??** の証明中で ω が局所的に $\pi^{-1} \circ f$ の形で表されることを示した．従って正則である． □

第 19 章

双曲計量

19.1　双曲計量

S を等角アトラス $\mathcal{A} = \{(U, \varphi)\}$ を持つ Riemann 面とする．各 chart (U, φ) と局所座標 $z = \varphi(p)$, $p \in U$ について

$$\rho_\varphi(z)|dz|, \quad z \in \varphi(U)\ (\subset \mathbb{C}) \tag{19.1.1}$$

で表される形式 ρ とする．つまり別の chart (V, ψ) で $U \cap V \neq \emptyset$ を満たすものについて局所座標を $\tilde{z} = \psi(p)$, $p \in V$ とすれば ψ に関する ρ の表現

$$\rho_\psi(\tilde{z})|d\tilde{z}|, \quad \tilde{z} \in \psi(V)\ (\subset \mathbb{C})$$

について

$$\rho_\psi(\tilde{z}) = \rho_\varphi(\varphi \circ \psi^{-1}(\tilde{z}))|(\varphi \circ \psi^{-1})'(\tilde{z})| \tag{19.1.2}$$

が成り立つような形式である．

さて $a \in \Omega$ について 1 つの局所座標による表現 $\rho(z) > 0$

$\rho_\varphi(z) > 0$

Riemann 面 Ω が双曲的であるとき, Ω に計量 λ_Ω で普遍被覆写像 $\pi : \mathbb{D} \to \Omega$ による引き戻しが $\mathbb{D}$ の双曲計量 $\lambda_\mathbb{D}$ と一致するものが一意的に存在することを示そう．この λ_Ω のことを Ω の双曲計量と言う．λ_Ω は $\lambda_\mathbb{D}$ の引き戻しであるからその曲率は一定で -1 である．

Theorem 19.1.1. *Ω を平面内の領域とする．Ω が双曲的ならば Ω 上の正値 C^2 計量 λ_Ω で任意の正則被覆写像 $\pi : \mathbb{D} \to \Omega$ について等式 $\pi^*(\lambda_\Omega) = \lambda_\mathbb{D}$ が成り立つものが一意的に存在する．さらに Ω 上の任意の ultrahyperbolic metric ρ について $\rho(z) \leq \lambda_\Omega(z)$, $z \in \Omega$ が成り立つ．*

Proof. Theorem 18.2.3 より, 各 $a \in \Omega$ について普遍被覆写像 $f_a : \mathbb{D} \to \Omega$ で $f_a(0) = a$, $f_a'(0) > 0$ を満たすものが一意的に存在する．このとき

$$\lambda_\Omega(a) = \frac{2}{|f_a'(a)|}, \quad a \in \Omega \tag{19.1.3}$$

と置く．$\alpha \in \pi^{-1}(a)$ を取り $\eta = \frac{\overline{\pi'(\alpha)}}{|\pi'(\alpha)|} \in \partial\mathbb{D}$ と置き

$$\pi_\alpha(\zeta) = \pi\left(\frac{\eta\zeta + \alpha}{1 + \overline{\alpha}\eta\zeta}\right), \quad \zeta \in \mathbb{D}$$

と定義すれば $\pi_a(0) = \pi(\alpha) = a$ であり, $\pi_a'(0) = (1-|\alpha|^2)\eta\pi'(a) = (1-|\alpha|^2)|\pi'(\alpha)| > 0$. また $\pi_a : \mathbb{D} \to \Omega$ は被覆写像である. 従って Theorem 18.2.3 の一意性の部分から $f_a = \pi_a$ であり

$$\lambda_\Omega(a) = \frac{2}{\pi'(a)} = \frac{2}{(1-|\alpha|^2)|\pi'(\alpha)|}, \quad \alpha \in \pi^{-1}(a)$$

が成り立つ. そこで $a \in \Omega$ と $\alpha \in \pi^{-1}(a)$ を固定し, π に関する a の均一被覆近傍 V 及び $\pi^{-1}(V)$ の α を含む連結成分を U と置けば, 制限写像 $\pi|_U : U \to V$ は等角である. 上式の a に $z \in V$ を, α に $\zeta = (\pi|_U)^{-1}(z)$ を代入すれば

$$\lambda_\Omega(z) = \frac{2}{(1-|(\pi|_U)^{-1}(z)|^2)|\pi'((\pi|_U)^{-1}(z))|}, \quad z \in V \tag{19.1.4}$$

$$\lambda_\Omega(\pi(\zeta)) = \frac{2}{(1-|\zeta|^2)|\pi'(\zeta)|}, \quad \zeta \in U \tag{19.1.5}$$

が成り立つ. 特に (19.1.5) は λ_Ω の π による引き戻しが $\lambda_{\mathbb{D}}$ であることを示す. また π による Ω の計量 λ の引き戻しは $\lambda(\pi(\zeta))|\pi'(\zeta)|$ の形に表されるのでこれが $\lambda_{\mathbb{D}}(\zeta)$ と一致すれば $\lambda_\Omega(\pi(\zeta)) = \lambda(\pi(\zeta))$ が $\mathbb{D}$ 上で成り立つ. π は全射であるから, これより $\lambda_\Omega = \lambda$ が従う. つまり λ_Ω は一意である.

最後に λ_Ω の最大性を示そう. 非負計量 ρ が Ω 上で ultrahyperbolic とすると $\pi*(\rho) = \rho \circ |\pi'|$ は $\mathbb{D}$ 上で ultrahyperbolic であるから

$$\rho(\pi(\zeta))|\pi'(\zeta)| \le \lambda_{\mathbb{D}}(\zeta) = \lambda_\Omega(\pi(\zeta))|\pi'(\zeta)|$$

が成り立つ. 上式に π は局所単葉であるので $\pi'(\zeta) \neq 0$ であること及び π の全射性を合わせれば $\rho(z) \le \lambda_\Omega(z)$ が Ω で成り立つ. □

Corollary 19.1.2. D を領域, Ω を双曲的領域とし函数 $g : D \to \Omega$ は正則とする. このとき D も双曲的であり

$$g^*(\lambda_\Omega)(\zeta) = \lambda_\Omega(g(\zeta))|g'(\zeta)| \le \lambda_D(\zeta), \quad \zeta \in D \tag{19.1.6}$$

が成り立つ. またある点 $a \in D$ において等号が成り立つ為の必要十分条件は被覆写像 $f : \mathbb{D} \to D$ について $g \circ f$ が $\mathbb{D}$ から Ω への被覆写像であること.

Proof. $g^*(\lambda_\Omega)$ は明らかに至る所, 正値の C^2 な計量であり, $Kg^*(\lambda_\Omega) = K\lambda_\Omega \circ g = -1$ であるから ultrahyperbolic である. よって D は双曲的であり, $g^*(\lambda_\Omega) \le \lambda_D$ が成り立つ.

$a \in D$ について $b = g(a)$ と置き, a において等号

$$\lambda_D(a) = g^*(\lambda_\Omega)(a) = \lambda_\Omega(g(a))|g'(a)| = \lambda_\Omega(b)|g'(a)|$$

が成り立ったとする. $f_1 : \mathbb{D} \to D$ を $f_1(0) = a$, $f_1'(0) > 0$ を満たす被覆写像, $f_2 : \mathbb{D} \to \Omega$ を $f_2(0) = b$, $f_2'(0) > 0$ を満たす被覆写像とする. このとき $f_1^*(\lambda_D)(0) = \lambda_D(a)|f_1'(0)| = \lambda_{\mathbb{D}}(0) = 2$, $f_2^*(\lambda_\Omega)(0) = \lambda_\Omega(b)|f_2'(0)| = \lambda_{\mathbb{D}}(0) = 2$ より $\lambda_D(a) = \frac{\lambda_{\mathbb{D}}(0)}{f_1'(0)} = \frac{2}{f_1'(0)}$, $\lambda_\Omega(b) = \frac{\lambda_{\mathbb{D}}(0)}{f_2'(0)} = \frac{2}{f_2'(0)}$ であるから

$$\frac{2}{f_1'(0)} = \lambda_D(a) = \lambda_\Omega(b)|g'(a)| = \frac{2|g'(a)|}{f_2'(0)}$$

となり

$$f_1'(0)|g'(a)| = f_2'(0)$$

を得る. 写像 $g_2 \circ f_1$ を被覆 $f_2 : \mathbb{D} \to \Omega$ に関し持ち上げて $g \circ f_1 = f_2 \circ \varphi$ を満たす正則写像 $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ で $\varphi(0) = 0$ を満たすものを取る. このとき $g'(a)f_1'(0) = f_2'(0)\varphi'(0)$ が成り立つが上式より, 両辺の $|\varphi'(0)| = 1$ が従うので, Schwarz の補題より φ は原点のまわりの回転であり $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ である. よって $g_2 \circ f_1 = f_2 \circ \varphi : \mathbb{D} \to \Omega$ も被覆写像である. 最後に $f : \mathbb{D} \to D$ が被覆写像ならば, ある $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ により $f = f_1 \circ \psi$ と表せるので $g \circ f = (g \circ f_1) \circ \psi$ が成り立つ. よって $g \circ f$ は被覆写像に $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ を合成したものであるからやはり被覆写像である. □

Corollary 19.1.3. Ω_0, Ω_1 を *Riemann* 面とし写像 $g:\Omega_0\to\Omega_1$ は等角, つまり正則な全単射とする．このとき Ω_0, Ω_1 の一方が双曲的ならばもう一方もそうであり $g^*(\lambda_{\Omega_1})=\lambda_{\Omega_0}$ が成り立つ．

証明は明らかであろう．

それでは複素平面内の領域 Ω について普遍被覆面が $\hat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ のどれになるかを考えてみよう．と言っても普遍被覆面が $\hat{\mathbb{C}}$ になることはない．何故ならば $\hat{\mathbb{C}}$ が普遍被覆面ならば Ω はその (連続な) 被覆写像による像であるから compact になってしまい矛盾を生ずるからである．

準備として Ω が単連結の場合を考えよう．$\mathbb{C}\backslash\Omega$ が 1 点以上よりなるときは Riemann 球面で考えた補集合 $\hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ は $\hat{\mathbb{C}}$ 内の compact 集合であり ∞ ともう 1 点を含むので, 連続体である．(従って非可算無限個の点を含む.) この場合 Riemann の写像定理より等角写像 $f:\mathbb{D}\to\Omega$ が存在する．被覆写像の定義を確認すれば等角写像が被覆写像であることは, 容易に分かる．従って Ω は双曲的であり $f^*(\lambda_\Omega)=\lambda_{\mathbb{D}}$ を満たす双曲計量 λ_Ω が存在する．$g=f^{-1}$ と置けば $\lambda_\Omega=g^*(\lambda_{\mathbb{D}})$ であるから λ_Ω は等式

$$\lambda_\Omega(z)=\frac{2|g'(z)|}{(1-|g(z)|^2)}$$

により求めることが可能である．例えば円板 $\mathbb{D}(0,R)$, $R>0$ について双曲計量 λ_R と置けば写像 $z\mapsto\frac{z}{R}$ による $\mathbb{D}$ の Poincaré 計量の引き戻しを求めると

$$\lambda_R(z)=\frac{2R}{R^2-|z|^2} \tag{19.1.7}$$

で与えられる．

Ω の普遍被覆面が $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ のどちらになるかは補集合 $\mathbb{C}\backslash\Omega$ の元の個数により決定することが出来る．それには ultrahyperbolic metric が重要な役割を果たす．

まず $\mathbb{C}\backslash\Omega=\emptyset$, つまり $\Omega=\mathbb{C}$ の場合を考えよう．この場合アプリオリに Ω の普遍被覆面は $\Omega=\mathbb{C}$ であるが, もう少し詳しく $\mathbb{C}$ で ultrahyperbolic な計量を考えてみよう．ρ が複素平面 $\mathbb{C}$ 上で ultrahyperbolic ならば任意の $R>0$ について $\mathbb{D}(0,R)$ 上で ultrahyperbolic でもある．よって任意の $z\in\mathbb{C}$ について $R>|z|$ を満たす R を取れば

$$0\le\rho(z)\le\frac{2R}{R^2-|z|^2}$$

が成り立つ．ここで $R\to\infty$ とすれば $\rho(z)=0$ を得る．以上より複素平面 $\mathbb{C}$ 上の ultrahyperbolic metric は 0 のみである．

次に $\mathbb{C}\backslash\Omega$ が 1 点よりなるときを考えよう．つまり Ω が穴開き平面 $\mathbb{C}\backslash\{a\}$ の場合である．この場合 exp を指数函数とし正則写像 $\exp+a:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\backslash\{a\}$ が被覆写像を与えるので Ω の普遍被覆面は $\mathbb{C}$ である．さらに ρ が $\Omega=\mathbb{C}\backslash\{a\}$ 上の ultrahyperbolic metric ならば $\rho=0$ となることが次のように示される．$\exp+a$ による ρ の引き戻し $\rho(e^z+a)|e^z|$ は $\mathbb{C}$ で ultrahyperbolic であるから, やはり $\rho(e^z)|e^z|=0$ が成り立つ．これより $\rho=0$ が従う．

実は $\mathbb{C}$ を普遍被覆面とする平面領域 Ω は $\mathbb{C}$ 自身または穴開き平面のみである．そして補集合 $\mathbb{C}\backslash\{\Omega\}$ が 2 点以上含む平面領域 Ω の普遍被覆面は $\mathbb{D}$ である．これを示すには Ω 上に $\rho\neq0$ である ultrahyperbolic metric が存在することを言えばよい．何故ならばこのとき Ω の普遍被覆面が $\mathbb{C}$ と仮定すると ρ を引き戻すことにより $\mathbb{C}$ 上に 0 以外の ultrahyperbolic metric が存在することになり不合理である．

相異なる 2 点 $a,b\in\mathbb{C}\backslash\{\Omega\}$ を取る．写像 $z\mapsto\frac{z-a}{b-a}$ により $\Omega_{a,b}:=\mathbb{C}\backslash\{a,b\}$ は $\Omega_{0,1}=\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ に等角に写像される．従って $\Omega_{0,1}=\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ 上にでない至る所で正な ultrahyperbolic metric ρ が存在することが分かれば $\Omega_{a,b}:=\mathbb{C}\backslash\{a,b\}$ 上にも至る所で正な ultrahyperbolic metric が存在することになり, これを $\Omega_{a,b}$ の部分領域 Ω に制限しても至る所で正な ultrahyperbolic metric である．以上により問題は $\Omega_{0,1}$ 上に至る所で正な ultrahyperbolic metric が存在することを示すことに還元された．ここで思い出すべきはモジュラー函数である．モジュラー函数は上半平面 $\mathbb{H}$ から $\Omega_{0,1} = \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ への正則被覆写像であるから, 上半平面は $\Omega_{0,1}$ の普遍被覆面であり, $\mathbb{H}$ と等角同値な $\mathbb{D}$ も $\Omega_{0,1}$ の普遍被覆面である．従って Theorem 19.1.1 より $\Omega_{0,1}$ には Poincaré 計量が存在する．同様に $\Omega_{a,b}$ も $\mathbb{D}$ を普遍被覆面に持ち Poincaré 計量が存在する．そこで $\Omega_{a,b}$ の Poincaré 計量を $\lambda_{a,b}$ と表すことにすれば

$$\lambda_{a,b}(z) = \frac{1}{|b-a|}\lambda_{0,1}\left(\frac{z-a}{b-a}\right), \quad z \in \Omega_{a,b}$$

が成り立つことが分かる．ここで $\Omega \subset \Omega_{a,b}$ であるから $\lambda_{a,b}$ の Ω への制限は C^2 級で至る所で正値であり, 曲率が一定値 -1 の計量であるから, ultrahyperbolic である．以上で Ω 上に 0 でない ultrahyperbolic な計量の存在が示されたので Ω は $\mathbb{D}$ を普遍被覆面に持つ．

以上の議論をまとめておこう．

Theorem 19.1.4. *Ω を複素平面内の領域とする．このとき補集合 $\mathbb{C}\backslash\Omega$ が 2 点以上を含めば Ω は双曲的, つまり $\mathbb{D}$ を普遍被覆 Riemann 面として持つ．また $\mathbb{C}\backslash\Omega$ が空または 1 点よりなるときは Ω は $\mathbb{C}$ を普遍被覆 Riemann 面として持つ．*

まず穴開き円板 $\mathbb{D}_R^* := \mathbb{D}(0,R)\backslash\{0\}$ の Poincaré 計量を求めておこう．まず $\mathbb{D}$ から穴開き単位円板 $\mathbb{D}_R^* := \mathbb{D}(0,R)\backslash\{0\}$ への普遍被覆写像は

$$f(\zeta) = e^{\log R - \frac{1+\zeta}{1-\zeta}}, \quad \zeta \in \mathbb{D} \tag{19.1.8}$$

で与えられるので $\lambda_{\mathbb{D}_R^*}(f(\zeta))|f'(\zeta)| = \frac{2}{1-|\zeta|^2}$ である．これに $z = f(\zeta) = e^{\log R - \frac{1+\zeta}{1-\zeta}}$ と $|f'(\zeta)| = \frac{2}{|1-\zeta|^2}|f(\zeta)| = \frac{2|z|}{|1-\zeta|^2}$ を代入すれば

$$\lambda_{\mathbb{D}_R^*}(z)\frac{2|z|}{|1-\zeta|^2} = \frac{2}{1-|\zeta|^2}$$

より

$$\lambda_{\mathbb{D}_R^*}(z) = \frac{|1-\zeta|^2}{|z|(1-|\zeta|^2)}$$

となるが, $|z| = e^{\log R - \mathrm{Re}\,\frac{1+\zeta}{1-\zeta}} = e^{\log R - \frac{1-|\zeta|^2}{|1-\zeta|^2}}$ より $\log\frac{R}{|z|} = \frac{1-|\zeta|^2}{|1-\zeta|^2}$ であるから $\mathbb{D}_R^*$ の Poincaré 計量は

$$\lambda_{\mathbb{D}_R^*}(z) = \frac{1}{|z|\log\frac{R}{|z|}}, \quad z \in \mathbb{D}_R^* \tag{19.1.9}$$

である．同様に函数 $z = e^{\log R + \frac{1+\zeta}{1-\zeta}}$ が $\mathbb{D}$ から $A(R) := \{z \in \mathbb{C} : R < |z|\}$ への普遍被覆写像を与えることから

$$\lambda_{A(R)}(z) = \frac{1}{|z|\log\frac{|z|}{R}}, \quad R < |z| \tag{19.1.10}$$

が $A(R)$ の Poincaré 計量である．

それでは Poincaré 計量に関する基本的な不等式を挙げておこう．

Theorem 19.1.5. *Ω_1, Ω_2 を双曲的領域とし $\Omega_1 \subset \Omega_2$ ならば*

$$\lambda_{\Omega_2}(z) \le \lambda_{\Omega_1}(z), \quad z \in \Omega_1 \tag{19.1.11}$$

が成り立つ．特にある点 $z_0 \in \Omega_1$ において等号が成り立つ必要十分条件は $\Omega_1 = \Omega_2$ である．

Proof. λ_{Ω_2} の Ω_1 への制限は Ω_1 で ultrahyperbolic である．そして λ_{Ω_1} は Ω_1 で最大の ultrahyperbolic な計量であるから (19.1.11) が成り立つ．

$\Omega_1 = \Omega_2$ のとき，明らかに全ての $z_0 \in \Omega_1$ において等号が成り立つ．今度はある z_0 において等号が成り立ったと仮定する．$j = 1, 2$ について正則被覆写像 $f_j : \mathbb{D} \to \Omega_j$ を $f_j(0) = z_j$, $f_j'(0) > 0$ を満たすように取る．このとき $f_1(\mathbb{D}) = \Omega_1 \subset \Omega_2$ であるから Theorem 18.2.6 より $f_1 = f_2 \circ \omega$, $\omega(0) = 0$ を満たす正則写像 $\omega : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ が存在する．

$$\frac{2}{|f_1'(0)|} = \lambda_{\Omega_1}(z_0) = \lambda_{\Omega_2}(z_0) = \frac{2}{|f_2'(0)|}$$

であるから $f_1'(0) = f_2'(0)$ が成り立つ．よって $\omega'(0) = f_1'(0)/f_2'(0) = 1$ を得る．よって Schwarz の補題の一意性より $\omega = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$ となり $f_1 = f_2$ ひいては $\Omega_1 = \Omega_2$ を得る． □

Theorem 19.1.6. Ω を双曲的領域とし，$\delta_\Omega(z) = \inf\{|w - z| : w \in \mathbb{C}\backslash\Omega\}$, $z \in \Omega$ と置くと

$$\lambda_\Omega(z) \leq \frac{2}{\delta_\Omega(z)} \tag{19.1.12}$$

が成り立つ．

Proof. $z_0 \in \Omega$ について $r = \delta_\Omega(z_0)$ と置くと $\mathbb{D}(z_0, r) \subset \Omega$ であるから $\mathbb{D}(z_0, r)$ において $\lambda_\Omega(z) \leq \lambda_{\mathbb{D}(z_0,r)}(z)$ が成り立つ．特に

$$\lambda_\Omega(z_0) \leq \lambda_{\mathbb{D}(z_0,r)}(z_0) = \left.\frac{2r}{r^2 - |z - z_0|^2}\right|_{z=z_0} = \frac{2}{r} = \frac{2}{\delta_\Omega(z_0)}$$

である． □

19.2 Ultrahyperbolic 計量と SK-metric

19.3 様々な評価式

19.4 Reflection Principle

19.5 Symmetrization

第 20 章

対数容量

この章では複素平面内の compact 集合の大きさを測る量として, 超越直径, Chebyshev 定数及び対数容量と呼ばれるものを定義し, 後章で応用する為に, その性質を調べる. これら 3 つの量が一致することを示していく.

20.1 超越直径

E を複素平面 $\mathbb{C}$ 内の compact 集合とし $n{=}2,3,\ldots$ について

$$d_n = d_n(E) := \max\left\{\prod_{1\le i<j\le n}|z_i-z_j|^{\frac{2}{n(n-1)}} : z_1,\ldots,z_n\in E\right\} \tag{20.1.1}$$

と置く. E は compact であるから最大値を与える点の組 点 $z_1,\ldots,z_n$, つまり $d_n(E)=\prod_{1\le i<j\le n}|z_i-z_j|^{\frac{2}{n(n-1)}}$ を満たす点の組が存在する. そして $z_1,\ldots,z_n\in\partial E$ が成り立つことも容易に分かるであろう. 従って

$$d_n(E)=d_n(\partial E),\quad n=2,3,\ldots \tag{20.1.2}$$

が成り立つ. さて最大値を与える点の組 $\{z_1,\ldots,z_n\}$ を n 次の Fekete 集合と呼び, 個々の点を n 次の Fekete 点と言う. 勿論 $n=2$ の時は $d_2(E)=\mathrm{diam}(E):=\max\{|z-w|:z,w\in E\}$ であり, 直径と一致する. また E が n 個の点よりなる有限集合の時 $d_{n+1}=d_{n+2}=\cdots=0$ となることに注意しよう.

Theorem 20.1.1. $\{d_n\}_{n=2}^{\infty}$ について $d_1\ge d_2\ge\cdots d_n\ge\cdots$ が成り立つ.

Definition 20.1.2. この定理より *compact* 集合 E について極限 $d_\infty(E):=\lim_{n\to\infty}d_n(E)\in[0,\infty)$ が存在することが分かる. $D_\infty(E)$ を E の超越直径 *(transfinite diameter)* と言う. E が有限集合のときは $d_\infty(E)=0$ が成り立つ.

$d_n(E)$ と 超越直径 $d_\infty(E)$ は 1923 年に Fekete [5] により導入された.

Proof of Theorem 20.1.1. 任意の $z_1,\ldots,z_n\in E$ について z_k を省いて積を取ると

$$\prod_{\substack{1\le i<j\le n\\ i,j\ne k}}|z_i-z_j|\le d_{n-1}^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

を得る. これらの不等式をかけ合わせて

$$\prod_{k=1}^{n}\left\{\prod_{\substack{1\le i<j\le n\\ i,j\ne k}}|z_i-z_j|\right\}\le d_{n-1}^{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}$$

この式の左辺において $|z_i - z_j|$ が出現する回数は $k \neq i, j$ の場合に現れるので $n-2$ 回である．よって

$$\prod_{1\le i<j\le n} |z_i - z_j| \le d_{n-1}^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

を得る．この不等式と $z_1, \ldots, z_n \in E$ の任意性より $d_n \le d_{n-1}$ が従う． □

$z_1, \ldots, z_n \in E$ について Vandermonde の行列式を

$$V(z_1, \ldots, z_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_n & \cdots & z_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (z_i - z_j) \tag{20.1.3}$$

と置く．このとき

$$d_n(E) = \max\{|V(z_1, \ldots, z_n)| : z_1, \ldots, z_n \in E\} \tag{20.1.4}$$

である．

Example 20.1.3. 単位閉円板 $\overline{\mathbb{D}}$ *(*または単位円周 $\partial\mathbb{D}$*)* の場合に $d_n(\overline{\mathbb{D}}) = d_n(\partial\mathbb{D}) = |V_n(z_1, \ldots, z_n)|$ を満たす n 次の *Fekete* 集合 $\{z_1, \ldots, z_n\} \subset \partial\mathbb{D}$ は 1 の n 乗根の全てがなす n 個の点よりなる集合*,* またはその *(*一斉*)* 回転であり $d_n(E) = n^{\frac{1}{n-1}}$ が成り立つ*.* そして $d_\infty(E) = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n-1}} = 1$ である*.*

Proof. 行列式に関する Hadamard の不等式

$$|\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)| \le \|\mathbf{a}_1\|\|\mathbf{a}_2\| \cdots \|\mathbf{a}_n\|$$

を用いよう．ただし等号が成り立つ為の必要十分条件は列ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ が直交系をなすことである．

$d_n(E) = |V_n(z_1, \ldots, z_n)|$ となる $z_1, \ldots, z_n \in \partial\mathbb{D}$ を取れば

$$\begin{aligned} d_n(E)^{\frac{n(n-1)}{2}} &= |V_n(z_1, \ldots, z_n)| \\ &\le \sqrt{1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2}\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2} \cdots \sqrt{|z_1^{n-1}|^2 + |z_2^{n-1}|^2 + \cdots + |z_n^{n-1}|^2} \\ &= n^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで等号が起きたと仮定すると第 1 列ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ と残りの列ベクトルが直交するので

$$\begin{aligned} A_1 &:= z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0 \\ A_2 &:= z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2 = 0 \\ &\vdots \\ A_{n-1} &:= z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0 \end{aligned}$$

ここで基本対称式を

$$
\begin{aligned}
S_1 :=& z_1+z_2+\cdots+z_n=0\\
S_2 :=& \prod_{1\le i,j\le n} z_iz_j=0\\
&\vdots\\
S_{n-1} :=& z_1z_2\cdots z_n=0
\end{aligned}
$$

と置けば Newton の公式より

$$
\begin{aligned}
&A_1-S_1=0\\
&A_2-A_1S_1+2S_2\\
&\vdots\\
&A_{n-1}-S_1A_{n-2}+\cdots+(-1)^{n-2}S_{n-2}A_1+(-1)^{n-1}(n-1)S_{n-1}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって $A_1=A_2=\cdots=A_{n-1}=0$ より $S_1=S_2=\cdots=S_{n-1}=0$ が従う．以上より

$$
\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)=z^n-S_1z^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}S_{n-1}z+(-1)^nz_1z_2\cdots z_n=z^n+(-1)^nz_1z_2\cdots z_n
$$

が成り立ち $|(-1)^nz_1z_2\cdots z_n|=1$ に注意すれば，適当に順番を並べ替えることにより，ある実数 α w お用いて $z_k=e^{i\alpha}e^{2\pi\frac{k-1}{n}i}$, $k=1,\ldots,n$ と表せる．

逆に $z_k=e^{i\alpha}e^{2\pi\frac{k-1}{n}i}$, $k=1,\ldots,n$ について $\mathbf{a}_k=\begin{pmatrix} z_1^{k-1}\\ \vdots\\ z_n^{k-1}\end{pmatrix}$ $k=1,\ldots,n$ と置けば，直交系をなすことが容易に分かる．よって Hadamard の不等式を適用した所で等号が成立し，このような $z_1,\ldots,z_n$ で $|V_n|$ が最大値を取ることが分かる．よって $d_n(\overline{\mathbb{D}})=n^{\frac{1}{n-1}}$ である． □

次に Schur [26] にならい複素平面内の線分の超越直径を計算しよう．実際には Szegö [**?**] §6.7 を参考にした．

Example 20.1.4. $E=[-1,1]$ の場合

$$
d_n([-1,1])=\frac{2^23^3\cdots n^n2^23^3\cdots(n-2)^{n-2}}{3^35^5\cdots(2n-3)^{2n-3}},\quad n\ge 3,\quad d_2(E)=2
$$

であり n 次の *Fekete* 集合 $\{z_1,\ldots,z_n\}$ は *Legendre* 多項式

$$
p_n(x)=\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left\{(x^2-1)^{n-1}\right\}
$$

の零点集合である．

Proof. Fekete 点を大きさの順に並べる時一番小さなものは -1 であり，一番大きなものは 1 となることが容易に分かるであろう．そこで ±1 以外の Fekete 点を $-1<x_1<\cdots<x_n<1$ と並べる．$V_{n+2}(-1,x_1,\ldots,x_n,1)$ において x_i, $1\le i\le n$ を変数とみなし対数微分を取れば

$$
\frac{1}{x_i+1}+\frac{1}{x_i-x_1}+\cdots+\frac{1}{x_i-x_{i-1}}+\frac{1}{x_i-x_{i+1}}+\cdots+\frac{1}{x_i-x_n}+\frac{1}{x_i-1}=0,\quad i=1,\ldots,n
$$

が成り立つ. 次に $P(x)=(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ と置くと

$$\begin{aligned}P'(x)=&\sum_{i=1}^{n}\prod_{1\le k\le n,k\ne i}(x-x_k)\\P''(x)=&2\sum_{1\le i<j\le n}^{n}\prod_{1\le k\le n,k\ne i,j}(x-x_k)\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}P'(x_i)=&\prod_{1\le k\le n,k\ne i}(x_i-x_k)\\P''(x_i)=&2\sum_{1\le j\le n,j\ne i}^{n}\prod_{1\le k\le n,k\ne i,j}(x_i-x_k)\end{aligned}$$

より

$$\frac{P''(x_i)}{P'(x_i)}=2\left\{\frac{1}{x_i-x_1}+\cdots+\frac{1}{x_i-x_{i-1}}+\frac{1}{x_i-x_{i+1}}+\cdots+\frac{1}{x_i-1}\right\}=-2\left\{\frac{1}{x_i+1}+\frac{1}{x_i-1}\right\}$$

よって

$$(1-x_i)^2P''(x_i)-4x_iP'(x_i)=0,\quad i=1,\dots,n$$

が成り立つ. 従って n 次多項式 $Q(x)=(1-x)^2P''(x)-4xP'(x)$ も $x_1,\dots,x_n$ を零点に持つことが分かる. 最高次の係数を比較すれば $Q(x)=-n(n-1)P_n(x)$ が成り立つことが分かる. つまり

$$(1-x)^2P''(x)-4xP'(x)=n(n-1)P(x)$$

が成り立つ. □

20.2 Chebyshev 定数

次に各 $n\in\mathbb{N}$ に対し n 次 monic 多項式 (最高次の係数が 1 の多項式を言う) $P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ を考え E 上での最大値を $\mu(P)=\max_{z\in E}|P(z)|$ と置く.

$$\rho_n(E)=\inf\{\mu(P):P \text{ は } n \text{ 次 monic 多項式 }\}$$

と置く. inf を attain する n 次 monic 多項式が存在すれば, 集合 E の n 次 Tchebychev 多項式と呼ぶ.

E が n 個の点よりなる有限集合の時, 任意の $k\in\mathbb{N}$ について $\rho_{n+k}(E)=0$ であり $n+k$ 次 Tchebychev 多項式は無数に存在する. 実際 $E=\{z_1,\dots,z_n\}$ ならば $z_{n+1},\dots,z_{n+k}\in\mathbb{C}\backslash E$ を任意に取れば $P(z)=(z-z_1)\cdots(z-z_n)(z-z_{n+1})\cdots(z-z_{n+k})$ は明らかに $\max_{z\in E}|P(z)|=0$ を満たすので $n+k$ 次の Tschebychev 多項式である.

Theorem 20.2.1. *E が n 個以上の点を含めば $1,\dots,n$ 次の Tchebychev 多項式は存在する.*

Proof. n 次の Tchebychev 多項式が存在することを示せば十分であろう. $P_\nu(z)=z^n+a_1^{(\nu)}z^{n-1}+\cdots+a_n^{(\nu)}$ を $\mu(P_\nu)=\max_{z\in E}|P_\nu(z)|\to\rho_n$ を満たす多項式の列とする. $\{\mu(P_\nu)\}_{\nu=1}^{\infty}$ は収束列であるから, 有界であり全ての ν について $\mu(P_\nu)\le M$ を満たす $M>0$ が取れる. また n 個の相異なる点 $z_1,\dots,z_n\in E$ を取る. このとき $i=1,\dots,n$

について $z_i^n + a_1^{(\nu)} z_i^{n-1} + \cdots + a_n^{(\nu)} = P_\nu(z_i)$ において $|P_\mu(z_i)| \le \max_{z\in E}$ 成り立つので $\{a_1^{(\nu)}\}_{\nu=1}^\infty, , \ldots, \{a_n^{(\nu)}\}_{\nu=1}^\infty$ は有界である．実際 $a_1^{(\nu)} z_i^{n-1} + \cdots + a_n^{(\nu)} = P_\nu(z_i) - z_i^n$ と書き直せば

$$\begin{pmatrix} z_1^{n-1} & \cdots & z_1 & 1 \\ z_2^{n-1} & \cdots & z_2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_n^{n-1} & \cdots & z_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(\nu)} \\ \vdots \\ a_{n-1}^{(\nu)} \\ a_n^{(\nu)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_\nu(z_1) - z_1^n \\ \vdots \\ P_\nu(z_{n-1}) - z_{n-1}^n \\ P_\nu(z_n) - z_n^n \end{pmatrix} \tag{20.2.1}$$

であるが, 左辺の行列の行列式は Vandermonde の行列式 であり

$$\begin{vmatrix} z_1^{n-1} & \cdots & z_1 & 1 \\ z_2^{n-1} & \cdots & z_2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_n^{n-1} & \cdots & z_n & 1 \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} |z_j - z_i| \neq 0$$

であることより

$$\begin{pmatrix} a_1^{(\nu)} \\ \vdots \\ a_{n-1}^{(\nu)} \\ a_n^{(\nu)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^{n-1} & \cdots & z_1 & 1 \\ z_2^{n-1} & \cdots & z_2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_n^{n-1} & \cdots & z_n & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_\nu(z_1) - z_1^n \\ \vdots \\ P_\nu(z_{n-1}) - z_{n-1}^n \\ P_\nu(z_n) - z_n^n \end{pmatrix} \tag{20.2.2}$$

が成り立つ．この式と $|P_\nu(z_1) - z_1^n| \le \max\{M, |z_1|^n, \ldots, |z_n|^n\}$, $i = 1, \ldots, n$ より $\{a_1^{(\nu)}\}_{\nu=1}^\infty, , \ldots, \{a_n^{(\nu)}\}_{\nu=1}^\infty$ の有界性が従う．従って必要ならば部分列で置き換えることにより $i = 1, \ldots, n$ について $a_i^{(\nu)} \to a_i$, $\nu \to \infty$ と仮定してよい．このとき $\{P_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ は $T(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ に E 上, 一様収束する．従って

$$|T(z)| = \lim_{\nu\to\infty} |P_\nu(z)| \le \rho_n$$

が成り立つので $\mu(T) \le \rho_n$ が成り立つ．また $\mu(T) \ge \inf_P \mu(P) = \rho_n$ も成り立つので $\mu(T) = \rho_n$ となり, T は n 次の Tchebychev 多項式である． □

さて E が n 個の点よりなる有限集合で $E = \{z_1, \ldots, z_n\}$ と表される時 n 次の Tchebychev 多項式は, ただ一つであり $T_n(z) = (z - z_1)\cdots(z - z_n)$ である．実際 S_n を n 次の Tchebychev 多項式とすれば $\rho_n(E) = 0$ であるから $S_n(z_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n$ が成り立つからである．この場合 $n-1$ 次以下の Tchebychev 多項式も一意に定まるのだが, E が無限集合の場合も含めて次が成り立つ．

Theorem 20.2.2. $\rho_n \le d_n$, $n \in \mathbb{N}$ が成り立ち $\lim_{n\to\infty} \rho_n(E) = d_\infty(E)$ である．

20.3 ポテンシャルと対数容量

20.4 容量と超越直径

第 21 章

核収束と普遍被覆写像

21.1　核収束の定義

$\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ を複素平面内の領域の列とし, 点 $a \in \mathbb{C}$ とする.

Definition 21.1.1 (領域核)**.** 参照点 a に関する $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ の領域核 $\mathrm{Ker}(a, \{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty})$ を以下のように定義する. 任意の $N \in \mathbb{N}$ について $a \notin \Omega_n$, $n \geq N$ を満たす n が存在するとき $\mathrm{Ker}(a, \{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}) = \emptyset$ と置く. また "十分大きな全ての $n \in \mathbb{N}$ について $a \in \Omega_n$" が成り立つときは, 点 a 自身と, 次の条件を満たす点 $z \in \mathbb{C}$ の全てよりなる集合を $\mathrm{Ker}(a, \{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}, a)$ と置く. ここで z に関する条件とは

$$\text{ある領域 } H \text{ で } a, z \in H \text{かつ十分大きな全ての } n \text{ について } H \subset \Omega_n \text{ を満たすものが存在} \tag{21.1.1}$$

である. もちろんこのような z が存在しなければ $\mathrm{Ker}(a, \{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{a\}$ である. $\{a\} \subsetneq \mathrm{Ker}(a, \{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty})$ の場合, 定義より明らかに領域核 $\mathrm{Ker}(a, \{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty})$ は a を内点とする領域である.

さて $\Omega = \mathrm{Ker}(a, \{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty})$ と置くとき $\{a\} \subsetneq \Omega$ ならば Ω は

$$a \in \Omega \tag{21.1.2}$$

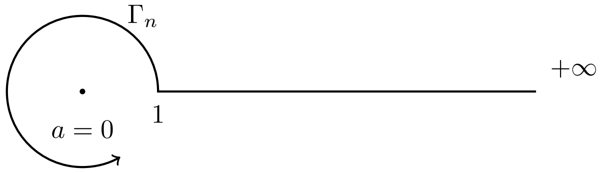
$$\forall \text{ compact 部分集合 } K \subset \Omega : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : K \subset \Omega_n \tag{21.1.3}$$

を満たす領域である. 逆に領域 Ω が上の性質を持てば $\Omega \subset \mathrm{Ker}(a, \{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty})$ を満たすことは容易に分かる. また上の性質を持つ領域の任意個数の和も領域であり同じ性質を持つ. 従って領域核とは, 上の性質を持つ領域の中で最大のものである.

Definition 21.1.2 (Carathéodory)**.** $\mathbb{C}$ 内の領域の列 $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ が a を参照点として領域 Ω に 核収束するとは, 任意の部分列 $\{\Omega_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ について $\mathrm{Ker}(a, \{\Omega_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}) = \Omega$ が成り立つ時を言う. また $\{a\}$ に退化するとは任意の部分列 $\{\Omega_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ について $\mathrm{Ker}(a, \{\Omega_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}) = \{a\}$ が成り立つ時を言う.

領域核は部分列を取ることに関して単調性を持つ. つまり $\{\Omega_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列とすれば $\mathrm{Ker}(a, \{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}) \subset \mathrm{Ker}(a, \{\Omega_{n_k}\}_{k=1}^{\infty})$ が成り立つ. 従って上の Carathéodory による定義は $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ の領域核が部分列を取っても大きくならないことを意味する.

Example 21.1.3. 各 $n \in \mathbb{N}$ について $\Gamma_n = [1, +\infty) \cup \left\{e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi - \frac{\pi}{n}\right\}$ とし, $\Omega_n = \mathbb{C} \backslash \Gamma_n$ と置くと, 任意の $a \in \mathbb{D}$ について $\mathrm{Ker}(a, \{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}) = \mathbb{D}$ が成り立つ. さらに任意の部分列についても $\mathrm{Ker}(a, \{\Omega_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}) = \mathbb{D}$ であるから $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a を参照点として $\mathbb{D}$ に核収束する.



さて実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ について

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ が収束する} \iff \text{全ての部分列} \quad \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \text{ が収束する.}$$

が成り立つことはご存知であろう．勿論, 全ての部分列　$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が収束すれば, これらの部分列の極限値は共通であり, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ も同じ極限値に収束する．Carathéodory の核収束の定義は全ての部分列について領域核が不変であることを要求する点で上と類似の性質を用いて間接的な収束の定義をしていると言えよう．次節以降で領域の核収束と解析函数の局所一様収束との関係に関する結果を証明する際に, このような定義にも利点があることが分かるのだが, ここではもっと直接的な定義を与えよう．その前にこれからの議論でよく使う論法を念の為に書いておく．位相空間 X の部分集合 A について $\mathrm{Int}\, A$ で A の内点の全体を, $\mathrm{Ext}\, A$ で A の外点の全体, ∂A で境界点の全体を表す．また A の補集合を $A^c(=X\setminus A)$ で表す.

Lemma 21.1.4. *X を位相空間とし, A, D を部分集合とする．D が連結で $\mathrm{Int}\, A\cap D\neq\emptyset$ かつ $A^c\cap D\neq\emptyset$ ならば $\partial A\cap D\neq\emptyset$ である.*

Proof. もし $\partial A\cap D=\emptyset$ ならば

$$\emptyset\neq D\cap A^c\subset D\cap(\mathrm{Ext}\, A\cup\partial A)=D\subset\mathrm{Ext}\, A$$

が成り立つ．またさらに $\partial A\cap D=\emptyset$ より $D\subset\mathrm{Int}\, A\cup\mathrm{Ext}\, A$ が成り立つ．従って D は $\mathrm{Int}\, A\cap D$, $\mathrm{Ext}\, A\cap D$ という 2 つの (相対位相に関する) 空でない開集合に分解されることになり, D が連結であるという仮定に反する. □

Theorem 21.1.5 (Pommerenke [21])**.** *$\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathbb{C}$ 内の領域の列, Ω を $\mathbb{C}$ 内の領域とする．このとき次の (i), (ii), (iii) は互いに同値.*

(i) 次の 2 条件が成り立つ.
  (a) 任意のコンパクト集合 $K\subset\Omega$ についてある番号 $N\in\mathbb{N}$ で $K\subset\Omega_n\quad\forall n\geq N$ となるものが存在する.
  (b) 任意の境界点 $c\in\partial\Omega$ について $\mathrm{dist}(c,\partial\Omega_n)\to 0$ $(n\to\infty)$.

(ii) 任意の $a\in\Omega$ について $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a を参照点として核収束し $\mathrm{Ker}(a,\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty})=\Omega$.

(iii) ある $a\in\Omega$ について $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a を参照点として核収束し $\mathrm{Ker}(a,\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty})=\Omega$.

条件 (a) は $\Omega\subset\mathrm{Ker}(a,\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty})$ が成り立つことを意味する．これに比して (b) は, 部分列を取っても $\mathrm{Ker}(a,\{\Omega_{n_k}\}_{k=1}^{\infty})$ が Ω より大きくならないことを保証する条件である．また (a), (b) の中には参照点 a が現れない．そこでこの定理を用いれば, 参照点を指定することなしに, 核収束が定義できる．しかし残念なことに領域列 $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し (a), (b) を満たす領域 Ω は, ただ 1 つであるとは限らない.

Proposition 21.1.6. *Ω と Ω' を $\mathbb{C}$ 内の領域とし $\Omega\cap\Omega'\neq\emptyset$ とする．このとき領域列 $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して Ω, Ω' がともに (a), (b) を満たせば $\Omega=\Omega'$ が成り立つ.*

Proof. はじめに $\Omega\cap\partial\Omega'=\emptyset$ を背理法で示そう．そこで $c\in\Omega\cap\partial\Omega'$ と仮定する．$c\in\Omega$ より $\varepsilon>0$ を $\overline{\mathbb{D}}(c,\varepsilon)\subset\Omega$ となるように取れる．このときコンパクト集合 $\overline{\mathbb{D}}(c,\varepsilon)$ について (a) を用いれば十分大きな全ての n について $\overline{\mathbb{D}}(c,\varepsilon)\subset\Omega_n$

であるから, $\mathrm{dist}(c, \partial\Omega_n) \geq \varepsilon$ が十分大きな全ての n について成り立つ．一方 $c \in \partial\Omega'$ であるから条件 (b) より $\mathrm{dist}(c, \partial\Omega_n) \to 0$ が成り立つことになり矛盾を生じる．

さて $\Omega \cap \partial\Omega' = \emptyset$ より

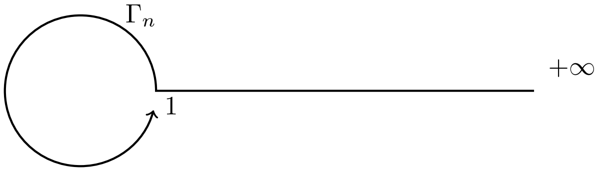
$$\Omega \subset \Omega' \cup \mathrm{Ext}\,\Omega'$$

が成り立つ．ここで Ω は連結であるから $\Omega \subset \Omega'$ または $\Omega \subset \mathrm{Ext}\,\Omega'$ のどちらか一方が成り立つが, $\Omega \cap \Omega' \neq \emptyset$ であるから後者は成り立ち得ず, $\Omega \subset \Omega'$ が成り立つことが従う．

Ω と Ω' を入れ替えて同じ議論を行えば $\Omega' \subset \Omega$ も成り立つので, $\Omega' = \Omega$ である． □

次の例が示すように領域列 $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ ついて条件 (a), (b) を満たす領域 Ω, Ω' は一致するとは限らない．しかしながら Proposition 21.1.6 より分かるように Ω と Ω' は一致するか交わらないかのどちらかである．

Example 21.1.7. 各 $n \in \mathbb{N}$ について $\Gamma_n = [1, +\infty) \cup \left\{e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi - \frac{\pi}{n}\right\}$ とし, $\Omega_n = \mathbb{C} \backslash \Gamma_n$ と置くと, $\Omega = \mathbb{D}$ は条件 (a), (b) を満たすが, $\Omega' = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \backslash [1, +\infty)$ も (a), (b) を満たす．



Proof of Theorem 21.1.5. “(i) $\Longrightarrow$ (ii)“ を示そう．そこで (a), (b) が成り立つと仮定する．まず任意の $a \in \Omega$ について $\Omega = \mathrm{Ker}(a, \{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty})$ が成り立つことを示そう．もしこれが示されれば Ω と任意の部分列 $\{\Omega_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ についても (a), (b) が成り立つので, $\Omega = \mathrm{Ker}(a, \{\Omega_{n_k}\}_{k=1}^{\infty})$ が成り立つ．従って $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a を参照点として Ω に核収束する．

まず $z \in \Omega$ について a と z を Ω 内の折れ線 ℓ で結び, $\rho = \mathrm{dist}(\ell, \partial\Omega)$ とする．このとき $\varepsilon \in (0, \rho)$ について

$$H = \bigcup_{w \in \ell} \mathbb{D}(w, \varepsilon)$$

と置けば, H は領域であり $a, z_1 \in H$ を満たす．また閉包 $\overline{H}$ はコンパクトで $\overline{H} \subset \Omega$ を満たす．よって (a) より $z_1 \in K \subset \Omega_n$ が十分大きな全ての n について成り立つ．従って $z \in \mathrm{Ker}(a, \{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty})$ となり, $\Omega \subset \mathrm{Ker}(a, \{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty})$ が成り立つ．

逆の包含関係を示す為に $\mathrm{Ker}(a, \{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}) \backslash \Omega \neq \emptyset$ と仮定して矛盾を導こう．$\mathrm{Ker}(a, \{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty})$ と Ω に Lemma 21.1.4 を適用すれば, 点 $c \in \mathrm{Ker}(a, \{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}) \cap \partial\Omega$ が存在することが分かる．さて $c \in \mathrm{Ker}(a, \{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty})$ よりある $\varepsilon > 0$ について $\overline{\mathbb{D}}(c, \varepsilon) \subset \Omega_n$ が十分大きな全ての n について成り立つ．一方 $c \in \partial\Omega$ より (b) を用いれば $\mathrm{dist}(c, \partial\Omega_n) \to 0$ であり, 矛盾を生じる．

“(ii) $\Longrightarrow$ (iii)“ は自明に成り立つので “(iii) $\Longrightarrow$ (i)“ を示せば証明は完了する．そこで $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ が参照点 a に関し Ω に核収束すると仮定しよう．コンパクト集合 $K \subset \Omega$ が与えられたとする．このとき $\Omega = \mathrm{Ker}(a, \{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty})$ より, 各 $z \in K$ について領域 H_z と $N(z) \in \mathbb{N}$ で

$$a, z \in H_z \subset \Omega_n, \quad \forall n \geq N(z)$$

を満たすものが存在する．K のコンパクト性より $z_1, \ldots, z_n \in K$ を $K \subset H_{z_1} \cup \cdots \cup H_{z_n}$ が成り立つように取ることが出来る．このとき $n \geq \max\{N(z_1), \ldots, N(z_n)\}$ について $K \subset \Omega_n$ が成り立つ．つまり (a) が成り立つ．

次に (b) を背理法で示そう．(b) を否定すると, ある $c \in \partial\Omega$, $\varepsilon > 0$ と部分列 $\{\Omega_{n_k}\}$ を $\mathrm{dist}(c, \partial\Omega_{n_k}) \geq \varepsilon$ が成り立つように取れる．このとき $\mathbb{D}(c, \varepsilon) \cap \partial\Omega_{n_k} = \emptyset$ より $\mathbb{D}(c, \varepsilon) \subset \Omega_{N_k} \cup \mathrm{Ext}\,\Omega_{N_k}$ が成り立つが, $\mathbb{D}(c, \varepsilon)$ は連結であ

るから $\mathbb{D}(c,\varepsilon) \subset \Omega_{n_k}$ または $\mathbb{D}(c,\varepsilon) \subset \operatorname{Ext}\Omega_{n_k}$ のどちらか一方が成り立つ．ここで $c \in \partial\Omega$ より $z^* \in \Omega \cap \mathbb{D}(c,\varepsilon)$ が存在する．$\Omega = \operatorname{Ker}(a, \{\Omega_{n_k}\}_{k=1}^{\infty})$ より領域 $H(\subset \Omega)$ を $a, z^* \in H$ かつ十分大きな全ての n について $H \subset \Omega_n$ が成り立つように取れる．従って十分大きな k について $z^* \in \Omega_{n_k} \cap \mathbb{D}(c,\varepsilon)$ となるので $\mathbb{D}(c,\varepsilon) \subset \Omega_{n_k}$ が成り立つ．ここで 2 つの領域 H と $\mathbb{D}(c,\varepsilon)$ は共有点 z^* を持つので和 $H \cup \mathbb{D}(c,\varepsilon)$ も領域であり，十分大きな全ての k について $H \cup \mathbb{D}(c,\varepsilon) \subset \Omega_{n_k}$ が成り立つので，$c \in \operatorname{Ker}(a, \{\Omega_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}) = \Omega$ となる．これは $c \in \partial\Omega$ に反する． □

Theorem 21.1.8. $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{C}$ 内の領域の列とし $a \in \mathbb{C}$ とする．また十分大きな全ての $n \in \mathbb{N}$ について $a \in \Omega_n$ が成り立つとする．このとき $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\{a\}$ に退化する為の必要十分条件は

(c) $\operatorname{dist}(a, \partial\Omega_n) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Proof. $\operatorname{dist}(a, \partial\Omega_n) \to 0$ と仮定する．このとき領域 H で $a \in H$ かつ十分大きな全ての n について $H \subset \Omega_n$ が成り立つものは存在しないので $\operatorname{Ker}(a, \{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{a\}$ である．任意の部分列 $\{\Omega_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ に対しても $\operatorname{dist}(a, \partial\Omega_{n_k}) \to 0$ が成り立つので，同様に $\operatorname{Ker}(a, \{\Omega_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}) = \{a\}$ が成り立つことになり，$\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\{a\}$ に退化する．

逆に $\operatorname{dist}(a, \partial\Omega_n) \to 0$ が成り立たない時はある $\varepsilon > 0$ と部分列 $\{\Omega_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を $\operatorname{dist}(a, \partial\Omega_{n_k}) \geq \varepsilon$ が成り立つように取れる．このとき $\mathbb{D}(a,\varepsilon) \cap \partial\Omega_{n_k} = \emptyset$ であるから $\mathbb{D}(a,\varepsilon) \subset \Omega_{n_k} \cup \operatorname{Ext}\Omega_{n_k}$ が成り立つ．ここで $\mathbb{D}(a,\varepsilon)$ は連結であるから $\mathbb{D}(a,\varepsilon) \subset \Omega_{n_k}$ または $\mathbb{D}(a,\varepsilon) \subset \operatorname{Ext}\Omega_{n_k}$ のどちらか一方が成り立つが，$a \in \Omega_{n_k}$ ゆえ $\mathbb{D}(a,\varepsilon) \subset \Omega_{n_k}$ が成り立つ．従って $\mathbb{D}(a,\varepsilon) \subset \operatorname{Ker}(a, \{\Omega_{n_k}\}_{k=1}^{\infty})$ となり $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\{a\}$ に退化しない． □

次に領域列が単調性を持つ場合に核収束性がどうなるかを考えておこう．

Proposition 21.1.9. 複素平面内の領域の列 $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ について次が成り立つ．

(i) $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ が増加列，つまり $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots$ を満たす時，$\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ は任意の $a \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n$ に関して $\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n$ に核収束する．

(ii) $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ が減少列，つまり $\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \cdots$ を満たすとし，$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\Omega_n$ とする．このとき $a \in \operatorname{Int}(\bigcap_{n=1}^{\infty}\Omega_n)$ ならば $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\operatorname{Int}(\bigcap_{n=1}^{\infty}\Omega_n)$ の a を含む成分に核収束し，$a \notin \operatorname{Int}(\bigcap_{n=1}^{\infty}\Omega_n)$ ならば $\{a\}$ に退化する．

Proof. (i) $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ が増加列の場合，$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n$ に対して (a) を満たすことは明らかであろう．(b) を示すために $c \in \partial\Omega$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ について $z \in \mathbb{D}(c,\varepsilon) \cap \Omega$ を取り，$N \in \mathbb{N}$ を $z \in \Omega_N$ となるように取れば，単調性より $n \geq N$ について $z \in \Omega_n$ が成り立つ．従って $n \geq N$ について $\mathbb{D}(c,\varepsilon) \cap \Omega_n \neq \emptyset$ が成り立つ．また任意の n について $\emptyset \neq \mathbb{D}(c,\varepsilon) \cap \Omega^c \subset \mathbb{D}(c,\varepsilon) \cap \Omega_n^c$ が成り立つ．

以上より $n \geq N$ について $\mathbb{D}(c,\varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset \neq \mathbb{D}(c,\varepsilon) \cap \Omega_n^c$ が成り立つので，$\mathbb{D}(c,\varepsilon) \cap \partial\Omega_n \neq \emptyset$ であることが従う．これより $n \geq N$ について $\operatorname{dist}(c, \partial\Omega_n) \leq \varepsilon$ となり，$\operatorname{dist}(c, \partial\Omega_n) \to 0$ が成り立つ．

(ii) $a \in \operatorname{Int}(\bigcap_{n=1}^{\infty}\Omega_n)$ の場合を考えよう．Ω を $\operatorname{Int}(\bigcap_{n=1}^{\infty}\Omega_n)$ の a を含む成分とする．Ω について (a) が成り立つことは明らかである．(b) を背理法で示すために (b) を否定すると，$c \in \partial\Omega$，$\varepsilon > 0$ と部分列 $\{\Omega_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ で $\operatorname{dist}(c, \partial\Omega_{n_k}) \geq \varepsilon$ を満たすものが存在する．まず $\operatorname{dist}(c, \partial\Omega_{n_k}) \geq \varepsilon$ より $\mathbb{D}(c,\varepsilon) \cap \partial\Omega_{n_k} = \emptyset$ である．よって $\mathbb{D}(c,\varepsilon)$ の連結性より $\mathbb{D}(c,\varepsilon) \subset \Omega_{n_k}$ または $\mathbb{D}(c,\varepsilon) \subset \operatorname{Ext}\Omega_{n_k}$ のどちらかが成り立が，$c \in \partial\Omega$ より $\mathbb{D}(c,\varepsilon) \cap \Omega_{n_k} \neq \emptyset$ ゆえ $\mathbb{D}(c,\varepsilon) \subset \Omega_{n_k}$ が成り立つ．これと $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ の減少性を合わせると $\mathbb{D}(c,\varepsilon) \subset \Omega_n$ が任意の $n \in \mathbb{N}$ について成り立つ．よって

$$\mathbb{D}(c,\varepsilon) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}\Omega_n \implies \mathbb{D}(c,\varepsilon) \subset \operatorname{Int}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\Omega_n\right) \implies \Omega \cup \mathbb{D}(c,\varepsilon) \subset \operatorname{Int}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\Omega_n\right)$$

ここで 2 つの領域の和 $\Omega\cup\mathbb{D}(c,\varepsilon)$ は $\Omega\cap\mathbb{D}(c,\varepsilon)\neq\emptyset$ より領域である．従って上式の最右辺と合わせると $\Omega\cup\mathbb{D}(c,\varepsilon)$ は $\mathrm{Int}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\Omega_n\right)$ に含まれる領域で a を点に持つ．これは Ω の最大性に反する．

$a\notin\mathrm{Int}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\Omega_n\right)$ の場合を考えよう．このとき任意の $\varepsilon>0$ について $\mathbb{D}(a,\varepsilon)\setminus\bigcap_{n=1}^{\infty}\Omega_n\neq\emptyset$ である．よって $z\in\mathbb{D}(a,\varepsilon)\setminus\bigcap_{n=1}^{\infty}\Omega_n$ を取れば $z\notin\bigcap_{n=1}^{\infty}\Omega_n$ より，ある $N\in\mathbb{N}$ について $z\notin\Omega_N$ が成り立つ．$\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ の減少性より $z\notin\Omega_n$ が全ての $n\geq N$ について成り立つ．以上より

$$a\in\mathbb{D}(a,\varepsilon)\cap\Omega_n \text{ and } z\in\mathbb{D}(a,\varepsilon)\cap\Omega_n^c$$

が成り立つので $\mathbb{D}(a,\varepsilon)\cap\partial\Omega_n\neq\emptyset$ が全ての $n\geq N$ について成り立つ．従って全ての $n\geq N$ について $\mathrm{dist}(a,\partial\Omega_n)\leq\varepsilon$ となり $\mathrm{dist}(a,\partial\Omega_n)\to 0$ が成り立つ．よって Theorem 21.1.5 (c) より $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\{a\}$ に退化する． □

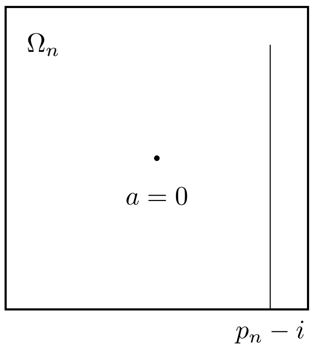
Example 21.1.10. $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ を区間 $(-1,1)$ 内の 0 を除く全ての有理数の番号付けとし

$$\Omega_0=\{z=x+iy:|x|<1,\ |y|<1\},\quad \Omega_n=\Omega_0\setminus\left\{p_n+iy:-1<y<1-\frac{1}{n}\right\}$$

と置く．このとき測度論で使われる $\Omega_*=\liminf\Omega_n:=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k\geq n}\Omega_k$, $\Omega^*=\limsup\Omega_n:=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\geq n}\Omega_k$ を求めてみよう．これは $z\ =x+iy\in\Omega_0$ について x が無理数または 0 ならば全ての $n\in\mathbb{N}$ について $z\in\Omega_n$ であるし，x が 0 以外の有理数ならば $x=p_N$ を満たす $N\in\mathbb{N}$ を取れば $n\neq N$ について $z\in\Omega_n$ が成り立つ．よって

$$\Omega_0\subset\Omega_*\subset\Omega^*\subset\Omega_0$$

が成り立つので $\Omega_*=\Omega^*=\Omega_0$ となり，測度論的に $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Ω_0 に収束する．しかしながら有理数の稠密性より十分大きな全ての n について $\mathbb{D}(0,\varepsilon)\subset\Omega_n$ を満たす $\varepsilon>0$ は存在しない．よって $\mathrm{Ker}(0,\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty})=\{0\}$ である．従って $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に関してある領域に核収束することはない．また $\mathrm{dist}(0,\partial\Omega_n)=|p_n|\not\to 0$ であるから，$\{0\}$ に退化することもない．



この節の最後に連続変数に関する核収束の定義を考えておこう．$I(\subset\mathbb{R})$ を区間とし $\{\Omega_t\}_{t\in I}$ を I を添数集合とする $\mathbb{C}$ 内の領域の族とする．また $t_0\in\overline{I}$ とする．このとき Carathéodory の核収束の定義を素直に当てはめれば $t\to t_0$ の時 $\{\Omega_t\}_{t\in I}$ が参照点 a に関し核収束するとは，$I\setminus\{t_0\}\ni t_n\to t_0\ (n\to\infty)$ を満たす任意の列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ について $\{\Omega_{t_n}\}_{n=1}^{\infty}$ が参照点 a に関し核収束することである．このように定義するということは $\mathrm{Ker}(a,\{\Omega_{t_n}\}_{n=1}^{\infty})$ が a を内点に持つ領域であり $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ の任意の部分列 $\{t_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ について $\mathrm{Ker}(a,\{\Omega_{t_{n_k}}\}_{k=1}^{\infty})=\mathrm{Ker}(a,\{\Omega_{t_n}\}_{n=1}^{\infty})$ が成り立つことを意味する．わざわざ列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ を取ってから，さらに部分列を取るのも煩わしいので，無駄を省くために次のように定義をしておこう．

Definition 21.1.11. $t\to t_0$ の時 $\{\Omega_t\}_{t\in I}$ が参照点 a に関して核収束する *(または* $\{a\}$ *に退化する)* とは，$I\setminus\{t_0\}\ni t_n\to t_0$ *$(n\to\infty)$* を満たす任意の列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ について $\mathrm{Ker}(a,\{\Omega_{t_n}\}_{n=1}^{\infty})$ が $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ の取り方に依らず一定の領域で a を内点に持つ時を言う．*(または* $\mathrm{Ker}(a,\{\Omega_{t_n}\}_{n=1}^{\infty})=\{a\}$*)* が成り立つ時を言う．

Theorem 21.1.5 と同様に次の定理が成り立つことは容易に分かるであろう.

Theorem 21.1.12. $I(\subset \mathbb{R})$ を区間とし $\{\Omega_t\}_{t\in I}$ を $\mathbb{C}$ 内の領域の族とする. また $t_0 \in \overline{I}$ とし, Ω を領域とする. このとき次の (i), (ii), (iii) は互いに必要十分条件である.

(i) 次の 2 条件がともに成り立つ.
  (a) 任意のコンパクト部分集合 $K \subset \Omega$ についてある $\delta > 0$ で $t \in I$ *with* $|t - t_0| < \delta$ ならば $K \subset \Omega_t$ となるものが存在する.
  (b) 任意の境界点 $c \in \partial\Omega$ について $I \ni t \to t_0$ の時 $\mathrm{dist}(c, \partial\Omega_t) \to 0$.

(ii) 任意の $a \in \Omega$ について $\{\Omega\}_{t\in I}$ は $t \to t_0$ のとき参照点 a に関し核収束し $I\backslash\{t_0\} \ni t_n \to t_0$ $(n \to \infty)$ を満たす任意の列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ について $\mathrm{Ker}(a, \{\Omega_{t_n}\}_{n=1}^{\infty} = \Omega$ が成り立つ.

(iii) ある $a \in \Omega$ について $\{\Omega\}_{t\in I}$ は $t \to t_0$ のとき参照点 a に関し核収束し $I\backslash\{t_0\} \ni t_n \to t_0$ $(n \to \infty)$ を満たす任意の列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ について $\mathrm{Ker}(a, \{\Omega_{t_n}\}_{n=1}^{\infty} = \Omega$ が成り立つ.

またある $\delta > 0$ について $a \in \bigcap_{|t-t_0|<\delta, t\neq t_0} \Omega_t$ を満たす a について $t \to t_0$ のとき $\{\Omega_t\}_{t\in I}$ が $\{a\}$ に退化する為の必要十分条件は

(c) $I \ni t \to t_0$ の時 $\mathrm{dist}(a, \partial\Omega_t) \to 0$.

21.2 Carathéodory の核収束定理とその一般化

$\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathbb{C}$ 内の単連結領域の列で $\Omega_n \neq \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ とする. また Ω も $\mathbb{C}$ 内の単連結領域で $\Omega \neq \mathbb{C}$ とする. そして $a \in \Omega \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ とする. また f_n, $n \in \mathbb{N}$ 及び f をそれぞれ $\mathbb{D}$ から Ω_n, Ω への等角写像で $f_n(0) = f(0) = a$, $f_n'(0) > 0$, $f'(0) > 0$ を満たすとする. f_n 及び f は Riemann の写像定理により 1 意に存在する.

Carathéodory の核収束定理とは, 上の状況のもとで $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に D 上局所一様収束することと, $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ が参照点 a に関し Ω に核収束すること, が同値であることを主張するものである. この節では Carathéodory の核収束定理の内容を 3 つの部分に分け, それぞれについて単連結性などの条件を落とし, どこまで一般化が行えるかを考える.

Theorem 21.2.1. D を $\mathbb{C}$ 内の領域とし $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を D 上の非定数解析函数の列とする. また f を D 上の解析函数とし $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に D で局所一様収束するとする. このとき f が非定数函数ならば任意のコンパクト部分集合 $K \subset f(D)$ について $N \in \mathbb{N}$ を

$$K \subset f_n(D), \quad n \geq N$$

が成り立つように取れる. さらに任意の $a \in D$ について $f(D) \subset \mathrm{Ker}(f(a), \{f(D)\}_{n=1}^{\infty})$ が成り立つ.

Proof. (i) について. f は非定数解析函数であるから $f(D)$ は a を含む領域である. 任意の $w^* \in f(D)$ について $f(z^*) = w^*$ を満たす $z^* \in D$ を 1 つ取り $\rho = \rho(w^*) > 0$ を

$$\overline{\mathbb{D}}(z^*, \rho) \subset D \text{ かつ } f(z) \neq z^* \quad \forall z \in \overline{\mathbb{D}}(z^*, \rho)\backslash\{z^*\}$$

を満たすように取る. そして $\delta = \min_{z\in\partial\mathbb{D}(z^*,\rho)} |f(z) - w^*| > 0$ と置く. 番号 $N = N(w^*) \in \mathbb{N}$ を $n \geq N$ ならば $\partial\mathbb{D}(z^*, \rho)$ 上 $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\delta}{2}$ が成り立つように取る. このとき $|w - w^*| \leq \frac{\delta}{2}$ を満たす任意の w と $n \geq N$ につ

いて

$$\begin{aligned}|f_n(z)-w-(f(z)-w^*)| \le& |f_n(z)-f(z)|+|w-w^*| \\ <& \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta\le|f(z)-w^*| \quad \text{on} \quad \partial\mathbb{D}(z^*,\rho)\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って Rouché の定理より $f(z)-w^*$ と $f_n(z)-w$ の $\mathbb{D}(z^+,\rho)$ における零点の重複度を込めた個数が等しいことが分かる. これより特に $n\ge N$ ならば $\overline{\mathbb{D}}(w^*,\delta/2)\subset f_n(D)$ が成り立つことが分かる.

コンパクト集合 $K\subset f(D)$ について $K\subset\bigcup_{z^*\in K}\mathbb{D}(w^*,\delta(w^*)/2)$ は開被覆であるから, 有限個の点 $w_1,\ldots,w_p\in K$ を $K\subset\bigcup_{j=1}^{p}\mathbb{D}(w_j,\delta(w_j)/2)$ が成り立つように取ることが出来る. このとき $N=\max\{N(w_1),\ldots,N(w_p)\}$ と置けば $n\ge N$ について $\overline{\mathbb{D}}(w_j,\rho(w_j))\subset f(D)$, $j=1,\ldots,p$ であるから $K\subset f(D)$ が成り立つ.

次に $a\in D$ とし $w'\in f(D)$ について $f(a)$ を始点とし, w' を終点とする曲線 $\gamma:[0,1]\to f(D)$ を取る. 各 $\gamma(t)$, $t\in[0,1]$ について上の議論を適用して $\delta(t)>0$ と $N(t)\in\mathbb{N}$ を

$$\overline{\mathbb{D}}(\gamma(t),\delta(t)/2)\subset f_n(D), \quad \forall n\ge N(t)$$

が成り立つように取る. このとき開被覆 $\gamma([0,1])\subset\bigcup_{0\le t\le1}\mathbb{D}(\gamma(t),\delta(t)/2)$ において, $\gamma([0,1])$ はコンパクトであるから $\gamma([0,1])\subset\bigcup_{j=1}^{q}\mathbb{D}(\gamma(t_j),\delta(\gamma(t_j))/2)$ となる有限個の点 $t_1,\ldots,t_q$ を取ることが出来て

$$H:=\cup_{j=1}^{q}\mathbb{D}(\gamma(t_j),\delta(\gamma(t_j))/2)\subset f(D_n), \quad \forall n\ge\max\{N(t_1),\ldots,N(t_n)\}$$

が成り立つ. H は領域であり $f(a)=\gamma(0)\in H$, $w'=\gamma(1)\in H$ であるから, $w'\in\mathrm{Ker}(f(a),\{f_n(D)\}_{n=1}^{\infty})$ が成り立ち, 従って $f(D)\subset\mathrm{Ker}(f(a),\{f_n(D)\}_{n=1}^{\infty})$ が成り立つ. □

残念ながら Theorem 21.2.1 における "D 上で局所一様に $f_n\to f$" という緩い仮定のもとでは, 逆の包含関係 $\mathrm{Ker}(f(a),\{f_n(D)\}_{n=1}^{\infty})\subset f(D)$ 及び性質 (b) が成り立つとは限らない.

Example 21.2.2. $\mathbb{D}$ 上の正則函数列を $f_n(z)=z^n$ と置けば $\mathbb{D}$ 上で局所一様に $f_n\to0$ であるが $\mathrm{Ker}(0,\{f_n(\mathbb{D})\}_{n=1}^{\infty})=\mathbb{D}$ であり, $f(\mathbb{D})=\{0\}$.

たとえ極限函数 f が非定数函数であっても $\mathrm{Ker}(f(a),\{f_n(D)\}_{n=1}^{\infty})\subset f(D)$ $\mathrm{Ker}(f(a),\{f_n(D)\}_{n=1}^{\infty})\subset f(D)$ 及び性質 (b) が成り立つとは限らない. この節の最後に反例を述べる. これらの性質が成り立つことを保証するにはもう少し仮定を追加する必要がある. 以下では, 各 f_n が被覆写像であるという仮定をおくことにするが, 補題を 1 つ準備しておこう.

Lemma 21.2.3. *$\tilde{S}$ と S を 2 つの Riemann 面とし $f:\tilde{S}\to S$ は解析的な被覆写像とする. また H を S の単連結な部分領域とする. このとき $f^{-1}(H)$ の任意の成分 $\tilde{H}$ について $f|_{\tilde{H}}$ は $\tilde{H}$ から H への等角写像, つまり解析的な全単射である.*

Proof. 実際のところ包含写像 $\mathrm{id}_H:H\to S$ に Corollary 3.2.6 を適用すれば直ちに得られるのであるが, 復習を兼ねてもう少し基本的な証明を行う.

$\tilde{p}_0\in\tilde{H}$ を任意に取り固定し $p_0=f(\tilde{p}_0)$ と置く. 各 $p\in H$ を p_0 を始点とし p を終点とする H 内の道 (= 曲線) $\gamma:[0,1]\to H$ で結ぶ. このとき $f:\tilde{S}\to S$ は被覆写像であるから γ の持ち上げ $\tilde{\gamma}$ で $\tilde{p}_0$ を始点に持つものが存在する. そして $f\circ\tilde{\gamma}=\gamma$ より $\tilde{\gamma}([0,1])\subset f^{-1}(H)$ である. また $\tilde{\gamma}(0)=\tilde{p}_0\in\tilde{H}$ であるから連結集合 $\tilde{\gamma}([0,1])$ について $\tilde{\gamma}([0,1])\subset\tilde{H}$ が成り立つ. 特に $\tilde{\gamma}$ の終点を $\tilde{p}$ とすれば $\tilde{p}\in\tilde{H}$ である.

H の単連結性より $\tilde{p}$ は γ に依らず一意に定まる．そこで対応 $H \ni p \mapsto \tilde{p} \in \tilde{H}$ を $\tilde{p} = \varphi(p)$ と置けば $f|_{\tilde{H}} \circ \varphi = \mathrm{id}_H$ を満たし, 持ち上げの作り方より φ は連続である．これより φ が解析的であること及び $f|_{\tilde{H}}$ が全射で φ が単射であることが分かる．

さて $\tilde{H}$ は開集合 $f^{-1}(H)$ の成分であるから領域である．そこで各 $\tilde{p} \in \tilde{H}$ について, 始点を $\tilde{p}_0$, 終点を $\tilde{p}$ とする道 $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \tilde{H}$ を取る．$\gamma = f \circ \tilde{\gamma}$ と置けば γ は H 内の道で p_0 を始点とし, $p = f(\tilde{p})$ を終点とする．そこで $\tilde{\gamma}'$ を γ の始点を $\tilde{p}_0$ とする持ち上げとすれば, 持ち上げの一意性より $\tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma}$ が成り立つ．これより特に

$$\varphi(f(\tilde{p})) = \varphi(p) = \tilde{\gamma}'(1) = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{p}$$

が成り立つ．つまり $\varphi \circ f|_{\tilde{H}} = \mathrm{id}_{\tilde{H}}$ が成り立つ．よって φ は全射で, $f|_{\tilde{H}}$ は単射である．

以上で $f|_{\tilde{H}} : \tilde{H} \to H$ は全単射で $f|_{\tilde{H}}^{-1} = \varphi$ が示された． □

後述する定理の証明には, 次の不等式が必要である．この不等式の証明は Ahlfors [2] p.19. を参照のこと．

Lemma 21.2.4. $\mathbb{D}$ 上の解析函数 g が 0, 1 を値として取らなければ

$$\log|g(z)| \leq \left(7 + \log^+ |g(0)|\right) \frac{1+|z|}{1-|z|}. \tag{21.2.1}$$

が成り立つ．ここに $\log^+ x = \log(\max\{x, 0\})$ である．

Theorem 21.2.5. *D を $\mathbb{C}$ 内の領域で ${}^{\#}(\mathbb{C}\backslash D) \geq 2$ を満たすとし, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を D 上の非定数解析函数の列で各 $n \in \mathbb{N}$ について $f_n : D \to f_n(D)$ は被覆写像であるとする．このとき $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が D 上で解析函数 f に局所一様収束し, f が非定数函数ならば次が成り立つ．*

(i) *H が有界な単連結領域で $\overline{H} \subset f(D)$ ならば $f^{-1}(H)$ の任意の成分 $\tilde{H}$ に対し制限 $f|_{\tilde{H}} : \tilde{H} \to H$ は等角写像である．また任意の $a \in \tilde{H}$ について $N \in \mathbb{N}$ を $n \geq N$ について $f_n(a) \in H \subset \overline{H} \subset f_n(D)$ が成り立つように取ることができ, φ_n を H における f_n の逆函数の 1 価な分枝で $\varphi_n(f_n(a)) = a$ を満たすものとすれば φ_n は H 上局所一様に $\varphi := (f|_{\tilde{H}})^{-1}$ に収束する．*

(ii) *$f : D \to f(D)$ も被覆写像である．*

(iii)
$$\mathrm{Ker}(f(a), \{f_n(D)\}_{n=1}^{\infty}) = f(D), \quad a \in D$$
が成り立ち, 領域の列 $\{f_n(D)\}_{n=1}^{\infty}$ は任意の $a \in D$ について $f(a)$ を参照点として $f(D)$ に核収束する．

Proof. (i) H を有界な単連結領域で $\overline{H} \subset f(D)$ が成り立つとする．このとき $\overline{H}$ はコンパクトであるから Theorem 21.2.1 より $N_1 \in \mathbb{N}$ を $n \geq N_1$ ならば $\overline{H} \subset f_n(D)$ が成り立つように取ることが出来る．$\tilde{H}$ を $f^{-1}(H)$ の成分とし, $a \in \tilde{H}$ を任意に取り, $b = f(a) (\in H)$ と置く．$f_n(a) \to f(a) = b$ であるから $N_2 \in \mathbb{N}$ を $f_n(a) \in H$ となるように取ることが出来る．このとき $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ について $f_n(a) \in H \subset \overline{H} \subset f_n(D)$ が成り立つ．従って $n \geq N$ のとき $f_n^{-1}(H)$ の a を含む成分が存在するので, それを $\tilde{H}_n$ と置けば Lemma 21.2.3 より $f_n|_{\tilde{H}_n} : \tilde{H}_n \to H$ は等角写像である．よって $\varphi_n := (f_n|_{\tilde{H}_n})^{-1} : H \to \tilde{H}_n$ と置けば, これも等角写像である．

それでは $\{\varphi_n\}_{n \geq N}$ が正規族であることを示そう．$h : \mathbb{D} \to H$ を $h(0) = f(a)$ を満たす等角写像とし, $\zeta_n = h^{-1}(f_n(a))$ と置く．また相異なる 2 点 $b, c \in \mathbb{C}\backslash D$ を取る．このとき解析函数

$$\frac{\varphi_n\left(h\left(\frac{\zeta+\zeta_n}{1+\bar{\zeta}_n\zeta}\right)\right) - c}{b-c}, \qquad \zeta \in \mathbb{D}$$

は, 0 を $\frac{a-c}{b-c}$ に写像し, 値 0, 1 を取らない. よって Lemma 21.2.4 より

$$\log\left|\frac{\varphi_n\left(h\left(\frac{\zeta+\zeta_n}{1+\overline{\zeta_n}\zeta}\right)\right)-c}{b-c}\right| \leq \left(7+\log^+\left|\frac{a-c}{b-c}\right|\right)\frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}, \quad \zeta\in\mathbb{D}$$

が成り立つ. ζ の代わりに $\frac{\zeta-\zeta_n}{1-\overline{\zeta_n}\zeta}$ を代入すると

$$\begin{aligned}\log\left|\frac{\varphi_n(h(\zeta))-c}{b-c}\right| &\leq \left(7+\log^+\left|\frac{a-c}{b-c}\right|\right)\frac{1+\left|\frac{\zeta-\zeta_n}{1-\overline{\zeta_n}\zeta}\right|}{1-\left|\frac{\zeta-\zeta_n}{1-\overline{\zeta_n}\zeta}\right|}\\ &\leq \left(7+\log^+\left|\frac{a-c}{b-c}\right|\right)\frac{1+\frac{|\zeta|+|\zeta_n|}{1+|\zeta_n||\zeta|}}{1-\frac{|\zeta|+|\zeta_n|}{1+|\zeta_n||\zeta|}}\\ &\leq \left(7+\log^+\left|\frac{a-c}{b-c}\right|\right)\frac{(1+|\zeta_n|)(1+|\zeta|)}{(1-|\zeta_n|)(1-|\zeta|)}\end{aligned}$$

ここで $f_n(a)\to f(a)$ より $\zeta_n=h^{-1}(f_n(a))\to h^{-1}(f(a))=0$ $\rho:=\max_{n\geq N}|\zeta_n|<1$ である. また $K\subset H$ を満たすコンパクト集合 K について $h^{-1}(K)\subset\overline{D}(0,r)$ を満たす $r\in(0,1)$ を取れば上式より

$$\log\left|\frac{\varphi_n(w)-c}{b-c}\right| \leq \left(7+\log^+\left|\frac{a-c}{b-c}\right|\right)\frac{(1+\rho)(1+r)}{(1-\rho)(1-r)}, \quad w\in K$$

が成り立つ. よって $\{\varphi_n\}_{n\geq N}$ は局所一様有界である.

$\{\varphi_n\}_{n\geq N}$ は局所一様有界であるから正規族をなす. よって H 上局所一様収束する部分列 $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ が存在する. $\varphi=\lim_{k\to\infty}\varphi_{n_k}$ と置こう. このとき φ が非定数函数ならば Theorem 21.2.1 より $\varphi(H)\subset\mathrm{Ker}(a,\{\varphi_{n_k}(H)\}_{k=1}^\infty)\subset D$ が成り立つ. また φ が定数函数ならば $\varphi(f(a))=\lim_{k\to\infty}\varphi_{n_k}(f(a))=a\in D$ より $\varphi=a$ である. 従ってどちらの場合でも $\varphi(H)\subset D$ が成り立ち $f\circ\varphi$ が定義できる. そして H 上局所一様に $\varphi_{n_k}\to\varphi$ が成り立つこと, 及び D 上局所一様に $f_{n_k}\to f$ が成り立つことより

$$f(\varphi(w))=\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(\varphi_{n_k}(w))=w, \quad w\in H$$

が成り立つ. φ は等角写像の局所一様収束極限であるから定数函数または単葉であるが, 上式より定数ではあり得ないから単葉である. そこで $\tilde{H}_0=\varphi(H)$ と置けば $\varphi:H\to\tilde{H}_0$ は全単射であり, 等角写像になる. 特に関係式 $f|_{\tilde{\varphi}_0}\circ\varphi=\mathrm{id}_H$ に φ^{-1} を右から合成して $f|_{\tilde{\varphi}_0}=\varphi^{-1}$ が分かり $f|_{\tilde{H}_0}:\tilde{H}_0\to H$ も等角写像であり, $\varphi=(f|_{\tilde{H}_0})^{-1}$ が従う.

$\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ 自身が φ に H 上局所一様収束することを示そう. 実際 $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ の任意の部分列に上で行った議論を適用すれば局所一様収束する部分列が取り出せ, その極限函数を φ^* と置き, $\tilde{H}^*=\varphi^*(H)$ と置けば $\varphi^*:H\to\tilde{H}^*$ は等角写像であり $\varphi^*=(f|_{\tilde{H}^*})^{-1}$ である. 同様に $\varphi=(f|_{\tilde{H}})^{-1}$ であり, $\tilde{H}$, $\tilde{H}^*$ はともに a を内点に持つ領域であるから $\tilde{H}\cap\tilde{H}^*$ は空でない開集合であり, ここで φ と φ^* は一致する. よって一致の定理より $\varphi=\varphi^*$ が成り立つ. これで $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ の任意の部分列から φ に H 上局所一様収束する部分列が取り出せることが分かった. よって $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ 自身が φ に H 上局所一様収束する.

それでは (i) の証明が完了させるために $\tilde{H}_0=\tilde{H}$ を示そう. まず $\tilde{H}_0$ は領域であり $a=\varphi(f(a))\in\varphi(H)=\tilde{H}_0$, $f(\tilde{H}_0)=H$ を満たす. 従って a を含む $f^{-1}(H)$ の成分である $\tilde{H}$ に含まれる. つまり $\tilde{H}_0\subset\tilde{H}$ が成り立つ. 次に $\tilde{H}\backslash\tilde{H}_0\neq\emptyset$ とすると $z_0\in\tilde{H}\cap\partial\tilde{H}_0$ を取ることが出来る. $f|_{\tilde{H}_0}:\tilde{H}_0\to H$ は等角写像であるから $z_0\in\partial\tilde{H}_0$ より $f(z_0)\in\partial H$ が従うが, 一方 $z_0\in\tilde{H}$ より $f(z_0)\in H$ が成り立つことになり矛盾を生じる.

(ii) は (i) より直ちに従う. (iii) を示すために $a\in D$, $w_1\in\mathrm{Ker}(f(a),\{f_n(D)\}_{n=1}^\infty)$ と仮定する. 領域核の定義より, 領域 H と $N\in\mathbb{N}$ を $f(a),w_1\in H$ かつ $n\geq N$ について $H\subset f_n(D)$ が成り立つように取ることが出来る. このとき

$f(a), w_1 \in H_0 \subset \overline{H}_0 \subset H$ を満たす単連結領域 H_0 が存在する．実際 $f(a)$ と w_1 を結ぶ単純階段弧 κ で H を取り，$\kappa_\varepsilon = \bigcup_{w\in\kappa} \mathbb{D}(w,\varepsilon)$ と置けば，十分小さな $\varepsilon > 0$ について κ_ε は単連結領域であり，明らかに $f(a), w_1 \in \kappa_\varepsilon$ を満たす．

この H_0 について $H_0 \in f_n(D)$, $n \geq N$ であるから $f_n^{-1}(H_0)$ の a を含む成分を $\tilde{H}_n$ とすれば Lemma 21.2.3 より $\varphi_n = (f|_{\tilde{H}_n})^{-1} : H_0 \to \tilde{H}_n$ は等角写像である．また (i) で示したように $\{\varphi_n\}_{n\geq N}$ は H_0 上で正規族をなし，H_0 上局所一様収束する部分列 $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ と極限函数 φ が存在し $\varphi(H_0) \subset D$ と $f \circ \varphi = \mathrm{id}_{H_0}$ が成り立つ．これより特に $H_0 = f \circ (\varphi(H_0)) \subset f(D)$ が成り立つ．よって $w_1 \in (H_0 \subset) f(D)$ であり $\mathrm{Ker}(f(a), \{f_n(D)\}_{n=1}^\infty) \subset f(D)$ が成り立つ．これと Theorem 21.2.1 を合わせて $f(D) = \mathrm{Ker}(f(a), \{f_n(D)\}_{n=1}^\infty)$ が従うが，これは $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ を任意の部分列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ に取り替えても成り立つので，結局 $\{f_n(D)\}_{n=1}^\infty$ は a を参照点として $f(D)$ に核収束することが分かる． □

以上で，D 上局所一様に被覆写像の列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が非定数函数 f に収束する時，f も被覆写像であり，対応する領域列 $\{f_n(D)\}_{n=1}^\infty$ が $f(D)$ に核収束することが分かった．今度は逆に $\{\Omega_n\}_{n=1}^\infty$ を $\mathbb{C}$ 内の領域の列とし，$\{\Omega_n\}_{n=1}^\infty$ が核収束するときに対応する函数列が局所一様収束するかどうかを考えよう．このとき，各 Ω_n に対応する函数をどのように設定するかが問題である．もともとの Carathéodory の核収束定理では f を単位円板 $\mathbb{D}$ から Ω_n への等角写像で $f(0) = w_0$, $f'(0) > 0$ を満たすものとしている．従って必然的に Ω_n は単連結領域で ${}^\#(\mathbb{C}\backslash\Omega_n) \geq 2$ となることを仮定しなければならない．この仮定のもとで f_n は Riemann の写像定理より一意的に定まる．それではこの単連結という仮定を落とした時 f_n としてどのような函数を扱うか，今までの議論の流れから容易に想像がつくように，ここでは解析的な被覆写像とする．また定義域を単連結な $\mathbb{D}$ とすれば f_n は普遍被覆写像となる．勿論 Ω_n が $\mathbb{D}$ を普遍被覆面に持つ為に，条件として ${}^\#\partial\Omega_n \geq 2$ を仮定せねばならない．

今後の課題

下の Thoerem では普遍被覆写像について述べたが，これを普遍とは限らない被覆写像に拡張できるであろうか？ Ω_n の基本群とその部分群を指定するなどを考えなければならないのでかなり面倒そうである．

Theorem 21.2.6. Ω, $\{\Omega_n\}_{n=1}^\infty$ を $\mathbb{C}$ 内の領域と領域の列とし，${}^\#(\mathbb{C}\backslash\Omega) \geq 2$, ${}^\#(\mathbb{C}\backslash\Omega) \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ が成り立つとする．また f, f_n をそれぞれ $\mathbb{D}$ から Ω, Ω_n への解析的な普遍被覆写像であり，ある $a \in \mathbb{D}$ について $\lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$, $\lim_{n\to\infty} \arg f_n'(a) = \arg f'(a)$ を満たすとする．このとき $\{\Omega_n\}_{n=1}^\infty$ が Ω に核収束するならば $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は f に $\mathbb{D}$ 上局所一様収束する．

Proof. 相異なる 2 点 $\alpha, \beta \in \partial\Omega$ を取る．Theorem 21.1.5 (b) より $\alpha_n, \beta_n \in \partial\Omega_n$ を $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$ を満たすように取れる．$\alpha \neq \beta$ であるから，必要ならば最初の有限項を除くことにより $\alpha_n \neq \beta_n$, $n \in \mathbb{N}$ と仮定してよい．このとき函数

$$\frac{f_n\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right) - \beta_n}{\alpha_n - \beta_n}, \quad z \in \mathbb{D}$$

は D で解析であり 0, 1 を値として取らない．そこで Lemma 21.2.4 より

$$\log\left|\frac{f_n\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right) - \beta_n}{\alpha_n - \beta_n}\right| \leq \left(7 + \log^+\left|\frac{f_n(a) - \alpha_n}{\alpha_n - \beta_n}\right|\right)\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

を得る．これより

$$\log\left|\frac{f_n(z) - \beta_n}{\alpha_n - \beta_n}\right| \leq \left(7 + \log^+\left|\frac{w_0 - a_n}{b_n - a_n}\right|\right)\frac{1 + \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|}{1 - \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|} \leq \left(7 + \log^+\left|\frac{w_0 - a_n}{b_n - a_n}\right|\right)\frac{(1+|a|)(1+|z|)}{1-|a|)(1-|z|)}$$

が成り立つので $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は $\mathbb{D}$ で局所一様有界であり，正規族をなすことが分かる．

さて $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ より $\mathbb{D}$ で局所一様収束する部分列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を取り $g = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}$ と置くと Theorem 21.2.5g は被覆写像であり, $\mathbb{D}$ を定義域とするから普遍被覆写像である．さらに $g(a) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(a) = f(a)$, $\arg g'(a) = \lim_{k\to\infty} \arg f'_{n_k}(0) = \arg f'(a)$ が成り立つので普遍被覆写像の一意性より $g = f$ である．

以上より $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ から $\mathbb{D}$ で f に局所一様収束する部分列を取ることができた．この議論は, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の任意の部分列についても通用する．従って $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の任意の部分列から $\mathbb{D}$ で f に局所一様収束する部分列を取ることができる．これより $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 自身が $\mathbb{D}$ で f に局所一様収束することが分かる． □

今後の課題

Theorem 21.2.6 において $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\{w_0\}$ に退化する場合や $^{\#}\partial\Omega = 0, 1$ の場合に $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の収束についてはどうなるであろうか？ 次の 3 つの場合を考える必要がある．

(i) $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ **が** $\mathbb{C}$ **に核収束する．**

(ii) $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ **が** $\mathbb{C}\backslash\{a\}$, $a \neq w_0$ **に核収束する．**

(iii) $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ **が** $\{w_0\}$ **に退化する．**

****

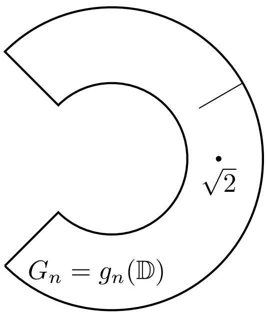
Example 21.2.7. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が局所一様収束しても $\mathrm{Ker}(w_0, \{f_n(D)\}_{n=1}^{\infty}) \subset f(D)$ が成り立つとは限らない．ここでは *(ちょっと, 皮肉だが) univalent functions についての Carathéodory* 核収束定理を用いてこのような例を構成する．

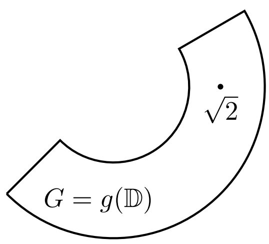
$$
\begin{aligned}
G_0 &= \{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < 2, \, |\arg w| < \frac{3}{4}\pi\} \\
\ell_n &= \{w \in \mathbb{C} : 1 + \frac{1}{n} \le |w| < 2, \, \arg w = \frac{\pi}{6}\} \\
G_n &= G_0 - \ell_n
\end{aligned}
$$

とおいて $g_n : \mathbb{D} - G_n$ を $g_n(0) = \sqrt{2}$, $g'_n(0) > 0$ をみたす *conformal mapping* とする．このとき $\{G_n\}$ の *kernel* G は

$$
G = \{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < 2, \, -\frac{3}{4}\pi < \arg w < \frac{1}{6}\pi\}
$$

であるから *Carathéodory Convergence Theorem* より g_n は $\mathbb{D}$ から G への *conformal mapping* g で $g(0) = \sqrt{2}$





$g'(0) > 0$ をみたすものへ広義一様収束する．

このとき $f_n = g_n^2$, $f = g^2$ とおくと, $\{f_n\}$ も f に広義一様収束する．

$$
f_n(\mathbb{D}) = \{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < 4\} - \{w \in \mathbb{C} : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \le |w| < 4, \, \arg w = \frac{1}{3}\pi\}
$$

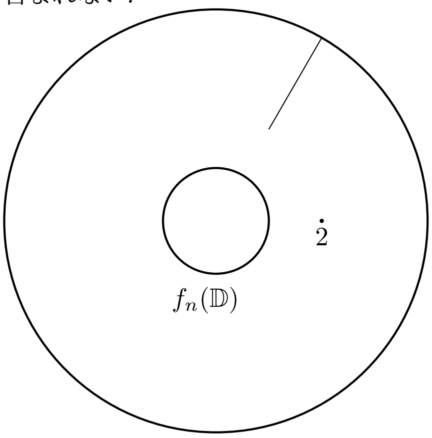
となり, $\{f_n(\mathbb{D})\}$ の *kernel* D は

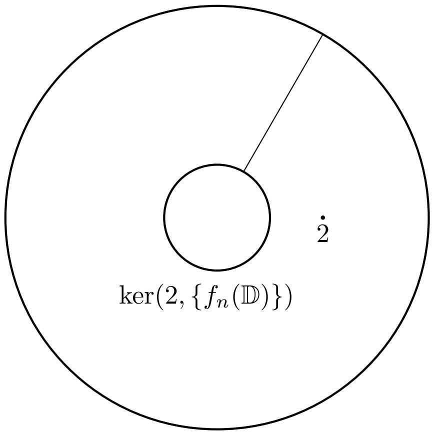
$$D = \{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < 4\} - \{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < 4,\ \arg w = \frac{1}{3}\pi\}$$

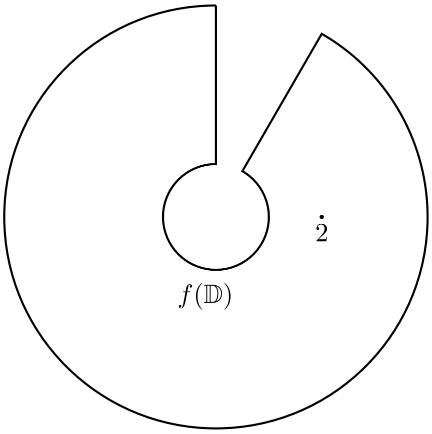
となるが,

$$f(\mathbb{D}) = \{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < 4,\ -\frac{3}{2}\pi < \arg w < \frac{1}{3}\pi\}$$

である. つまり *sector* $\{w : 1 < |w| < 4, \pi/3 < \arg w < \pi/2\}$ は全ての $f_n(\mathbb{D})$ に含まれるのに極限函数の像 $f(\mathbb{D})$ に含まれない.







21.3　核収束と連結度

Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 内の領域 Ω について補集合 $\hat{\mathbb{C}} \backslash \Omega$ の連結成分の個数のことを Ω の連結度と呼び $C(\Omega)$ で表そう. 但し $\hat{\mathbb{C}} \backslash \Omega$ の連結成分が有限個でないときは $C(\Omega) = \infty$ とする.

$C(\Omega) = k$ のとき Ω は k 重連結領域であるという. 0 重連結とは $\Omega = \hat{\mathbb{C}}$ を 1 重連結とは補集合 $\hat{\mathbb{C}} \backslash \Omega$ が連結であることを意味するので, $C(\Omega) = 0, 1$ であることと Ω 単連結 (基本群が) であることは同値である.

しかしながら核収束と連結度については次が成り立つ.

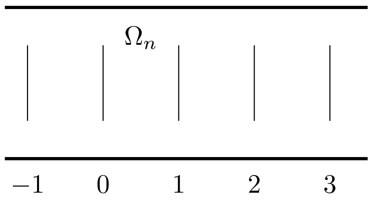
Theorem 21.3.1. $\hat{\mathbb{C}}$ 内の領域の列 $\{\Omega_n\}$ が $\hat{\mathbb{C}}$ 内の領域 Ω に核収束するとき

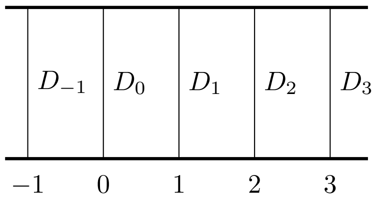
$$\liminf_{n \to \infty} C(\Omega_n) \geq C(\Omega)$$

が成り立つ.

残念ながら上の定理において不等式を等式とすることはできない.

Example 21.3.2. $n \in \mathbb{N}$ について Ω_n を帯状領域 $\{w \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\, w| < 1\}$ から線分 $\{k + is : |s| \leq 1 - n^{-1}\}$, $k \in \mathbb{Z}$ を取り除いた領域とする. このとき各 $k \in \mathbb{Z}$ について $\Omega_n \to D_k := \{w \in \mathbb{C} : k < \mathrm{Re}\, w < k+1,\ 0 < \mathrm{Im}\, w < 1\}$, $n \to \infty$ が成り立つ.





この例を少し修正すれば任意の $N_1, N_2 \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $N_1 \geq N_2$ について $\liminf_{n\to\infty} C(\Omega_n) = N_1$ $C(\Omega) = N_2$ を満たす例を作ることも容易である.

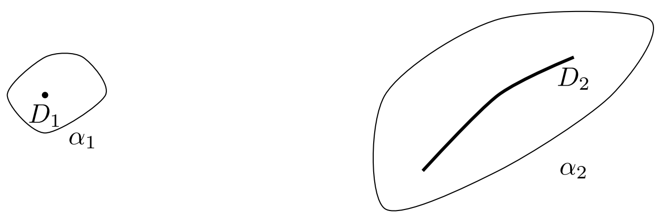
Theorem 21.3.1 を証明するために Lemma を準備しておこう.

Lemma 21.3.3 (Jordan 曲線による成分と閉集合の分離)**.** Ω を $\hat{\mathbb{C}}$ 内の領域とし E を補集合 $\hat{\mathbb{C}} \backslash \Omega$ の成分, F を空でない $\hat{\mathbb{C}} \backslash \Omega$ の閉部分集合で $E \cap F = \emptyset$ とする. このとき単純閉曲線 $\alpha : \partial\mathbb{D} \to \Omega$ で E と F を分離する, つまり $\hat{\mathbb{C}} \backslash \alpha(\partial\mathbb{D})$ の 2 つの成分の一方が E を含み, もう一方が F を含むものが存在する.

この Lemma の証明は, 例えば拙著 [30] Jordan の曲線定理と単連結領域の第 3 章にある.

Proof of Theorem 21.3.1. $C(\Omega) = 0$ の時は $\Omega = \hat{\mathbb{C}}$ であり, 核収束の定義の (a) において $K = \hat{\mathbb{C}}$ とすることにより十分大きな全ての n について $\Omega_n = \hat{\mathbb{C}}$ が成り立つ. よってこの場合は等号が成り立つ. また $C(\Omega) = 1$ のとき核収束の定義の (b) より十分大きな全ての n について $\partial\Omega_n \neq \emptyset$ である. よって $C(\Omega_n) \geq 1$ が 十分大きな全ての n について成り立つ.

今度は Ω が有限 (重) 連結で $C(\Omega) = k \geq 2$ の場合を考えよう. 必要ならば Riemann 球面の回転を施すことにより $\infty \in \Omega$ と仮定してよい. このとき $E := \hat{\mathbb{C}} \backslash \Omega = E_1 \cup \cdots \cup E_k$ を補集合の成分への分解とし, 単純閉曲線 $\alpha_j : [0,1] \to \Omega \cap \mathbb{C}$ を E_j が α_j の内側の領域 D_j に含まれ, その他の E_ℓ, $\ell \neq j$ が α_j の外側に含まれるように取る. このとき核収束の定義の (a) において $K = \alpha_1([0,1]) \cup \cdots \cup \alpha_k([0,1])$ と置くことにより $N_0 \in \mathbb{N}$ を $n \geq N_0$ ならば $\alpha_1([0,1]) \cup \cdots \cup \alpha_k([0,1]) \subset \Omega_n$ を満たすように取れる. このとき D_0 を α_1 の外側, ..., α_k の外側の共通部分とすれば, Ω_n の補集合 $E_n := \hat{\mathbb{C}} \backslash \Omega_n$ について $E_n = (D_0 \cap E_n) \cup (D_1 \cap E_n) \cdots \cup (D_k \cap E_n)$ が E_n の開かつ閉集合への分解を与える. このとき核収束の定義の (b) よりある $N_j \in \mathbb{N}$ で, 任意の $n \geq N_j$ について $D_j \cap \partial\Omega_n \neq \emptyset$ が成り立つように取れる. 従って $\hat{\mathbb{C}} \backslash \Omega_n$ の成分で D_j, $j = 1, \ldots, k$ に含まれるものが少なくとも 1 つ存在する. 従って $n \geq \max\{N_0, N_1, \ldots, N_k\}$ について E_n は少なくとも k 個の成分を持つ. よって $C(\Omega_n) \geq k$ が成り立つ.



最後に $C(\Omega) = \infty$ の場合を考えよう. この場合は任意の $k \in \mathbb{N}$ について補集合 $E := \hat{\mathbb{C}} \backslash \Omega$ の成分 E_1, ..., E_k を任意に取り, 上の議論を行えば, 十分大きな全ての n について $C(\Omega_n) \geq k$ が成り立つことが分かるので

$\limsup_{n\to\infty} C(\Omega_n) \geq k$ であり．k は任意であるから $\limsup_{n\to\infty} C(\Omega_n) = \infty$ が成り立つ．

□

21.4　成分の非消滅性

$\{\Omega_t\}_{t\in I}$ を expansive かつ continuous な領域の族とし，$E_t = \hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega_t$ と置く．そして C をある時点 t_0 での E_{t_0} の成分とする．このとき $C \cap \bigcap_{t\in I} E_t \neq \emptyset$ が成り立つことを示すのが，この節の目標である．この結果より特に連結度 $C(\Omega_t)$ が t について非減少であることが分かる．領域族 $\{\Omega_t\}_{t\in I}$ が連続に膨張していくとき，補集合の族 $\{E_t\}_{t\in I}$ は収縮する．従って個々の成分も収縮するが “成分が分解し連結度が増えることはあっても，各成分が完全に蒸発し空になることは無い” ことになる．

はじめに弱い形の定理を示そう．

Theorem 21.4.1. $\{\Omega_t\}_{t\in I}$ を $\hat{\mathbb{C}}$ 内の核収束の意味で連続な領域の増加族とし，各 $t \in I$ について $E_t = \hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega_t$ と置く．また $t_0 \in I$ とし F を E_{t_0} の空でない閉部分集合とする．このとき $\hat{\mathbb{C}}$ 内の領域 V で

$$F = V \cap E_{t_0}$$

が成り立つとする．このとき任意の $t \in I$ について

$$F \cap E_t \neq \emptyset \tag{21.4.1}$$

が成り立つ．

Proof. まず $F \cap E_t = \emptyset$ となる $t \in I$, $t > t_0$ が存在するとして矛盾を導こう．このとき $\{E_t\}$ の減少性より，ある $t_1 \geq t_0$ で

$$t < t_1 \implies F \cap E_t \neq \emptyset \tag{21.4.2}$$
$$t > t_1 \implies F \cap E_t = \emptyset \tag{21.4.3}$$

を満たすものが存在する．はじめに $F \cap E_{t_1} = \emptyset$ の場合を考えよう．このとき $F \subset \Omega_{t_1}$ であり，F はコンパクトであるから核収束の意味での $\{\Omega_t\}_{t\in I}$ の連続性よりある $\delta > 0$ で $|t - t_1| < \delta$ ならば $F \subset \Omega_t$ となるものが存在する．よって $|t - t_1| < \delta$ ならば $F \cap E_t = \emptyset$ が成り立つことになり (21.4.2) に反する．

次に $F \cap E_{t_1} \neq \emptyset$ の場合を考えよう．まず $E_{t_1} \subset E_{t_0}$ より

$$E_{t_1} \cap V = (E_{t_1} \cap V) \cap E_{t_0} = (E_{t_0} \cap V) \cap E_{t_1} = F \cap E_{t_1} \neq \emptyset$$

である．また

$$\Omega_{t_1} \cap V = V\backslash E_{t_1} \neq \emptyset$$

が成り立つ．実際 $V\backslash E_{t_1} = \emptyset$ ならば $V \subset E_{t_1} \subset E_{t_0}$ となり $F = V \cap E_{t_0} = V$ が成り立つことになる．よって F は開かつ閉集合となり矛盾を生じる．

連結集合 V は上で見たように Ω_{t_1} とその補集合 E_{t_1} の双方に交わるので点 $w_0 \in \partial E_{t_1} \cap V = \partial\Omega_{t_1} \cap V$ が存在することが分かる．よって核収束の定義の (b) より $t \to t_1$ のとき $\mathrm{dist}(w_0, \partial\Omega_t) \to 0$ が成り立つ．従ってある $\delta > 0$ について

$$V \cap E_t \neq \emptyset \quad \text{for } |t - t_1| < \delta$$

が成り立つ．しかしながら $(t_0 \leq) t_1 < t < t_1 + \delta$ について $E_t \subset E_{t_0}$ であるから

$$F \cap E_t = (V \cap E_{t_0}) \cap E_t = V \cap E_t \neq \emptyset$$

が成り立つ．これは (21.4.3) に矛盾する． □

Theorem 21.4.2. $\{\Omega_t\}_{t \in I}$ を $\hat{\mathbb{C}}$ 内の核収束の意味で連続な領域の増加族とし，各 $t \in I$ について $E_t = \hat{\mathbb{C}} \backslash \Omega_t$ と置く．また $t_0 \in I$ とし C を E_{t_0} の成分とする．このとき

$$C \cap \bigcap_{t \in I} E_t \neq \emptyset \tag{21.4.4}$$

が成り立つ．

Proof. まず $C \cap E_t$ が任意の $t \in I$ について成り立つことを示そう．単調性より $t > t_0$ の場合を考えれば十分である．また必要ならば Riemann 球面の回転を施すことにより C は $\mathbb{C}$ の compact 部分集合であると仮定する．

E_{t_0} の成分への分解を $E_{t_0} = C \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ と置く．このとき各 $\lambda \in \Lambda$ について単純閉曲線 $\alpha_\lambda \subset \Omega_{t_0}$ で C をその内側の領域 D_λ に含み，C_λ をその外側の領域に含むものが存在する．そこで $F_\lambda = D_\lambda \cap E_{t_0}$ と置けば $\alpha_\lambda \subset \Omega_{t_0}$ より閉集合であり C を含む．従って Theorem 21.4.2 より $F_\lambda \cap E_t \neq \emptyset\ \forall t \in I$ が成り立つ．

ここで $t \geq t_0$ を満たす $t \in I$ を任意に取り固定しコンパクト集合の族 $\{F_\lambda \cap E_t\}_{\lambda \in \Lambda}$ を考えよう．この族は有限交差性を持つ．実際 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ に対し $D_{\lambda_1} \cap \cdots \cap D_{\lambda_n}$ の C を含む成分を V とし，$F = V \cap E_{t_0}$ と置けば $\partial V \subset \alpha_{\lambda_1} \cup \cdots \cup \alpha_{\lambda_n} \subset \Omega_{t_0}$ より F は閉集合である．また $C \subset F$ を満たすので F は空でない．よって再び Theorem 21.4.2 より $F \cap E_t \neq \emptyset$ が成り立つ．そして

$$\emptyset \neq F \cap E_t = (V \cap E_{t_0}) \cap E_t \subset \{(D_{\lambda_1} \cap \cdots \cap D_{\lambda_n}) \cap E_{t_0}\} \cap E_t = F_{\lambda_1} \cap \cdots \cap F_{\lambda_n} \cap E_t$$

が成り立つ．これで有限交差性が示された．

有限交差性を持つコンパクト集合の族は無限交差性を持つので

$$\emptyset \neq \bigcap_{\lambda} (F_\lambda \cap E_t) = \left(\bigcap_{\lambda} F_\lambda \right) \cap E_t$$

が成り立つ．ここで

$$C \subset F_\mu \subset E_{t_0} = C \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda, \quad F_\mu \cap C_\mu = \emptyset \quad \forall \mu \in \Lambda$$

より $C = \bigcap_\lambda F_\lambda$ が成り立つので

$$C \cap E_t \neq \emptyset \quad \forall t \in I$$

である．これより compact 集合の減少族 $\{C \cap E_t\}_{t \in I}$ は有限交差性を持つことが分かり，無限交差性

$$C \cap \bigcap_{t \in I} E_t \neq \emptyset$$

が成り立つ． □

Corollary 21.4.3. Ω を $\mathbb{C}$ 内の領域とし，閉集合 F を補集合 $E = \hat{\mathbb{C}} \backslash \Omega$ の成分であり，ある $\hat{\mathbb{C}}$ の開集合 V により $F = E \cap V$ と表せるとする．このときある $t_0 \in I$ について $\Omega = \Omega_{t_0}$ を満たす核収束の意味で連続な領域の族 $\{\Omega_t\}_{t \in I}$ について $E_t = \hat{\mathbb{C}} \backslash \Omega$ と置けば $F \cap E_t \neq \emptyset$ が全ての t について成り立つ．つまり F を消滅させるような核収束の意味で連続な領域の増加変形は存在しない．

Proof. F は連結であるから V の F を含む成分 V_0 が存在する．このとき V_0 は領域である．また $\partial F \subset F \subset V_0$ $\partial F \subset \partial E = \partial\Omega$ より $\partial\Omega \cap V_0 \neq \emptyset$ である．よって $\Omega \cap V_0 \neq \emptyset$ が従い, Theorem 21.4.2 を適用できる．□

Example 21.4.4. *Example 22.1.4* において $E_0 = [0,1]$ から *Cantor* の 3 進集合 E_∞ までの連続的な変形を構成し，狭義増加な領域の族 $\{\mathbb{C}\backslash E_t\}_{t\in[0,\infty]}$ が核収束の意味で連続になることを示した．*Theorem 21.4.2* を用いると E_∞ をさらに核収束の意味で変形できないことも分かる．つまり $\Omega_0 = \mathbb{C}\backslash E_\infty$ とし I を 0 を左端点とする区間で $\{\Omega_t\}_{t\in I}$ を核収束の意味で連続な領域の増加族とすれば，$\Omega_t \equiv \Omega_0$, $t \in I$ が成り立つ．実際任意の $x_0 \in E_\infty$ と $\varepsilon > 0$ について実数 a, b を $a < x_0 < b$, $a, b \notin E_\infty$ かつ $|a-b| < \varepsilon$ となるように取れる．$V = \{z \in \mathbb{C} : a < \mathrm{Re}\, z < b\}$ と置けば $F = V \cap E_\infty$ は閉集合であり，$x_0 \in F$ より $F \neq \emptyset$ である．よって *Theorem 21.4.2* より任意の t について $F \cap (\mathbb{C}\backslash\Omega_t) \neq \emptyset$ が成り立つ．よって $\mathbb{C}\backslash\Omega_t$ は x_0 の ε-近傍と共通部分を有する．$\hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega_t$ は閉集合であるから，$x_0 \in \mathbb{C}\backslash\Omega_t$ が成り立つ．従って $E_\infty \subset \mathbb{C}\backslash\Omega_t$ が成り立つ．$E_\infty = \mathbb{C}\backslash\Omega_0$ と $\mathbb{C}\backslash\Omega_t$ の t に関する減少性より $E_\infty = \mathbb{C}\backslash\Omega_t$ が任意の $t \in I$ について成り立つ．

Problem 21.4.5. Ω を $\mathbb{C}$ 内の領域とし，$E = \hat{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ の成分を F とする．次の 2 つの命題は成り立つか?

(i) F が連続体で $w_0 \in F$ とする．$\Omega_0 = \Omega$, $\Omega_1 = \mathbb{C}\backslash(E\backslash F) \cup \{w_0\}$ *(はたして領域になるであろうか?)* と置くと，Ω_0 と Ω_1 を結ぶ領域の族 $\{\Omega_t\}_{0\le t\le 1}$ で核収束の意味で連続なものが存在する．

(ii) $F = \{w_0\}$ のとき $\Omega_0 = \Omega$ を満たす領域の族 $\{\Omega_t\}_{0\le t\le 1}$ が核収束の意味で連続ならば $w_0 \notin \Omega_1$．

第 22 章

Subordination Chain

22.1 Subordination Chain

記号 $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ で単位円板 $\mathbb{D}$ 上の正則函数の全体の空間に局所一様収束の位相を入れたものを表したことを思い出しておこう．

Definition 22.1.1. 区間 $I(\subset \mathbb{R})$ の各点 t について $\mathbb{D}$ 上の解析函数 $f_t : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ が与えられたとする．このような解析函数の 1-*parameter family* $\{f_t\}_{t\in I}$ が *subordination chain* であるとは

$$f_t'(0) \neq 0, \qquad t \in I \tag{22.1.1}$$

$$t_1 < t_2 \quad t_1, t_2 \in I \Longrightarrow f_{t_1} \prec f_{t_2} \tag{22.1.2}$$

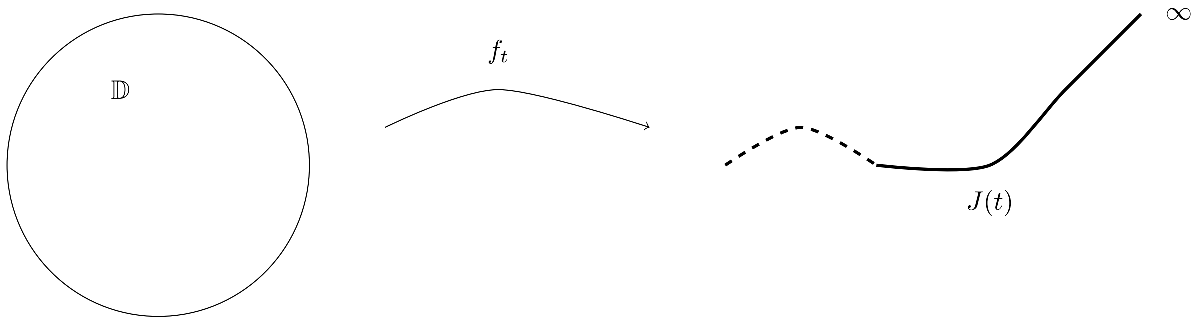
が成り立つときを言う．但し “$f_{t_1} \prec f_{t_2}$” とは f_{t_1} が f_{t_2} に *subordinate* する，つまり $\omega(0) = 0$ を満たす解析函数 $\omega : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ で $f_{t_1}(z) = f_{t_2}(\omega(z))$, $z \in \mathbb{D}$ を満たすものが存在することを意味する．このとき $f_s(0) = f_t(\omega(0)) = f_t(0)$ が成り立つので $f_t(0)$ は t に依らず一定である．さらに $f_{t_1}(\mathbb{D}) = f_{t_2}(\omega(\mathbb{D})) \subset f_{t_2}(\mathbb{D})$ であるから領域の族 $\{f_t(\mathbb{D})\}_{t\in I}$ は t に関して増加である．また *Schwarz* の補題より $|f_{t_1}'(0)| = |f_{t_2}'(0)||\omega'(0)| \leq |f_{t_2}'(0)|$ であるから $|f_t'(0)|$ も t について増加である．$|f_t'(0)|$ が狭義増加のとき *subordination chain* $\{f_t\}_{t\in I}$ は狭義増加であると定義する．領域の族 $\{f_t(\mathbb{D})\}_{t\in I}$ が t について狭義増加であれば *subordination chain* $\{f_t\}_{t\in I}$ は狭義増加になることは *Schwarz* の補題の一意性の部分より容易に従う．しかしながら *subordination chain* $\{f_t\}_{t\in I}$ が狭義増加であっても，$\{f_t(\mathbb{D})\}_{t\in I}$ が狭義増加でない例を作ることが出来る．*subordination chain* $\{f_t\}_{t\in I}$ が連続であるとは写像 $I \ni t \mapsto f_t \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ が連続であるときと定義する．換言すれば任意の $t_0 \in I$ について $I \ni t \to t_0$ のとき $f_t \to f_{t_0}$ が $\mathbb{D}$ 上で局所一様収束するときである．

$\{\Omega_t\}_{t\in I}$ を増加な単連結領域の族で $\bigcap_{t\in I} \Omega_t \neq \emptyset$ かつ $\Omega_t \neq \mathbb{C}$, $t \in I$ を満たすとする．このとき $w_0 \in \bigcap_{t\in I} \Omega_t$ を任意に取り $f_t : \mathbb{D} \to \Omega_t$ を等角写像で $f_t(0) = w_0$, $f_t'(0) > 0$ を満たすものが一意的に存在する．$t_1 < t_2$ に対し $\Omega_{t_1} \subset \Omega_{t_2}$ より $\omega_{t_1t_2} = f_{t_2}^{-1} \circ f_{t_1}$ と置けば $\omega_{t_1t_2}$ は $\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}$ の中への単射な解析函数で $\omega_{t_1t_2}(0) = 0$ を満たす．そして $f_{t_1} = f_{t_2} \circ \omega_{t_1t_2}$ が成り立つので $f_{t_1} \prec f_{t_2}$ が成り立つ．よって $\{f_t\}_{t\in I}$ は subordination hain である．また容易に分かるように $\{\Omega_t\}_{t\in I}$ が狭義増加であることと $f_t'(0)$ が狭義増加であることは同値であり，さらに $\{\Omega_t\}_{t\in I}$ が核収束の意味で連続であることと $\{f_t\}_{t\in I}$ が連続であることも同値である．

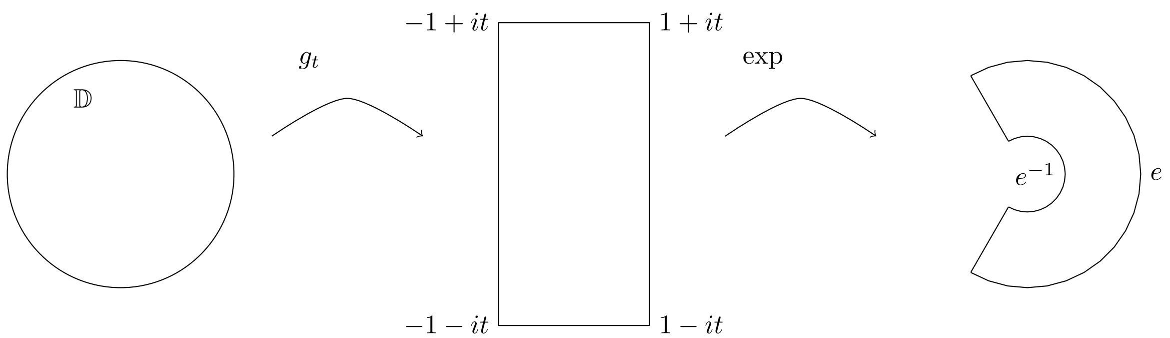
このような $\{\Omega_t\}_{t\in I}$ の例として典型的なものを述べておこう．

Example 22.1.2. $w(t)$, $0 \leq t \leq \infty$ を $\hat{\mathbb{C}}$ 内の単純曲線で $w(\infty) = \infty$ とする．$J(t) = \{w(s) : t \leq s \leq \infty\}$, $0 \leq t \leq \infty$ と置けば $\Omega_t = \mathbb{C} \backslash J(t)$ は単連結であり，$0 \leq t_1 < t_2 < \infty$ について $\Omega_{t_1} \subsetneq \Omega_{t_2}$ が成り立つ．

$w_0 \in \hat{\mathbb{C}}\backslash J(0) = \Omega_0$ を任意に取り，固定し f_t を $\mathbb{D}$ から Ω_t への等角写像で $f_t(0) = w_0$, $f_t'(0) > 0$ を満たすものと置けば，$\{f_t\}_{0 \leq t < \infty}$ は *suboddination chain* でありさらに狭義増加である．また連続性については領域の族 $\{\Omega_t\}_{t \geq 0}$ が任意の $t_0 \geq 0$ について *Theorem 21.1.12 (i)* の条件 *(a)*, *(b)* を満たすことが容易に分かる．よって $\{\Omega_t\}_{t \geq 0}$ は各収束の意味で連続であり，*Theorem 21.2.6* より $f_{t_n} \to f_{t_0}$ が局所一様収束の意味で成り立つ．但し Ω_{t_n} は単連結であるから f_{t_n} は $\mathbb{D}$ から Ω_{t_n} への等角写像であると同時に普遍被覆写像でもあるので *Theorem 21.2.6* が適用可能であることに注意しておこう．最後に $t_0 \neq t_n \to t_0$ を満たす任意の列 $\{t_n\}$ について $\{f_{t_n}\}$ が f_{t_0} に局所一様収束することより，連続変数の極限として f_t が f_{t_0} に $\mathbb{D}$ 上局所一様することが従う．



Example 22.1.3. $t > 0$ について g_t を $\mathbb{D}$ から 4 点 $\pm 1 \pm it$ を頂点に持つ長方形の内部への等角写像で $g_t(0) = 0$, $g_t'(0) > 0$ を満たすものとする． このとき $\{g_t\}_{t>0}$ は連続かつ狭義増加な *subordination chain* であり，領域の族 $\{g_t(\mathbb{D})\}_{t>0}$ も狭義増加である．また $f_t = e^{g_t}$ と置けば，$\{f_t\}_{t\in I}$ も連続かつ狭義増加な *subordination chian* であるが領域の族 $\{f_t(\mathbb{D})\}_{t>0}$ は狭義増加ではない．実際 $0 < t \leq \pi$ においては狭義増加であるが，$t > \pi$ では一定である．



Pommerenke [21] におけるオリジナルの subordnation chain の定義では f_t が等角写像であること，つまり Ω_t が単連結で $\Omega_t \subsetneq \mathbb{C}$ という仮定も加えてある．Example 22.1.2 や Example 22.1.3 の $\{g_t\}_{t>0}$ は Pommerenke の定義にも当て嵌まる．本書では，この仮定を省き一般化を試みた．Example 22.1.3 の $\{f_t\}_{t>0}$ は本書の定義では subordination chain であるが Pommerenke の定義ではそうでない．

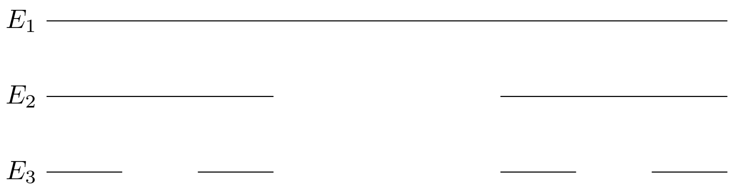
$\{\Omega_t\}_{t\in I}$ を増加な領域の族で $\bigcap_{t\in I} \Omega_t \neq \emptyset$ かつ $\mathbb{C}\backslash\bigcup_{t\in I}\Omega_t$ は 2 点以上を含むとする．$w_0 \in \bigcap_{t\in I}\Omega_t$ を任意に取り固定すれば，普遍被覆写像 $f_t : \mathbb{D} \to \Omega_t$ で $f_t(0) = w_0$, $f_t'(0) > 0$ を満たすものが一意的に存在する．$t_1 < t_2$ に対し $\Omega_{t_1} \subset \Omega_{t_2}$ より $f_{t_1} : \mathbb{D} \to \Omega_{t_2}$ の普遍被覆写像 $f_{t_2}\mathbb{D} \to \Omega_{t_2}$ による持ち上げ $\omega_{t_1t_2} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ で $\omega_{t_1t_2}(0) = 0$ を満たすものが一意的に存在する．$\omega_{t_1t_2}$ は実際には次のように定義される．$z \in \mathbb{D}$ に対し 0 と z を結ぶ $\mathbb{D}$ 内の道 α を取り $(\Omega_{t_1} \subset)\Omega_{t_2}$ 内の道 $f_{t_1}(\alpha)$ を普遍被覆写像 $f_{t_2} : \mathbb{D} \to \Omega_{t_2}$ により 0 を始点とする $\mathbb{D}$ 内の道に持ち上げ，その終点が $\omega_{t_1t_2}(z)$ である．この終点は $\mathbb{D}$ が単連結であることから α に依らず一意に定まる．またこの定義より $\omega_{t_1t_2}$ が $f_{t_1} = f_{t_2} \circ \omega_{t_1t_2}$ を満たすことが従い，f_{t_1}, f_{t_2} の解析性より $\omega_{t_1t_2}$ も解析函数であり，再び定義より $\omega_{t_1t_2}(0) = 0$ を満たす．よって $f_{t_1} \prec f_{t_2}$ が成り立つことになり，普遍被覆写像よりなる族 $\{f_t\}_{t\in I}$ は subordination chain である．また

容易に分かるように $\{\Omega_t\}_{t\in I}$ が狭義増加であることと $f_t'(0)$ が狭義増加であることは同値であり, さらに $\{\Omega_t\}_{t\in I}$ が核収束の意味で連続であることと $\{f_t\}_{t\in I}$ が連続であることも同値である.

等角写像よりなる subordination chain の場合とは異なり, $\omega_{t_1t_2}$ は単射であるとは限らない. しかしながら $\{f_t\}_{t\in I}$ が連続ならば任意の $t_1, t_2 \in I$, $t_1 < t_2$ に対し $\omega_{t_1t_2}$ 単射になる. この事実は Loewer の常微分方程式の解の初期値に関する依存性を調べること (§22.4 を参照) または直接的に証明すること (§??を参照) も出来る.

このような普遍被覆写像よりなる subordination chain $\{f_t\}_{t\in I}$ の例として典型的なものを述べておこう.

Example 22.1.4. $E_0 = [0,1]$ と置き $0 < t \le 1$ について $E_t = \left[0, \frac{3-t}{6}\right] \cup \left[\frac{3+t}{6}, 1\right]$ と置けば, E_t は $E_0 = [0,1]$ の中心から長さが $t/3$ の開線分を取り去った残りであり E_1 は長さが $1/3$ の 2 つの線分 $[0,1/3]$ と $[2/3,1]$ よりなる. これら 2 つの線分の各々についても同様な操作を行い, t が区間 $(1,2]$ 動く間に, それぞれの中心から長さが $t/9$ の開線分を取り去った残りの 4 つの閉線分の和を E_t とし, 以下同様に続けて行く. このとき $\{E_t\}_{t>0}$ は閉線分の有限個の和よりなる閉集合の族で t について狭義減少である. また $\Omega_t = \mathbb{C}\backslash E_t$ と置けば $\{\Omega_t\}_{t>0}$ は狭義増加な領域の族で, *Theorem 21.1.12 (i)* の条件 *(a), (b)* を満たすことが容易に分かるので, 核収束の意味で連続である. そこで $f_t : \mathbb{D} \to \Omega_t$ を $f_t(0) = i$, $f_t'(0) > 0$ を満たす普遍被覆写像とすれば $\{f_t\}_{t>0}$ は連続かつ狭義増加な *subordinatation chain* である.



さて subordination chain $\{f_t\}_{t\in I}$ について $\mathbb{C}\backslash\bigcup_{t\in I} f_t(\mathbb{D})$ が少なくとも 2 点以上を含むとき対応して普遍被覆写像の subordination chain $\{\tilde{f}_t\}_{t\in I}$ を構成することが出来ることを説明しておこう. まず $f_t(0)$ は $t \in I$ に依らず一定であるから $w_0 = f_t(0)$ と置く. このとき $t \in I$ について $\Omega_t = f_t(\mathbb{D})$ とおいて $\tilde{f}_t : \mathbb{D} \to \Omega_t$ を $\tilde{f}_t(0) = w_0$, $\tilde{f}_t'(0) > 0$ を満たす普遍被覆写像とすれば $\{\Omega_t\}_{t\in I}$ の増加性より $\{\tilde{f}\}_{t\in I}$ は subordination chain である. これを $\{f_t\}_{t\in I}$ に付随する, 普遍被覆写像よりなる subordination chain と呼ぶ. $\{f_t\}_{t\in I}$ が $t_0 \in I$ で左連続ならば $\{\tilde{f}_t\}_{t\in I}$ $t_0 \in I$ で左連続である. 実際 $t_0 \neq t_n \uparrow t_0$ ならば Theorem 21.2.1 より $f_{t_0}(\mathbb{D}) \subset \mathrm{Ker}(w_0, \{f_{t_n}(\mathbb{D})\})$ が成り立つ. また $t_n < t_0$ より $f_{t_n}(\mathbb{D}) \subset f_{t_0}(\mathbb{D})$ が成り立つ. よって $\mathrm{Ker}(w_0, \{f_{t_n}(\mathbb{D})\}) \subset f_{t_0}(\mathbb{D})$ が成り立ち, w_0 を参照点とする核収束の意味で $f_{t_n}(\mathbb{D}) \to f_{t_0}(\mathbb{D})$ である. 従って局所一様に $\tilde{f}_{t_n} \to \tilde{f}_{t_0}$ が成り立つ. 残念ながら $\{f_t\}_{t\in I}$ が $t_0 \in I$ で右連続であっても $\{\tilde{f}_t\}_{t\in I}$ が $t_0 \in I$ で右連続であるとは限らない. 反例を作るには Example 21.2.7 を参考にすれば容易であろう. 同様に $\{f_t\}_{t\in I}$ が狭義増加であっても $\{\tilde{f}_t\}_{t\in I}$ が狭義増加であるとは限らない. Example 22.1.3 の $\{f_t\}_{t>0}$ について, 対応する $\{\tilde{f}_t\}_{t>0}$ を作れば, $\{f_t\}_{t>0}$ は狭義増加であるが $\tilde{f}_t$ は $f_t(\mathbb{D})$ が $t > \pi$ で一定であるから, やはりここで一定である.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D} \arrow[rrr, "\tilde{\omega}_{st}"] \arrow[ddr, "\tilde{f}_s"'] & & & \mathbb{D} \arrow[ddl, "\tilde{f}_t"] \\
& \mathbb{D} \arrow[ul, "\tilde{\omega}_s"'] \arrow[r, "\omega_{st}"] \arrow[d, "f_s"] & \mathbb{D} \arrow[ur, "\tilde{\omega}_t"] \arrow[d, "f_t"'] & \\
& \Omega_s \arrow[r, "\mathrm{inc}"] & \Omega_t &
\end{tikzcd}$$

22.2 半群と基本的な評価

Theorem 22.2.1. $\{f_t\}_{t\in I}$ が *subordination chain* ならば任意の $t_0 \in I$ について部分族 $\{f_t\}_{t\in I\cap(-\infty,t_0]}$ は $\mathbb{D}$ で局所一様有界である.

Proof. $t_0 \in I$ とすると, 任意の $t \in I$, $t < t_0$ と $r \in (0,1)$ について $f_t \prec f_{t_0}$ より

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_t(re^{i\theta})|\, d\theta \le \int_{-\pi}^{\pi} |f_{t_0}(re^{i\theta})|\, d\theta$$

が成り立つからである. □

さて subordination chain $\{f_t\}_{t\in I}$ が与えられたとする. $f_t(0)$ は t に依らず一定であるから $b = f_t(0)$ と置く. 各 $s, t \in I$, $s < t$ について $f_s = f_t \circ \omega_{st}$ を満たす解析函数 $\omega_{st} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ で $\omega_{st}(0) = 0$ 満たすものを取る. ω_{st} が一意的に定まることを示そう. $f_t'(0) \neq 0$ より 0 の近傍 U と b の近傍 V で $(f_t)|_U : U \to V$ が等角になるように取る. そして $\omega_{s,t}(\mathbb{D}(0,\rho)) \subset U$ を満たす $\rho > 0$ を取れば

$$f_s(z) = (f_t)|_U(\omega_{st}(z)) \in V, \quad z \in \mathbb{D}(0,\rho)$$

より

$$\omega_{st}(z) = ((f_t)|_U)^{-1} \circ f_s(z), \quad z \in \mathbb{D}(0,\rho)$$

が成り立つ. 同様に解析函数 $\omega_{st}^* : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ が $f_s = f_t \circ \omega_{st}^*$ と $\omega_{st}^*(0) = 0$ を満たせば, ω_{st} と ω_{st}^* は 0 のある近傍で一致するので $\mathbb{D}$ で一致する.

$s = t \in I$ のとき

$$\omega_{ss} = \mathrm{id}_{\mathbb{D}} \tag{22.2.1}$$

と置くと都合の良いことが多いので以下では, こう置いて議論を進めることにする.

Theorem 22.2.2. $\{f_t\}_{t\in I}$ が *subordination chain* であれば

$$\omega_{t_1t_2} \circ \omega_{t_0t_1} = \omega_{t_0t_2}, \qquad t_0, t_1, t_2 \in I \textit{ with } t_0 \le t_1 \le t_2 \tag{22.2.2}$$

が成り立つ.

Proof. $t_0 = t_1$ または $t_1 = t_2$ のときは明らかであるから $t_0 < t_1 < t_2$ と仮定する. このとき $f_{t_0} = f_{t_1} \circ \omega_{t_0t_1}$ と $f_{t_1} = f_{t_2} \circ \omega_{t_1t_2}$ より $f_{t_0} = f_{t_2} \circ \omega_{t_1t_2} \circ \omega_{t_0t_1}$ が成り立つ. また $f_{t_0} = f_{t_2} \circ \omega_{t_0t_2}$ が成り立つ.

$$f_{t_2} \circ \omega_{t_1t_2} \circ \omega_{t_0t_1} = f_{t_2} \circ \omega_{t_0t_2}$$

$f_{t_2}'(0) \neq 0$ より 0 の近傍 U と $b \equiv f_t(0)$ の近傍 V を $(f_{t_2})|_U : U \to V$ が等角になるように取る. このとき $\omega_{t_1t_2} \circ \omega_{t_0t_1}(\mathbb{D}(0,\rho)) \subset U$ かつ $\omega_{t_0t_2}(\mathbb{D}(0,\rho)) \subset U$ が成り立つように $\rho > 0$ を取れば

$$(f_{t_2})|_U \circ \omega_{t_0t_2}(z) = (f_{t_2})|_U \circ \omega_{t_1t_2} \circ \omega_{t_0t_1}(z), \quad z \in \mathbb{D}(0,\rho)$$

が成り立つので $((f_{t_2})|_U)^{-1}$ を左側から合成して

$$\omega_{t_0t_2}(z) = \omega_{t_1t_2} \circ \omega_{t_0t_1}(z), \quad z \in \mathbb{D}(0,\rho)$$

が成り立つ. よって一致の定理より $\omega_{t_0t_2} = \omega_{t_1t_2} \circ \omega_{t_0t_1}$ が成り立つ. □

さて subordination chain $\{f_t\}_{t\in I}$ について

$$a(t) = f_t'(0)(\neq 0), \qquad t \in I \tag{22.2.3}$$

と置く．このとき $\omega_{st}'(0) = \dfrac{a(s)}{a(t)} \in \overline{\mathbb{D}}$ であることに注意する．

Theorem 22.2.3. *$\{f_t\}_{t\in I}$ を subordination chain とする．このとき $t_0 < t_1 < t_2$ を満たす $t_0, t_1, t_2 \in I$ について以下の不等式が成り立つ．*

$$\left|\frac{\omega_{t_0t_1}(z)}{z} - \frac{a(t_0)}{a(t_1)}\right| \le |z|\left|1 - \overline{\left(\frac{a(t_0)}{a(t_1)}\right)}\frac{\omega_{t_0t_1}(z)}{z}\right|, \tag{22.2.4}$$

$$\left|\frac{\omega_{t_0t_1}(z)}{z} - \frac{\frac{a(t_0)}{a(t_1)}(1-|z|^2)}{1-\left|\frac{a(t_0)}{a(t_1)}\right|^2|z|^2}\right| \le \frac{\left(1-\left|\frac{a(t_0)}{a(t_1)}\right|^2\right)|z|}{1-\left|\frac{a(t_0)}{a(t_1)}\right|^2|z|^2}, \tag{22.2.5}$$

$$|\omega_{t_0t_1}(z) - z| \le \frac{|(a(t_1)-a(t_0)|\,|z|(1+|z|)}{|a(t_1)|\left(1-\left|\frac{a(t_0)}{a(t_1)}\right||z|\right)}, \tag{22.2.6}$$

$$|\omega_{t_0t_2}(z) - \omega_{t_0t_1}(z)| \le \frac{|a(t_2)-a(t_1)||z|(1+|z|)}{|a(t_2)|\left(1-\left|\frac{a(t_1)}{a(t_2)}\right||z|\right)}, \tag{22.2.7}$$

Proof. 函数 $\omega_{t_0t_1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ は $\omega_{t_0t_1}(0) = 0$, であり $\omega_{t_0t_1}'(0) = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}$ を満たす．よって $|\omega_{t_0t_1}'(0)| < 1$ の場合は Schwarz-Pick の不等式より直ちに (22.2.4) が従う．この不等式は $|\omega_{t_0t_1}'(0)| = 1$ の場合でも，左辺と右辺がともに恒等的に 0 となるので，やはり成り立つ．

$w = \varphi_{t_0t_1}(z)/z$, $\lambda = a(t_0)/a(t_1)$, $\delta = |z|$ と置けば

$$\begin{aligned}
(22.2.4) &\Longleftrightarrow |w-\lambda| \le \delta\left|1-\overline{\lambda}w\right| \\
&\Longleftrightarrow |w-\lambda|^2 \le \delta^2|1-\overline{\lambda}w|^2 \\
&\Longleftrightarrow |w|^2 - (\overline{\lambda}w + \lambda\overline{w}) + |\lambda|^2 \le \delta^2\{1-(\overline{\lambda}w+\lambda\overline{w}) + |\lambda|^2|w|^2\} \\
&\Longleftrightarrow (1-\delta^2|\lambda|^2)|w|^2 - (1-\delta^2)(\overline{\lambda}w+\lambda\overline{w}) \le \delta^2 - |\lambda|^2 \\
&\Longleftrightarrow |w|^2 - \frac{(1-\delta^2)}{1-\delta^2|\lambda|^2}(\overline{\lambda}w+\lambda\overline{w}) \le \frac{\delta^2-|\lambda|^2}{1-\delta^2|\lambda|^2} \\
&\Longleftrightarrow \left|w - \frac{(1-\delta^2)}{1-\delta^2|\lambda|^2}\lambda\right|^2 \le \frac{\delta^2-|\lambda|^2}{1-\delta^2|\lambda|^2} + \frac{(1-\delta^2)^2|\lambda|^2}{(1-\delta^2|\lambda|^2)^2} \\
&\Longleftrightarrow \left|w - \frac{(1-\delta^2)}{1-\delta^2|\lambda|^2}\lambda\right| \le \frac{(1-|\lambda|^2)\delta}{1-\delta^2|\lambda|^2}
\end{aligned}$$

と変形できることより (22.2.5) が従う．

次に

$$1 - \frac{(1-\delta^2)\lambda}{1-\delta^2|\lambda|^2} = \frac{1-\lambda+\lambda\delta^2(1-\overline{\lambda})}{1-\delta^2|\lambda|^2)} = \frac{(1-\lambda)\left(1+\frac{1-\overline{\lambda}}{1-\lambda}\lambda\delta^2\right)}{1-\delta^2|\lambda|^2)}$$

より

$$
\begin{aligned}
|w-1| &\le \left| w - \frac{(1-\delta^2)\lambda}{1-\delta^2|\lambda|^2} \right| + \left| \frac{(1-\delta^2)\lambda}{1-\delta^2|\lambda|^2} - 1 \right| \\
&\le \frac{(1-|\lambda|^2)\delta}{1-\delta^2|\lambda|^2} + \frac{|1-\lambda|(1+|\lambda|\delta^2)}{1-\delta^2|\lambda|^2} \qquad (\text{ここで } 1-|\lambda| \le |1-\lambda| \text{ を用いよ }) \\
&\le \frac{|1-\lambda|(1+\delta)}{1-|\lambda|\delta}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．これより (22.2.6) が直ちに得られる．さらに (22.2.6) において t_0, t_1 を それぞれ t_1, t_2 で置き換えてから z の代わりに $\omega_{t_0t_1}(z)$ を代入すると $\omega_{t_1t_2}(\omega_{t_0t_1}(z)) = \omega_{t_0t_2}(z)$ と $|\omega_{t_0t_1}(z)| \le |z|$ より

$$
|\omega_{t_0t_2}(z) - \omega_{t_0t_1}(z)| \le \frac{|a(t_2)-a(t_1)||\omega_{t_0t_1}(z)|(1+|\omega_{t_0t_1}(z)|)}{|a(t_2)|\left(1-\left|\frac{a(t_1)}{a(t_2)}\right||\omega_{t_0t_1}(z)|\right)} \le \frac{|a(t_2)-a(t_1)||z|(1+|z|)}{|a(t_2)|\left(1-\left|\frac{a(t_1)}{a(t_2)}\right||z|\right)}
$$

が成り立ち, (22.2.7) が導かれる． □

Corollary 22.2.4. *subordination chain* $\{f_t\}_{t\in I}$ について

$$
\text{写像 } I \ni t \mapsto f_t \in \mathcal{A}(\mathbb{D}) \text{ が } t=t_0 \text{ で 連続} \iff \text{函数 } a(t) \text{ が } t=t_0 \text{ で 連続}
$$

が成り立つ．

Proof. 写像 $I \ni t \mapsto f_t \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ が $t=t_0$ で連続ならば不等式

$$
|a(t)-a(t_0)| = |f'_t(0) - f'_{t_0}(0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r} \frac{|f_t(z)-f_{t_0}(z)|}{|z|^2}|dz|, \quad 0<r<1
$$

の右辺に於いて $t \to t_0$ とすれば $f_t(z)$ は $|z|=r$ 上で一様に $f_{t_0}(z)$ に収束するので, $a(t) \to a(t_0)$ が成り立つ．

逆に $a(t)$ が $t=t_0$ で連続が連続と仮定しよう．t_0 が I の左右の端点の場合も含めて $t_1, t_2 \in I$ が $t_1 \le t_0 \le t_2$, $t_1 < t_2$ を満たす時を考えれば十分であり, また Theorem 22.2.1 より $r \in (0,1)$ に対し $|f'_{t_2}(z)| \le M(r)$, $|z| \le r$ を満たす $M(r) > 0$ が存在すると仮定してよい．不等式 (22.2.6) を適用すれば $|z| \le r$ ならば

$$
\begin{aligned}
|f_{t_2}(z) - f_{t_1}(z)| &= |f_{t_2}(z) - f_{t_2}(\omega_{t_1t_2}(z))| \\
&= \left| \int_{\omega_{t_1t_2}(z)}^{z} f'_{t_2}(\zeta)\,d\zeta \right| \qquad (\text{ 積分路は } \omega_{t_1t_2}(z) \text{ と } z \text{ を結ぶ線分とする }) \\
&\le M(r)|z-\omega_{t_1t_2}(z))| \\
&\le \frac{|a(t_2)-a(t_1)|M(r)r(1+r)}{|a(t_2)|(1-r)} \le \frac{|a(t_2)-a(t_1)|M(r)r(1+r)}{|a(t_0)|(1-r)}
\end{aligned}
$$

が成り立つことが分かる．これより $t \to t_0$ のとき f_t は $\mathbb{D}$ で局所一様に f_{t_0} に収束する．つまり写像 $I \ni t \mapsto f_t \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ は $t=t_0$ で連続である． □

22.3 Loewner の微分方程式

さて $\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}$ への函数の族 $\{\omega_{st}\}_{s,t\in I, s\le t}$ は半群的性質 (22.2.2) を持ちまた不等式 (22.2.7) を満たす．これは $z \in \mathbb{D}$ と $t \in I$ を固定するとき $\omega_{t_0t}(z)$, $t \ge t$ が $a(t)$ に関して Lipschitz 連続であることを示す．そこで以下では subodrnation chain $\{f_t\}_{t\in I}$ について

(22.3.1) $a(t)$ は実数値であり t について C^1-級, かつ $\dot{a}(t) > 0$, $t \in I$ を満たす

との仮定のもとで議論を進める．但し $\dot{a}(t)$ は t に関する微分を表す．このとき t に関する導関数の存在が分かり，それを梃子にして ω が，ある種の微分方程式を満たすことを示すことが出来る．

Theorem 22.3.1. *subodrnation chain* $\{f_t\}_{t\in I}$ *が仮定 (22.3.1) を満たすとする．$t_0 \in I$ を固定すれば Lebesgue 測度 0 の除外集合を除き，全ての $t \in I \cap (t_0, \infty)$ について*

$$\dot{\omega}_{t_0t}(z) := \lim_{t_1\le t\le t_2, t_2-t_1\to+0} \frac{\omega_{t_0t_2}(z)-\omega_{t_0t_1}(z)}{t_2-t_1}, \quad \forall z \in \mathbb{D} \tag{22.3.2}$$

$$\dot{\omega}_{t}(z) := \lim_{t_1\le t\le t_2, t_2-t_1\to+0} \frac{\omega_{t_1t_2}(z)-z}{t_2-t_1}, \quad \forall z \in \mathbb{D} \tag{22.3.3}$$

が存在し，収束は $\mathbb{D}$ で局所一様である．さらに t に関する微分について，同じ除外集合を除き，全ての $t \in I \cap (t_0, \infty)$ について

$$\dot{\omega}_{t_0t}(z) = \dot{\omega}_t(\omega_{t_0t}(z)), \quad \forall z \in \mathbb{D} \tag{22.3.4}$$

が成り立つ．

Proof. $t_0 \in I$ を固定すると $t_0 < t_1 < t_2 \in I$ を満たす t_1, t_2 について

$$|\omega_{t_0t_2}(z)-\omega_{t_0t_1}(z)| \le \frac{|a(t_2)-a(t_1)|}{|a(t_2)|}\frac{|z|(1+|z|)}{1-|z|} \le \frac{|t_2-t_1|\max_{t_1\le t\le t_2}|a'(t)|}{|a(t_0)|}\frac{|z|(1+|z|)}{1-|z|} \tag{22.3.5}$$

が成り立つ．ここで $\mathbb{D}$ 内の収束列 $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ を $z_k \to z_0 \in \mathbb{D}$ 満たすように任意にとる．各 k について $\omega_{t_0t}(z_k)$ は $t \in I \cap [t_0, \infty)$ の函数として Lipschitz 連続であるから，殆ど至るところ微分可能である．よって Lebesgue 測度 0 の集合 $\mathcal{N}_k \subset I \cap [t_0, \infty)$ を除いて

$$\dot{\omega}_{t_0t}(z_k) := \frac{d}{dt}\{\omega_{t_0t}(z_k)\} = \lim_{t_1\le t\le t_2, t_2-t_1\to+0} \frac{\omega_{t_0t_2}(z_k)-\omega_{t_0t_1}(z_k)}{t_2-t_1}, \quad t \in I\cap[t_0,\infty)\backslash\mathcal{N}_k$$

が存在する．特に $t \in I \cap [t_0, \infty) \backslash (\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathcal{N}_k)$ ならば任意の k について上式の極限が存在する．不等式 (22.3.5) より $\frac{\omega_{t_0t_2}(z)-\omega_{t_0t_1}(z)}{t_2-t_1}$ は 2 つのパラメータ t_1, t_2 を持つ z に関する解析函数の族として，局所一様有界であるから，正規族であり点列 $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ の各点で $t_2 - t_1 \to +0$ のときに極限を持つ．よって Vitali の収束定理より $\mathbb{D}$ で局所一様に収束する．すなわち $t \in I \cap [t_0, \infty) \backslash (\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathcal{N}_k)$ ならば各 $z \in \mathbb{D}$ について

$$\dot{\omega}_{t_0t}(z) = \lim_{t_1\le t\le t_2, t_2-t_1\to+0} \frac{\omega_{t_0t_2}(z)-\omega_{t_0t_1}(z)}{t_2-t_1} \tag{22.3.6}$$

が存在し，収束は $\mathbb{D}$ 上で局所一様である．ここで $t \in I \cap [t_0, \infty) \backslash (\bigcup_{k=1}^{\infty})$ と $t_1 \le t \le t_2$ を満たす t_1, t_2 について

$$\begin{aligned}\omega_{t_0t_2}(z)-\omega_{t_0t_1}(z)-\{\omega_{t_1t_2}(\omega_{t_0t}(z))-\omega_{t_0t}(z)\} &= \omega_{t_1t_2}(\omega_{t_0t_1}(z))-\omega_{t_0t_1}(z)-\{\omega_{t_1t_2}(\omega_{t_0t}(z))-\omega_{t_0t}(z)\}\\ &= \omega_{t_1t_2}(\omega_{t_0t_1}(z))-\omega_{t_1t_2}(\omega_{t_0t}(z))-\{\omega_{t_0t_1}(z)-\omega_{t_0t}(z)\}\\ &= \int_{\omega_{t_0t}(z)}^{\omega_{t_0t_1}(z)} \left(\omega'_{t_1t_2}(\zeta)-1\right)\,d\zeta\end{aligned} \tag{22.3.7}$$

である．$t_2 - t_1 \to +0$ のとき $\omega_{t_1t_2} \to \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$ が局所一様に成り立つので $\omega'_{t_1t_2} \to 1$ も局所一様に成り立つことを考慮すれば，上式の最右辺は $\mathrm{o}(\omega_{t_0t}(z)-\omega_{t_0t_1}(z)) = \mathrm{o}(t_2-t_1)$ であることが分かる．よって (22.3.6) と合わせると

$$\lim_{t_1\le t\le t_2, t_2-t_1\to+0} \frac{\omega_{t_1t_2}(\omega_{t_0t}(z))-\omega_{t_0t}(z)}{t_2-t_1}$$

が存在することが分かる．これは

$$\lim_{t_1\le t\le t_2, t_2-t_1\to+0} \frac{\omega_{t_1t_2}(z^*)-z^*}{t_2-t_1}, \quad z^* \in \omega_{t_0t}(\mathbb{D})$$

が存在することを意味し $\omega_{t_0t}(\mathbb{D})$ は $\mathbb{D}$ の空でない部分領域であるから, 再び Vitali の収束定理より

$$\dot{\omega}_t(z) := \lim_{t_1 \le t \le t_2, t_2 - t_1 \to +0} \frac{\omega_{t_1t_2}(z) - z}{t_2 - t_1}, \quad z \in \mathbb{D} \tag{22.3.8}$$

が存在することが分かり, 収束は $\mathbb{D}$ で局所一様である．さらに (22.3.7) と合わせると

$$\dot{\omega}_{t_0t}(z) = \dot{\omega}_t(\omega_{t_0t}(z)), \qquad z \in \mathbb{D}$$

が成り立つことが分かる． □

さて t に関する微分 $\dot{\omega}_t(z)$ の存在と, Schwarz-Pick の不等式を合わせると $\omega_{t_0t}(z)$ がある種の微分方程式を満たすことが導ける．

Theorem 22.3.2. *subodrnation chain* $\{f_t\}_{t\in I}$ が仮定 *(22.3.1)* を満たせば殆ど全ての $t \in I$ と全ての $z \in \mathbb{D}$ に対し, 極限

$$\phi_t(z) := \lim_{t_1 \le t \le t_2, t_2 - t_1 \to +0} \frac{\frac{\omega_{t_1t_2}(z)}{z} - \frac{a(t_1)}{a(t_2)}}{1 - \frac{a(t_1)}{a(t_2)}\frac{\omega_{t_1t_2}(z)}{z}} \tag{22.3.9}$$

が存在し, 収束は $\mathbb{D}$ で局所一様である．また ϕ_t は $\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}$ への函数であり, $\phi_t(0) = 0$ を満たす．さらに殆ど全ての $t \in I$ について

$$\dot{\omega}_t(z) = -\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} z \frac{1 - \phi_t(z)}{1 + \phi_t(z)} \tag{22.3.10}$$

$$\dot{f}_t(z) = -\dot{\omega}_t(z) f_t'(z) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} z \frac{1 - \phi_t(z)}{1 + \phi_t(z)} f_t'(z) \tag{22.3.11}$$

が成り立つ．また $t_0 \in I$ を任意に固定する時, 殆ど全ての $t \in I \cap (t_0, \infty)$ について

$$\dot{\omega}_{t_0t}(t) = \dot{\omega}_t(\omega_{t_0t}(z)) = -\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \omega_{t_0t}(z) \frac{1 - \phi_t(\omega_{t_0t}(z))}{1 + \phi_t(\omega_{t_0t}(z))} \tag{22.3.12}$$

が成り立つ．

$\{\omega_{st}\}_{s,t\in I, s\le t}$ の満たす方程式 (22.3.12) を Löwner-Kufarev-Pommerenke の常微分方程式と言い, $\{f_t\}_{t\in I}$ の満たす方程式 (22.3.11) を Löwner-Kufarev-Pommerenke の偏微分方程式と言う．

Proof. 極限 (22.3.3) が存在する $t \in I$ において $t_1 \le t \le t_2$ のもとで $t_2 - t_1 \to +0$ とするとき

$$\begin{aligned}
I_{t_1t_2}(z) &:= \frac{1}{t_2 - t_1}\left\{\frac{\omega_{t_1t_2}(z)}{z} - \frac{a(t_1)}{a(t_2)}\right\} \\
&= \frac{1}{a(t_2)} \frac{a(t_2)\omega_{t_1t_2}(z) - a(t_1)z}{z(t_2 - t_1)} \\
&= \frac{1}{a(t_2)} \frac{a(t_2)(\omega_{t_1t_2}(z) - z) + (a(t_2) - a(t_1))z}{z(t_2 - t_1)} \quad \to \quad \frac{\dot{\omega}_t(z)}{z} + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \\
J_{t_1t_2}(z) &:= \frac{1}{t_2 - t_1}\left\{1 - \frac{a(t_1)}{a(t_2)}\frac{\omega_{t_1t_2}(z)}{z}\right\} \\
&= \frac{1}{a(t_2)} \frac{a(t_2)z - a(t_1)\omega_{t_1t_2}(z)}{z(t_2 - t_1)} \\
&= \frac{1}{a(t_2)} \frac{(a(t_2) - a(t_1))z - a(t_1)(\omega_{t_1t_2}(z) - z)}{z(t_2 - t_1)} \quad \to \quad -\frac{\dot{\omega}_t(z)}{z} + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $\dot{\omega}_t(z)$ は $\mathbb{D}$ で解析的であり，定義と $\omega_{t_1t_2}(0)=0$ より $\dot{\omega}_t(0)=0$ を満たす．従って上の 2 つの式の極限函数の中の $\frac{\dot{\omega}_t(z)}{z}$ は $z=0$ でも定義されていて $\mathbb{D}$ で解析的である．ここで $J_{t_1t_2}$ の極限 $-\frac{\dot{\omega}_t(z_0)}{z_0}+\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}=0$ となる $z_0\in\mathbb{D}$ が存在すると仮定しよう．Schwarz-Pick の不等式より $|I_{t_1t_2}(z)|\le|z||J_{t_1t_2}(z)|$ であるから $\frac{\dot{\omega}_t(z_0)}{z_0}+\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}=0$ も成り立つことになり，$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}=0$ を得る．これは矛盾であるから $-\frac{\dot{\omega}_t(z)}{z}+\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\neq 0$ が成り立つ．よって

$$\phi_t(z):=\lim_{t_1\le t\le t_2,t_2-t_1\to+0}\frac{\frac{\omega_{t_1t_2}(z)}{z}-\frac{a(t_1)}{a(t_2)}}{1-\frac{a(t_1)}{a(t_2)}\frac{\omega_{t_1t_2}(z)}{z}}=\frac{\frac{\dot{\omega}_t(z)}{z}+\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}}{-\frac{\dot{\omega}_t(z)}{z}+\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}} \tag{22.3.13}$$

が成り立つ．ここで

$$\frac{\frac{\omega_{t_1t_2}(z)}{z}-\frac{a(t_1)}{a(t_2)}}{1-\frac{a(t_1)}{a(t_2)}\frac{\omega_{t_1t_2}(z)}{z}}$$

を t_1, t_2 をパラメータに持つ解析函数の族と見れば Schwarz-Pick の不等式より

$$\left|\frac{\frac{\omega_{t_1t_2}(z)}{z}-\frac{a(t_1)}{a(t_2)}}{1-\frac{a(t_1)}{a(t_2)}\frac{\omega_{t_1t_2}(z)}{z}}\right|\le|z|$$

が成り立つので局所一様有界であり，正規族をなす．よって Vitali の収束定理より (22.3.13) の収束は $\mathbb{D}$ で局所一様である．また $|\phi_t(z)|\le|z|$ が成り立つことも従う．(22.3.13) を逆に解くと (**??**) が得られ，さらに z の代わりに $\omega_{t_0t}(z)$ を代入すると (22.3.4) より (22.3.12) が得られる．

最後に (22.3.11) を示そう．これは極限 (22.3.3) が存在する $t\in I$ において $t_1\le t\le t_2$ のもとで $t_2-t_1\to+0$

$$\begin{aligned}\frac{f_{t_2}(z)-f_{t_1}(z)}{t_2-t_1}&=\frac{f_{t_2}(z)-f_{t_2}(\omega_{t_1t_2}(z))}{t_2-t_1}\\&=\frac{z-\omega_{t_1t_2}(z)}{t_2-t_1}\int_0^1 f'_{t_2}((1-s)\omega_{t_1t_2}(z)+sz)\,ds\\&\to-\dot{\omega}_t(z)f'_t(z)=\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}z\frac{1-\phi_t(z)}{1+\phi_t(z)}f'_t(z)\end{aligned}$$

より従う．□

22.4　Loewner の常微分方程式の解

はじめに微分不等式を 1 つ準備する．

Theorem 22.4.1. $K>0$ を定数とし $a(t)$ を有界閉区間 $I=[\alpha,\beta]$ 上で $0<a(t)<\infty$ を満たす増加で絶対連続函数とする．このとき $w(t)$ が I で絶対連続で

$$\left|\frac{dw}{dt}(t)\right|\le K\frac{a'(t)}{a(t)}|w(t)|$$

を満たせば，

$$|w(\alpha)|\left(\frac{a(\alpha)}{a(t)}\right)^K\le|w(t)|\le|w(\alpha)|\left(\frac{a(t)}{a(\alpha)}\right)^K,\quad \alpha\le t\le\beta$$

が成り立つ．

Proof. $a(t)^{-K}$, $a(t)^{K}$ は $[\alpha,\beta]$ 上で絶対連続であるから $|w(t)|a(t)^{-K}$, $|w(t)|a(t)^{K}$ も絶対連続となり

$$\frac{d}{dt}\{|w(t)|a(t)^{-K}\} = \frac{d|w(t)|}{dt}a(t)^{-K} - K|w(t)|a'(t)a(t)^{-K-1} \le 0$$

が殆ど至るところ成り立つので, $|w(t)|a(t)^{-K}$ は減少であり, 特に $|w(t)|a(t)^{-K} \le |w(\alpha)|a(\alpha)^{-K}$ が成り立つ. また

$$\frac{d}{dt}\{|w(t)|a(t)^{K}\} = \frac{d|w(t)|}{dt}a(t)^{K} + K|w(t)|a'(t)a(t)^{K-1} \ge 0$$

が殆ど至るところ成り立つので, $|w(t)|a(t)^{K}$ は増加であり, 特に $|w(t)|a(t)^{K} \ge |w(\alpha)|a(\alpha)^{K}$ が成り立つ. □

Theorem 22.4.2. $I \subset \mathbb{R}$ を区間とし $a(t)$ を I 上の $0 < a(t) < \infty$ を満たす増加函数で, さらに I の任意の部分有界区間に於いて絶対連続とする. また $p(z,t)$ $\mathbb{D}\times I$ 上の函数で $t \in I$ を固定するとき z について正則で $\mathcal{P}$ に属し, $z \in \mathbb{D}$ を固定するとき t について *Lebesgue* 可測とする. このとき任意の $z \in \mathbb{D}$ と任意の $t_0 \in I$ について微分方程式

$$\frac{dw}{dt} = -w\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}p(w,t), \quad \textit{for almost all } t \in I \cap [t_0,\infty) \tag{22.4.1}$$

の解で初期条件 $w(t_0) = z$ を満たすものが一意的に存在する. これを $\varphi_{t_0 t}(z)$ と書くことにすれば, $\varphi_{t_0 t}(z)$ は z について正則単葉で, $\varphi_{t_0 t} \in H_1^{\infty}(\mathbb{D})$. また

$$\varphi_{t_1 t}(\varphi_{t_0 t_1}(z)) = \varphi_{t_0 t}(z)$$

を満たす. さらに β を I の右端点とするとき $a(t) \to \infty$ $(t \to \beta - 0)$ が成り立てば

$$f_{t_0}(z) = \lim_{t\to\infty} a(t)\varphi_{t_0 t}(z)$$

は $\mathbb{D}$ で広義一様に収束し, $\mathbb{D}$ で単葉正則であり

$$\begin{aligned} &f_t(\varphi_{t_0 t(z)}) = f_{t_0}(z), \quad z \in \mathbb{D} \\ &f_t'(0) = a(t), \quad t \in I \end{aligned}$$

を満たし $\{f_t\}_{t\in I}$ は *subordination chain* になる.

Proof. **1** まず I の任意の部分有界閉区間 $[t_0,t_1]$ で $\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ が可積分であることに注意しよう. これは $a(t)$ の増加性より殆ど至るところ $\dot{a}(t) \ge 0$ でありまた絶対連続性と合わせて置換積分が行えるので

$$0 \le \int_{t_0}^{t_1} \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\,dt = \int_{a(t_0)}^{a(t_1)} \frac{ds}{s} = \log\frac{a(t_1)}{a(t_0)} < \infty$$

が成り立つことより従う.

2 逐次近似法による微分方程式 (22.4.1) の解の近似列を構成しよう. 始めに

$$w_0(t) \equiv z, \quad t \in [t_0,\infty)\cap I \tag{22.4.2}$$

と置く. このとき $w_0(t)$ は $t \in [t_0,\infty)\cap I$ について連続であり, 初期値 z について正則であり, $|w_0(t)| \le |z|$ が成り立つ. そこで $w_n(t)$, $t \in [t_0,\infty)\cap I$ が定義されたとして $[t_0,\infty)\cap I$ で t について連続で, $|w_n(t)| \le |z|$ が成り立ち z について正則であることが示されたとしよう. このとき

$$w_{n+1}(t) = z\exp\left[-\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{a}(\tau)}{a(\tau)}p(w_n(\tau),\tau)\,d\tau\right], \quad t \in [t_0,\infty)\cap I \tag{22.4.3}$$

と置く．実際にこの積分が定義されることは, 次のようにして分かる．まず $p(z,t)$ が t について Lebsegue 可測で z について連続であるから, Theorem **??**により $p(w_n(t),t)$ は t について Lebsegue 可測である．また $\mathcal{P}$ に関する評価である Theorem **??**と $|w_n(t)| \le |z|$ より

$$|p(w_n(t),t)| \le \frac{1+|w_n(t)|}{1-|w_n(t)|} \le \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

であるから $\dot{a}(t)/a(t)$ の可積分性と合わせて $\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}p(w_n(t),t)$ が $[t_0,\infty)\cap I$ の任意の部分有界閉区間で可積分であることが分かり (22.4.3) の積分は確かに意味を持ち, $w_{n+1}(t)$ の $t \in [t_0,\infty)\cap I$ に於ける連続性が直ちに従う．また $w_n(t)$ は t を固定すると初期値 z について正則であるから $p(w_n(t),t)$ も同じように t を固定すると z について正則である．従って Theorem **??** より

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{a}(\tau)}{a(\tau)} p(w_n(\tau),\tau)\, d\tau$$

は z について正則である．従って $w_{n+1}(t)$ も初期値 z について正則である．最後に $\mathrm{Re}, p(z,t) > 0$ より

$$|w_{n+1}(t)| = |z| \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{a}(\tau)}{a(\tau)} \mathrm{Re}, p(w_n(\tau),\tau)\, d\tau\right] \le |z|$$

が成り立つ．これで (22.4.2), (22.4.3) により帰納的に $\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ が定義されることが分かった．

3　函数列 $\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ の収束性を調べよう．これには $\mathrm{Re}\, a \ge 0$, $\mathrm{Re}\, b \ge 0$ を満たす複素数 a, b について成り立つ不等式

$$|e^{-b} - e^{-a}| \le |b-a|$$

を用いる．この不等式は次のように簡単に示される．

$$\begin{aligned}
|e^{-b} - e^{-a}| &= \left|\int_a^b e^{-z}\, dz\right| \\
&= \left|(b-a)\int_0^1 e^{-\{(1-t)a+tb\}}\, dt\right| \\
&\le |b-a| \int_0^1 |e^{-\{(1-t)a+tb\}}|\, dt \\
&= |b-a| \int_0^1 e^{-\{(1-t)\mathrm{Re}\, a + t\mathrm{Re}\, b\}}\, dt \le |b-a|.
\end{aligned}$$

$n \ge 1$ について (22.4.3) とこの不等式及び Theorem **??** の不等式 (**??**) より

$$\begin{aligned}
|w_{n+1}(t) - w_n(t)| &= |z| \left|\exp\left[-\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{a}(\tau)}{a(\tau)} p(w_n(\tau),\tau)\, d\tau\right] - \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{a}(\tau)}{a(\tau)} p(w_{n-1}(\tau),\tau)\, d\tau\right]\right| \\
&\le |z| \left|\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{a}(\tau)}{a(\tau)} p(w_n(\tau),\tau) - p(w_{n-1}(\tau),\tau)\, d\tau\right| \\
&\le |z| \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{a}(\tau)}{a(\tau)} |p(w_n(\tau),\tau) - p(w_{n-1}(\tau),\tau)|\, d\tau \\
&\le \frac{2|z|^2}{(1-|z|)^2} \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{a}(\tau)}{a(\tau)} |w_n(\tau) - w_{n-1}(\tau)|\, d\tau
\end{aligned}$$

が成り立つ．$n=0$ の時は

$$\begin{aligned}|w_1(t)-w_0(t)| &= |z|\left|\exp\left[-\int_{t_0}^{t}\frac{\dot a(\tau)}{a(\tau)}p(z,\tau)\,d\tau\right]-e^0\right|\\ &\le |z|\left|\int_{t_0}^{t}\frac{\dot a(\tau)}{a(\tau)}p(z,\tau)\,d\tau\right|\\ &\le \frac{|z|(1+|z|)}{1-|z|}\int_{t_0}^{t}\frac{\dot a(\tau)}{a(\tau)}\,d\tau=\frac{|z|(1+|z|)}{1-|z|}\log\frac{a(t)}{a(t_0)}\end{aligned}$$

が成り立つので, 上の不等式と合わせて

$$|w_2(t)-w_1(t)|\le\frac{|z|(1+|z|)}{1-|z|}\frac{2|z|^2}{(1-|z|)^2}\int_{t_0}^{t}\frac{\dot a(\tau)}{a(\tau)}\log\frac{a(t)}{a(t_0)}\,d\tau=\frac{|z|(1+|z|)}{1-|z|}\frac{2|z|^2}{(1-|z|)^2}\frac{1}{2}\left(\log\frac{a(t)}{a(t_0)}\right)^2$$

となる．よって帰納的に

$$|w_n(t)-w_{n-1}(t)|\le\frac{|z|(1+|z|)}{n!(1-|z|)}\left(\frac{2|z|^2}{(1-|z|)^2}\log\frac{a(t)}{a(t_0)}\right)^n$$

が成り立つことは容易に分かるであろう．この評価式より函数列 $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ が $\mathbb{D}\times[t_0,\infty)\cap I$ に於いて局所一様に収束することが従う．そこで $w(t)=\lim_{n\to\infty}w_n(t)$ と置けば, $w(t)$ は t について連続で, z について正則である．また (22.4.3) に於いて $n\to\infty$ とすれば左辺は $w(t)$ に収束し, 右辺は $p(z,t)$ の z に関する連続性より, 各固定した t について $p(w_n(t),t)\to p(w(t),t)$ であり $|p(w_n(t),t)|\le(1+|z|)(1-|z|)$ と $\dot a(t)/a(t)$ の可積分性より Lebesgue's dominated convergence thorem が適用できるので

$$w(t)=z\exp\left[-\int_{t_0}^{t}\frac{\dot a(\tau)}{a(\tau)}p(w(\tau),\tau)\,d\tau\right]\tag{22.4.4}$$

が成り立つことが分かる．従って $w(t)$ は絶対連続であり, 微分方程式 (22.4.1) の解である．

4　微分方程式 (22.4.1) の解の 1 意性と初期値 z に関して単葉になることを示そう．まず $\nu(t)$ も (22.4.1) の解とすると (**??**) より

$$\left|\frac{d}{dt}(w(t)-\nu(t))\right|=\frac{\dot a(t)}{a(t)}|w(t)p(w(t),t)-\nu(t)p(\nu(t),t)|\le\frac{\dot a(t)}{a(t)}\frac{3}{(1-|z|)^2}|w(t)-\nu(t)|$$

となる．よって z を固定し $K=\frac{3}{(1-|z|)^2}$ と置いて Theorem 22.4.1 を適用すれば

$$|w(t)-\nu(t)|\le|w(t_0)-\nu(t_0)|\left(\frac{a(t)}{a(t_0)}\right)^K$$

が成り立つが, $w(t_0)=z=\nu(t_0)$ であるから $|w(t)-\nu(t)|\equiv0$ である．

ここで $w(t)$ を初期値に関する依存性が分かるように $\varphi_{t_0t}(z)$ と表すことにしよう．そして $z_0,z_1\in\mathbb{D}$ で $z_0\ne z_1$ とする．このとき $|z_0|,|z_1|\le r$ を満たす $r\in(0,1)$ を取れば $\varphi_{t_0t}(z_0)$, $\varphi_{t_0t}(z_1)$ は同じ微分方程式 (22.4.1) の解であり $|\varphi_{t_0t}(z_j)|\le|z_j|\le r$, $j=1,2$ が成り立つので

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{dt}(\varphi_{t_0t}(z_0)-\varphi_{t_0t}(z_1))\right| &= \frac{\dot a(t)}{a(t)}|\varphi_{t_0t}(z_0)p(\varphi_{t_0t}(z_0),t)-\varphi_{t_0t}(z_1)p(\varphi_{t_0t}(z_1),t)|\\ &\le\frac{\dot a(t)}{a(t)}\frac{3}{(1-r)^2}|\varphi_{t_0t}(z_0)-\varphi_{t_0t}(z_1)|\end{aligned}$$

が成り立つので Theorem 22.4.1 を適用すれば

$$|\varphi_{t_0t}(z_0)-\varphi_{t_0t}(z_0)|\ge|z_0-z_1|\left(\frac{a(t_0)}{a(t)}\right)^K$$

が成り立つ．これより直ちに $\varphi_{t_0t}(z)$ の z に関する単葉性が従う．

5 $\varphi'_{t_0t}(0)=a(t_0)/a(t)$ となることを示そう．これは (22.4.4) より $\varphi_{t_0t}(0)=0$ であるから

$$\varphi'_{t_0t}(0)=\lim_{z\to0}\frac{\varphi_{t_0t}(z)}{z}=\lim_{z\to0}\exp\left[-\int_{t_0}^{t}\frac{\dot a(\tau)}{a(\tau)}p(\varphi_{t_0t}(z),\tau)\,d\tau\right]$$

となるが **5** で行った議論と同様に φ_{t_0t} についても Theorem 22.4.1 を適用できるので $|z|\le r$ について

$$|\varphi_{t_0t}(z)|\le|z|\left(\frac{a(t)}{a(t_0)}\right)^K,\quad K=\frac{3}{(1-r)^2}$$

が成り立つので

$$\lim_{z\to0}\exp\left[-\int_{t_0}^{t}\frac{\dot a(\tau)}{a(\tau)}p(\varphi_{t_0t}(z),\tau)\,d\tau\right]=\exp\left[-\int_{t_0}^{t}\frac{\dot a(\tau)}{a(\tau)}p(0,\tau)\,d\tau\right]=\exp\left[-\int_{t_0}^{t}\frac{\dot a(\tau)}{a(\tau)}\,d\tau\right]=\frac{a(t_0)}{a(t)}$$

よって $\varphi'_{t_0t}(0)=a(t_0)/a(t)$ である．

6 (22.4.4) より

$$a(t)\varphi_{t_0t}(z)=a(t_0)z\exp\left[\int_{t_0}^{t}\frac{\dot a(\tau)}{a(\tau)}(1-p(\varphi_{t_0\tau}(z)))\,d\tau\right]$$

が成り立つ．また $\frac{a(t)}{a(t_0)}\varphi_{t_0t}(z)\in S$ より

$$|\varphi_{t_0t}(z)|\le\frac{a(t_0)}{a(t)}\frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

が成り立つので, (**??**) より

$$|1-p(\varphi_{t_0\tau}(z))|\le\frac{3|\varphi_{t_0\tau}(z)|}{(1-|\varphi_{t_0\tau}(z)|)^2}\le\frac{3}{(1-|z|)^2}\frac{a(t_0)}{a(t)}\frac{|z|}{(1-|z|)^2}=\frac{3a(t_0)}{a(t)}\frac{|z|}{(1-|z|)^4}$$

である．そして

$$\int_{t_0}^{t}\frac{\dot a(\tau)}{a(\tau)}|1-p(\varphi_{t_0\tau}(z))|\,d\tau\le\frac{3|z|a(t_0)}{(1-|z|)^4}\int_{t_0}^{t}\frac{\dot a(t)}{a(\tau)^2}\,d\tau=\frac{3|z|a(t_0)}{(1-|z|)^4}\left\{\frac{1}{a(t_0)}-\frac{1}{a(t_0)}\right\}\le\frac{3|z|}{(1-|z|)^4}$$

が成り立つ．よって β を I の右端点とすれば $\frac{\dot a(t)}{a(t)}(1-p(\varphi_{t_0t}(z)))$ は $[t_0,\beta)$ で可積分であるから

$$f_{t_0}(z):=\lim_{t\to\beta-0}a(t)\varphi_{t_0t}(z)=a(t_0)z\exp\left[\int_{t_0}^{\beta}\frac{\dot a(t)}{a(t)}(1-p(\varphi_{t_0t}(z)))\,d\tau\right]$$

が, 各点 $z\in\mathbb{D}$ に於いて存在する．そして収束は z について局所一様であることも上の評価から直ちに分かるので z について正則かつ単葉であり

$$f'_{t_0}(0)=\lim_{t\to\beta-0}a(t)\varphi'_{t_0t}(0)=\lim_{t\to\beta-0}a(t)\frac{a(t_0)}{a(t)}=a(t_0)$$

が成り立つ．また等式 $a(t)\varphi_{t_1t}(\varphi_{t_0t}(z))=a(t)\varphi_{t_0t}(z)$ の両辺の $t\to\beta-0$ としたときの極限を取れば

$$f_{t_1}(\varphi_{t_0t}(z))=f_{t_0}(z)$$

が成り立つので, $f_{t_0}\prec f_{t_1}$ となり $\{f_t\}_{t\in I}$ は subordination chain である．□

Remark 22.4.3. 与えられた *subordination cahin* $\{f_t\}_{t\in I}$ から $\varphi_{t_0t}(z)=f_t^{-1}\circ f_{t_0}$ により定義した φ_{t_0t} と, $\{p_t(z)\}_{t\in I}$ から微分方程式の解として定義される φ_{t_0t} は同じ微分方程式と同じ初期条件を満たすので一致するが, f_{t_0} と $\lim_{t\to\beta-0}a(t)\varphi_{t_0t}(z)$ は一致するとは限らない．両者が一致するのを保証する条件としては $a(\beta)=\lim_{t\to\beta-0}a(t)=\infty$ がある．この条件があれば $\lim_{t\to\beta-0}a(t)f_t^{-1}\circ f_{t_0}(z)=f_{t_0}(z)$ が成り立つことは次の *Proposition* から明らかであろう．

Proposition 22.4.4. $\{f_t\}_{\alpha<t<\beta}$ を $\mathbb{D}$ 上の等角写像の族で, $f_t(0)=0$, $\alpha<t\beta$ を満たし $\Omega_t=f_t(\mathbb{D})\to\mathbb{C}$ $(t\to\beta-0)$ が 0 に関する核収束の意味で成り立つとする．このとき $\lim_{t\to\beta-0}a(t)f_t^{-1}(w)=w$ が任意の $w\in\mathbb{C}$ について成り立ち, 収束は $\mathbb{C}$ で局所一様である．但し $a(t)=f_t'(0)$ とする．

Proof. $R_t=\operatorname{dist}(z,\partial\Omega_t)$ と置くと $R_t\to\infty$ $(t\to\beta-0)$ が成り立つ．$a(t)^{-1}f_t\in S$ ゆえ Koebe の 1/4 円定理より $R_t/|a(t)|\geq 1/4$ が成り立つので $|a(t)|\leq 4R_t$ である．

さて $f_t^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}b_n(t)w^n$ と Taylor 展開されたとすると, $b_1(t)=1/f_t'(0)=1/a(t)$ であり $0<R<R_t$ について

$$|b_n(t)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R}\frac{f_t^{-1}(w)}{w^{n+1}}\,dw\right|\leq\frac{1}{2\pi}\frac{2\pi R}{R^{n+1}}=\frac{1}{R^n}$$

より $R\to R_t-0$ として $|b_n(t)|\leq\frac{1}{R_t^n}$ が成り立つ．任意の $w_0\in\mathbb{C}$ について t_0 を $t_0<t<\beta$ ならば $R_t>|w_0|$ が成り立つように取る．このとき $t_0<t<\beta$ について

$$a(t)f_t^{-1}(w_0)=a(t)\{b_1(t)+\sum_{n=2}^{\infty}b_n(t)w^n\}=w_0+\sum_{n=2}^{\infty}a(n)b_n(t)w^n$$

であるから

$$\begin{aligned}|a(t)f_t^{-1}(w_0)-w_0|&\leq\sum_{n=2}^{\infty}|a(n)b_n(t)||w_0|^n\\&\leq\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4R_t}{R_t^n}|w_0|^n=4R_t\frac{|w|^2/R_t^2}{1-|w|/R_t}=\frac{4|w_0|^2}{R_t-|w_0|}\end{aligned}$$

となるので, $t\to\beta-0$ とすれば $R_t\to\infty$ ゆえ $a(t)f_t^{-1}(w_0)\to w_0$ と, 収束が局所一様であることが従う． □

第 23 章

普遍被覆写像の subordination chain

この章では subordination chain $\{f_t\}_{t\in I}$ の各 f_t が $\mathbb{D}$ から $f_t(\mathbb{D})$ への普遍被覆写像となっている場合を考える．このような subordination chain を構成するには, 増加領域の族 $\{\Omega_t\}_{t\in I}$ で $\bigcap_{t\in I}\Omega_t \neq \emptyset$ かつ $\mathbb{C}\setminus\bigcap_{t\in I}\Omega_t$ が少なくとも 2 点以上含むものを構成すればよい．実際, このような族が与えられたとして $w_0 \in \bigcap_{t\in I}\Omega_t$ を任意に固定し $f_t : \mathbb{D} \to \Omega_t$ を普遍被覆写像で $f_t(0) = w_0$, $f_t'(w_0) > 0$ を満たすものと置けば, $\{f_t\}_{t\in I}$ は subordination chain である．そして $\{\Omega_t\}_{t\in I}$ の狭義増加性と $f_t'(0)$ の狭義増加性は同値であり, $\{\Omega_t\}_{t\in I}$ の核収束の意味での連続性と $\{f_t\}_{t\in I}$ の連続性が同値になる．

23.1　ω_{st} の単射性と被覆変換群

はじめに普遍被覆写像の subordination chain が連続ならば ω_{st} はつねに単射となることを示そう．これは ω_{st} の満たす微分方程式から導くことが出来るが, ここでは位相的な証明を与えておこう．

Theorem 23.1.1. $\{f_t\}_{t\in I}$ を普遍被覆写像よりなる *subordination chain* とする．このとき $\{f_t\}_{t\in I}$ が連続ならば任意の $s, t \in I$, $s < t$ について $\omega_{st} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ は単射である．

Proof. $s, t_1 \in I$, $s < t_1$ であり ω_{st_1} が単射でないと仮定して矛盾を導こう．このとき $\omega_{st_1}(a) = \omega_{st_1}(b)$ が成り立つ $a, b \in \mathbb{D}$, $a \neq b$ が存在する．$\omega_{ss} = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$ であるから $\omega_{st}(a)$, $\omega_{st}(b)$ は t について連続であるから

$$t_0 = \inf\{t > s : \omega_{st_1}(a) = \omega_{st_1}(b)\}$$

と置けば $s < t_0 \leq t_1$ であり,

$$\omega_{st}(a) \neq \omega_{st}(b) \quad \text{for} \quad s \leq t < t_0 \text{ かつ } \omega_{st_0}(a) = \omega_{st_0}(b) \tag{23.1.1}$$

が成り立つ．さて $\alpha : [0,1] \to \mathbb{D}$, $\beta : [0,1] \to \mathbb{D}$ を 0 を始点とし, それぞれ a, b を終点に持つ $\mathbb{D}$ 内の道とし, 普遍被覆写像 $f_{t_0} : \mathbb{D} \to f_{t_0}(\mathbb{D})$ による $f \circ \alpha$, $f \circ \beta$ の持ち上げで 0 を始点とするものを, それぞれ $\tilde{\alpha} : [0,1] \to \mathbb{D}$, $\tilde{\beta} : [0,1] \to \mathbb{D}$ とすれば, $\tilde{\alpha}(1) = \omega_{st_0}(a) = \omega_{st_0}(b) = \tilde{\beta}(1)$ が成り立つ．また $f_s(a) = f_{t_0}(\omega_{st_0}(a)) = f_{t_0}(\omega_{st_0}(b)) = f_s(b)$ であるから $f_s(a) = f_s(b)$ が成り立つので $f_s \circ \alpha$, $f_s \circ \beta$ は始点のみならず終点も共有する．

さて $\mathbb{D}$ は単連結であるから $\tilde{\alpha}$ と $\tilde{\beta}$ を結ぶ連続変形 $\phi : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{D}$ が存在する．$K = f_{t_0}(\phi([0,1] \times [0,1]))$ と置けば, K はコンパクトであり, $f_{t_0} \circ \phi$ は $f_s \circ \alpha$ と $f_s \circ \beta$ を結ぶ連続変形であり, その像は K である．ここで $\{f_t(\mathbb{D})\}_{t\in I}$ は各収束の意味で連続であるからある $\delta > 0$ を $|t - t_0| < \delta$ ならば $K \subset f_t(\mathbb{D})$ が成り立つように取れる．そこで $\max\{t_0 - \delta, s\} < t_2 < t_0$ を満たす t_2 を任意に取れば $K \subset f_{t_2}(\mathbb{D})$ より $f_{t_2}(\mathbb{D})$ において $f_{t_0} \circ \phi$ は $f_s \circ \alpha$ と

$f_s \circ \beta$ を結ぶ連続変形である．よってこれら 2 つの道を普遍被覆写像 $f_{t_2}: \mathbb{D} \to f_{t_2}(\mathbb{D})$ により 0 を始点とする道に持ち上げたとき, 2 つの持ち上げの終点は一致する．つまり $\omega_{st_2}(a) = \omega_{st_2}(b)$ が成り立つ．これは (23.1.1) に矛盾する． □

Theorem 23.1.2. $\{f_t\}_{t \in I}$ を普遍被覆写像よりなる連続な *subordination chain* とし, 各 $t \in I$ について $\Gamma_t \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ を普遍被覆写像 $f_t: \mathbb{D} \to f_t(\mathbb{D})$ の被覆変換群とする． このとき $s < t$ を満たす $s, t \in I$ について単射準同型 $\sigma_{st}: \Gamma_s \to \Gamma_t$ であり, 任意の $\gamma \in \Gamma_s$ について $\sigma_{st}(\gamma)(0) = \omega_{st}(\gamma(0))$ を満たすものが一意的に存在する．そして $t_0 < t_1 < t_2$ を満たす $t_0, t_1, t_2 \in I$ について $\sigma_{t_1 t_2} \circ \sigma_{t_0 t_1} = \sigma_{t_0 t_2}$ を満たす．

Proof. $\gamma \in \Gamma_s$ に対して 0 と $\gamma(0)$ を結ぶ道 $\alpha: [0,1] \to \mathbb{D}$ を任意に取る．このとき $f_s(\gamma(0)) = f_s(0) = 0$ であるから $f_s \circ \alpha$ は 0 を始点と終点に持つ領域 $f_s(\mathbb{D})(\subset f_t(\mathbb{D}))$ 内の閉道である．従って被覆写像 $f_t: \mathbb{D} \to f_t(\mathbb{D})$ により 0 を始点とする道 $\tilde{\alpha}: [0,1] \to \mathbb{D}$ に持ち上げ可能である．このとき持ち上げの定義から $f_t \circ \tilde{\alpha} = f_s \circ \alpha$ が成り立つ．よって $0 = f_s(\alpha(1)) = f_t(\tilde{\alpha}(1))$ であるから被覆変換 $\tilde{\gamma} \in \Gamma_t$ で $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\alpha}(1)$ となるものが存在する．この対応 $\gamma \mapsto \sigma_{st}(\gamma) := \tilde{\gamma}$ は α の取り方に依らず定まる．また ω_{st} の作り方から $\omega_{st}(\gamma(0)) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\gamma}(0) = \sigma_{st}(\gamma)(0)$ が成り立つ．さらに $\gamma \in \Gamma_s$ に対し $\omega_{st}(\gamma(0)) = \tilde{\gamma}(0)$ を満たす $\tilde{\gamma} \in \Gamma_t$ はただ 1 つであるから．σ_{st} も一意に定まる．

対応 $\Gamma_s \ni \gamma \mapsto \tilde{\gamma} \in \Gamma_t$ が準同型であることを示そう．$\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_s$ とし, $\alpha_1, \beta_2: [0,1] \to \mathbb{D}$ を, それぞれ 0 と $\gamma_1(0)$, 0 と $\gamma_2(0)$ を結ぶ道とする．このとき $\gamma_2 \circ \alpha_1$ は $\gamma_2(\alpha_1(0)) = \gamma_2(0)$ を始点とし $\gamma_2(\alpha_1(1)) = \gamma_2(\gamma_1(0))$ を終点とする道であるから α_2 とつないだ道 $\alpha_2 + \gamma_2 \circ \alpha_1$ を考えることが出来る．この道の f_s による射影は

$$f_s \circ (\alpha_2 + \gamma_2 \circ \alpha_1) = f_s \circ \alpha_2 + f_s \circ \gamma_2 \circ \alpha_1 = f_s \circ \alpha_2 + f_s \circ \alpha_1$$

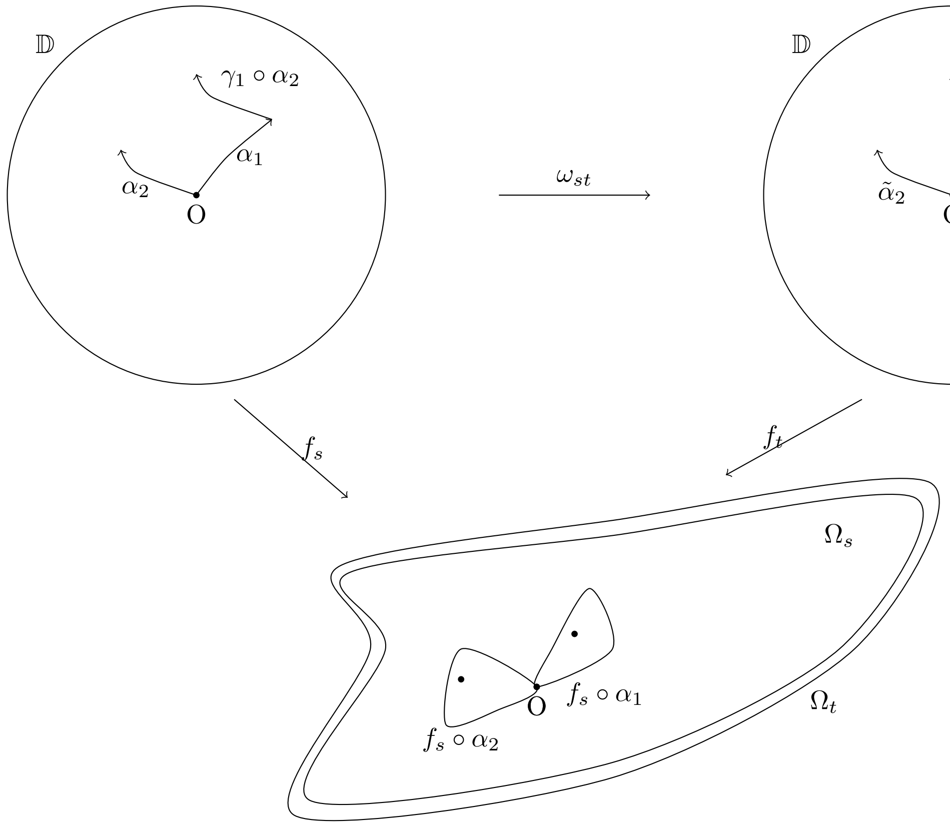
であり, 2 つの閉道をつないだ閉道である．これを f_t で持ち上げると, 持ち上げの一意性から

$$\begin{aligned} &\tilde{\alpha}_2 + \gamma_2(0) \text{ を始点とする } f_s \circ \alpha_1 \text{ の持ち上げ} \\ =&\tilde{\alpha}_2 + \gamma_2^* \circ \tilde{\alpha}_1 \qquad (\because \tilde{\gamma}_2 \circ \tilde{\alpha}_1 \text{ も } \gamma_2(0) \text{ を始点とする } f_s \circ \alpha_1 \text{ の持ち上げである}) \end{aligned}$$

を得るが, この道の終点は $\tilde{\gamma}_2(\tilde{\alpha}_1(1)) = \tilde{\gamma}_2(\tilde{\gamma}_1(0))$ である．以上より $\sigma_{st}(\gamma_2 \circ \gamma_1) = \tilde{\gamma}_2 \circ \tilde{\gamma}_1 = \sigma_{st}(\gamma_2) \circ \sigma_{st}(\gamma_1)$ が成り立つ．

$$\sigma_{t_1 t_2}(\sigma_{t_0 t_1}(\gamma))(0) = \omega_{t_1 t_2}(\sigma_{t_0 t_1}(\gamma)(0)) = \omega_{t_1 t_2}(\omega_{t_0 t_1}((\gamma)(0))) = \omega_{t_0 t_2}(\gamma)(0)) = \sigma_{t_0 t_2}(\gamma)(0)$$

と準同型の一意性より $\sigma_{t_1 t_2} \circ \sigma_{t_0 t_1} = \sigma_{t_0 t_2}$ が成り立つ．



最後に 対応 $\Gamma_s \ni \gamma \mapsto \gamma^* \in \Gamma_t$ が単射であることは, 準同型の核が自明であることを示せばよい. これは $\omega_{st}(\gamma(0)) = \tilde{\gamma}(0)$ より

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} = \mathrm{id} \in \Gamma_t \quad &\iff \quad \tilde{\gamma}(0) = 0 \\ &\iff \quad \omega_{st}(\gamma(0)) = 0 \\ &\iff \quad \gamma(0) = 0 \qquad (\because \omega_{st} \text{ は単射}) \\ &\iff \quad \gamma = \mathrm{id} \in \Gamma_s \end{aligned}$$

となることより従う. □

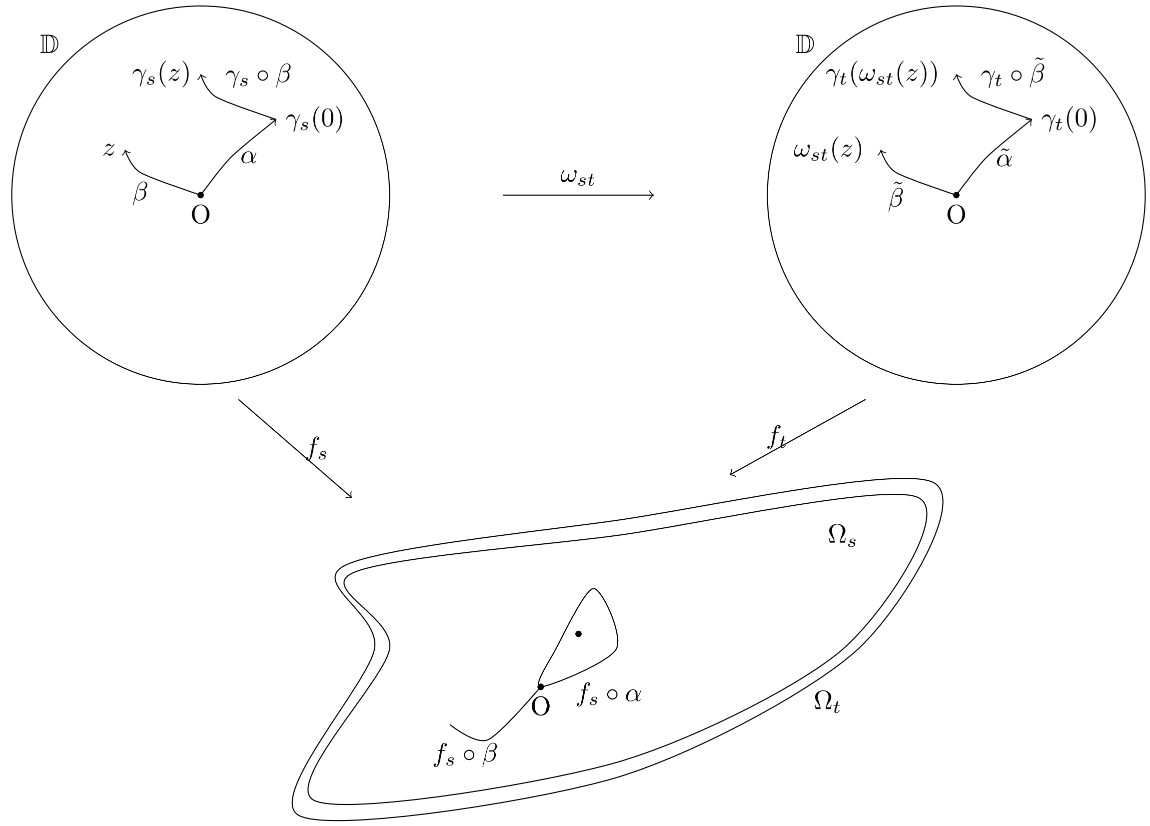
Theorem 23.1.3. $\{f_t\}_{t\in I}$ を普遍被覆写像よりなる連続な *subordination chain* とし, $s, t \in I$ は $s < t$ を満たすとする. このとき *Theorem 23.1.2* の単射準同型により $\gamma_s \in \Gamma_s$ に $\gamma_t \in \Gamma_t$ が対応するとすれば

$$\omega_{st} \circ \gamma_s = \gamma_t \circ \omega_{st} \tag{23.1.2}$$

が成り立つ. また $s \in I$ を固定したとき写像 $I \cap (s, \infty) \ni t \mapsto \gamma_t \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ は連続である.

Proof. α を 0 と $\gamma_s(0)$ を結ぶ道とし, $z \in \mathbb{D}$ について β を 0 と z を結ぶ道とする. このとき $\gamma_s \circ \beta + \alpha$ は 0 と $\gamma_s(z)$ を結ぶ道であり, この道を f_s で射影した $f_s \circ (\gamma_s \circ \beta + \alpha) = f_s \circ \beta + f_s \circ \alpha$ を普遍被覆写像 f_t による 0 を始点とする道への持ち上げた道の終点が $\omega_{st}(\gamma_s(z))$ である.

さて $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ を $f_s \circ \alpha$, $f_s \circ \beta$ を普遍被覆写像 f_t による 0 を始点とする道への持ち上げとする. このとき $f_s \circ (\gamma_s \circ \beta + \alpha)$ の普遍被覆写像 f_t による 0 を始点とする道への持ち上げが $\gamma_t \circ \tilde{\beta} + \tilde{\alpha}$ で与えられ, その終点は $\gamma_t(\omega_{st}(z))$ であることより $\omega_{st}(\gamma_s(z)) = \gamma_t(\omega_{st}(z))$ が成り立つ.



γ_t の t に関する連続性については $\gamma_t(0) = \omega_{st}(\gamma_s(0))$, $\gamma_t^{-1}(0) = \omega_{st}(\gamma_s^{-1}(0))$ と ω_{st} の t に関する連続性より従う. □

Corollary 23.1.4. $\gamma_t(\omega_{st}(\mathbb{D})) = \omega_{st}(\mathbb{D})$ が成り立つ.

Theorem 23.1.5. $t_0 \in I$ とし $\gamma_{t_0} \in \Gamma_{t_0}$ について $\gamma_t = \sigma_{t_0 t}(\gamma_t) \in \Gamma_t$, $t \in I \cap [t_0, \infty)$ と置く. このとき殆ど全ての $t \in I \cap [t_0, \infty)$ について

$$\dot{\gamma}_t(z) = z p_t(z) \gamma_t'(z) - \gamma_t(z) p_t(\gamma_t(z)) \tag{23.1.3}$$

が成り立つ.

Proof. $t_0 \leq s < t$ を満たす任意の $s, t \in I$ について $\gamma_t(\omega_{st}(z)) = \omega_{st}(\gamma_s(z))$ が成り立つので

$$\begin{aligned}
& \gamma_t(\omega_{st}(z)) - \gamma_t(z) = \omega_{st}(\gamma_s(z)) - \gamma_t(z) \\
\Longrightarrow \quad & \int_z^{\omega_{st}(z)} \gamma_t'(\zeta)\, d\zeta = \omega_{st}(\gamma_s(z)) - \gamma_t(z) \\
\Longrightarrow \quad & (\omega_{st}(z) - z) \int_0^1 \gamma_t'((1-\lambda)z + \lambda\omega_{st}(z))\, d\lambda = \omega_{st}(\gamma_s(z)) - \gamma_s(z) + \gamma_s(z) - \gamma_t(z) \\
\Longrightarrow \quad & \frac{\omega_{st}(z) - z}{t - s} \int_0^1 \gamma_t'((1-\lambda)z + \lambda\omega_{st}(z))\, d\lambda = \frac{\omega_{st}(\gamma_s(z)) - \gamma_s(z)}{t - s} - \frac{\gamma_t(z) - \gamma_s(z)}{t - s}
\end{aligned}$$

ここで

$$\dot{\omega}_s(z) = \lim_{t_1 \leq s \leq t_2, t_2 - t_1 \to +0} \frac{\omega_{t_1 t_2}(z) - z}{t_2 - t_1} = -z p_s(z), \quad z \in \mathbb{D}$$

の成り立つ s について $t \to s+0$ とすれば $\gamma_s'(\zeta) \to \gamma_s'(\zeta)$ が $\zeta \in \mathbb{D}$ について局所一様に収束することと $\omega_{st}(z) \to z$ が成り立つことより

$$
\begin{aligned}
&\dot{\omega}_s(z)\gamma_t'(z) = \dot{\omega}_s(\gamma_s(z)) - \dot{\gamma}_s(z) \\
\Longrightarrow\quad &\dot{\gamma}_s(z) = zp_s(z)\gamma_s'(z) - \gamma_s(z)p_s(\gamma_s(z))
\end{aligned}
$$

を得る. □

付録 A

測度と外測度

A.1　測度

集合 X について X の部分集合の全体よりなる族を 2^X で表す.

Definition A.1.1. 空でない集合 X の部分集合の族 $\mathcal{M} \subset 2^X$ が 可算加法代数であるとは次の 3 条件を満たす時を言う.

(i) $\emptyset \in \mathcal{M}$.
(ii) $A \in \mathcal{M}$ ならば $A^c = X \backslash A \in \mathcal{M}$.
(iii) $A_n \in \mathcal{M}$, $n = 1, 2, \ldots$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

可算加法代数 $\mathcal{M}$ について $X(= X\backslash\emptyset) \in \mathcal{M}$ が成り立つ. また等式 $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$ より

(iv) $A_n \in \mathcal{M}$, $n = 1, 2, \ldots$ ならば $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$

が成り立つ.

可算加法代数 $\mathcal{M}$ について $(A_{n+1} = \cdots = \emptyset$ とおけば$)$

(A.1.1)
$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{M} \Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{M}$$

(A.1.2)
$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{M} \Longrightarrow \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{M}$$

が成り立つことは容易に分かる.

$\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が交わらない集合族であるとは $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ が $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば $C_{\lambda_1} \cap C_{\lambda_1} = \emptyset$ を満たすときを言う.

Definition A.1.2. X を空でない集合, $\mathcal{M} \subset 2^X$ を可算加法代数とする. このとき写像 $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ が次の 2 条件を満たす時, 測度であると言う.

(a) $\mu(\emptyset) = 0$
(b) $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ が交わらない *(disjoint)* 集合の列ならば $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$

性質 (b) が成り立つとき μ は可算加法的 (countably additive) であると言う.

空でない集合 X と, その上の可算加法代数 $\mathcal{M}$ の組 $(X,\mathcal{M})$ を可測空間 (measurable space) と言う. さらに $\mathcal{M}$ 上の測度 μ を加えた組 $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間 (measure space) と言う.

Definition A.1.3. $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間とする. μ が完備 *(complete* より正確には $(X,\mathcal{M},\mu)$ が完備と言うべき*)* であるとは $E\subset F\in\mathcal{M}$ かつ $\mu(F)=0$ ならば, $E\in\mathcal{M}$ が成り立つ時を言う.

A.2　外測度

前節で定義した測度の具体例を構成する為に, まず構成の容易な外測度から始める方法がある.

Definition A.2.1. X を空でない集合とする. このとき写像 $\mu^*:2^X\to[0,\infty]$ が X 上の外測度 *(outer measure)* であるとは μ^* が以下の 3 条件を満たすときを言う.

(i) $\mu^*(\emptyset)=0$
(ii) $E,F\in 2^X$ について $E\subset F$ ならば $\mu^*(E)\le\mu^*(F)$
(iii) $\{E_n\}_{n=1}^\infty\subset 2^X$ について $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right)\le\sum_{n=1}^\infty\mu^*(E_n)$

外測度を導入するには次の定理が便利である. 証明は容易であるから省略する.

Theorem A.2.2. X を空でない集合とし族 $\mathcal{G}\subset 2^X$ と写像 $\rho:\mathcal{G}\to[0,\infty]$ は

(1) $\emptyset\in\mathcal{G}$
(2) $X=\bigcup_{n=1}^\infty X_n$
(3) $\rho(\emptyset)=0$

を満たすとする. このとき

$$\mu^*(E)=\inf\left\{\sum_{n=1}^\infty\rho(E_n):\{E_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{G},\ E\subset\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right\},\quad E\in 2^X$$

は X 上の外測度である.

Theorem A.2.3. $E\in\mathcal{G}$ について $\mu^*(E)\le\rho(E)$ が成り立つ. また μ^* が ρ の拡張であること, つまり

$$\mu^*(E)=\rho(E),\quad E\in\mathcal{G}$$

が成り立つ為の必要十分条件は ρ が 劣可算加法的 であること, すなわち $E\subset\cup_{n=1}^\infty E_n$ を満たす任意の $E\in\mathcal{G}$ と $\{E_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{G}$ について

$$\rho(E)\le\sum_{n=1}^\infty\rho(E_n)\tag{A.2.1}$$

が成り立つことである.

Proof. $E\in\mathcal{G}$ の時 $E_1=E$, $E_2=\cdots=\emptyset$ と取れば $\rho(\emptyset)=0$ より $\mu^*(E)\le\sum_{n=1}^\infty\rho(E_n)=\rho(E)$ が成り立つ.

また ρ に劣可算加法性があれば, $E\subset\cup_{n=1}^\infty E_n$ を満たす任意の $\{E_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{G}$ について $\rho(E)\le\sum_{n=1}^\infty\rho(E_n)$ が成り立つので右辺の inf を取ると $\rho(E)\le\mu^*(E)$ が成り立つ. 従って先に示した逆の不等式と合わせて $\rho(E)=\mu^*(E)$ が成り立つ.

逆に ρ が外測度に μ^* に拡張されるならば, $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ を満たす任意の $E \in \mathcal{G}$ と $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{G}$ について (ii), (iii) より

$$\rho(E) = \mu^*(E) \leq \mu^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(E_n)$$

となるので (A.2.1) が成り立つ. □

さて外測度 $\mu^* : 2^X \to [0,\infty]$ は劣可算加法性を持つが, 可算加法性を持つかどうかは分らない. しかしながら定義域 2^X を適当に制限すれば, 可算加法性を持ち, 測度になることが証明できる.

Definition A.2.4. $\mu^* : 2^X \to [0,\infty]$ を空でない集合 X 上の外測度とする. このとき $E \in 2^X$ が

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E) \quad \forall A \in 2^X$$

を満たす時 μ^*-可測であると言う. μ^*-可測集合の全体を $\mathcal{M}_{\mu^*}$ とおく.

Theorem A.2.5 (Carathéodory)**.** 空でない集合 X 上の外測度 $\mu^* : 2^X \to [0,\infty]$ について μ^*-可測集合の全体 $\mathcal{M}_{\mu^*}$ は可算加法代数であり μ^* の $\mathcal{M}_{\mu^*}$ への制限は完備な測度である.

Proof. 証明は幾つかの step に分けて行う.

1° $\emptyset, X \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ を示そう.

これは任意の $A \in 2^X$ について

$$\begin{aligned}
\mu^*(A \cap \emptyset) + \mu^*(A \backslash \emptyset) &= \mu^*(\emptyset) + \mu^*(A) = 0 + \mu^*(A) = \mu^*(A) \\
\mu^*(A \cap X) + \mu^*(A \backslash X) &= \mu^*(A) + \mu^*(\emptyset) = \mu^*(A) + 0 = \mu^*(A)
\end{aligned}$$

より従う.

2° $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ ならば $E^c \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ が成り立つことを示そう.

これは任意の $A \in 2^X$ について

$$\mu^*(A \cap E^c) + \mu^*(A \backslash E^c) = \mu^*(A \backslash E) + \mu^*(A \cap E) = \mu^*(A)$$

となることより従う.

3° $E, F \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ ならば $E \cup F \in \mathcal{M}_{\mu^*}$. 特に $E \cap F = \emptyset$ の時は $\mu^*(A \cap (E \cup F)) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap F)$ が任意の $A \in 2^X$ について成り立つことを示そう.

前半は $A \cap (E \cup F) = (A \cap E) \cup ((A \backslash E) \cap F$ と $A \backslash (E \cup F) = (A \backslash E) \backslash F$ より

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) \leq& \mu^*(A \cap (E \cup F)) + \mu^*(A \backslash (E \cup F)) \\
\leq& \mu^*(A \cap E) + \mu^*((A \backslash E) \cap F) + \mu^*((A \backslash E) \backslash F) \\
=& \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E) = \mu^*(A)
\end{aligned}$$

となることより従う. また上の不等式において等号が起こることより

$$\mu^*(A \cap (E \cup F)) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*((A \backslash E) \cap F)$$

が成り立つが, $E \cap F = \emptyset$ のときは $(A \backslash E) \cap F = A \cap F$ であるから $\mu^*(A \cap (E \cup F)) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap F)$ が成り立つ.

4°. 交わらない列 $E_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, $n = 1, 2, \ldots$ について $\mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n)$ が任意の $A \in 2^X$ について成り立つことを示そう.

(iii) より $\mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n)$ は明らかである. 逆向きの不等式は 3° を帰納的に用いて

$$\mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \mu^*\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k)$$

となるので $n \to \infty$ とすれば直ちに得られる.

5°.　交わらない列 $E_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, $n = 1, 2, \ldots$ について $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ が成り立ち, $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$ が成り立つことを示そう.

まず前半を示す為に $A \in 2^X$ について $\mu^*(A) = \mu\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) + \mu\left(A \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$ を示そう. $\mu\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \infty$ の時は両辺ともに ∞ であり, 成り立つので $\mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \infty$ の時に示せばよい. これは 4° と 3° より

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) \leq & \mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) + \mu^*\left(A \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \\
\leq & \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*\left(A \backslash \bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \\
\leq & \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*\left(A \backslash \bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) \\
= & \mu^*\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) + \mu^*\left(A \backslash \bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) \\
= & \mu^*(A) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k)
\end{aligned}$$

が成り立つ.　ここで 4° より $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) = \mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \infty$ であるから $n \to \infty$ とすれば $\sum_{k=n+1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) \to 0$ が成り立つ. 従って

$$\mu^*(A) = \mu\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) + \mu\left(A \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

が分かり, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ が従う. また後半は 4° の等式において $A = X$ とおけば直ちに従う.

以上で $\mathcal{M}_{\mu^*}$ が有限加法代数であり, μ^* の $\mathcal{M}_{\mu^*}$ への制限が測度であることが示された.

最後に $(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}})$ が完備であることを示そう. それには次を示せば十分である.

6°　$E \in 2^X$ が $\mu^*(E) = 0$ を満たせば $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$.

これは任意の $A \in 2^X$ に対して

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E) \leq \mu^*(E) + \mu^*(A) = \mu^*(A)$$

が成り立つことより分かる. □

A.3 距離外側度と Borel 代数

空でない集合 X 上の可算加法代数の族 $\{\mathcal{S}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について, その共通部分

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{S}_\lambda = \{A\in 2^X : A\in\mathcal{S}_\lambda\ \forall\lambda\in\Lambda\}$$

もまた可算加法代数であることは容易に分かる. そこで族 $\mathcal{A}\subset 2^X$ について $\mathcal{A}$ を含む可算加法代数の族の全体を考えよう. 2^X 自体が $\mathcal{A}$ を含む可算加法代数の 1 つであるから, この族は空でない. 従って $\mathcal{A}$ を含む可算加法代数の族の全体の共通部分もまた可算加法代数であり, 定義より $\mathcal{A}$ を含む最小の可算加法代数である. これを $\sigma(\mathcal{A})$ と表して $\mathcal{A}$ の生成する可算加法代数と呼ぶ.

$\mathcal{A}_1\subset\mathcal{A}_2$ ならば $\sigma(\mathcal{A}_1)\subset\sigma(\mathcal{A}_2)$ が成り立つことに注意しておこう.

Definition A.3.1. *X を位相空間とし $\mathcal{O}$ を X の開集合の全体とする. この時 $\mathcal{O}$ を含む最小の加法代数を $\mathcal{B}(X)$ で表して, X の Borel 代数と呼ぶ. また $\mathcal{B}(X)$ に属する個々の集合を Borel 集合 (Borel set) と言う.*

Definition A.3.2. *X を距離 d を持つ距離空間とし, μ^* を 2^X 上の外測度とする. このとき $E,F\in 2^X$ が $d(E,F):=\inf_{x\in E,y\in F}d(x,y)>0$ ならば $\mu^*(E\cup F)=\mu^*(E)+\mu^*(F)$ が成り立つとき, μ^* は距離外測度 (metric outer measure) であると言う.*

Theorem A.3.3 (Carathéodory)**.** *μ^* が距離空間 (X,d) 上の距離外測度ならば $\mathcal{B}(X)\subset\mathcal{M}_{\mu^*}$ が成り立つ.*

Proof. 任意の開集合 $G\in 2^X$ と集合 $A\in 2^X$ について

$$\mu^*(A)\ge\mu^*(A\cap G)+\mu^*(A\backslash G) \tag{A.3.1}$$

が成り立つことを示せば良い. 実際このとき, 逆向きの不等式が成り立つことは明らかであるから, 等号が成り立つことが直ちに分かり, $G\in\mathcal{M}_{\mu^*}$ が従う. そして $\mathcal{B}(X)$ は全ての開集合を含む最小の可算加法代数であるから $\mathcal{B}(X)\subset\mathcal{M}_{\mu^*}$ が成り立つことになる. また上の不等式は $\mu^*(A)=\infty$ の場合, 自明に成り立つので, 以下では $\mu^*(A)<\infty$ と仮定する.

さて仮に $d(G,G^c)>0$ であれば $d(A\cap G,A\backslash G)=d(A\cap G,A\cap G^c)\ge d(G,G^c)>0$ であるから, (A.3.1) は等式として成り立つ. しかしながら $d(G,G^c)>0$ が成り立つことは一般の距離空間では期待出来ない. そこで G を内側から近似して

$$G_n=\left\{x\in X : d(x,G^c)>\frac{1}{n}\right\},\quad n=1,2,\dots$$

とおく. このとき $d(G_n,G^c)\ge\frac{1}{n}$ より

$$\mu^*(A\cap G_n)+\mu^*(A\backslash G)=\mu^*((A\cap G_n)\cup(A\backslash G))\le\mu^*(A)$$

が成り立つ. 従って証明は $\lim_{n\to\infty}\mu^*(A\cap G_n)=\mu^*(A\cap G)$ を示すことに帰着された. さらに $\mu^*(A\cap G)\le\mu^*(A\cap G_n)+\mu^*(A\cap(G\backslash G_n))$ より

$$\mu^*(A\cap G)-\mu^*(A\cap(G\backslash G_n))\le\mu^*(A\cap G_n)\le\mu^*(A\cap G)$$

であるから, 結局, 定理の証明は $\lim_{n\to\infty}\mu^*(A\cap(G\backslash G_n))=0$ を示すことに還元された.

そこで

$$D_n=\left\{x\in X : \frac{1}{n+1}<d(x,G^c)\le\frac{1}{n}\right\},$$

とおけば

$$G \backslash G_n = \left\{ x \in X : 0 < d(x, G^c) \leq \frac{1}{n} \right\} = \bigcup_{k=n}^{\infty} D_k$$

と分解され,

$$d(D_j, D_k) \geq \frac{1}{j} - \frac{1}{k}, \quad k \geq j+2$$

が成り立つので

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \mu^*(A \cap D_{2\ell}) \leq \mu^* \left(A \cap \bigcup_{\ell=1}^{\infty} D_{2\ell} \right) \leq \mu^*(A)$$
$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \mu^*(A \cap D_{2\ell+1}) \leq \mu^* \left(A \cap \bigcup_{\ell=0}^{\infty} D_{2\ell+1} \right) \leq \mu^*(A)$$

であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap D_n) \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \mu^*(A \cap D_{2\ell}) + \sum_{\ell=0}^{\infty} \mu^*(A \cap D_{2\ell+1}) \leq 2\mu^*(A)$$

となり $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap D_n)$ は収束する．従って

$$\mu^*(A \cap (G \backslash G_n)) = \mu^* \left(A \cap \bigcup_{k=n}^{\infty} D_k \right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu^* \left(A \cap D_k \right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu^*(A \cap D_n) \to 0$$

が成り立つ． □

付録 B

積測度と Fubini の定理

付録 C

測度の微分

C.1　符号付き測度

付録 D

$\mathbb{R}^n$ における測度

D.1 増加関数から定まる Lebesgue-Stieltjes 測度

はじめに Besicovitch の被覆定理の 1 次元の場合に相当する, 有限個の開区間に関する結果を述べよう.

Lemma D.1.1. $\{I_k\}$ を開区間の有限列とすると, この中から部分列 $J_1 = (a_1, b_1), \ldots, J_n = (a_n, b_n)$ を

$$\bigcup I_k = J_1 \cup \cdots \cup J_n, \quad a_1 < a_2 < \cdots < a_n \text{ and } b_1 < b_2 < \cdots < b_n$$

かつ $n \geq 3$ のときは $b_i < a_{i+2}$, $i = 1, \ldots, n-2$ が成り立つように取ることができる. 特に $\{J_{2p}\}$ は互いに素な区間列であり, $\{J_{2p+1}\}$ も互いに素な区間である.

Proof. $I_1 \subset \bigcup_{k \neq 1} I_k$ ならば $\{I_k\}$ から I_1 を取り除き, そうでなければ何もしない. この操作を次々に続け最後まで残ったものを $J_1, \ldots, J_n$ と置けば

$$\bigcup_k I_k = J_1 \cup \cdots \cup J_n, \quad J_i \backslash \left(\bigcup_{k \neq i} J_k \right) \neq \emptyset, \ i = 1, \ldots, n \tag{D.1.1}$$

が成り立つ. また必要ならば番号を付け直すことにより, $I_1 = (a_1, b_1), \ldots, I_n = (a_n, b_n)$ は $a_1 \leq \cdots \leq a_n$ を満たすとしてよい. このとき実際には $a_1 < \cdots < a_n$ が成り立つ. 何故ならば $a_i = a_{i+1}$ とすると $b_i \leq b_{i+1}$ ならば $J_i = (a_i, b_i) \subset (a_{i+1}, b_{i+1}) = J_{i+1}$ となり (D.1.1) に反する. 同様に $b_i \geq b_{i+1}$ のときは $J_{i+1} \subset J_i$ となりやはり矛盾を生じる. また $b_i \geq b_{i+1}$ となる i が存在すれば $a_i < a_{i+1}$ より $J_{i+1} = (a_{i+1}, b_{i+1}) \subset (a_i, b_i) = J_i$ となりやはり矛盾を生じる. 従って $b_1 < \cdots < b_n$ が成り立つ.

最後にある i について $a_{i+2} \leq b_i$ が成り立つとすると

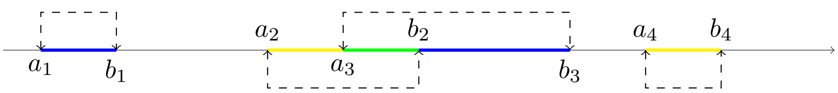
$$a_i < a_{i+1} < a_{i+2} \leq b_i < b_{i+1} < b_{i+2}$$

より

$$J_{i+1} = (a_{i+1}, b_{i+1}) \subset (a_i, b_i) \cup (a_{i+2}, b_{i+2}) = J_i \cup J_{i+2}$$

となり矛盾である. □

Lemma D.1.1 は次の図のように区間の列に間隙がある場合も許容する.

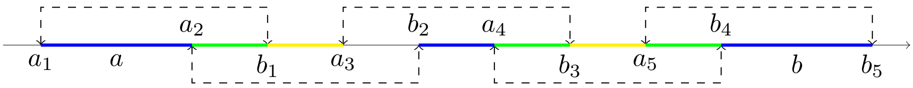


$\{I_k\}$ が有界閉区間 $[a, b]$ を被覆している場合は, このような間隙を許すことなく $\{J_k\}$ を取ることができる.

Corollary D.1.2. $\{I_k\}$ を開区間の有限列で $[a,b] \subset \bigcup I_k$ を満たすとする．このとき部分列 $J_1 = (a_1, b_1), \ldots, J_n = (a_n, b_n)$ を

$$[a,b] \subset J_1 \cup \cdots \cup J_n,$$
$$a_1 < a < a_2 < b_1 < a_3 < b_2 < \cdots < a_{n-1} < b_{n-2} < a_n < b_{n-1} < b < b_n$$

が成り立つように取ることができる．



Proof. $[a,b] \cap I_k = \emptyset$ となる区間をあらかじめ取り除いてから Lemma D.1.1 の証明と同じ操作を行い $\{J_k\}$ を得たとしよう．このとき $[a,b] \subset \bigcup_k J_K$ が成り立つ．

$a_1 < a < b_1$ が成り立つことを示そう．これは $a \le a_1$ ならば $a_1 < \cdots < a_n$ より $a \notin J_k = (a_k, b_k)$ となり $[a,b] \subset \bigcup_k J_K$ に矛盾する．また $b_1 \le a$ ならば $(a_1, b_1) \cap [a,b] = \emptyset$ となり，やはり矛盾である．上と同様な議論により $a_n < b < b_n$ が成り立つことも分かる．

さらに　$a < a_2$ が成り立つとしてよいことも分かる．何故ならば $a_2 \le a$ のときは $[a,b] \subset J_2 \cup \cdots \cup J_n$ であるから，最初から $J_1 = (a_1, b_1)$ を取り除いて考えれば良いからである．また同様な議論により $b_{n-1} < b$ が成り立つとしてよい．

次に $a_{i+1} < b_i$, $i = 1, \cdots, n-1$ が成り立つことを示そう．これは $b_i \le a_{i+1}$ ならば $b_i \notin (a, b_i) \cup (a_{i+1}, b)$ となるがこれは $b_i \in [a,b] \subset \bigcup_{k=1}^n J_K$ に矛盾する．

以上の不等式と Lemma D.1.1 で示した $b_i < a_{i+2}$, $i = 1, \ldots, n-2$ を合わせると

$$a_1 < a < a_2 < b_1 < a_3 < b_2 < \cdots < a_{n-1} < b_{n-2} < a_n < b_{n-1} < b < b_n$$

が成り立つことが従う．□

それでは Lebesgue-Stieltjes 測度の導入の仕方を説明しよう．

Definition D.1.3. 空でない開区間 $I \subset$ 上の函数 $\varphi : I \to \mathbb{R}$ が右連続で増加とする．このとき各開部分区間 J について $\rho_\varphi(J)$ を以下のように定義する．まず $\rho(\emptyset) = 0$ とし $J = (a,b) \subset I$, $-\infty \le a < b \le \infty$ について

$$\rho_\varphi(J) = \varphi(b-0) - \varphi(a), \tag{D.1.2}$$

と定義する．このとき *Theorem A.2.2* より

$$\mu_\varphi^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^\infty \rho(J_n) : E \subset \bigcup_{n=1}^\infty J_n,\ J_n \text{ は } I \text{ の部分開区間} \right\}, \quad E \in 2^I \tag{D.1.3}$$

と定義すれば μ_φ^* は I 上の外測度である．これを φ により定まる *Lebesgue-Stieltjes* 外測度と言う．ここで *Theorem A.2.5* より μ_φ^* の $\mathcal{M}_\varphi = \mathcal{M}_{\mu_\varphi^*}$ への制限を μ_φ とおけば $(I, \mathcal{M}_\varphi, \mu_\varphi)$ は完備な測度である．これを φ により定まる *Lebesgue-Stieltjes* 測度と言う．

I が開区間以外の区間の場合の Lebesgue-Stieltjes 外測度と測度の定義については以下のように行う．例えば $\alpha = \inf I \in I \cap \mathbb{R}$ のときは $x < \alpha$ について $\varphi(x) = \varphi(\alpha)$ とおく，また $\beta = \sup I \in I \cap \mathbb{R}$ のときは $x > \beta$ について $\varphi(x) = \varphi(\beta)$ とおく．このようにおけば φ は $\mathbb{R}$ 上の右連続増加函数になるのでこれについて $\mathbb{R}$ に Lebesgue-Stieltjes 外測度と測度を導入し，それらを I に制限したものを本来の φ の Lebesgue-Stieltjes 外測度と測度とする．

Theorem D.1.4. (a) ρ_φ は劣可算加法性を持ち, μ_φ^* は ρ_φ の拡張である. つまり任意の開区間 J について $\mu_\varphi^*(J) = \rho_\varphi(J) = \varphi(\sup J - 0) - \varphi(\inf J)$ が成り立つ.

(b) μ_φ^* は距離外測度であり $\mathcal{B}(I) \subset \mathcal{M}_{\mu_\varphi^*}$ を満たす.

証明の前に (a), (b) を組合せれば, 任意の開区間 J について $J \in (\mathcal{B}(I) \subset)\mathcal{M}_\varphi$ であり $\mu_\varphi(J) = \varphi(\sup J - 0) - \varphi(\inf J)$ が成り立つことが分かる.

Proof. (a) については ρ_φ が劣可算加法性を持つことさえ示せば Theorem A.2.3 より後半の主張が従う.

さて J, J_n, $n = 1, 2, \ldots$ は開区間で $J \subset \cup_{n=1}^\infty J_n$ が成り立つとする. 任意の $\varepsilon > 0$ について有界閉区間 $[a, b] \subset J$ を $\rho(J) \le \varphi(b-0) - \varphi(a) + \varepsilon$ を満たすように取る. $[a, b]$ の compact 性より $[a, b]$ は有限個の J_n で被覆される. さらに Corollary D.1.2 を用いれば適当に番号を付け替えることにより $[a, b] \subset J_1 \cup \cdots J_{n_0}$ で $J_k = (a_k, b_k)$, $k = 1, \ldots, n_0$ は

$$a_1 < a < a_2 < b_1 < a_3 < b_2 < \cdots < a_{n_0-1} < b_{n_0-2} < a_{n_0} < b_{n_0-1} < b < b_{n_0}$$

を満たすとしてよい. 従って

$$\begin{aligned}
&\rho_\varphi(J) - \varepsilon \\
\le& \varphi(b-0) - \varphi(a) \\
\le& \varphi(b_{n_0} - 0) - \varphi(a_1) \\
\le& \varphi(b_{n_0} - 0) - \varphi(a_{n_0}) + \varphi(b_{n_0-1} - 0) - \varphi(a_{n_0-1}) \\
&\quad + \cdots + \varphi(b_2 - 0) - \varphi(a_2) + \varphi(b_1 - 0) - \varphi(a_1) \\
=& \rho_\varphi(J_1) + \cdots + \rho_\varphi(J_{n_0}) \le \sum_{n=1}^\infty \rho_\varphi(J_n)
\end{aligned}$$

を得る.

次に (b) μ_φ^* が距離外測度になることを示そう. まず φ の不連続点は高々可算個であるから任意の開区間 J と $\delta > 0$ について高々可算個の開区間の列 $\{J_k\}$ を

$$J \subset \bigcup_k J_k, \quad \sum_k \rho(J_k) \le \rho(J) + \varepsilon \quad \text{and} \quad \mathrm{diam}(J_k) < \delta \quad \forall k$$

を満たすように取ることが出来ることに注意しよう. この事実より任意の $\delta > 0$ について

$$\text{(D.1.4)} \qquad \mu_\varphi^*(E) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^\infty \rho(J_n) : E \subset \bigcup_{n=1}^\infty J_n, \right. \\ \left. J_n \text{ は } I \text{ の部分開区間で } \mathrm{diam}(J_n) < \delta \right\}$$

が成り立つ.

さて $\mathrm{dist}(E, F) \ge \delta > 0$ を満たす $E, F \in 2^I$ が与えられたとして, 任意の $\varepsilon > 0$ について開区間による高々可算な被覆 $E \cup F \subset \bigcup_k I_k$ を

$$\mu_\varphi^*(E \cup F) + \varepsilon \ge \sum_k \rho(I_k) \quad \text{and} \quad \mathrm{diam}(I_k) < \frac{\delta}{2}$$

が成り立つように取る. このとき $E \cap I_k \neq \emptyset$ ならば $F \cap I_k = \emptyset$ が成り立ち, 同様に $F \cap I_k \neq \emptyset$ ならば $E \cap I_k = \emptyset$ が成り立つ. 従って $E \cap I_k \neq \emptyset$ を満たす I_k を全て集めて適当に番号を付けた列を $\{J_p^{(1)}\}$ とし $F \cap I_k \neq \emptyset$ を満たす I_k

を全て集めて適当に番号を付けた列を $\{J_q^{(2)}\}$ とすれば 2 つの列に共通な区間は存在せず, $E \subset \cup_p J_p^{(1)}$, $F \subset \cup_q J_q^{(2)}$ であるから

$$\begin{aligned}\mu_\varphi^*(E \cup F) + \varepsilon &\geq \sum_k \rho(I_k) \\ &\geq \sum_p \rho(J_p^{(1)}) + \sum_q \rho(J_q^{(2)}) \\ &\geq \mu_\varphi^*(E) + \mu_\varphi^*(F) \geq \mu_\varphi^*(E \cup F)\end{aligned}$$

となるので, $\varepsilon > 0$ の任意性より $\mu_\varphi^*(E \cup F) = \mu_\varphi^*(E) + \mu_\varphi^*(F)$ が成り立つ. □

Definition D.1.5. 外測度 $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$ が正則であるとは任意の $E \in 2^X$ について $F \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ で $E \subset F$, $\mu^*(E) = \mu^*(F)$ が成り立つものが取れるときを言う.

Theorem D.1.6. *Lebesgue-Stieltjes* 外測度 μ_φ^* は正則である. 特に $E \in 2^I$ について G_δ-集合 (可算個の開集合の共通部分とあらわせる集合のことである) F で $E \subset F$, $\mu^*(E) = \mu^*(F)$ を満たすものが取れる.

Proof. 任意の E について開区間による被覆の列 $\{I_k^{(n)}\}$, $n = 1, 2, \ldots$ を $\sum_k \rho_\varphi(I_k^{(n)}) < \mu_\varphi^*(E) + n^{-1}$ となるように取れる. このとき $V_n = \cup_k I_k^{(n)}$ とおけば V_n は開集合であるから $V_n \in \mathcal{B}(I) \subset \mathcal{M}_\varphi$ であり $E \subset \cap_j V_j \in \mathcal{B}(I) \subset \mathcal{M}_\varphi$ が成り立つので

$$\mu_\varphi^*(E) \leq \mu_\varphi^*(\cap_j V_j) = \mu_\varphi(\cap_j V_j) \leq \mu_\varphi(V_n) \leq \sum_k \rho_\varphi(I_k^{(n)}) < \mu_\varphi^*(E) + \frac{1}{n}$$

を得る. $n \to \infty$ とすれば $\mu_\varphi^*(E) = \mu_\varphi^*(\cap_j V_j)$ が成り立つことが分かる. □

Definition D.1.7. X を位相空間とし, $\mathcal{M}$ を可算加法代数, μ を $(X, \mathcal{M})$ 上の測度とする.

(i) μ が *Borel* 測度であるとは $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}$ が成り立つときを言う.

(ii) μ が *Borel* 正則測度であるとは μ が *Borel* 測度であり, かつ任意の $E \in \mathcal{M}$ について $F \in \mathcal{B}(X)$ で $E \subset F$, $\mu(E) = \mu(F)$ を満たすものが存在するときを言う.

(iii) μ が *Radon* 測度であるとは μ が *Borel* 測度であり,

  (a) 任意の *compact* 集合について $\mu(K) < \infty$.

  (b) 任意の開集合 V は内正則, つまり

$$\mu(V) = \sup\{\mu(K) : K \subset V,\ K \textit{ is compact}\ \}$$

  が成り立つ.

  (c) 任意の $E \in \mathcal{M}$ は外正則, つまり

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U,\ U \textit{ is open}\ \}$$

  が成り立つ.

後のために次を示しておこう.

Proposition D.1.8. X を位相空間とし, $\mathcal{M}$ を可算加法代数, μ を $(X, \mathcal{M})$ 上の *Radon* 測度とする. $\mu(X) < \infty$ ならば任意の $A \in \mathcal{M}$ について, さもなければ $\overline{A}$ が *compact* である $A \in \mathcal{M}$ について

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A,\ \textit{compact}\ \}$$

が成り立つ.

Proof. $\mu(A) \geq \sup\{\mu(K) : K \subset A,\ \text{compact}\ \}$ より逆を示せばよい．

$\overline{A}$ が compact ならば $\mu(\overline{A}) < \infty$ が成り立つことに注意しよう．(c) より $\overline{A}\backslash A \subset V_n$, $\mu(V_n) \leq \mu(\overline{A}\backslash A) + \frac{1}{n}$ を満たす開集合の列 $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ が取れる．各 n について $K_n = \overline{A}\backslash V_n$ は compact であり $K_n \subset A$ である．また

$$\mu(A) - \frac{1}{n} = \mu(\overline{A}) - \{\mu(\overline{A}\backslash A) + \frac{1}{n}\} \leq \mu(\overline{A}) - \mu(V_n) \leq \mu(K_n) \leq \mu(A).$$

よって $\mu(A) \leq \sup\{\mu(K) : K \subset A,\ \text{compact}\ \}$ が成り立つ．

$\mu(X) < \infty$ の場合は上の証明において $\overline{A}$ を X で置き換えるとよい． □

Theorem A.3.3 と Theorem D.1.6 の証明より，μ_φ が Borel 測度であり，さらに Borel 正則測度でもあることは容易に分かるであろう．

Theorem D.1.9. *Lebesgue-Stieltjes* 測度 μ_φ は *Radon* 測度である．

Proof. (a) については $K \subset J \subset \overline{J} \subset I$ を満たす有界開区間 J が取れることと $\overline{J} = [\alpha, \beta]$ とすれば $\mu(K) \leq \mu(J) = \varphi(\beta - 0) - \varphi(\alpha) < \infty$ が成り立つ．

(c) は　Theorem D.1.6 の証明より直ちに従う．

(b) については任意の開区間 $J = (\alpha, \beta)$ と $\varepsilon > 0$ について $[\alpha_0, \beta_0] \subset (\alpha, \beta)$ を

$$\varphi(\beta - 0) - \varphi(\alpha) \leq \varphi(\beta_0) - \varphi(\alpha_0 - 0) + \varepsilon$$

が成り立つように取れることを示せば十分であるが，これは φ の右連続性より直ちに従う． □

Remark D.1.10. *Lebesgue-Stieltjes* 測度 μ_φ について

$$\begin{aligned}
\mu_\varphi((\alpha, \beta)) =& \varphi(\beta - 0) - \varphi(\alpha + 0) = \varphi(\beta - 0) - \varphi(\alpha), \\
\mu_\varphi([\alpha, \beta]) =& \varphi(\beta + 0) - \varphi(\alpha - 0) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha - 0), \\
\mu_\varphi([\alpha, \beta)) =& \varphi(\beta - 0) - \varphi(\alpha - 0) = \varphi(\beta - 0) - \varphi(\alpha - 0), \\
\mu_\varphi((\alpha, \beta]) =& \varphi(\beta + 0) - \varphi(\alpha + 0) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)
\end{aligned}$$

が成り立つことは明らかであろう．また φ に連続性を仮定すれば，任意の $x \in I$ について $\mu_\varphi(\{x\}) = 0$ が成り立つことに注意する．

D.2　n-次元 Lebesgue 測度

付録 E

増加関数に関する微分可能性

函数 $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ は連続かつ狭義増加であると仮定する．そして μ_φ^* と μ_φ で φ により定まる $[a,b]$ 上の Lebesgue-Stieltjes 外測度と Lebesgue-Stieltjes 測度を表し, μ_1^*, μ_1 で $[a,b]$ 上の Lebesgue 外測度と Lebesugue 測度を表す．以下では $[a,b]$ 上の単調関数が μ_φ-殆どいたる所微分可能であり, φ-絶対連続ならば微分積分学の基本定理が成り立つことを証明する．

$\mathbb{R}^n$ において対応する事実は μ, ν を Radon 測度 (正則 Borel 測度でありコンパクト集合上で有限値) とし

$$\bar{D}_\mu \nu(x) = \limsup_{r\to+0} \frac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))}, \quad \underline{D}_\mu \nu(x) = \liminf_{r\to+0} \frac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))},$$

が μ-殆ど至るところ存在して一致するという定理である．μ が doubling 測度である, つまりある $C>0$ で

$$\mu(B(x,2r)) \le C\mu(B(x,r)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ and } r>0$$

を満たすときは Vitali の被覆定理を用いるのが簡明である．集合 E の Vitali 被覆とは閉球 (または閉立方体などでも可) の族 $\{B_\lambda\}_\lambda$ で E の被覆, つまり $E \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ を満たし, 各点 $x \in E$ と $\varepsilon > 0$ について, $\mathrm{diam}(B_\lambda) < \varepsilon$ かつ $x \in B_\lambda$ を満たすものが存在するものである．

μ が doubling 測度でないときは Besicovich の被覆定理を利用する必要がある．Besicovich の被覆定理においても半径が有界な閉球 (または閉立方体などでも可) の族 $\mathcal{B}$ を考えるが E の各点 x についてかつ $B(x,r) \in \mathcal{B}$ となる $B(x,r)$ の存在を要求する．つまり E は $\mathcal{B}$ に属す球の中心の全体で被覆されていることを要求する．このためどうしても微分を考える点を中心とする (または内点に含む) 球を用いる必要がある．

本書では連続で狭義増加な関数に関する微分として

(∗) $\lim_{x_1\le x\le x_2,\, x_2-x_1\to+0} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

という定義を採用するので Besicovitch の被覆定理を使うことは出来ない．しかしながら Vitali の被覆定理も駄目である．何故ならば μ_φ が doubling 測度である保証が何も無いからである．

しかしながら 1 変数関数に限れば Riesz の Rising Sun Lemma と呼ばれる結果を利用する Claude-Alain Faure [?] による微分定理の簡明な証明が知られている．本書では Faure [?] の証明を Bruckner, Bruckner and Thomson [?], Thomson [?], Leoni [17] などを適宜参考にして紹介する．この方法では通常の 1 変数関数の微分の定義である

$$\lim_{h\to0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

を採用して 4 つの Dini 微分を考え．これらが μ_φ-殆どいたる所で有限値で一致することを示し, (*) の極限が μ_φ-殆どいたる所で存在することを示す．

またこの章では函数 $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ は連続かつ狭義増加であると仮定する．

E.1　Rising Sun Lemma による Dini 微分の外測度評価

函数 $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ は狭義増加かつ連続であり, 函数 $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ は $[a,b]$ で単調または有界変動とする. このとき u の φ に関する微分を

$$D_\varphi u(x) := \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)} \tag{E.1.1}$$

と定義しよう. 詳しく言うと右辺の極限が存在するとき "u は x において φ に関し微分可能である" と言い, 極限値を記号 $D_\varphi u(x)$ で表し, u の x における φ-微分係数と呼ぶ.

さて微分係数の存在はつねに保証される訳ではない. そこで次の Dini 微分と呼ばれる 4 つの量を導入する.

Definition E.1.1 (Dini 微分)**.** 函数 $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ について

$$\underline{D}_\varphi^+ u(x) := \liminf_{h\to +0} \frac{u(x+h)-u(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)}, \qquad \bar{D}_\varphi^+ u(x) := \limsup_{h\to +0} \frac{u(x+h)-u(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)},$$
$$\underline{D}_\varphi^- u(x) := \liminf_{h\to +0} \frac{u(x-h)-u(x)}{\varphi(x-h)-\varphi(x)}, \qquad \bar{D}_\varphi^- u(x) := \limsup_{h\to +0} \frac{u(x-h)-u(x)}{\varphi(x-h)-\varphi(x)}$$

と定義する.

$D_\varphi u(x)$ と異なり Dini 微分は (値として $\pm\infty$ も許せば) つねに存在し

$$-\infty \le \underline{D}_\varphi^+ u(x) \le \bar{D}_\varphi^+ u(x) \le \infty, \qquad -\infty \le \underline{D}_\varphi^- u(x) \le \bar{D}_\varphi^- u(x) \le \infty$$

が成り立つ. またこれら 4 つの Dini 微分が全て一致し有限値であることと u が x において φ に関し微分可能であることは同値であり, このとき Dini 微分と $D_\varphi u(x)$ は一致する.

函数 u が増加ならば

$$0 \le \underline{D}_\varphi^+ u(x) \le \bar{D}_\varphi^+ u(x) \le \infty, \qquad 0 \le \underline{D}_\varphi^- u(x) \le \bar{D}_\varphi^- u(x) \le \infty \tag{E.1.2}$$

が成り立つ.

それでは上からの外測度評価を述べよう. 但し本来 u については連続性を仮定せず以下の不等式の証明を行いたいのだが, その前に予備的な結果として連続性を仮定した場合に証明を行う.

Proposition E.1.2. 函数 $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ は増加かつ連続であり $R > 0$ とする. このとき

$$E = \left\{ x \in (a,b) :\ \bar{D}_\varphi^+ u(x) = \limsup_{y\to x+0} \frac{u(y)-u(x)}{\varphi(y)-\varphi(x)} > R \right\}$$

または

$$E = \left\{ x \in (a,b) :\ \bar{D}_\varphi^- u(x) = \limsup_{y\to x-0} \frac{u(x)-u(y)}{\varphi(x)-\varphi(y)} > R \right\}$$

に対して

$$R\mu_\varphi^*(E) \le \mu_1^*(u(E))$$

が成り立つ.

Proof. $E = \left\{x \in (a,b) : \bar{D}_\varphi^+ u(x) > R\right\}$ の場合を考えよう．任意の $\varepsilon > 0$ について開集合 U を $u(E) \subset U$ かつ $\mu_1(U) \le \mu_1^*(u(E)) + \varepsilon$ を満たすように取る．そして開集合 $u^{-1}(U) \cap (a,b)$ を連結成分に分解し $u^{-1}(V) \cap (a,b) = \bigcup_n (a_n, b_n)$ を得たとする．

さて各小区間 $[a_n, b_n]$ において連続函数 $F(x) = u(x) - R\varphi(x)$ を考えよう．

$$\begin{aligned} x \in E \cap (a_n, b_n) \quad &\Longrightarrow \quad \limsup_{y \to x+0} \frac{u(y) - u(x)}{\varphi(y) - \varphi(x)} > R \\ &\Longrightarrow \quad \exists y \in (x, b_n) \text{ with } F(x) < F(y) \\ &\Longrightarrow \quad F(x) < \max_{x \le y \le b_n} F(y) \end{aligned}$$

そこで

$$V_n = \{x \in (a_n, b_n) : F(x) < \max_{x \le y \le b_n} F(y)\}$$

と置けば, $\max_{x \le y \le b_n} F(y)$ は x について連続であるから明らかに開集合であり

$$E \cap (a_n, b_n) \subset V_n$$

が成り立つ．後述する Rising Sun Lemma (Theorem E.1.3) によれば
Claim: (c, d) が V_n の成分ならば $F(c) \le F(d)$ が成り立つ．

V_n の成分への分解を $V_n = \bigcup_k (c_k^{(n)}, d_k^{(n)})$ と置くと Claim より

$$F(c_k^{(n)}) \le F(d_k^{(n)}) \quad \Longrightarrow \quad R(\varphi(d_k^{(n)}) - \varphi(c_k^{(n)})) \le u(d_k^{(n)}) - u(c_k^{(n)})$$

が成り立つので

$$\begin{aligned} R\mu_\varphi^*(E \cap (a_n, b_n)) \le& R\mu_\varphi^*(V_n) \\ =& R\mu_\varphi \left(\bigcup_k (c_k^{(n)}, d_k^{(n)}) \right) \\ =& R \sum_k \mu_\varphi \left((c_k^{(n)}, d_k^{(n)}) \right) \\ =& \sum_k R(\varphi(d_k^{(n)}) - \varphi(c_k^{(n)})) \\ \le& \sum_k u(d_k^{(n)}) - u(c_k^{(n)})) \\ \le& u(b_n) - u(a_n) \end{aligned}$$

が成り立つ．これらの不等式と $E \subset u^{-1}(V) \cap (a,b) = \bigcup_n (a_n, b_n)$ と合わせて

$$\begin{aligned}
R\mu_\varphi^*(E) &\leq R\mu_\varphi\left(E \cap \bigcup_n (a_n, b_n)\right) \\
&= R\sum_n \mu_\varphi\left(E \cap (a_n, b_n)\right) \\
&\leq \sum_n (u(b_n) - u(a_n)) \\
&= \sum_n \mu_1((u(a_n), u(b_n)) \\
&= \mu_1\left(\bigcup_n ((u(a_n), u(b_n))\right) \quad (\because (u(a_n), u(b_n)),\ n = 1, \dots \text{ は disjoint }) \\
&\leq \mu_1^*\left(u\left(\bigcup_n (a_n, b_n)\right)\right) \quad (\because u \text{ の連続性と中間値の定理より}) \\
&\leq \mu_1(V) \\
&< \mu_1^*(u(E)) + \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ．

$E = \left\{x \in (a,b) :\ \bar{D}_\varphi^- u(x) > R\right\}$ の場合は $\tilde{u}(x) = -u(-x)$, $\tilde{\varphi}(x) = -\varphi(-x)$ とおけば

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)} = \frac{\tilde{u}(-x) - \tilde{u}(-x)}{\tilde{\varphi}(-x) - \tilde{\varphi}(-x)}$$

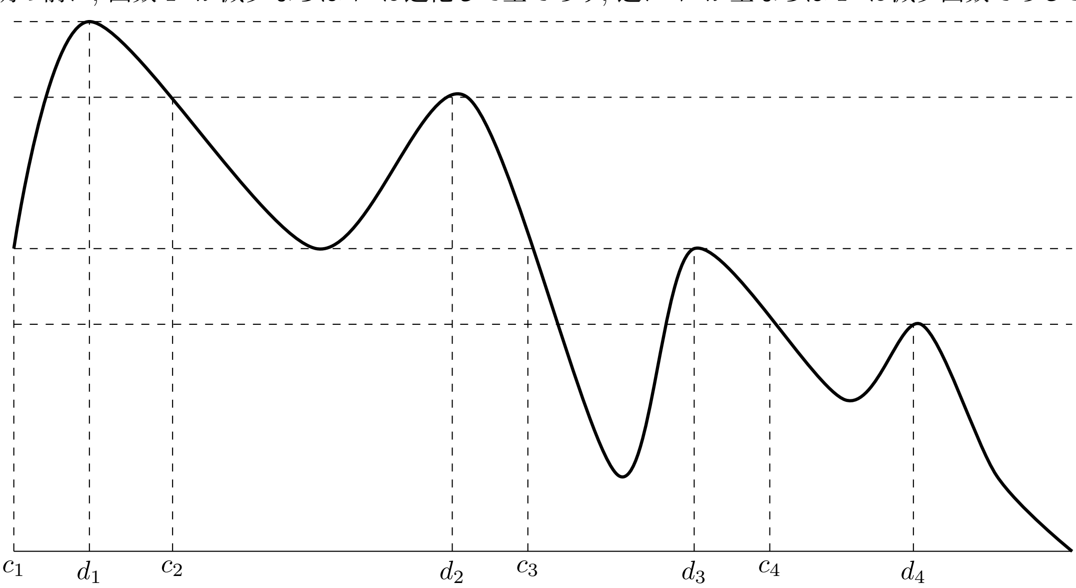
であるから $\bar{D}_\varphi^+ u(x) = \bar{D}_{\tilde{\varphi}}^- \tilde{u}(-x)$ が成り立つ．そこで $\tilde{u}$, $|\tilde{varphi}$ に上の結果を適用すればよい． □

Theorem E.1.3 (Rising Sun Lemma)**.** 連続函数 $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ について

$$V = \{x \in (a,b) : F(x) < \max_{x \leq y \leq b} F(y)\}$$

と置けば, V は開集合であり (c,d) を V の成分とすれば $F(c) \leq F(d)$ が成り立つ．

証明の前に, 函数 F が減少ならば V は退化して空であり, 逆に V が空ならば F は減少函数であることに注意しよう．



Proof. V が (a,b) の開集合であることは明らかであろう．(c,d) を V の成分とする．$F(c) \le F(d)$ を示すには $x \in (c,d)$ について $F(x) \le F(d)$ を示せば十分である．そこで $x \in (c,d)$ について

$$\gamma = \max\{y \in [x,d] : F(x) \le F(y)\}$$

と置く．このとき $F(\gamma) = F(x)$ に注意する．$\gamma = d$ ならば $F(d) \ge F(x)$ が成り立つので $\gamma < d$ と仮定して矛盾を導こう．このとき $F(d) < F(x)$ が成り立ち $c < x \le \gamma < d$ より $\gamma \in (c,d) \subset V$ である．よって $z \in (\gamma, b]$ で $F(\gamma) < F(z)$ を満たすものが存在する．従って

$$F(d) < F(x) = F(\gamma) < F(z)$$

が成り立つ．もし $z > d$ ならば上の不等式より $d \in V$ となるので矛盾である．また $\gamma < z \le d$ の場合も γ の最大性に反する．以上より $\gamma = d$ でなければならない． □

$\underline{D}_\varphi^{\pm} u$ に関する評価を行うには

しては次の結果がある．

Theorem E.1.4. 函数 $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ は増加かつ連続であり $r > 0$ とする．また集合 $E \subset (a,b)$ は

$$E \subset \left\{ x \in (a,b) :\ \underline{D}_\varphi^{+} u(x) := \liminf_{h \to +0} \frac{u(x+h) - u(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)} < r \right\}$$

または

$$E \subset \left\{ x \in (a,b) :\ \underline{D}_\varphi^{-} u(x) := \liminf_{h \to +0} \frac{u(x-h) - u(x)}{\varphi(x-h) - \varphi(x)} < r \right\}$$

を満たすとする．このとき

$$m^*(u(E)) \le r\mu_\varphi^*(E)$$

が成り立つ．

証明の前に Lemma を準備する．

Lemma E.1.5. 2 つの増加函数 $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ と集合 $E \subset (a,b)$ について

$$m^*(u(E)) + m^*(v(E)) \le m^*((u+v)(E))$$

が成り立つ．

Proof. $\varepsilon > 0$ が任意に与えられたとして開集合 V を $(u+v)(E) \subset V$ かつ $m(V) \le m^*((u+v)(E)) + \varepsilon$ を満たすように取る．また $V = \bigcup_k (c_k, d_k)$ を V の連結成分への分解とする．

さて u, v は増加であるから $x_1 < y_1$, $x_2 < y_2$ を満たす　$x_1, x_2, y_1, y_2 \in (u+v)^{-1}((c_k, d_k))$ について

$$u(y_1) - u(x_1) + v(y_2) - v(y_2) \le (u+v)(y_1 \vee y_2) - (u+v)(x_1 \wedge x_2) < d_k - c_k$$

が成り立つ．但し $\alpha \vee \beta = \max\{\alpha, \beta\}$, $\alpha \wedge \beta = \min\{\alpha, \beta\}$ である．従って

$$\begin{aligned} I_k &= [\inf u((u+v)^{-1}(c_k, d_k)), \sup u((u+v)^{-1}(c_k, d_k))], \\ J_k &= [\inf v((u+v)^{-1}(c_k, d_k)), \sup v((u+v)^{-1}(c_k, d_k))] \end{aligned}$$

と置けば $u((u+v)^{-1}(c_k, d_k)) \subset I_k$, $v((u+v)^{-1}(c_k, d_k)) \subset J_k$ と $m(I_k) + m(J_k) \le d_k - c_k$ が成り立つ．これと $E \subset (u+v)^{-1}(V) = \bigcup_k (u+v)^{-1}((c_k, d_k))$ より

$$u(E) \subset \bigcup_k u((u+v)^{-1}((c_k, d_k))) \subset \bigcup_k I_k, \quad v(E) \subset \bigcup_k v((u+v)^{-1}((c_k, d_k))) \subset \bigcup_k J_k$$

となるので

$$m^*(u(E)) + m^*(v(E)) \le \sum_k (m(I_k) + m(J_k)) \le \sum_k (d_k - c_k) = m(V) \le m^*((u+v)(E)) + \varepsilon$$

が成り立つ. □

Proof of Theorem E.1.4. $E \subset \{x \in (a,b) : \underline{D}_\varphi^+ u(x) < r\}$ の場合を示そう．はじめに u が狭義増加と仮定する．この場合 φ と u はともに逆関数が存在し, 連続であるから位相写像になる．従って任意の開区間 (c,d) について $u((c,d)) = (u(c), u(d))$ が成り立ち, $m(u((c,d)) = u(d) - u(c) = \mu_u((c,d))$ が成り立つ．また同様な等式が (c,d) を半開区間や閉区間に変更しても成り立つ．従って任意の ($[a,b]$ の相対位相に関する) 開集合 U について $m(u(U)) = \mu_u(U)$ が成り立つ．これより特に任意の $A \subset [a,b]$ について

$$\begin{aligned} m^*(u(A)) &= \inf\{m(V) : u(A) \subset V,\ \text{open in } \mathbb{R}\} \\ &= \inf\{m(u(U)) : A \subset U,\ \text{open in } [a,b]\} \\ &= \inf\{\mu_u(U) : A \subset U,\ \text{open in } [a,b]\} = \mu_u^*(A), \quad \forall A \subset [a,b] \end{aligned} \tag{E.1.3}$$

が成り立つ. φ も連続かつ狭義増加であるから

$$m^*(\varphi(A)) = \mu_\varphi^*(A), \quad \forall A \subset [a,b] \tag{E.1.4}$$

が成り立つ.

さて u, φ の狭義増加性と $r > 0$ より

$$\underline{D}_\varphi^+ u(x) = \liminf_{h \to +0} \frac{u(x+h) - u(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)} < r \iff \bar{D}_u^+ \varphi(x) = \limsup_{h \to +0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{u(x+h) - u(x)} > \frac{1}{r}$$

が成り立つ．よって $E \subset \{x \in (a,b) : \bar{D}_u^+ \varphi(x) > \frac{1}{r}\}$ となる．従って Theorem E.1.4 より

$$\frac{1}{r} m^*(u(E)) = \frac{1}{r} \mu_u^*(E) \le m^*(\varphi(E)) = \mu_\varphi^*(E)$$

が成り立つ.

最後に u が狭義増加とは限らない場合については $v = \varphi$ として $u + \varphi$ を考えれば, これは連続かつ狭義単調である．また $\underline{D}_\varphi^+(u+v)(x) = \underline{D}_\varphi^+ u(x) + 1$ である．従って Lemma E.1.5 と (E.1.4), (E.1.3) 及び $u + \varphi$ について定理が成り立つことより

$$m^*(u(A)) + m^*(\varphi(A)) \le m^*((u+\varphi)(A)) \le (r+1)\mu_\varphi^*(A) = r\mu_\varphi^*(A) + m^*(\varphi(A))$$

となる．上式の両辺から $m^*(\varphi(A))$ を引けば求める不等式を得る. □

E.2 単調函数の微分可能性と導函数の可積分性

それでは単調連続函数はつねに Lebesgue-Stieltjes 測度について殆ど至るところ微分可能であることを示そう.

Theorem E.2.1. 函数 $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ が連続かつ増加ならば φ に関して μ_φ-殆ど至るところ微分可能である.

Proof. はじめに $E_\infty^\pm = \{x \in (a,b) : \bar{D}_\varphi^\pm u(x) = \infty\}$ と置いて $\mu(E_\infty^\pm) = 0$ を示そう．これは $E_n^\pm = \{x \in (a,b) : \bar{D}_\varphi^\pm(x) > n\}$ と置く時, n について減少列であること $E_\infty^\pm = \cap_{n=1}^\infty E_n^\pm$ が成り立つことに注意して, $E_n^\pm$ に Theorem **??** を適用して

$$\mu_\varphi(E_\infty^\pm) = \lim_{n \to \infty} \mu_\varphi(E_n^\pm) \le \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} m(u(E_n^\pm)) \le \lim_{n \to \infty} \frac{u(b) - u(a)}{n} = 0$$

となることより従う．$0 \le \underline{D}_\varphi^\pm u(x) \le \bar{D}_\varphi^\pm u(x)$ と合わせると，これで 4 つの Dini 微分が μ_φ に関して殆ど至る所, 有限値であることが分かったことになる．

次に

$$E_{r,R} = \{x \in (a,b) : \underline{D}_\varphi^- u(x) = \liminf_{h \to +0} \frac{u(x-h)-u(x)}{\varphi(x-h)-\varphi(x)} < r \\ < R < \limsup_{h \to +0} \frac{u(x+h)-u(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)} = \bar{D}_\varphi^+ u(x)\Big\}, \quad 0<r<R<\infty$$

と置く．このとき Theorems **??**, E.1.4 より

$$R\mu_\varphi(E_{r,R}) \le m(u(E_{r,R})) \le r\mu_\varphi(E_{r,R})$$

が成り立つが, $0<r<R$ であるから, $\mu_\varphi(E_{r,R}) = 0$ が従う．この事実と

$$E := \big\{x \in (a,b) : \underline{D}_\varphi^- u(x) < \bar{D}_\varphi^- u(x)\big\} = \bigcup_{r,R \in \mathbb{Q} \text{ with } 0<r<R} E_{r,R}$$

を合わせれば $\mu_\varphi(E) = 0$ が従う．つまり μ_φ に関して殆ど至る所 $\bar{D}_\varphi^+ u(x) \le \underline{D}_\varphi^- u(x)$ が成り立つ．同様な議論により μ_φ に関して殆ど至る所 $\bar{D}_\varphi^- u(x) \le \underline{D}_\varphi^+ u(x)$ が成り立つ．従って Remark **??**より 4 つの Dini 微分は μ_φ に関して殆ど至る所一致し, u が φ-微分可能であることが分かる． $\square$

Theorem E.2.2. 函数 $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ が連続かつ増加ならば

$$\int_{[a,b]} D_\varphi u(x)\, d\mu_\varphi(x) \le u(b) - u(a)$$

が成り立つ．特に非負函数 $D_\varphi u$ は μ_φ に関して可積分である．

Proof. 各 $n \in \mathbb{N}$ について

$$x_k^{(n)} = a + \frac{k(b-a)}{2^n}, \quad k = 0,1,\ldots,2^n$$

とおき

$$g_n(x) = \frac{f(x_k^{(n)}) - f(x_{k-1}^{(n)})}{\varphi(x_k^{(n)}) - \varphi(x_{k-1}^{(n)})}, \quad x_{k-1}^{(n)} \le x < x_k^{(n)}, \quad k = 1,2,\ldots,2^n$$

とおく．このとき集合 $\{x_k^{(n)} : n \in \mathbb{N},\ k = 0,1,\ldots,2^n\}$ は μ_φ-測度 0 である．また u が φ に関して微分不可能な点の全体を E_0 とし $E = E_0 \cup \{x_k^{(n)} : n \in \mathbb{N},\ k = 0,1,\ldots,2^n\}$ とおけば $\mu_\varphi(E) = 0$ であり $x \in I \backslash E$ について $n \to \infty$ のとき $g_n(x) \to D_\varphi u(x)$ が成り立つ．従って Fatou の補題より

$$\int_{[a,b]} D_\varphi u(x)\, d\mu_\varphi(x) \le \liminf_{n\to\infty} \int_{[a,b]} g_n(x)\, d\mu_\varphi(x)$$

が成り立つ．この不等式を次の等式を組み合わせれば直ちに Theorem 中の不等式を得る．

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} g_n(x)\, d\mu_\varphi(x) &= \sum_{k=1}^{2^n} \int_{[x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)})} \frac{f(x_k^{(n)}) - f(x_{k-1}^{(n)})}{\varphi(x_k^{(n)}) - \varphi(x_{k-1}^{(n)})}\, d\mu_\varphi(x) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} \frac{f(x_k^{(n)}) - f(x_{k-1}^{(n)})}{\varphi(x_k^{(n)}) - \varphi(x_{k-1}^{(n)})} \mu_\varphi([x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)})) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} \{f(x_k^{(n)}) - f(x_{k-1}^{(n)})\} = f(b) - f(a)
\end{aligned}$$

$\square$

E.3 有界変動函数

Definition E.3.1. 有界閉区間 $[a,b]$ 上の函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が与えられたとする．区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta : a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ について

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})| \tag{E.3.1}$$

の形の和を考え，このような分割に付随する和の上限を

$$W_a^b(f)=\sup_{\Delta}\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})| \tag{E.3.2}$$

と置き，f の区間 $[a,b]$ における総変動量と云う．$W_a^b(f)<\infty$ のとき f は有界変動函数であると云う．

有界変動函数 f について $W_a^b(f)=W_a^x(f)+W_c^b(f)$ が成り立つことは容易に分かるであろう．次の定理より，連続な有界変動函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ について $W_a^x(f)$ は $x\in[a,b]$ について連続であることが分かる．

Theorem E.3.2. 函数 f が区間 $[a,b]$ で有界変動であり，$x=x_0(\in[a,b])$ で右または左連続ならば函数 $[a,b]\ni x\mapsto W_a^x(f)$ も $x=x_0(\in[a,b])$ で，それぞれ右または左連続である．

Proof. 右連続性を示そう． これには $x>x_0$ の時 $W_a^x(f)=W_a^{x_0}(f)+W_{x_0}^x(f)$ が成り立つことより $\lim_{x\to x_0+0}W_{x_0}^x(f)=0$ を示せば良い．

任意の $\varepsilon>0$ について $\delta>0$ を $x_0<x<x_0+\delta$ ならば $|f(x)-f(x_0)|<2^{-1}\varepsilon$ が成り立つように取る．また $[x_0,b]$ の分割 $x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ を

$$W_{x_0}^b(f)\le|f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\cdots+|f(x_n)-f(x_{n-1})|+\frac{\varepsilon}{2} \tag{E.3.3}$$

かつ $x_0<x_1<x_0+\delta$ が成り立つように取る．このとき

$$\begin{aligned}&|f(x_2)-f(x_1)|+\cdots+|f(x_n)-f(x_{n-1})|\le W_{x_1}^b(f)\\&|f(x_1)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

が成り立つので (E.3.3) と合わせて

$$W_{x_0}^b(f)<\frac{\varepsilon}{2}+W_{x_1}^b(f)+\frac{\varepsilon}{2}=W_{x_1}^b(f)+\varepsilon$$

となる．従って

$$0\le W_{x_0}^{x_1}(f)=W_{x_0}^b(f)-W_{x_1}^b(f)<\varepsilon$$

が成り立つ． □

区間 $[a,b]$ 上の増加函数は有界変動であるから，2 つの増加函数の差は有界変動函数になることは容易に分かる．重要なのはこの事実の逆が成り立つことである．

Theorem E.3.3 (Jordan 分解)**.** 函数 f が区間 $[a,b]$ で有界変動函数ならば

$$u(x)=\frac{1}{2}\{W_a^x(f)+f(x)\},\quad v(x)=\frac{1}{2}\{W_a^x(f)-f(x)\} \tag{E.3.4}$$

と置くと，ともに $[a,b]$ で増加であり，f が $x_0(\in[a,b])$ で右 *(*または左*)* 連続ならば u, v もともに x_0 で右 *(*または左*)* 連続である．また特に

(i) $f = u - v$ と 2 つの増加函数の差として表される．

(ii) u と v は f の分解を与える増加函数のの中で変動量が最小である．つまり $f = \tilde{u} - \tilde{v}$ と f が 2 つの増加函数の差として表されれば任意の $a \leq x_0 < x_1 \leq b$ について

$$u(x_1) - u(x_0) \leq \tilde{u}(x_1) - \tilde{u}(x_0), \quad v(x_1) - v(x_0) \leq \tilde{v}(x_1) - \tilde{v}(x_0)$$

が成り立つ．

(iii) $W_a^x(f) = W_a^x(u) + W_a^x(v)$ が $x \in [a,b]$ について成り立つ．

Proof. $x_0, x_1 \in [a,b]$ with $a \leq x_0 < x_1 \leq b$ について成り立つ不等式

$$|f(x_1) - f(x_0)| \leq W_{x_0}^{x_1}$$

より

$$\begin{aligned} u(x_1) - u(x_0) =& \frac{1}{2}\left\{W_a^{x_1}(f) + f(x_1)\right\} - \frac{1}{2}\left\{W_a^{x_0}(f) + f(x_0)\right\} \\ =& \frac{1}{2}\left\{f(x_1) - f(x_0) + W_{x_0}^{x_1}\right\} \geq 0, \\ v(x_1) - v(x_0) =& \frac{1}{2}\left\{W_a^{x_1}(f) - f(x_1)\right\} - \frac{1}{2}\left\{W_a^{x_0}(f) - f(x_0)\right\} \\ =& \frac{1}{2}\left\{-f(x_1) + f(x_0) + W_{x_0}^{x_1}\right\} \geq 0 \end{aligned}$$

となるので, u, v は増加である．左右の連続性については Theorem E.3.2 より従う．

(i) については明らかである．(ii) については

$$\begin{aligned} & u(x_1) - u(x_0) \leq \tilde{u}(x_1) - \tilde{u}(x_0) \\ \iff & \frac{1}{2}\left\{W_a^{x_1}(f) + f(x_1)\right\} - \frac{1}{2}\left\{W_a^{x_0}(f) + f(x_0)\right\} \leq \tilde{u}(x_1) - \tilde{u}(x_0) \\ \iff & \frac{1}{2}\left\{W_{x_0}^{x_1}(f) + f(x_1) - f(x_0)\right\} \leq \tilde{u}(x_1) - \tilde{u}(x_0) \\ \iff & W_{x_0}^{x_1}(f) + \tilde{u}(x_1) - \tilde{u}(x_0) - (\tilde{v}(x_1) - \tilde{v}(x_0)) \leq 2(\tilde{u}(x_1) - \tilde{u}(x_0)) \\ \iff & W_{x_0}^{x_1}(f) \leq \tilde{u}(x_1) - \tilde{u}(x_0) + \tilde{v}(x_1) - \tilde{v}(x_0) \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} & v(x_1) - v(x_0) \leq \tilde{v}(x_1) - \tilde{v}(x_0) \\ \iff & \frac{1}{2}\left\{W_a^{x_1}(f) - f(x_1)\right\} - \frac{1}{2}\left\{W_a^{x_0}(f) - f(x_0)\right\} \leq \tilde{v}(x_1) - \tilde{v}(x_0) \\ \iff & \frac{1}{2}\left\{W_{x_0}^{x_1}(f) - f(x_1) + f(x_0)\right\} \leq \tilde{v}(x_1) - \tilde{v}(x_0) \\ \iff & W_{x_0}^{x_1}(f) - \tilde{u}(x_1) + \tilde{u}(x_0) + \tilde{v}(x_1) - \tilde{v}(x_0) \leq 2(\tilde{v}(x_1) - \tilde{v}(x_0)) \\ \iff & W_{x_0}^{x_1}(f) \leq \tilde{u}(x_1) - \tilde{u}(x_0) + \tilde{v}(x_1) - \tilde{v}(x_0) \end{aligned}$$

であるので, どちらの場合も最後の不等式を示せば良い．これは区間 $[x_0, x_1]$ の任意の分割 $x_0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = x_1$ について

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |f(y_k) - f(y_{k-1})| =& \sum_{k=1}^{n} |\tilde{u}(y_k) - \tilde{u}(y_{k-1}) - \tilde{v}(y_k) - \tilde{v}(y_{k-1})| \\ \leq& \sum_{k=1}^{n}(\tilde{u}(y_k) - \tilde{u}(y_{k-1})) + \sum_{k=1}^{n}(\tilde{v}(y_k) - \tilde{v}(y_{k-1})) \\ =& \tilde{u}(x_1) - \tilde{u}(x_0) + \tilde{v}(x_1) - \tilde{v}(x_0) \end{aligned}$$

が成り立つことより従う．

(iii) については u と v の定義式 (E.3.4) を辺々加えると

$$u(x) + v(x) = W_a^x(f)$$

が成り立つこと, 及び u, v は増加であるから

$$W_a^x(u) = u(x) - u(a), \quad W_a^x(v) = v(x) - v(a)$$

が成り立つこと, 最後に

$$u(a) = \frac{1}{2}\{W_a^a(f) + f(a)\} = \frac{f(a)}{2}, \quad v(a) = \frac{1}{2}\{W_a^a(f) - f(a)\} = -\frac{f(a)}{2},$$

を組み合わせれば直ちに従う． □

Jordan 分解を用いると前節までの単調函数に関する結果を, 有界変動函数に関する結果に拡張することができる．

Corollary E.3.4. 函数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が連続かつ有界変動であり, $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続かつ狭義増加とする．このとき f は測度 μ_φ に関し殆ど全ての x において φ-微分可能である．さらに $D_\varphi f$ は μ_φ に関して可積分であり,

$$\int_{[a,b]} |D_\varphi f(x)| \, d\mu_\varphi(x) \leq W_a^b(f)$$

が成り立つ．

Proof. Jordan 分解を行い $f = u - v$ と f を 2 つの増加函数の差に表す．このとき f の連続性より $W_a^x(f)$ も連続であるから $u(x) = 2^{-1}\{W_a^x(f) + f(x)\}$, $v = 2^{-1}\{W_a^x(f) - f(x)\}$ も連続である．従って u, v はそれぞれ測度 μ_φ に関し殆ど全ての x において φ-微分可能である．さらに $D_\varphi u$, $D_\varphi v$ は μ_φ に関して可積分であり, $\int_{[a,b]} D_\varphi u(x) \, d\mu_\varphi(x) \leq u(b) - u(a)$, $\int_{[a,b]} D_\varphi v(x) \, d\mu_\varphi(x) \leq v(b) - v(a)$ が成り立つ．従って

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} |D_\varphi f(x)| \, d\mu_\varphi(x) &\leq \int_{[a,b]} |D_\varphi u(x) - D_\varphi v(x)| \, d\mu_\varphi(x) \\
&\leq \int_{[a,b]} \{D_\varphi u(x) + D_\varphi v(x)\} \, d\mu_\varphi(x) \\
&\leq u(b) - u(a) + v(b) - v(a) \\
&= \frac{1}{2}\{W_a^b(f) + f(b) - f(a)\} + \frac{1}{2}\{W_a^b(f) - f(b) - f(a)\} \\
&= W_a^b(f)
\end{aligned}$$

□

E.4　積分の絶対連続性と不定積分の微分

μ_φ に関する可積分関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ について, その不定積分を

$$F(x) = \int_{[a,x)} f \, d\mu_\varphi$$

とおけば φ に関して殆ど至る所 φ-微分可能であり $D_\varphi F(x) = f(x)$ が成り立つことを示すのが, この節の目標である．

Theorem E.4.1 (積分の絶対連続性)**.** 函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が μ_φ について可積分とする．このとき任意の $\varepsilon>0$ について $\delta>0$ で次の性質を持つものが存在する．

$$E\in\mathcal{M}_\varphi\ \textit{with}\ \mu_\varphi(E)\le\delta \quad\Longrightarrow\quad \left|\int_E f\,d\mu_\varphi\right|\le\varepsilon.$$

Proof. $f_n(x)=\min\{n,|f(x)|\}$, $x\in[a,b]$ とおくと各点 $x\in[a,b]$ において $0\le f_n(x)\le|f(x)|$, $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ が成り立つ．よって Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}f_n\,d\mu_\varphi=\int_{[a,b]}|f|\,d\mu_\varphi$$

が成り立つ．そこで $\varepsilon>0$ について $N\in\mathbb{N}$ を

$$0\le\int_{[a,b]}(|f|-f_N)\,d\mu_\varphi\le\frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つように取れる．ここで $\delta=\frac{\varepsilon}{2N}$ とおけば $\mu_\varphi(E)\le\delta$ ならば

$$\begin{aligned}\left|\int_E f\,d\mu_\varphi\right|&\le\int_E|f|\,d\mu_\varphi\\&\le\int_E(|f|-f_N)\,d\mu_\varphi+\int_E f_N\,d\mu_\varphi\\&\le\frac{\varepsilon}{2}+N\mu_\varphi(E)\le\frac{\varepsilon}{2}+N\delta\le\varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ． □

Lemma E.4.2. 函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が μ_φ について可積分とする．このとき

$$\int_{(a,x]}f\,d\mu_\varphi=0,\quad x\in[a,b]$$

ならば $f(x)=0$ が μ_φ に関して殆ど至る所成り立つ．

Proof. $A=\{x\in(a,b):f(x)>0\}$ とおき，$\mu_\varphi(A)=0$ を示せば十分である．そこで $\mu_\varphi(A)>0$ と仮定して矛盾を導こう．$A_k=\{x\in(a,b):f(x)>k^{-1}\}$ とおけば $A_1\subset A_2\subset\cdots$ と $\cup_kA_k=A$ より $\mu_\varphi(A_k)\to\mu_\varphi(A)$ が成り立つので，十分大きな全ての k について $\mu_\varphi(A_k)>0$ が成り立つ．このような k について compact 集合 K を $K\subset A_k$ かつ $\mu_\varphi(K)>0$ が成り立つように取れる．$G=(a,b)\backslash K$ とおけば，G は 開集合であるから $G=\cup_n(a_n,b_n]$ のように交わらない半開区間の和に表せる．(開区間の可算和に表してから，それぞれの開区間を半開区間の可算和で表せばよい.) このとき

$$\begin{aligned}\int_G f\,d\mu_\varphi&=\sum_n\int_{(a_n,b_n]}f\,d\mu_\varphi\\&=\sum_n\left(\int_{(a,b_n]}-\int_{(a,a_n]}\right)f\,d\mu_\varphi=0\end{aligned}$$

であるから

$$\int_K f\,d\mu_\varphi=\int_{(a,b]}f\,d\mu_\varphi-\int_G f\,d\mu_\varphi=\int_{(a,b]}f\,d\mu_\varphi-\int_G f\,d\mu_\varphi=0-0=0$$

となるが，これは K 上 $f(x)>k^{-1}$ ゆえ

$$\int_K f\,d\mu_\varphi\ge\frac{\mu_\varphi(K)}{k}>0$$

に矛盾する． □

Theorem E.4.3. 函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が μ_φ について可積分とする．このとき

$$F(x)=\int_{(a,x]} f\,d\mu_\varphi$$

F は μ_φ に関して殆ど至る所 φ-微分可能であり $D_\varphi F(x)=f(x)$ が成り立つ．

Proof. $f^+(x)=\max\{f(x),0\}$, $f^-(x)=-\min\{f(x),0\}$ とおけば $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$ より $F(x)=\int_{(a,x]} f\,d\mu_\varphi=\int_{(a,x]} f^+\,d\mu_\varphi-\int_{(a,x]} f^-\,d\mu_\varphi$ と増加函数の差に分解される．従って $f\geq 0$ のときに成り立つことを示せば, μ_φ に関して殆ど至る所

$$D_\varphi\left(\int_{(a,x]} f^+\,d\mu_\varphi\right)=f^+(x),\quad D_\varphi\left(\int_{(a,x]} f^-\,d\mu_\varphi\right)=f^-(x)$$

が成り立つことが従い, これより一般の場合も従う．

次に f が有界で　$0\leq f\leq M$　の場合に示そう．まずこのとき $a\leq x\leq y\leq b$ について

$$0\leq F(y)-F(x)=\int_{(a,y]} f\,d\mu_\varphi-\int_{[a,x)} f\,d\mu_\varphi=\int_{(x,y]} f\,d\mu_\varphi\leq M\mu_\varphi([x,y))=M(\varphi(y)-\varphi(x))$$

より F が連続であることに注意する．

さて $n\in\mathbb{N}$ について分点を $x_k^{(n)}=a+\frac{(b-a)k}{2^n}$, $k=0,1,\dots,2^n$ とおいて, $x\in[a,b)$ に対し $x_k^{(n)}<x\leq x_{k+1}^{(n)}$ を満たす k を取り

$$h_n(x)=\frac{F(x_{k+1}^{(n)})-F(x_k^{(n)})}{\varphi(x_{k+1}^{(n)})-\varphi(x_k^{(n)})},\quad x_k^{(n)}<x\leq x_{k+1}^{(n)}$$

とおくと $0\leq h_n\leq M$ であり, μ_φ に関して殆ど至る所 $h_n(x)\to D_\varphi F(x)$ が成り立つので

$$\int_{(a,x]} D_\varphi F\,d\mu_\varphi=\lim_{n\to\infty}\int_{(a,x]} h_n\,d\mu_\varphi$$

ここで $x\in(a,b]$ について $x_k^{(n)}<x\leq x_{k+1}^{(n)}$ を満たす k を取ると

$$\begin{aligned}\int_{[a,x)} h_n\,d\mu_\varphi&=\sum_{\ell=1}^{k}\int_{[x_{\ell-1}^{(n)},x_{\ell-1}^{(n)})}\frac{F(x_\ell^{(n)})-F(x_{\ell-1}^{(n)})}{\varphi(x_\ell^{(n)})-\varphi(x_{\ell-1}^{(n)})}\,d\mu_\varphi+\int_{[x_k^{(n)},x)}\frac{F(x_{k+1}^{(n)})-F(x_k^{(n)})}{\varphi(x_{k+1}^{(n)})-\varphi(x_k^{(n)})}\,d\mu_\varphi\\&=\sum_{\ell=1}^{k}\{F(x_\ell^{(n)})-F(x_{\ell-1}^{(n)})\}+\frac{F(x_{k+1}^{(n)})-F(x_k^{(n)})}{\varphi(x_{k+1}^{(n)})-\varphi(x_k^{(n)})}\{\varphi(x)-\varphi(x_k^{(n)})\}\\&=F(x_k^{(n)})+\frac{F(x_{k+1}^{(n)})-F(x_k^{(n)})}{\varphi(x_{k+1}^{(n)})-\varphi(x_k^{(n)})}\{\varphi(x)-\varphi(x_k^{(n)})\}\end{aligned}$$

ここで $n\to\infty$ のとき $x_k^{(n)},x_{k+1}^{(n)}\to x$ が成り立つこと, F が連続であること及び

$$0\leq\frac{\varphi(x)-\varphi(x_k^{(n)})}{\varphi(x_{k+1}^{(n)})-\varphi(x_k^{(n)})}\leq 1$$

より $\int_{(a,x]} h_n\,d\mu_\varphi\to F(x)$ が成り立つので

$$\int_{(a,x]} D_\varphi F\,d\mu_\varphi=F(x)$$

が成り立つ．

f が有界とは限らない非負函数の場合は $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$, $F_n(x) = \int_{(a,x]} f_n \, d\mu_\varphi$, $G_n(x) = \int_{(a,x]} (f - f_n) \, d\mu_\varphi$ とおく．このとき $F(x) = F_n(x) + G_n(x)$ となり, F_n, G_n ともに増加函数であるから μ_φ に関して殆ど至る所微分可能であり, 前段で示したことより $D_\varphi F_n(x) = f_n(x) \geq 0$ であり, さらに $D_\varphi G_n(x) \geq 0$ 　が成り立つ．よって μ_φ に関して殆ど至る所 $D_\varphi F(x) \geq f_n(x)$ が成り立つが, $n \to \infty$ として $D_\varphi F(x) \geq f(x)$ となるので

$$\int_{(a,b]} D_\varphi F \, d\mu_\varphi \geq \int_{(a,b]} f \, d\mu_\varphi = F(b) = F(b) - F(a)$$

が成り立つ．逆向きの不等式が Theorem E.2.2 より従うので結局

$$\int_{(a,b]} D_\varphi F \, d\mu_\varphi = F(b) - F(a) = \int_{(a,b]} f \, d\mu_\varphi$$

となり

$$\int_{(a,b]} (D_\varphi F - f) \, d\mu_\varphi = 0$$

が成り立つが, μ_φ に関して殆ど至る所 $D_\varphi F(x) \geq f(x)$ と合わせれば, 最後に μ_φ に関して殆ど至る所 $D_\varphi F(x) = f(x)$ であることが分かる． □

E.5　増加函数に関する絶対連続函数

絶対連続函数の定義を行う前に函数による可測集合の像について考えておこう．高々可算個の閉集合の和として表される集合のことを F_σ 集合と呼ぶ.

Definition E.5.1. 函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が

$$E \subset [a,b] \ \textit{with} \ \mu_\varphi^*(E) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu_1^*(f(E)) = 0$$

を満たすとき *Lusin* の条件 (N) を満たすという.

Theorem E.5.2. 函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が連続ならば任意の F_σ 集合 $E \subset [a,b]$ の像 $f(E)$ も F_σ 集合である.

Proof. E_n, $n = 1, 2, \ldots$ を $[a,b]$ 内の閉集合の列とし, $E = \cup_{n=1}^\infty E_n$ とする．このとき E_n はコンパクトであるから, $f(E_n)$ もそうであり, 特に閉集合である．よって $f(E) = \bigcup_{n=1}^\infty f(E_n)$ は F_σ 集合である． □

Theorem E.5.3. 連続函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が *Lusin* の条件 (N) を満たせば

$$A \subset [a,b] \text{ が } \varphi\text{-可測集合} \quad \Longrightarrow \quad f(A) \text{ は } \textit{Lebesgue} \text{ 可測集合} \tag{E.5.1}$$

が成り立つ.

Proof. $A \subset [a,b]$ が φ-可測ならば μ_φ の内正則性より F_σ 集合 A_0 と φ-測度 0 の集合 E で $A = A_0 \cup E$, $A_0 \cap E = \emptyset$ を満たすものが存在する．このとき $f(A_0)$ は F_σ 集合であるから Lebesgue 可測であり, Lusin の条件 (N) より $\mu_1^*(f(E)) = 0$ が成り立つので $f(E)$ も Lebesgue 可測である．よって $f(A) = f(A_0) \cup f(E)$ は Lebesugu 可測である． □

Remark E.5.4. μ_φ が 1 次元 *Lebesgue* 測度の場合 *Lebesgue* 可測函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ について *Lusin* の条件 *(N)* と *(E.5.1)* は同値になる．実際 *(N)* を仮定し A を *Lebesgue* 可測集合とすれば *Lusin* の定理よりコンパクト集合 $K_j \subset A$, $j = 1, 2, \ldots$ を K_j 上 f は連続であり, $E = A \backslash \bigcup K_j$ の *Lebesgue* 測度が 0 となるように取ることが出来る．このとき $f(\cup_j K_j) = \cup_j f(K_j)$ は F_σ 集合であり $f(E)$ は 条件 *(N)* より *Lebesgue* 可測であるから $f(A) = f(\cup_j K_j) \cup f(E)$ も

Lebesgue 可測である．また逆に *(N)* が成り立たないとすれば $m_1^*(E)=0$ かつ $m_1^*(f(E))>0$ を満たす集合 $E\subset[a,b]$ が存在する．このとき非 *Lebesgue* 可測集合 $B\subset f(E)$ を取り $E_0=f^{-1}(B)\cap E$ と置けば, $\mu_1^*(E_0)\le\mu_1^*(E)=0$ であるから E_0 は *Lebesgue* 可測であるが, その像 $f(E_0)=B$ は *Lebesgue* 可測でない．

Definition E.5.5. 函数 $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ は $[a,b]$ で増加とする．このとき函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が φ に関して絶対連続であるとは任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ を次が成り立つように取ることが出きるときを言う．高々可算個の交わらない区間列 $(a_1,b_1),\ldots$ について

$$\sum_k(\varphi(b_k)-\varphi(a_k))\le\delta \quad\Longrightarrow\quad \sum_k|f(b_k)-f(a_k)|\le\varepsilon.$$

また f が φ に関して *Lipschitz* 連続であるとは定数 $K\ge0$ で

$$|f(x_1)-f(x_0)|\le K|\varphi(x_1)-\varphi(x_0)|,\quad \forall x_0,x_1\in[a,b]$$

が成り立つものが存在するときを言う．

Theorem E.5.6. $[a,b]$ を有界閉区間とし, 函数 $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ は $[a,b]$ で増加とする．

(i) 函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が φ に関して *Lipschitz* 連続ならば φ に関して絶対連続である．
(ii) 函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が φ に関して絶対連続ならば $[a,b]$ で一様連続である．
(iii) 函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が φ に関して絶対連続ならば $[a,b]$ で有界変動である．

Proof. (i) は明らかであろう．

(ii) については f が φ に関して絶対連続として $\varepsilon>0$ に対して上の $\delta>0$ を取ったとしよう．このとき φ は $[a,b]$ で一様連続であるから $\eta>0$ を $|x_1-x_0|\le\eta$ ならば $|\varphi(x_1)-\varphi(x_0)|\le\delta$ が成り立つように取ることができる．従って $|x_1-x_0|\le\eta$ ならば $|f(x_1)-f(x_0)|\le\varepsilon$ が成り立つので f も $[a,b]$ で一様連続である．

(iii) を示そう．$\varepsilon=1$ について

$$\sum_k(\varphi(b_k)-\varphi(a_k))\le\delta \quad\Longrightarrow\quad \sum_k(f(b_k)-f(a_k))\le 1$$

が成り立つように $\delta>0$ を取る．そして φ の $[a,b]$ における一様連続性より $\eta>0$ を

$$|x_1-x_0|\le\eta \quad\Longrightarrow\quad |\varphi(x_1)-\varphi(x_0)|\le\delta$$

を満たすように取り, さらに $N\in\mathbb{N}$ を $\frac{b-a}{N}<\eta$ を満たすように取る． このとき $[a,b]$ を N 等分して分点を $a=\xi_0<\xi_1<\cdots<\xi_N=b$ とおく．

さて任意の分割 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ について $\{\xi_k\}_{k=0}^N$ と $\{x_k\}_{k=0}^n$ を合わせた分割を $a=c_0<c_1<\cdots<c_m=b$ とおき, 各 $k=1,2,\ldots,N$ について $\xi_{k-1}=c_p$, $\xi_k=c_{p+q}$ とすると

$$\sum_{s=p+1}^{p+q}|\varphi(c_s)-\varphi(c_{s-1})|=\varphi(\xi_k)-\varphi(\xi_{k-1})\le\delta \quad \left(\because \xi_k-\xi_{k-1}=\frac{b-a}{N}\le\eta\right)$$

より

$$\sum_{s=p+1}^{p+q}|f(c_s)-f(c_{s-1})|\le 1$$

であるから

$$\sum_{s=1}^{m}|f(c_s)-f(c_{s-1})|\le N$$

が成り立つ．従って f は有界変動である． □

Theorem E.5.7. 函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ について f が φ-絶対連続であることと, $W_a^x(f)$ が φ-絶対連続であることは同値であり, このとき $f=u-v$ を *Jordan* 分解とすれば u, v も φ-絶対連続である.

Proof. f が φ-絶対連続であれば高々可算個の交わらない区間列 $(a_1,b_1),\ldots$ について

$$\sum_k(\varphi(b_k)-\varphi(a_k))\le\delta \quad\Longrightarrow\quad \sum_k|f(b_k)-f(a_k)|\le\varepsilon.$$

が成り立つ. このとき (a_k,b_k) を更に細分しても単調性より $\sum_k(\varphi(b_k)-\varphi(a_k))$ は変化しない. 従って $\sum_k|f(b_k)-f(a_k)|$ を $\sum_k W_{a_k}^{b_k}(f)$ に代えて $\sum_k W_{a_k}^{b_k}(f)\le\varepsilon$ が成り立つことになり $W_a^x(f)$ が φ-絶対連続であることが分かる.

逆に $W_a^x(f)$ が φ-絶対連続であれば $|f(b_k)-f(a_k)|\le W_{a_k}^{b_k}$ より直ちに f の φ-絶対連続性が従う.

後半については $u(x)=\frac{1}{2}\{W_a^x(f)+f(x)\}$, $v(x)=\frac{1}{2}\{W_a^x(f)-f(x)\}$ より従う. □

φ-絶対連続函数については the Lusin (N) property (条件 (iii)) と呼ばれる次の特徴付がある.

Theorem E.5.8. 函数 $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ について u が $[a,b]$ 上で φ-絶対連続であることは次の 3 条件が全て成り立つことと同値である.

(i) u は $[a,b]$ で連続.

(ii) u は μ_φ-殆ど至るところ φ-微分可能であり $D_\varphi u\in L^1([a,b],\mu_\varphi)$.

(iii) $\mu_\varphi(E)=0$ を満たす $E\subset[a,b]$ について $\mu_1(u(E))=0$ が成り立つ.

Proof. u が $[a,b]$ 上で φ-絶対連続とする. このとき Theorem E.5.6 より u は $[a,b]$ で連続であり, かつ有界変動である. 従って増加函数の差として表されるので Corollary E.3.4 より μ_φ-殆ど至るところ φ-微分可能であり $D_\varphi u\in L^1([a,b],\mu_\varphi)$ が成り立つ.

(iii) を示そう. $E\subset[a,b]$ が $\mu_\varphi(E)=0$ を満たすとする. 一般性を失うことなく $a,b\notin E$ と仮定してよい. $\varepsilon>0$ を任意に取り固定する. この ε に対し φ-絶対連続性の定義における $\delta>0$ を取る. そして開集合 $V\subset(a,b)$ を $E\subset V$, $\mu_\varphi(V)<\delta$ を満たすように取る. V を連結成分に分解し $V=\bigcup_k(a_k,b_k)$ を得たとする. $\{(a_k,b_k)\}$ は交わらないので $\sum_k(\varphi(b_k)-\varphi(a_k))=\mu_\varphi(V)<\delta$ が成り立つ. ここで $a_k^*,b_k^*\in[a_k,b_k]$ を

$$u(a_k^*)=\min_{a_k\le x\le b_k}u(x),\qquad u(b_k^*)=\max_{a_k\le x\le b_k}u(x)$$

を満たすように取る. このとき中間値の定理より $\overline{u((a_k,b_k))}=[u(a_k^*),u(b_k^*)]$ が成り立つ. また $a_k^*,b_k^*\in[a_k,b_k]$ より $|\varphi(b_k^*)-\varphi(a_k^*)|\le\varphi(b_k)-\varphi(a_k)$ が成り立つので $\sum_k|\varphi(b_k^*)-\varphi(a_k^*)|\le\sum_k(\varphi(b_k)-\varphi(a_k))<\delta$ となり, $\sum_k|u(b_k^*)-u(a_k^*)|<\varepsilon$ が成り立つ.

$$\begin{aligned}\mu_1(u(E))&\le\mu_1\left(u\left(\cup_k(a_k,b_k)\right)\right)\\&\le\sum_k\mu_1(u((a_k,b_k))\\&\le\sum_k|u(b_k^*)-u(a_k^*)|<\varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ. よって $\mu_1(u(E))=0$ である.

逆に u が (i),(ii),(iii) を満たすとする. $\{(a_k,b_k)\}$ を交わらない高々可算個の開区間とし,

$$E_k=\{x\in(a_k,b_k):D_\varphi u(x)\ \text{存在}\ \}$$

と置く．但し $D_\varphi u(x)$ が存在するとは x において 4 つの Dini 微分が全て有限値で存在し，一致するという意味である．このとき (ii) より $\mu_\varphi((a_k,b_k)\backslash E_k)=0$ が成り立つ．よって (iii) より $\mu_1(u((a_k,b_k)\backslash E_k))=0$ が成り立つ．さて (i) より u は連続であるから 2 点 $u(a_k)$, $u(b_k)$ を端点に持つ区間は $u([a_k,b_k])$ に含まれ，$\mu_1(u([a_k,b_k]))=\mu_1(u(a_k,b_k))$ であるから

$$\begin{aligned}
\sum_k |u(b_k)-u(a_k)| &\le \sum_k \mu_1(u([a_k,b_k])) \\
&= \sum_k \mu_1(u(a_k,b_k)) \\
&= \sum_k \mu_1(u(E_k)) \\
&\le \sum_k \int_{E_k} |D_\varphi u(x)|\, d\mu_\varphi(x) \quad (\because \text{ Corollary E.3.4}) \\
&\le \sum_k \int_{(a_k,b_k)} |D_\varphi u(x)|\, d\mu_\varphi(x) \\
&\le \int_{\cup_k(a_k,b_k)} |D_\varphi u(x)|\, d\mu_\varphi(x)
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって Theorem E.4.1 より u は φ-絶対連続である． □

Corollary E.5.9. $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ は狭義増加連続であるとし $c=\varphi(a)$, $d=\varphi(b)$ とする．このとき

$$\begin{aligned}
&\varphi \text{ が } [a,b] \text{ 上 } \textit{Lebesgue} \text{ 測度について絶対連続} &&\iff \mu_1(\varphi(\{x\in[a,b]:\varphi'(x)=\infty\}))=0 \\
&\varphi^{-1} \text{ が } [c,d] \text{ 上 } \textit{Lebesgue} \text{ 測度について絶対連続} &&\iff \mu_\varphi(\{x\in[a,b]:\varphi'(x)=0\})=0
\end{aligned}$$

Lemma E.5.10. 函数 $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ が増加かつ絶対連続で μ_φ に関して殆ど至る所 $D_\varphi u(x)=0$ ならば $u(b)=u(a)$.

Proof. $E=\{x\in(a,b):D_\varphi u(x)=0\}$ とおくと $\mu_\varphi(E)=b-a$ であり Theorem E.1.4 より任意の $\varepsilon>0$ について $m^*(u(E))\le\varepsilon\mu_\varphi(E)=\varepsilon(b-a)$ が成り立つので $m^*(u(E))=0$ である．

次に任意の $\varepsilon>0$ について $\delta>0$ を Definition E.5.5 のものとする．$\mu_\varphi([a,b]\backslash E)=0$ より，開集合 V で $[a,b]\backslash E\subset V$, $\mu_\varphi(U)<\delta$ を満たすものが存在する．$V=\cup_k(a_k,b_k)$ と連結成分に分解すれば $\mu_\varphi(U)=\sum_k(\varphi(b_k)-\varphi(a_k))<\delta$ より

$$\begin{aligned}
m^*(u([a,b]\backslash E)) &\le m^*(u(V)) \\
&= m^*(u(\cup_k(a_k,b_k))) \\
&\le \sum_k m(u((a_k,b_k))) \\
&= \sum_k (u(b_k)-u(a_k)) \quad (\because \text{中間値の定理}) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つので $m^*(u([a,b]\backslash E))=0$ である．

以上より $m(u([a,b]))\le m^*(E)+m^*(u([a,b]\backslash E))=0$ となる．ここで中間値の定理より $[u(a),u(b)]\subset u([a,b])$ が成り立つので $u(b)=u(a)$ となる． □

Theorem E.5.11. $[a,b]$ を有界閉区間とし，函数 $\varphi:[a,b]\to$ は狭義増加で連続とする．このとき函数 $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ が φ に関して絶対連続であれば μ_φ に関して殆ど至る所微分可能で $D_\varphi F$ は μ_φ-可積分であり

$$F(x)-F(a)=\int_{(a,x]} D_\varphi F\, d\mu_\varphi, \quad a\le x\le b$$

が成り立つ．逆に μ_φ に関して可積分な函数 f により

$$F(x) = F(a) + \int_{(a,x]} f \, d\mu_\varphi, \quad a \leq x \leq b$$

と表されれば F は φ に関して絶対連続であり $D_\varphi F(x) = f(x)$ が μ_φ に関して殆ど至る所成り立つ．

Proof. 定理の後半は Theorem E.4.3 より従う．

前半を示す為に F は φ に関して絶対連続とするまた $F = u - v$ を F の Jordan 分解とすれば u, v も φ に関して絶対連続である．

$$U(x) = u(x) - u(a) - \int_{(a,x]} D_\varphi u \, d\mu_\varphi, \quad a \leq x \leq b$$

とおけば $a \leq x_0 < x_1 \leq b$ に対し Theorem E.2.2　より

$$U(x_1) - U(x_0) = u(x_1) - u(x_0) - \int_{(x_0,x_1]} D_\varphi u \, d\mu_\varphi \geq 0$$

が成り立つので増加である．また Theorem E.4.3 より μ_φ に関して殆ど至る所 $D_\varphi U(x) = 0$ が成り立つ．よって Lemma E.5.10 より $U(x) = U(a) = 0$ が任意の $x \in [a, b]$ について成り立つ．□

E.6　n-次元 Lebesgue 測度

付録 A

函数解析

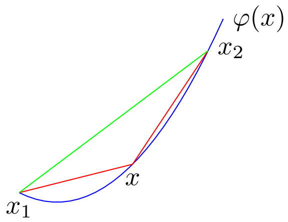
この章で取り扱う測度空間 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ は全て σ-有限とする．

A.1　L^p-空間

函数 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が凸函数であるとは

$$\varphi((1-\theta)x + \theta y)) \leq (1-\theta)\varphi(x) + \theta\varphi(y), \quad x, y \in \mathbb{R} \text{ and } \theta \in [0,1]$$

が成り立つときを言う．



$x_1 < x < x_2$ ならば $\theta = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ と置くと $\theta \in (0,1)$ であり $x = (1-\theta)x_1 + \theta x_2$ が成り立つ．よって

$$\varphi(x) \leq (1-\theta)\varphi(x_1) + \theta\varphi(x_2)$$

が成り立つ．両辺から $\varphi(x_1)$ を引くと

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) - \varphi(x_1) \leq \theta(\varphi(x_2) - \varphi(x_1)) \\
\iff &\varphi(x) - \varphi(x_1) \leq \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(\varphi(x_2) - \varphi(x_1)) \\
\iff &\frac{\varphi(x) - \varphi(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1}
\end{aligned}$$

同様に両辺から $\varphi(x_2)$ を引くと

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) - \varphi(x_2) \leq (1-\theta)(\varphi(x_1) - \varphi(x_2)) \\
\iff &\varphi(x_2) - \varphi(x) \geq (1-\theta)(\varphi(x_2) - \varphi(x_1)) \\
\iff &\varphi(x_2) - \varphi(x) \geq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}(\varphi(x_2) - \varphi(x_1)) \\
\iff &\frac{\varphi(x_2) - \varphi(x)}{x_2 - x} \geq \frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1}
\end{aligned}$$

が成り立つ. 以上をまとめて

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_1)}{x-x_1} \le \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x)}{x_2-x}, \quad x_1 < x < x_2$$

が成り立つ. これより $\varphi(x)$ は有限な左右の微分係数 $D_+\varphi(x_0) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}$, $D_-\varphi(x_0) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{\varphi(x_0-h)-\varphi(x_0)}{-h}$ を持ち

$$\text{(A.1.1)} \qquad \sup\left\{\frac{\varphi(x_0)-\varphi(x)}{x_0-x} : x < x_0\right\} = D_-\varphi(x_0) \le D_+\varphi(x_0) = \inf\left\{\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} : x_0 < x\right\}$$

が成り立つことが分かる.

Proposition A.1.1. 凸函数 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は各点 $x_0 \in \mathbb{R}$ において支持直線と呼ばれる

$$\varphi(x) \ge ax + b, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$\varphi(x_0) = ax_0 + b$$

を満たす直線 $y = ax + b$ が少なくとも 1 つ存在する.

Proof.

$$D_-\varphi(x_0) \le a \le D_+\varphi(x_0)$$

を満たす a を取ると, (A.1.1) より $x < x_0$ ならば

$$\frac{\varphi(x_0)-\varphi(x)}{x_0-x} \le a \quad \Longrightarrow \quad ax + \varphi(x_0) - ax_0 \le \varphi(x)$$

が成り立つ. また $x > x_0$ ならば (A.1.1) より

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} \ge a \quad \Longrightarrow \quad ax + \varphi(x_0) - ax_0 \le \varphi(x)$$

が成り立つ. よって $b = \varphi(x_0) - ax_0$ と置けば要求される性質を満たす. □

Theorem A.1.2 (Jensen の不等式)**.** $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間で $\mu(X) = 1$ とする. また $v \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ を実数値函数で $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を凸函数とすると

$$\varphi\left(\int_X v\, d\mu\right) \le \int_X \varphi(v)\, d\mu$$

が成り立つ.

Proof. $x_0 = \int_X v\, d\mu$ における φ の支持直線を $y = ax + b$ と置くと

$$\varphi\left(\int_X v\, d\mu\right) = \varphi(x_0) = ax_0 + b = a\left(\int_X v\, d\mu\right) + b = \int_X (av + b)\, d\mu \le \int_X \varphi(v)\, d\mu.$$

□

Theorem A.1.3 (Hölder の不等式)**.** $p, q \in [1, \infty]$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすとする. このとき $f \in L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$, $q \in L^q(X, \mathcal{M}, \mu)$ ならば

$$\left|\int_X fg\, d\mu\right| \le \|f\|_p \|g\|_q$$

が成り立つ.

Proof. $p=1$ のとき $q=\infty$ であり $|g(x)| \le \|g\|_\infty$ μ-a.e. であるから

$$\left|\int_X f(x)g(x)\,d\mu(x)\right| \le \int_X |f(x)||g(x)|\,d\mu(x) \int_X |f(x)|\,d\mu(x)\|g\|_\infty = \|f\|_1\|g\|_\infty$$

が成り立つ．$p=\infty$ のときは $q=1$ ゆえ上と同様である．

$1<p<\infty$ のとき $\|g\|_q=0$ ならば $g(x)=0$ μ-a.e. であるから不等式は自明に成り立つ．そこで $\|g\|_q \ne 0$ と仮定し $a=\frac{1}{\|g\|_q}$ とおく．

$\varphi(t)=|t|^p$ と置けば

$$\varphi'(t) = \begin{cases} -p(-t)^{p-1}, & t<0 \\ 0, & t=0 \\ p(t)^{p-1}, & t>0 \end{cases}$$

であるから φ' は単調増加であり φ は $\mathbb{R}$ 上の凸函数である．また $d\nu(x)=|ag(x)|^q d\mu(x)$ で測度 ν を定義すれば $\int_X d\nu(x)=\int_X a^q|g(x)|^q\,d\mu(x)=a^q\|g\|_q^q=1$ でありから確率測度である．函数

$$u(x) = \begin{cases} \frac{|f(x)|}{|ag(x)|^{q/p}}, & g(x)\ne 0 \\ 0, & g(x)=0 \end{cases}$$

について Jensen の不等式 (Themore A.1.2) より

$$\varphi\left(\int_X u(x)\,d\mu(x)\right) \le \int_X \varphi(u(x))\,d\nu(x)$$

が成り立つ．ここで $g(x)\ne 0$ のとき

$$u(x)|ag(x)|^q = \frac{|f(x)|}{|ag(x)|^{q/p}}|ag(x)|^q = a^{q(1-\frac{1}{p})}|f(x)||g(x)|^{q(1-\frac{1}{p})} = a|f(x)||g(x)|$$

であり $g(x)=0$ のとき $u(x)|ag(x)|^q=0=a|f(x)||g(x)|$ であるから

$$\varphi\left(\int_X u(x)\,d\mu(x)\right) = \varphi\left(a\int_X |f(x)||g(x)|\,d\mu(x)\right) = a^p\left\{\int_X |f(x)||g(x)|\,d\mu(x)\right\}^p$$

である．また $g(x)\ne 0$ のとき

$$\varphi(u(x))|ag(x)|^q = \left(\frac{|f(x)|}{|ag(x)|^{q/p}}\right)^p |ag(x)|^q = |f(x)|^p$$

であり $g(x)=0$ のとき $u(x)=0\le |f(x)|^p$ であるから

$$\int_X \varphi(u(x))\,d\nu(x) \le \int_X |f(x)|^p\,d\mu(x) = \|f\|_p^p$$

である．従って

$$a^p\left\{\int_X |f(x)||g(x)|\,d\mu(x)\right\}^p \le \|f\|_p^p$$

が成り立つ．両辺を $1/p$ 乗して $a=\frac{1}{\|g\|_q}$ 倍すれば求める不等式を得る．　□

Theorem A.1.4 (Minkowski の不等式)**.** $0<p\le\infty$, $f,g\in L^p(X,\mathcal{M},\mu)$ とする．このとき $f+g\in L^p(X,\mathcal{M},\mu)$ であり

(i) $p\in[1,\infty]$ ならば $\|f+g\|_p \le \|f\|_p+\|g\|_p$

(ii) $p \in (1,\infty)$ ならば $\|f+g\|_p^p \le \|f\|_p^p + \|g\|_p^p$

が成り立つ．特に $L^p(X,\mathcal{M},\mu)$, $p \in [1,\infty]$ はノルム空間であり，$0<p<1$ のときは $\|f-g\|_p^p$ を距離とする距離空間である．

Proof. $p=\infty$ のときは $|f(x)+g(x)| \le |f(x)|+g(x)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ μ-a.e. であるから $f+g \in L^\infty(X,\mathcal{M},\mu)$ であり $\|f+g\|_\infty \le |f\|_\infty + \|g\|_\infty$ が成り立つ．

$0<p<\infty$ のときは

$$\begin{aligned}|f(x)+g(x)|^p &\le (|f(x)|+g(x)|)^p \\ &\le \{2\max\{|f(x)|,|g(x)|\}\}^p \\ &= 2^p \max\{|f(x)|^p,|g(x)|^p\} \le 2^p(|f(x)|^p+|g(x)|^p) \in L^1(X,\mathcal{M},\mu)\end{aligned}$$

より $f+g \in L^p(X,\mathcal{M},\mu)$ である．

$1 \le p < \infty$ のとき Hölder の不等式 (Theorem A.1.3) を用いると

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p \int_X |f+g|^p\,d\mu &\le \int_X |f+g|^{p/q}|f|\,d\mu + \int_X |f+g|^{p/q}|g|\,d\mu \\ &\le \left\{\int_X |f+g|^p\,d\mu\right\}^{1/q}\|f\|_p + \left\{\int_X |f+g|^p\,d\mu\right\}^{1/q}\|g\|_p \\ &= \|f+g\|_p^{p/q}(\|f\|_p+\|g\|_p) = \|f+g\|_p^{p-1}(\|f\|_p+\|g\|_p)\end{aligned}$$

を得る．$\|f+g\|_p = 0$ の場合 (i) は明らかであり，$\|f+g\|_p \neq 0$ の場合は，上の不等式の両辺を $\|f+g\|_p^{p-1}$ で割れば $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$ を得る．

$0<p<1$ の時は $a,b \ge 0$ について

$$(a+b)^p \le a^p + b^p$$

が成り立つ ($\because \{(1+x)^p - 1 + x^p\}' \le 0,\ x \ge 0$ より従う) ので

$$\|f+g\|_p^p = \int_X |f+g|^p\,d\mu \le \int_X (|f^p + |g|^p)\,d\mu = \|f\|_p^p + \|g\|_p^p$$

となる． □

Theorem A.1.5. $p,q \in [0,\infty]$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ とする．このとき可測函数 f に対して

$$\sup\left\{\int_X |fg|\,d\mu : g \in L^q(X,\mathcal{M},\mu)\ \textit{with}\ \|g\|_q = 1\right\} = \|f\|_p \tag{A.1.2}$$

が成り立つ．

Proof. 左辺の上限が $\|f\|_p$ であることは Hölder の不等式より直ちに従う．

次に $\|f\|_p = 0$ のとき $f(x)=0$ μ-a.e. であるから (A.1.2) は自明に成り立つ．そこで $0<\|f\|_p<\infty$ と仮定しよう．このとき

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|}|f(x)|^{p-1}\|f\|_p^{-p/q}, & f(x) \neq 0 \\ 0, & f(x) = 0\end{cases}$$

と置くと

$$\int_X |g|^q\,d\mu = \frac{1}{\|f\|_p^p}\int_X |f|^{q(p-1)}\,d\mu = \frac{1}{\|f\|_p^p}\int_X |f|^p\,d\mu = 1$$

であり

$$\int_X |fg|\,d\mu = \frac{1}{\|f\|_p^{p/q}}\int_X |f|^p\,d\mu = \frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^{p/q}} = \|f\|_p$$

が成り立つ．よって $\sup_{\|g\|_q=1}\left|\int_X fg\,d\mu\right| \le \|f\|_p$ となり，前半と合わせて等号が成り立つ．

最後に $\|f\|_p = \infty$ のときを考えよう．このときは $(X, \mathcal{M}, \mu)$ の σ-有限性より $X_n \in \mathcal{M}$, $n = 1, 2, \ldots$ を $X_1 \subset X_2 \subset$, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ $\mu(X_n) < \infty$ を満たすように取れる．

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X_n \text{ and } |f(x)| \le n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と置けば $f_n \in L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ であり $|f_n(x)| \uparrow |f(x)|$, μ-a.e. であるから

$$\begin{aligned} &\sup\left\{\int_X |fg|\,d\mu : g \in L^q(X, \mathcal{M}, \mu) \text{ with } \|g\|_q = 1\right\} \\ &\ge \sup\left\{\int_X |f_n g|\,d\mu : g \in L^q(X, \mathcal{M}, \mu) \text{ with } \|g\|_q = 1\right\} \\ &= \|f_n\|_p \uparrow \|f\|_p = \infty \end{aligned}$$

が成り立つ． □

Theorem A.1.6 (L^p 空間の完備性)**.** 　(i) $1 \le p \le \infty$ のとき $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ は *Banach* 空間である．
(ii) $0 < p < 1$ のとき $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ は 完備距離空間である

Proof. どちらの場合も完備性のみ示せばよい．またどちらの場合も同様であるから $1 \le\le \infty$ の場合を示そう．

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を Cauchy 列とする．部分列 $\{f_{n_k}\}$ を

$$\|f_f - f_{n_k}\|_p \le \frac{1}{2^k} \forall n \ge n_k$$

が成り立つように取る．このとき

$$g(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$$

と置けば，単調収束定理と Minkowski の不等式より

$$\begin{aligned} \int_X |g(x)|^p\,d\mu(x) &= \liminf_{\ell\to\infty}\int_X \{|f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\ell} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|\}^p \\ &\le \liminf_{\ell\to\infty}\{\|f_{n_1}\|_p + \sum_{k=1}^{\ell} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p\}^p \le \{\|f_{n_1}\|_p + 1\}^p \end{aligned}$$

である．よって $g \in L^p(X)$ であり μ-a.e. に有限値である．従って

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

と置けば，右辺は μ-a.e. に収束し $f \in L^p(X)$ である．

$\|f_n - f\| \to 0$ を示そう．まず任意の $j \in \mathbb{N}$ について $f(x) = f_{n_j}(x) + \sum_{k=j}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$ が μ-a.e. に成り立つことより

$$\|f - f_{n_j}\|_p \le \sum_{k=j}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \le \frac{2}{2^j} \to 0, \quad j \to \infty$$

となることに注意する．よって $\varepsilon > 0$ について $N \in \mathbb{N}$ を $m, n \geq N$ ならば $\|f_m - f_n\|_p < 2^{-1}\varepsilon$ となるように取り，$\|f - f_{n_j}\|_p < 2^{-1}\varepsilon$ と $n_j \geq N$ を満たす n_j を取れば $m \geq N$ について $\|f - f_m\|_p \leq \|f - f_{n_j}\|_p + \|f_{n_j} - m\| < \varepsilon$ となることより $\|f_m - f\| \to 0$ が従う． □

$p = 2$ の場合は $L^2(X)$ は

$$(f, g) = \int_X f\overline{g}\, d\mu$$

を内積とする Hilbert 空間になる．

A.2　L^p 空間の双対

Theorem A.2.1. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を σ-有限測度空間とし，$p \in [1, \infty)$, $q \in (1, \infty]$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすとする．このとき有界線形汎函数 $T : L^p(X) \to \mathbb{C}$ についてある $f \in L^q(X)$ で

$$Tu = \int_X fu\, d\mu \quad u \in L^p(X) \tag{A.2.1}$$

を満たすものが一意に存在する．逆に $f \in L^q(X)$ について上式で $T : L^p(X) \to \mathbb{C}$ を定義すれば T は有界線形汎函数であり作用素ノルムに関して $\|T\| = \|f\|_q$ が成り立つ．

この定理より $L^p(X)$ 上の有界線形汎函数の全体がなす空間 $L^p(X)'$ は $L^q(X)$ と同一視することが出来る．

Proof. □

A.3　$C_c(\Omega)$, $C_0(\Omega)$ の双対空間

A.4　Lebesgue の密度点定理

参考文献

[1] L. V. Ahlfors, Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable. 3rd ed. New York, NY: McGraw-Hill, 1979.

[2] L. V. Ahlfors, *Conformal Invariants*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[3] H. Boedihardjo and X. Geng, Simple Piecewise Geodesic Interpolation of Simple and Jordan Curves with Applications, arXiv:1309.1576v2 [math.CA] 17 Jul 2014.

[4] G. Bouligand, Sur le problème de Dirichlet, Ann. Soc. Polon. Math., **4**, 59 – 112, 1926.

[5] M. Fekete, Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, Math. Z. **17** (1923), 228 – 249.

[6] J. B. Garnett, Bounded analytic functions, Graduate Texts in Mathematics, **236**. Springer, New York, 2007.

[7] P. L. Duren, Theory of Hp spaces. Pure and Applied Mathematics, Vol. 38 Academic Press, New York-London 1970.

[8] J. Erickson, Computational Topology, http://compgeom.cs.uiuc.edu/ jeffe/teaching/comptop/

[9] M. Heins, Complex Function Theory, Pure and applied mathematics Vol.28, Academic Press, New York, 1968.

[10] J. G. Hocking and G. S. Young, Dover Publications, New York, NY, 1988.

[11] S. Kirsch, Transfinite diameter, Chebyshev constant and capacity, in Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory, Vol. 2, Elsevier, Amsterdam, 2005.

[12] P. Koosis, Introduction to Hp spaces, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[13] C. Kosniowski, A first course in algebraic topology, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 1980.

[14] クゼ・コスニオフスキ, トポロジー入門, 東京大学出版会, 1983.

[15] R. Maehara, The Jordan curve Ttheorem via the Brouwer fixed point theorem, The Amer. Math. Monthly 91 (1984), no. 10, 641 – 643.

[16] P. Lax, Functional Analysis, Jhon Wiley & Sons, Inc. 2002.

[17] Giovanni Leoni, A first course in Sobolev spaces. Graduate Studies in Mathematics, 105. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

[18] Moise, Edwin E., Geometric Topology in Dimension 2 and 3, Graduate Texts in Mathmematics, Vol. 47. Springer-Verlag, New York-Heiderberg, 1977.

[19] M. H. A. Newman, Elements of the Topology of Plane Sets of Points, Cambridge Univ. Press, 1939.

[20] M. H. A. ニューマン, 位相数学序論一主として平面点集合の, 白水社, 1960.

[21] Ch. Pommerenke, Univalent functions, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

[22] Ch. Pommerenke, Boundary behaviour of conformal maps, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[23] W. Rudin, Real and complex analysis. Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987. variables, Stud. Math. Analysis and Related Topics, Standford Univ. Press (1962), 341 – 358.

[24] W. Rudin, Functional Analysis, McGraw-Hill Inc., New York, 1973.

[25] , D. E. Sanderson, Advanced plane topology from an elementary standpoint, Math. Mag. **53** (1980), no. 2, 81 – 89.

[26] I. Schur, über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koefﬁzienten, Math. Z. 1 (1918), 377 – 402.

[27] M. Tsuji, Potential theory in modern function theory, Chelsea Publishing Co., New York, 1975.

[28] S. Willard, General Topology, Dover Publications, Mineola, N.Y. 2004.

[29] 大津賀 信, 函数論特論, 現代数学講座 9, 共立出版, 1957.

[30] 柳原 宏, Jordan の曲線定理と単連結領域, http://web.cc.yamaguchi-u.ac.jp/ hiroshi/texts/jordan.pdf