Riemann-Stieltjes 積分

柳原 宏

概 要

多分 Poland の方だと思うが S. Łojasiewicz という数学者の著作の英訳 [1] An introduction to the theory of real functions, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1988. は, 微積分をひと通り学習した後, 解析学の様々な専門的な分野に進む前に読む, もしくは進みながら並行して読む本, としてお勧めできる好著である. ここではこの本の流れに沿って Riemann-Stieltjes 積分に関する結果をまとめた.

目 次

1 単調函数

区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の函数 $f : I \to \mathbb{R}$ が増加 (increasing) (または decreasing) であるとは

$$x_1, x_2 \in I \text{ with } x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{または } f(x_1) \geq f(x_2))$$

が成り立つときを云う．また $f(x_1) < f(x_2)$ または $(f(x_1) > f(x_2))$ が成り立つ時は狭義増加 (または 狭義減少 (stricltly decreasing)) であると云う．函数 f が increasing または decreasing の時は単調 であると云う．

以下では $x_0 \in I$ について左右の極限を

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x), \qquad f(x_0 - 0) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x)$$

と表すことにする．単調函数にはつねに左右の極限が存在することに注意しよう．例えば $f : I \to \mathbb{R}$ が増加ならば

$$f(x_0 + 0) = \inf_{x_0 < x} f(x), \quad f(x_0 - 0) = \sup_{x < x_0} f(x)$$

が成り立ち, 減少のときは

$$f(x_0 + 0) = \sup_{x_0 < x} f(x), \quad f(x_0 - 0) = \inf_{x < x_0} f(x)$$

が成り立つ.

話を簡単にするために以下では主に増加函数について議論を行うことにするが, 減少函数についても同様な議論を行うことができて, 対応する結果が成り立つことに注意する．$f : I \to \mathbb{R}$ が増加ならば $x_1, x_2 \in I$ with $x_1 < x_2$ について

$$f(x_1 - 0) \leq f(x_1) \leq f(x_1 + 0) \leq f(x_2 - 0) \leq f(x_2) \leq f(x_2 + 0)$$

Theorem 1.1 *函数　f が開区間 (a, b) で増加ならば, f の不連続点は高々可算個であり,*

$$\sum_{a < x < b} (f(x + 0) - f(x - 0)) \leq f(b - 0) - f(a + 0)$$

が成り立つ.

Proof.　前半を示すには高々可算な集合の可算和は高々可算であることに注意すれば, I が有界閉区間で $I = [a, b]$ と表せる場合に示せば十分である．また f は増加と仮定する.

$w(x) = f(x + 0) - f(x - 0)$ と置くと, x が f の連続点のとき $w(x) = 0$ になる．このとき

$$J = \{x \in I : w(x) > 0\}, \quad J_n = \left\{x \in I : w(x) > \frac{1}{n}\right\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

と置くと, $J=\cup_{n=1}^{\infty}J_n$ である. ここで　$\{x_1,\ldots,x_k\}\subset J_n$ ならば

$$f(a)\le f(x_1-0)<f(x_1+0)\le\cdots\le f(x_k-0)<f(x_k+0)\le f(b)$$

であるから

$$\begin{aligned}\frac{k}{n}&\le w(x_1)+\cdots+w(x_k)\\&=f(x_1+0)-f(x_1-0)+\cdots+f(x_k+0)-f(x_k-0)\le f(b)-f(a)\end{aligned}$$

従って　$k\le n(f(b)-f(a))$ となり, ${}^{\#}J_n\le n(f(b)-f(a))<\infty$ であり, 有限集合である. よって $J=\cup_{n=1}^{\infty}J_n$ は高々可算集合である.

後半については $x_1,\ldots,x_k$ が (a,b) 内の不連続点とすると

$$\begin{aligned}&f(x_1+0)-f(x_1-0)+\cdots+f(x_k+0)-f(x_k-0)\\&\le f(\max\{x_1,\ldots,x_k\}-0)-f(\min\{x_1,\ldots,x_k\}+0)\le f(b-0)-f(a+0)\end{aligned}$$

が成り立つことより分かる. $\square$

Definition 1.2 $\{x_n\}_{n=1}^{N}$, $N\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ を閉区間 $[a,b]$ 内の有限または無限点列とし, $\{s_n\}_{n=1}^{N}$, $\{t_n\}_{n=1}^{N}$ を $s_n+t_n>0$ を満たす非負数列とする. 各 n について

$$u_n(x)=\begin{cases}0, & \textit{if } x<x_n\\ s_n, & \textit{if } x=x_n\\ s_n+t_n, & \textit{if } x>x_n\end{cases}$$

と置くとき $\sum_{n=1}^{N}(s_n+t_n)<\infty$ ならば $0\le u_n(x)\le s_n+t_n$, $a\le t\le b$ より

$$u(x)=\sum_{n=1}^{N}u_n(x)$$

は $[a,b]$ 上で一様収束する. このような形で表される函数 u を *saltus function* という.

Theorem 1.3 *saltus function* u は $[a,b]$ 上で増加であり, u の不連続点全体は　$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に一致し, $u(x_n)-u(x_n-0)=s_n$, $u(x_n+0)-u(x_n)=t_n$ を満たす. 特に u は $[a,b]\backslash\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ で連続である.

Proof.　はじめに $x_0\notin\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ のときに u が x_0 で連続であることを示そう. これは任意の $\varepsilon>0$ について $\sum_{n=k+1}^{N}(s_n+t_n)<3^{-1}\varepsilon$ を満たす k を取る. さらに $u_1,\ldots.u_k$ は x_0 で連続であるから $\delta>0$ を $|x-x_0|<\delta$ ならば $n=1,\ldots,k$ について $|u_n(x)-u_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3k}$ が成り立つよ

うに取る．このとき $|x-x_0|<\delta$ ならば

$$\begin{aligned}|u(x)-u(x_0)| &= \left|\sum_{n=1}^{k}(u_n(x)-u(x_0))\right| + \left|\sum_{n=k+1}^{N}(u_n(x)-u(x_0))\right| \\ &\le \sum_{n=1}^{k}|u_n(x)-u(x_0)| + \left|\sum_{n=k+1}^{N}(u_n(x)-u(x_0))\right| \\ &\le \sum_{n=1}^{k}|u_n(x)-u(x_0)| + \sum_{n=k+1}^{N}|u_n(x)| + \sum_{n=k+1}^{N}|u(x_0)| \\ &< k\frac{\varepsilon}{3k} + 2\sum_{n=k+1}^{N}(s_n+t_n) < \frac{\varepsilon}{3} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

従って u は x_0 で連続である．

上で示したことにより $u-u_{n_0}=\sum_{n=1,n\neq n_0}^{N}u_n$ は x_{n_0} で連続であるから,

$$\begin{aligned}u(x_{n_0})-u(x_{n_0}-0) &= (u-u_{n_0})(x_{n_0})-(u-u_{n_0})(x_{n_0}-0)+u_{n_0}(x_{n_0})-u_{n_0})(x_{n_0}-0) \\ &= 0+s_n-0=s_n, \\ u(x_{n_0}+0)-u(x_{n_0}) &= (u-u_{n_0})(x_{n_0}+0)-(u-u_{n_0})(x_{n_0})+u_{n_0}(x_{n_0}+0)-u_{n_0})(x_{n_0}) \\ &= 0+s_n+t_n-s_n=t_n\end{aligned}$$

が成り立つ． □

Definition 1.4 有界閉区間 $[a,b]$ 上の増加函数 f について, $\{x_n\}_{n=1}^{N}$, $N\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ を f の不連続点の全体とし,

$$s_n=f(x_n)-f(x_n-0),\quad t_n=f(x_n+0)-f(x_n)$$

と置く．このとき $\sum_{n=1}^{N}(s_n+t_n)=\sum_{n=1}^{N}(f(x_n+0)-f(x_n-0))\le f(b)-f(a)$ より *saltus function* $u(x)=\sum_{n=1}^{N}u_n(x)$ は一様収束する．これを f に付随する *saltus function* と云う．

Theorem 1.5 有界閉区間 $[a,b]$ 上の増加函数 f について付随する *saltus fuction* を u と置き $g=f-u$ と置けば g は $[a,b]$ 上で増加かつ連続である．特に $f(x)$ は $f(x)=u(x)+g(x)$ と, *saltus function* と連続増加函数の和に分解される．

Proof. $g=f-u$ が連続であることは, Theorem 1.3 より各 x_n において f と u が同じ不連続性を持つこと, 及び $x\notin\{x_n\}_{n=1}^{N}$ に於いて連続であることより従う．

ここで

$$\begin{aligned}u(x) &= \sum_{a\le y<x}\{f(y+0)-f(y-0)\}+f(x)-f(x-0) \\ &= \sum_{n \text{ with } x_n<x}\{f(x_n+0)-f(x_n-0)\}+f(x)-f(x-0)\end{aligned} \tag{1.1}$$

と書き直せることに注意すれば

$$g(x) = f(x-0) - \sum_{a \le y < x} \{f(y+0) - f(y-0)\}$$

となる．よって $a \le x_1 < x_2 \le b$ ならば

$$\begin{aligned} g(x_2) - g(x_1) &= f(x_2 - 0) - f(x_1 - 0) - \sum_{x_1 \le y < x_2} \{f(y+0) - f(y-0)\} \\ &= f(x_2 - 0) - f(x_1 + 0) - \sum_{x_1 < y < x_2} \{f(y+0) - f(y-0)\} \end{aligned}$$

が成り立つ．上式の最右辺が非負であることは Theorem 1.1 より従う． $\square$

Theorem 1.6 集合 $E \subset \mathbb{R}$ 上の函数 f が増加ならば $a = \inf E$, $b = \sup E$ について (a, b) 上の増加函数 $\tilde{f}$ で E 上 $f = \tilde{f}$ が成り立つものが存在する．

Proof.

$$\tilde{f}(x) = \sup_{(a,x] \cap E} f$$

と置けば良い． $\square$

2 単調函数列の収束定理

集合 $E \subset \mathbb{R}$ 上の増加函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限が増加であることは $x_1, x_2 \in E$ で $x_1 \le x_2$ ならば $f_n(x_1) \le f_n(x_2)$ が全ての n について成り立つので $\lim_{n\to\infty} f_n(x_1) \le \lim_{n\to\infty} f_n(x_2)$ となることより分かる．

Theorem 2.1 (Helly's First Theorem) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を区間 I 上の増加函数列とし，各 $x \in I$ に於いて $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は有界であるとする．このとき I の各点で収束する部分列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在する．

Proof. $I = (a, b)$ の場合に証明する．Z を (a, b) の可算かつ稠密な部分集合 $I = [a, b)$ のように端点 a が I に属す場合は $a \in Z$ となるように Z を取る．他の場合も同様である) とすれば，各 $x \in (a, b)$ について $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は有界であるから，対角線論法により部分列 $\{f_{n_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ を Z で収束するように取ることができる．このとき $\lim_{\nu\to\infty} f_{n_\nu}(x)$, $x \in Z$ は Z 上の増加函数ゆえ Theorem 1.6 より (a, b) 上の増加函数に拡張できる．このとき

$$g(x) = \lim_{\nu\to\infty} f_{n_\nu}(x), \quad x \in Z$$

が成り立つことに注意する．さて $x \in (a,b)$ について Z の点よりなる数列 $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ を $s_k < x < t_k$, $s_k, t_k \to x$ が成り立つように取る．このとき

$$f_{n_\nu}(s_k) \leq f_{n_\nu}(x) \leq f_{n_\nu}(t_k)$$

に於いて, $\nu \to \infty$ として

$$g(s_k) \leq \liminf_{\nu\to\infty} f_{n_\nu}(x) \leq \limsup_{\nu\to\infty} f_{n_\nu}(x) \leq g(t_k)$$

が成り立つ．ここで $k \to \infty$ とすれば

$$g(x-0) \leq \liminf_{\nu\to\infty} f_{n_\nu}(x) \leq \limsup_{\nu\to\infty} f_{n_\nu}(x) \leq g(x+0)$$

が成り立つ．これより x が g の連続点ならば $g(x) = \lim_{\nu\to\infty} f_{n_\nu}(x)$ が成り立つことが分かる．g の不連続点の全体を E とすれば E は I の可算部分集合であるから, 再び対角線論法により $\{f_{n_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ の部分列 $\{f_{n_{\nu_k}}\}_{k=1}^{\infty}$ で E でも収束するものが取れる．$\{f_{n_{\nu_k}}\}_{k=1}^{\infty}$ は $\{f_{n_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ の部分列であるから $I \backslash E$ でも収束するので, 結局 I で収束することが分かる． □

Theorem 2.2 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を有界閉区間 $I = [a,b]$ 上の増加函数の列とし, Z は a, b を含む $[a,b]$ の稠密な部分集合とする．このとき $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $[a,b]$ 上の連続な増加函数 f に Z 上の各点で収束すれば, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $[a,b]$ 上 f に一様収束する．

Proof. f は有界閉区間 $[a,b]$ 上で連続であるから一様連続である．従って任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を $|x' - x| < \delta$ ならば $|f(x') - f(x)| < 2^{-1}\varepsilon$ となるように取ることができる．これと Z の稠密性より $[a,b]$ の分割 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b$ を $x_1, \ldots x_{n-1} \in Z$ かつ $x_k - x_{k-1} < \delta$, $k = 1, \ldots, n$ を満たすように取ることができる．また $\lim_{n\to\infty} f_n(x_j) = f(x_j)$ より $N \in \mathbb{N}$ を $n \geq N$ ならば $j = 0, 1, \ldots, k$ $|f_n(x_j) - f(x_j)| < 2^{-1}\varepsilon$ が成り立つように取れる．このとき任意の $x \in [a,b]$ について $x_{j-1} \leq x \leq x_j$ となる j を取れば $n \geq N$ について

$$f_n(x) \leq f_n(x_j) \leq f(x_j) + \frac{\varepsilon}{2} < \left(f(x) + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2} = f(x) + \varepsilon$$
$$f_n(x) \geq f_n(x_{j-1}) \leq f(x_{j-1}) - \frac{\varepsilon}{2} > \left(f(x) - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} = f(x) - \varepsilon$$

より $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が成り立つ． □

3 有界変動函数

Definition 3.1 有界閉区間 $[a,b]$ 上の函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が与えられたとする．区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ について

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \tag{3.1}$$

の形の和を考え, このような分割に付随する和の上限を

$$W_a^b(f) = \sup_{\Delta} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \tag{3.2}$$

と置き, f の区間 $[a,b]$ における総変動量と云う. $W_a^b(f) < \infty$ のとき f は有界変動函数であると云う.

Theorem 3.2 $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ が連続で非減少ならば

$$W_a^b(f) = W_\alpha^\beta(f \circ \varphi).$$

Proof. 区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ に対して $t_j \in \varphi(x_j)$ を満たす $t_j,\ j = 1, 2, \ldots, n-1$ を取り, $t_0 = \alpha,\ t_n = \beta$ と置く. このとき区間 $[\alpha, \beta]$ の分割 $\tilde{\Delta} : \alpha = t_0 =< t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \varphi^{-1}(x_n) = \beta$ について

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |f \circ \varphi((t_k) - f \circ \varphi((t_{k-1})| \leq W_\alpha^\beta(f \circ \varphi)$$

が成り立つ. 従って $W_a^b(f) \leq W_\alpha^\beta(f \circ \varphi)$. 逆に 区間 $[\alpha, \beta]$ の任意の分割 $\tilde{\Delta} : \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ に対して区間 $[a,b]$ の分割 $\tilde{\Delta} : a = x_0 = \varphi(t_0) < x_1 = \varphi(t_1) < \cdots < x_{n-1} = \varphi(t_{n-1}) < x_n = \varphi^{-1}(t_n) = b$ を取れば

$$\sum_{k=1}^{n} |f \circ \varphi((t_k) - f \circ \varphi((t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq W_a^b(f)$$

より $W_\alpha^\beta(f \circ \varphi) \leq W_a^b(f)$ が成り立つ. □

さて函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が単調ならば $W_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$ であるから, 有界変動である. これより特に函数が有界変動であっても連続とは限らないことが分かる.

Theorem 3.3 函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が $[a,b]$ の各点で微分可能で $|f'(x)| \leq M$ または *Lipschitz* 連続で $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ を満たせば

$$W_a^b(f) \leq M(b-a)$$

が成り立ち, C^1-級, つまり微分可能で導函数が連続ならば

$$W_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)|\, dx$$

が成り立つ.

Proof. 前半については Lipschitz 連続で $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ を満たせば区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ に対して

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^{n} M|x_k - x_{k-1}| = M(b-a)$$

が成り立つ. 微分可能で $|f'(x)| \leq M$ の場合は平均値の定理より $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ として

$$\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}} = f'(\xi_k), \quad k=1,2,\ldots,n$$

を満たすものが取れるので

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k)-f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n |f'(\xi_k)|(x_k-x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n M(x_k-x_{k-1}) = M(b-a).$$

後半を示すために f は C^1-級と仮定する. 区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta : a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ に対して

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k)-f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)\,dx \right| = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f'(x)|\,dx = \int_a^b |f'(x)|\,dx$$

より $W_a^b(f) \leq \int_a^b |f'(x)|\,dx$ が成り立つ.

逆に $|f'(x)|$ の区間 $[a,b]$ に於ける Riemann 積分可能性より任意の $\varepsilon>0$ についてある $\delta>0$ を 次が成り立つように取ることができる. 区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta : a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ と各 k について $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ を満たす $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ が $\mathrm{mesh}(\Delta)<\delta$ ならば

$$\left| \sum_{k=1}^n |f'(\xi_k)|(x_k-x_{k-1}) - \int_a^b |f'(x)|\,dx \right| < \varepsilon.$$

ここで平均値の定理より $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ として

$$\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}} = f'(\xi_k), \quad k=1,2,\ldots,n$$

を満たすものが取れるので, このとき $|f'(\xi_k)|(x_k-x_{k-1}) = |f(x_k)-f(x_{k-1})|$ が成り立ち

$$\left| \sum_{k=1}^n |f(x_k)-f(x_{k-1})| - \int_a^b |f'(x)|\,dx \right| < \varepsilon$$

が成り立つ. よって

$$\int_a^b |f'(x)|\,dx - \varepsilon < \sum_{k=1}^n |f(x_k)-f(x_{k-1})| \leq W_a^b(f)$$

となり $\int_a^b |f'(x)|\,dx \leq W_a^b(f)$ が成り立つ. □

函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が連続, さらに微分可能であっても総変動が ∞ となることがある.

Example 3.4 p,q を正の定数で $1<p\leq q$ を満たすとする. このとき $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} x^p \cos\left(\frac{\pi}{x^q}\right), & 0<x\leq 1 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

と置けば, $[0,1]$ の各点で微分可能であるが $W_0^1(f)=\infty$ である.

Proof. $x=0$ に於ける微分可能性は $p>1$ より従う. $(0,1]$ に於いては微分可能で,

$$f'(x) = px^{p-1}\cos\left(\frac{\pi}{x^q}\right) + \frac{\pi}{x^{q-p+1}}\sin\left(\frac{\pi}{x^q}\right)$$

ゆえ導函数も連続である. $p>1$ ゆえ $px^{p-1}\cos\left(\frac{\pi}{x^q}\right)$ は有界である. 従って $\frac{\pi}{x^{q-p+1}}\left|\sin\left(\frac{\pi}{x^q}\right)\right|$ の積分が発散することを示せば良い.

$$\frac{\pi}{4} + n\pi \leq \frac{\pi}{x^q} \leq \frac{3\pi}{4} + n\pi$$

の時に $\left|\sin\left(\frac{\pi}{x^q}\right)\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ となるが, これは

$$\frac{1}{\left(\frac{3}{4}+n\right)^{1/q}} \leq x \leq \frac{1}{\left(\frac{1}{4}+n\right)^{1/q}}$$

の時であるから

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\pi}{x^{q-p+1}}\left|\sin\left(\frac{\pi}{x^q}\right)\right| dx \\
&\geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{\left(\frac{1}{\frac{1}{4}+n}\right)^{(q-p+1)/q}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{1}{4}+n\right)^{1/q}} - \frac{1}{\left(\frac{3}{4}+n\right)^{1/q}} \right\} \\
&\geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{4}+n}\right)^{(q-p+1)/q}} \frac{\left\{\left(\frac{3}{4}+n\right)^{1/q} - \left(\frac{1}{4}+n\right)^{1/q}\right\}}{\left(\frac{1}{4}+n\right)^{1/q}\left(\frac{3}{4}+n\right)^{1/q}} \\
&\geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{\left\{\left(1+\frac{3}{4n}\right)^{1/q} - \left(1+\frac{1}{4n}\right)^{1/q}\right\}}{\left(\frac{1}{4}+n\right)^{(p-q)/q}\left(1+\frac{3}{4n}\right)^{1/q}}
\end{aligned}$$

最右辺の級数の各項の分子は

$$\left(1+\frac{3}{4n}\right)^{1/q} - \left(1+\frac{1}{4n}\right)^{1/q} \sim q^{-1}n^{-1}$$

であるから結局 $\frac{p-q}{q} + 1 = \frac{p}{q} \leq 1$ ならば級数は発散する. □

Theorem 3.5 函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ について

$$W_a^b(f) = W_a^c(f) + W_c^b(f), \quad a<c<b$$

が成り立つ. 特に

(i) $a \leq c \leq d \leq b$ ならば $W_c^d(f) \leq W_a^b(f)$ が成り立ち, 特に $[a,b]$ で有界変動ならば $[c,d]$ でも有界変動.

(ii) $a \leq c \leq b$ のとき f が $[a,c]$ と $[c,b]$ で有界変動ならば $[a,b]$ でも有界変動.

Proof. 区間 $[a,c]$ の分割 $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=c$ と $[c,b]$ の分割 $c=y_0<x_1<\cdots<y_n=b$ に対して $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=c=y_0<x_1<\cdots<y_n=b$ を合わせた $[a,b]$ の分割を考えれば

$$\sum_{k=1}^{m}|f(x_k)-f(x_{k-1})|+\sum_{k=1}^{n}|f(y_k)-f(y_{k-1})|\leq W_a^b(f)$$

が成り立つ. 従って

$$\sum_{k=1}^{m}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\leq W_a^b(f)-\sum_{k=1}^{n}|f(y_k)-f(y_{k-1})|$$

となるが, $[a,c]$ の分割についての上限を取り

$$W_a^c\leq W_a^b(f)-\sum_{k=1}^{n}|f(y_k)-f(y_{k-1})|$$

を得る. これより

$$\sum_{k=1}^{n}|f(y_k)-f(y_{k-1})|\leq W_a^b(f)-W_a^c$$

となるので, 今度は $[c,b]$ の分割についての上限を取り

$$W_c^b\leq W_a^b(f)-W_a^c$$

を得るので, $W_a^c(f)+W_c^b(f)\leq W_a^b(f)$ となる.

次に区間 $[a,b]$ の分割 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=c$ について $x_{j-1}\leq c\leq x_j$ を満たす j を取り分点として c を追加した $[a,b]$ の分割 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{j-1}\leq c\leq x_j<\cdots<x_n=b$ を考えると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\leq&\sum_{k=1}^{j-1}|f(x_k)-f(x_{k-1})|+|f(c)-f(x_{j-1})|\\&+|f(x_j)-f(c)|+\sum_{k=j+1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\\\leq&W_a^c(f)+W_c^b(f)\end{aligned}$$

となるので

$$W_a^b(f)\leq W_a^c(f)+W_c^b(f)$$

が成り立つ. □

さて

$$\operatorname{osc}_{[a,b]}f=\sup_{x,y\in[a,b]}|f(y)-f(x)|$$

と置き, 函数 f の $[a,b]$ に於ける振動量と云う. このとき総変動量の定義より

$$|f(b)-f(a)|\leq\sup_{x,y\in[a,b]}|f(y)-f(x)|\leq W_a^b(f)\tag{3.3}$$

が成り立つ. この不等式より以下の定理が成り立つ.

Theorem 3.6 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が有界変動ならば

$$|f(x)| \leq |f(a)| + W_a^b(f)$$

が成り立つ．特に f は $[a, b]$ で有界である．

Theorem 3.7 区間 $[a, b]$ 上の函数 f, g と定数 α, β について

$$W_a^b(\alpha f + \beta g) \leq \alpha W_a^b(f) + \beta W_a^b(g)$$

が成り立つ．従って $[a, b]$ 上の有界変動函数の全体は線形空間をなす．

Proof. 区間 $[a, b]$ の任意の分割 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = c$ について

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} |\alpha f(x_k) + \beta g(x_k) - (\alpha f(x_{k-1}) + \beta g(x_{k-1})| \\
\leq &|\alpha| \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1}| + |\beta| \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \\
\leq &\alpha W_a^b(f) + \beta W_a^b(g)
\end{aligned}$$

が成り立つ．そこで最左辺の上限を取れば $W_a^b(\alpha f + \beta g) \leq \alpha W_a^b(f) + \beta W_a^b(g)$ が成り立つ． □

上の評価を一般化しておこう．

Theorem 3.8 E_1, $E_2 \subset \mathbb{R}$ とし I 上の函数 f, g が $f([a.b]) \subset E_1$, $g([a.b]) \subset E_2$ を満たすとする．また函数 $F : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ は *Lipschitz* 連続で，ある定数 $M > 0$ について

$$F(u_1, v_1) - F(u_0, v_0)| \leq M(|u_1 - u_0| + |v_1 - v_0|), \quad u_1, u_0 \in E_1 \; v_1, v_0 \in E_2$$

を満たすとする．このとき合成函数 $F(f, g)$ も $[a, b]$ で有界変動であり

$$W_a^b(F(f, g)) \leq M(W_a^b(f) + W_a^b(g))$$

が成り立つ．特に f, g が $[a, b]$ で有界変動ならば

(i) fg も $[a, b]$ で有界変動

(ii) $\inf_{[a,b]} |g| > 0$ ならば $\dfrac{f}{g}$ も $[a, b]$ で有界変動．

Proof. 区間 $[a, b]$ の任意の分割 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = c$ について

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} |F(f(x_k), g(x_k)) - F(f(x_{k-1}), g(x_{k-1}))| \\
\leq &M \left\{ \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1}| + \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1}| \right\} \\
\leq &M(W_a^b(f) + W_a^b(g))
\end{aligned}$$

が成り立つ. そこで最左辺の上限を取れば $W_a^b(F(f,g)) \leq (W_a^b(f) + W_a^b(g))$ が成り立つ.

(i) については $F(u,v) = uv$, $M = \max\{\sup_{[a,b]}|f|, \sup_{[a,b]}|g|\}$ $E_1 = E_2 = [-M, M]$ と置けば

$$|F(u_1,v_1) - F(u_0,v_0)| = |u_1v_1 - u_0v_0| \leq |u_1||v_1 - v_0| + |u_1 - u_0||v_0| \leq M(|u_1 - u_0| + |v_1 - v_0|)$$

が成り立つので, 既に示した Theorem の前半を適用すれば良い.

(ii) については $F(u,v) = \frac{u}{v}$, $A = \inf_{[a,b]}|g| > 0$, $E_1 = [-\sup_{[a,b]}|f|, \sup_{[a,b]}|f|]$, $E_2 = (-\infty, -A] \cup [A, \infty)$ $M = \max\left\{\frac{1}{A}, \frac{\sup_{[a,b]}|f|]}{A^2}\right\}$ と置けば

$$\begin{aligned}|F(u_1,v_1) - F(u_0,v_0)| &= \left|\frac{u_1}{v_1} + \frac{u_0}{v_0}\right| \\ &= \frac{|u_1v_0 - u_0v_1|}{|v_1v_0|} \\ &= \frac{|u_1v_0 - u_0v_0 + u_0v_0 - u_0v_1|}{v_1v_0} \\ &\leq \frac{|u_1 - u_0|}{v_1} + \frac{|u_0||v_0 - v_1|}{|v_1v_0|} \leq M(|u_1 - u_0| + |v_1 - v_0|)\end{aligned}$$

が成り立つ. □

Theorem 3.9 函数 f が区間 $[a,b]$ で有界変動であり, $x = x_0(\in [a,b])$ で右または左連続ならば函数 $[a,b] \ni x \mapsto W_a^x(f)$ も $x = x_0(\in [a,b])$ で, それぞれ右または左連続である.

Proof. 右連続性を示そう. これには $x > x_0$ の時 $W_a^x(f) = W_a^{x_0}(f) + W_{x_0}^x(f)$ が成り立つことより $\lim_{x\to x_0+0} W_{x_0}^x(f) = 0$ を示せば良い.

任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を $x_0 < x < x_0 + \delta$ ならば $|f(x) - f(x_0)| < 2^{-1}\varepsilon$ が成り立つように取る. また $[x_0, b]$ の分割 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ を

$$W_{x_0}^b(f) \leq |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(x_n) - f(x_{n-1})| + \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.4}$$

かつ $x_0 < x_1 < x_0 + \delta$ が成り立つように取る. このとき

$$\begin{aligned}&|f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq W_{x_1}^b(f) \\ &|f(x_1) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

が成り立つので (3.4) と合わせて

$$W_{x_0}^b(f) < \frac{\varepsilon}{2} + W_{x_1}^b(f) + \frac{\varepsilon}{2} = W_{x_1}^b(f) + \varepsilon$$

となる. 従って

$$0 \leq W_{x_0}^{x_1}(f) = W_{x_0}^b(f) - W_{x_1}^b(f) < \varepsilon$$

が成り立つ. □

Theorem 3.10 f と $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を区間 $[a,b]$ 上の函数と函数列とし，各 $x \in [a,b]$ について $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が成り立つとする．このとき

$$W_a^b(f) \leq \liminf_{n\to\infty} W_a^b(f_n)$$

が成り立つ.

Proof. $\liminf_{n\to\infty} W_a^b(f_n) < \infty$ の時に示せば十分である．任意の $\varepsilon > 0$ について部分列 $\{f_{n_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ を $W_a^b(f_{n_\nu}) < \liminf_{n\to\infty} W_a^b(f_n) + \varepsilon$ が成り立つように取る．このとき任意の分割 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ について

$$\sum_{k=1}^{n} |f_{n_\nu}(x_k) - f_{n_\nu}(x_{k-1})| \leq W_a^b(f_{n_\nu}) < \liminf_{n\to\infty} W_a^b(f_n) + \varepsilon$$

が成り立つ．そこで $\nu \to \infty$ とすれば

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \liminf_{n\to\infty} W_a^b(f_n) + \varepsilon$$

が成り立つ．これより $W_a^b(f) \leq \liminf_{n\to\infty} W_a^b(f_n) + \varepsilon$ が成り立つことになり, $\varepsilon \to +0$ として $W_a^b(f) \leq \liminf_{n\to\infty} W_a^b(f_n)$ が成り立つ. □

4 Jordan 分解

区間 $[a,b]$ 上の増加函数は有界変動であるから, 2 つの増加函数の差は有界変動函数になることが Theorem 3.7 より分かる．重要なのはこの事実の逆が成り立つことである.

Theorem 4.1 (Jordan 分解) 函数 f が区間 $[a,b]$ で有界変動函数ならば

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\{W_a^x(f) + f(x)\}, \quad \psi(x) = \frac{1}{2}\{W_a^x(f) - f(x)\} \tag{4.1}$$

と置くと, ともに $[a,b]$ で増加であり, f が $x_0 (\in [a,b])$ で右 *(または左)* 連続ならば φ, ψ もともに x_0 で右 *(または左)* 連続である．また特に

(i) $f = \varphi - \psi$ と 2 つの増加函数の差として表される.

(ii) φ と ψ は f の分解を与える増加函数のの中で変動量が最小である．つまり $f = \tilde{\varphi} - \tilde{\psi}$ と f が 2 つの増加函数の差として表されれば任意の $a \leq x_0 < x_1 \leq b$ について

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_0) \leq \tilde{\varphi}(x_1) - \tilde{\varphi}(x_0), \quad \psi(x_1) - \psi(x_0) \leq \tilde{\psi}(x_1) - \tilde{\psi}(x_0)$$

が成り立つ.

(iii) $W_a^x(f) = W_a^x(\varphi) + W_a^x(\psi)$ が $x \in [a,b]$ について成り立つ.

Proof. $x_0, x_1 \in [a,b]$ with $a \leq x_0 < x_1 \leq b$ について成り立つ不等式

$$|f(x_1) - f(x_0)| \leq W_{x_0}^{x_1}$$

より

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1) - \varphi(x_0) =& \frac{1}{2}\left\{W_a^{x_1}(f) + f(x_1)\right\} - \frac{1}{2}\left\{W_a^{x_0}(f) + f(x_0)\right\} \\
=& \frac{1}{2}\left\{f(x_1) - f(x_0) + W_{x_0}^{x_1}\right\} \geq 0, \\
\psi(x_1) - \psi(x_0) =& \frac{1}{2}\left\{W_a^{x_1}(f) - f(x_1)\right\} - \frac{1}{2}\left\{W_a^{x_0}(f) - f(x_0)\right\} \\
=& \frac{1}{2}\left\{-f(x_1) + f(x_0) + W_{x_0}^{x_1}\right\} \geq 0
\end{aligned}$$

となるので, φ, ψ は増加である. 左右の連続性については Theorem 3.9 より従う.

(i) については明らかである. (ii) については

$$\begin{aligned}
& \varphi(x_1) - \varphi(x_0) \leq \tilde{\varphi}(x_1) - \tilde{\varphi}(x_0) \\
\iff\ & \frac{1}{2}\left\{W_a^{x_1}(f) + f(x_1)\right\} - \frac{1}{2}\left\{W_a^{x_0}(f) + f(x_0)\right\} \leq \tilde{\varphi}(x_1) - \tilde{\varphi}(x_0) \\
\iff\ & \frac{1}{2}\left\{W_{x_0}^{x_1}(f) + f(x_1) - f(x_0)\right\} \leq \tilde{\varphi}(x_1) - \tilde{\varphi}(x_0) \\
\iff\ & W_{x_0}^{x_1}(f) + \tilde{\varphi}(x_1) - \tilde{\varphi}(x_0) - (\tilde{\psi}(x_1) - \tilde{\psi}(x_0)) \leq 2(\tilde{\varphi}(x_1) - \tilde{\varphi}(x_0)) \\
\iff\ & W_{x_0}^{x_1}(f) \leq \tilde{\varphi}(x_1) - \tilde{\varphi}(x_0) + \tilde{\psi}(x_1) - \tilde{\psi}(x_0)
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
& \psi(x_1) - \psi(x_0) \leq \tilde{\psi}(x_1) - \tilde{\psi}(x_0) \\
\iff\ & \frac{1}{2}\left\{W_a^{x_1}(f) - f(x_1)\right\} - \frac{1}{2}\left\{W_a^{x_0}(f) - f(x_0)\right\} \leq \tilde{\psi}(x_1) - \tilde{\psi}(x_0) \\
\iff\ & \frac{1}{2}\left\{W_{x_0}^{x_1}(f) - f(x_1) + f(x_0)\right\} \leq \tilde{\psi}(x_1) - \tilde{\psi}(x_0) \\
\iff\ & W_{x_0}^{x_1}(f) - \tilde{\varphi}(x_1) + \tilde{\varphi}(x_0) + \tilde{\psi}(x_1) - \tilde{\psi}(x_0) \leq 2(\tilde{\psi}(x_1) - \tilde{\psi}(x_0)) \\
\iff\ & W_{x_0}^{x_1}(f) \leq \tilde{\varphi}(x_1) - \tilde{\varphi}(x_0) + \tilde{\psi}(x_1) - \tilde{\psi}(x_0)
\end{aligned}$$

であるので, どちらの場合も最後の不等式を示せば良い. これは区間 $[x_0, x_1]$ の任意の分割 $x_0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = x_1$ について

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |f(y_k) - f(y_{k-1})| =& \sum_{k=1}^{n} |\tilde{\varphi}(y_k) - \tilde{\varphi}(y_{k-1}) - \tilde{\psi}(y_k) - \tilde{\psi}(y_{k-1})| \\
\leq& \sum_{k=1}^{n}(\tilde{\varphi}(y_k) - \tilde{\varphi}(y_{k-1})) + \sum_{k=1}^{n}(\tilde{\psi}(y_k) - \tilde{\psi}(y_{k-1})) \\
=& \tilde{\varphi}(x_1) - \tilde{\varphi}(x_0) + \tilde{\psi}(x_1) - \tilde{\psi}(x_0)
\end{aligned}$$

が成り立つことより従う.

(iii) については φ と ψ の定義式 (4.1) を辺々加えると

$$\varphi(x)+\psi(x)=W_a^x(f)$$

が成り立つこと, 及び φ, ψ は増加であるから

$$W_a^x(\varphi)=\varphi(x)-\varphi(a), \quad W_a^x(\psi)=\psi(x)-\psi(a)$$

が成り立つこと, 最後に

$$\varphi(a)=\frac{1}{2}\{W_a^a(f)+f(a)\}=\frac{f(a)}{2}, \quad \psi(a)=\frac{1}{2}\{W_a^a(f)-f(a)\}=-\frac{f(a)}{2},$$

を組み合わせれば直ちに従う. □

Jordan 分解を用いると前節までの単調函数に関する結果を, 有界変動函数に関する結果に拡張することができる.

Theorem 4.2 (a) 函数 f が区間 $[a,b]$ 上の有界変動函数ならば任意の内点 x_0 に於いて左右の極限 $f(x-0)$, $f(x+0)$ が存在し, 端点に於いては $f(a+0)$, $f(b-0)$ が存在する.

(b) 函数 f がある区間上の有界変動函数ならば, その区間内の不連続点は高々可算である.

(c) 函数 f が区間 $[a,b]$ 上の有界変動函数ならば $f=g_1+u_1-(g_2+u_2)$ と連続な増加函数 g_1, g_2 と, *saltus function* u_1, u_2 に分解できる.

(d) (Helly's First Theorem) 函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が区間 $[a,b]$ 上の有界変動函数の列であり, $\{f_n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{W_a^b(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が有界ならば, $[a,b]$ の各点で収束する部分列 $\{f_{n_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ が存在する.

最後に (d) に於ける極限函数 $\lim_{\nu\to} f_{n_\nu}(x)$ は Theorem 3.10 より有界変動であることに注意しておこう.

5 Riemann-Stieltjes 積分

f, g を有界閉区間 $[a,b]$ 上で定義された実数値関数とする. $[a,b]$ の分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ と $x_{k-1}\le\xi_k\le x_k$, $k=1,2,\ldots,n$ を満たす点列 $\{\xi_k\}$ について

$$S(\Delta,\{\xi_k\})=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(g(x_k)-g(x_{k-1}))$$

とおく. また $\mathrm{mesh}(\Delta)=\max\{x_k-x_{k-1}: k=1,2,\ldots,n\}$ と置く. さて f が g について Riemann-Stieltjes 積分可能であるとは, ある実数 ℓ で

$$\forall\varepsilon>0:\delta>0:\forall\Delta \text{ and } \{\xi_k\} \text{ with } \mathrm{mesh}(\Delta)<\delta: |S(\Delta,\{\xi_k\})-\ell|<\varepsilon$$

が成り立つものが存在するときを云う．そしてこのとき

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \ell$$

と表す．

有界変動函数の時と同じように $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ が連続で狭義増加ならば f が g に関して Riemann-Stieltjes 積分可能であることと $f \circ \varphi$ が $g \circ \varphi$ に関して Riemann-Stieltjes 積分可能であることは同値であり，$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))dg(\varphi(t))$ が成り立つ．

また Riemann-Stieltjes 積分の定義より $\int_a^b dg(x) = g(b) - g(a)$ であることや，g が定数のとき $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ となることは容易に分かるであろう．また $c \in (a, b)$ について

$$H_c(x) = \begin{cases} 0, & a \le x < c \\ 1, & c \le x \le b \end{cases}$$

と置くと，f が c で連続ならば

$$\int_a^b f(x)\,dH_c(x) = f(c)$$

が成り立つ．

Theorem 5.1 区間 $[a, b]$ において函数 f は連続で，函数 g は C^1-級ならば

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

が成り立つ．

Proof. 分割 $\Delta a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ と付随する $\{\xi_k\}$ について平均値の定理により

$$S(\Delta, \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)g'(\xi'_k)\{x_k - x_{k-1}\}$$

と表せるので

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)g'(x)\,dx - S(\Delta, \{\xi_k\})\right| \\
=&\left|\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \{f(x)g'(x) - f(\xi_k)g'(\xi'_k)\}\,dx\right| \\
\le&\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)g'(x) - f(\xi_k)g'(\xi'_k)|\,dx \\
\le&\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \{|f(x)||g'(x) - g'(\xi'_k)| + |f(x) - f(\xi_k)||g'(\xi'_k)|\}\,dx \\
\le&\{\max_{[a,b]} |f| \operatorname{osc}_{[x_{k-1}, x_k]} g' + \max_{[a,b]} |g'| \operatorname{osc}_{[x_{k-1}, x_k]} f\}(b - a)
\end{aligned}$$

が成り立つ．f, g' は連続ゆえ有界かつ一様連続ゆえ，$\mathrm{mesh}(\Delta) \to 0$ のとき再右辺も $\to 0$ となる．ので $\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$ が成り立つ． □

Definition 5.2 分割 Δ' が Δ の細分であるとは Δ の全ての分点が Δ' の分点になっている時を言う.

Lemma 5.3 *Riemann-Stieltjes* 積分 $\int_a^b f(x)\,dg(x) = \ell$ が存在するための必要十分条件は任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を $\mathrm{mesh}(\Delta) < \delta$ を満たす任意の分割と, Δ の細分である任意の分割 Δ' 及びこれらの分割の任意の代表点 $\{x_k\}$, $\{x'_k\}$ について

$$|S(\Delta, \{\xi_k\}) - S(\Delta', \{\xi'_k\})| < \varepsilon$$

が成り立つこと.

Riemann-Stieltjes 積分可能性から上の条件が導かれることは容易に分かるであろう. 逆に, 上の条件から Riemann-Stieltjes 積分可能性が導かれることは $\mathrm{mesh}(\Delta_1) < \delta$, $\mathrm{mesh}(\Delta_2) < \delta$ を満たす 2 つの分割 Δ_1, Δ_2 の共通細分 Δ' を取れば

$$|S(\Delta_1, \{\xi_k\}) - S(\Delta_2, \{\xi_k\})| \leq |S(\Delta_1, \{\xi_k\}) - S(\Delta', \{\xi'_k\})| + |S(\Delta_2, \{\xi_k\}) - S(\Delta', \{\xi'_k\})| < 2\varepsilon$$

となるので, 点列が Caychy 列であれば収束することを証明するのと同じ方法で証明できる.

Lemma 5.4 分割 Δ' が分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$ の細分であるとき

$$|S(\Delta, \{\xi_k\}) - S(\Delta', \{\xi'_k\})| \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{osc}_{[x_{k-1}, x_k]} f\right) W_{x_{k-1}}^{x_k}(g)$$

が成り立つ.

Proof. $\Delta' : a = x'_0 < x'_1 < \cdots < x'_m = b$ について $x'_{\alpha_k} = x_k$ を満たす α_k を取れば

$$\begin{aligned}
&|S(\Delta', \{\xi'_k\}) - S(\Delta, \{\xi_k\})| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=\alpha_{k-1}+1}^{\alpha_l} f(\xi'_\nu)(g(x'_\nu) - g(x'_{\nu-1})) - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \sum_{\nu=\alpha_{k-1}+1}^{\alpha_l} (g(x'_\nu) - g(x'_{\nu-1})) \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=\alpha_{k-1}+1}^{\alpha_l} (f(\xi'_k)) - f(\xi'_\nu))(g(x'_\nu) - g(x'_{\nu-1})) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{osc}_{[x_{k-1}, x_k]} f \cdot \sum_{\nu=\alpha_{k-1}+1}^{\alpha_l} |g(x'_\nu) - g(x'_{\nu-1})| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{osc}_{[x_{k-1}, x_k]} f \cdot W_{x_{k-1}}^{x_k}(g).
\end{aligned}$$

□

Theorem 5.5 f が連続で g が有界変動ならば *Riemann-Stieltjes* 積分 $\int_a^b f(t)\,dg(t)$ は存在する.

Proof. f の一様連続性より 任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を $|x-y| \le \delta$ ならば $|f(x)-f(y)| < \varepsilon/(W_a^b(g)+1)$ が成り立つように取れる．そこで $\mathrm{mesh}(\Delta) < \delta$ とすれば $\mathrm{osc}_{[x_{k-1},x_k]} f \varepsilon/(W_a^b(g)+1)$ とできるので上の Lemma より

$$\begin{aligned}
&|S(\Delta', \{\xi'_k\}) - S(\Delta, \{\xi_k\})| \\
&\le \sum_{k=1}^{n} \mathrm{osc}_{[x_{k-1},x_k]} f \cdot W_{x_{k-1}}^{x_k}(g). \\
&\le \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{W_a^b(g)+1} W_{x_{k-1}}^{x_k}(g) = \varepsilon \frac{W_a^b(g)}{W_a^b(g)+1} \le \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ．従って Lemma 5.3 より Riemann-Stieltjes 積分 $\int_a^b f(t)\,dg(t)$ は存在する． □

Lemma 5.6 *Riemann-Stieltjes* 積分 $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ が存在するとし，分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ について $\mathrm{osc}_{[x_{k-1},x_k]} f < \varepsilon$, $k = 1, 2, \ldots, n$ が成り立つとすると

$$\left| S(\Delta, \{\xi_k\}) - \int_a^b f(x)\,dg(x) \right| \le \varepsilon W_a^b(g)$$

が成り立つ．

Proof. $\eta > 0$ について $\delta > 0$ を $\mathrm{mesh}(\Delta') < \delta$ ならば

$$\left| \int_a^b f(x)\,dg(x) - S(\Delta', \{\xi'_k\}) \right| < \eta$$

が成り立つように取る．特に Δ' として Δ の細分となっているものについて

$$|S(\Delta, \{\xi_k\}) - S(\Delta', \{\xi'_k\})| < \varepsilon W_a^b(g)$$

が成り立つ．そこで

$$\begin{aligned}
&\left| S(\Delta, \{\xi_k\}) - \int_a^b f(x)\,dg(x) \right| \\
\le& |S(\Delta, \{\xi_k\}) - S(\Delta', \{\xi'_k\})| + \left| \int_a^b f(x)\,dg(x) - S(\Delta', \{\xi'_k\}) \right| \\
<& \varepsilon W_a^b(g) + \eta
\end{aligned}$$

$\eta > 0$ は任意ゆえ，定理の不等式が成り立つ． □

Theorem 5.7 有界閉区間 $[a,b]$ で函数 f は，有界変動函数 g に関して *Riemann-Stieltjes* 積分可能とする．このとき各 $c \in [a,b]$ において f と g の少なくとも一方は連続．

Proof. $\varepsilon > 0$ について Lemma 5.3 における $\delta > 0$ を取る．$\mathrm{mesh}(\Delta) < \delta$ を満たす任意の分割 Δ について

$$|S(\Delta, \{\xi'_k\}) - S(\Delta, \{\xi''_k\})| < \varepsilon$$

が成り立つので

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k')-f(\xi_k'')\}\{g(x_k)-g(x_{k-1})\}\right|<\varepsilon$$

となる. 必要ならば $g(x_k)-g(x_{k-1})$ の符号に応じて ξ_k' と ξ_k'' を入れ替えて $\{f(\xi_k')-f(\xi_k'')\}\{g(x_k)-g(x_{k-1})\}\geq 0$ となるようにして $\{\xi_k')\}$, $\{\xi_k'')\}$ を動かして上限を取ることにより

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{osc}_{[x_{k-1},x_k]}f|g(x_k)-g(x_{k-1}|\leq\varepsilon$$

が成り立つ.

ここで g が $c\in[a,b]$ で不連続ならば f が c で右連続となることを示そう. これには $c<b$ と仮定して示せば良い. まず $g(c+0)\neq g(c)$ または $g(x_0+0)\neq g(x_0-0)$ の少なくとも一方が成り立つことに注意しよう. $0<h<\min\{\delta,b-c\}$ となる h について前者の場合には $x_h=c$, 後者の場合には $x_h=c-h$ と置き, 分割 Δ を $\operatorname{mesh}(\Delta)<\delta$ であり, x_h と $c+h$ がともに Δ の隣り合う分点となるように取る. このとき上の不等式より

$$\operatorname{osc}_{[x_h,c+h]}f|g(c+h)-g(x_h)|\leq\varepsilon$$

が成り立つ. $\lim_{h\to+0}|g(c+h)-g(x_h)|>0$ より, f は c で右連続である. 左連続性についても同様に示すことができる. □

Theorem 5.8 f が $[a,b]$ 上で有界で g が $[a,b]$ で有界変動の時, 次の 3 条件は互いに同値.

(A) *Riemann-Stieltjes* 積分を $\int_a^b f(t)\,dg(t)$ が存在する.

(B) 任意の $\varepsilon>0$ について $\delta>0$ を $\operatorname{mesh}(\Delta)<\delta$ を満たす任意の分割について

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{osc}_{[x_{k-1},x_k]}f\cdot|g(x_k)-g(x_{k-1})|<\varepsilon$$

が成り立つように取れること.

(C) 任意の $\varepsilon>0$ について $\delta>0$ を $\operatorname{mesh}(\Delta)<\delta$ を満たす任意の分割について

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{osc}_{[x_{k-1},x_k]}f\cdot W_{x_{k-1}}^{x_k}(g)<\varepsilon$$

が成り立つように取れること.

Proof. Theorem 5.7 より (A) $\Longrightarrow$ (B) が成り立つ. また Lemma 5.3 と 5.4 より (C) $\Longrightarrow$ (A) が成り立つ. 従って (B) $\Longrightarrow$ (C) を示せば良い.

(B) を仮定しよう. $M=\operatorname{osc}_{[a,b]}f$ と置く. $M=0$ ならば (C) は明らかに成立するので, $M>0$ と仮定する. $\varepsilon>0$ が与えられたとして $\delta_0>0$ を $\operatorname{mesh}(\Delta)<\delta_1$ ならば

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{osc}_{[x_{k-1},x_k]}f\cdot(g(x_k)-g(x_{k-1}))<\frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つように取る. 次に

$$W_a^b(g) - \frac{\varepsilon}{3M} \leq \sum_{i=1}^{N} |g(z_i) - g(z_{i-1})|$$

を満たす分割 $a = z_0 < z_1 < \cdots < z_N = b$ を取り, $\delta_2 = \min\{z_1 - z_0, \ldots, z_N - z_{N-1}\} > 0$ と置く.

Theorem 5.7 の証明中で条件 (B) が成り立てば区間 $[a, b]$ 内の各点 c で f または g の少なくとも一方は連続であることを示した. 特に有界変動函数 g が c で連続ならば Theorem 3.9 より, 函数 $x \mapsto W_a^x(g)$ が $x = c$ で連続になるので, 結局 f または $W_a^x(g)$ の少なくとも一方が連続である. この事実と f, $W_a^x(g)$ が有界であることより $\delta_3 > 0$ を $i = 1, 2, \ldots, N$ について $x' < z_i < x$, $|x - x'| < \delta_1$ ならば

$$\operatorname{osc}_{[x', x]} f \cdot W_{x'}^x(g) < \frac{\varepsilon}{3N}$$

が成り立つように取る.

このとき $mesh(\Delta) < \delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_2\}$ を満たす任意の分割 $\Delta : a = x_0 < \cdots < x_n$ について $\Delta' a = x'_0 < \cdots < x'_m$ を Δ に分点 $\{z_1, \ldots, z_{N-1}\}$ を追加してできる細分とする. Δ' は分割 $a = z_0, \ldots, z_N = b$ の細分であるから

$$W_a^b(g) - \frac{\varepsilon}{3M} \leq \sum_{i=1}^{N} |g(z_i) - g(z_{i-1})| \leq \sum_{k=1}^{m} |g(x'_k) - g(x'_{k-1})|$$

より

$$\sum_{k=1}^{m} \{W_{x'_{k-1}}^{x'_k} - |g(x'_k) - g(x'_{k-1})|\} \leq \frac{\varepsilon}{3M}$$

が成り立つ. また

$$\begin{aligned}
S_0 =& \sum_{k=1}^{m} \operatorname{osc}_{[x'_{k-1}, x'_k]} f \cdot W_{x'_{k-1}}^{x'_k}(g) \\
\leq& \sum_{k=1}^{m} \operatorname{osc}_{[x'_{k-1}, x'_k]} f \cdot \{W_{x_{k-1}}^{x'_k}(g) - |g(x'_k) - g(x'_{k-1})|\} + \sum_{k=1}^{m} \operatorname{osc}_{[x'_{k-1}, x'_k]} f \cdot |g(x'_k) - g(x'_{k-1})| \\
\leq& M \sum_{k=1}^{m} \{W_{x_{k-1}}^{x'_k}(g) - |g(x'_k) - g(x'_{k-1})|\} + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{2\varepsilon}{3}
\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って

$$S = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{osc}_{[x_{k-1}, x_k]} f \cdot W_{x_{k-1}}^{x_k}(g)$$

において, $x_{k-1} < z_i < x_k$ となる k についての和を S', それ以外の和を S'' と置けば,

$$S' \leq N \frac{\varepsilon}{3N} = \frac{\varepsilon}{3}$$

であり, 残りの項は全て S_0 の項の中に現れるので,

$$S'' \leq S_0 < \frac{2\varepsilon}{3}$$

となるので, $S \leq S' + S'' < \varepsilon$ となり (C) が成立する. □

Theorem 5.9 $g = \varphi - \psi$ を区間 $[a, b]$ 上の有界変動函数 g の *Jordan* 分解とするとき $[a, b]$ 上の有界函数 f が g に関して *Riemann-Stieltjes* 積分可能である為の必要十分条件は φ と ψ の両方に関して *Riemann-Stieltjes* 積分可能であることあり, このとき $\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,d\varphi(x) - \int_a^b f(x)\,d\psi(x)$ が成り立つ.

Proof. Theorem 4.1 より Jordan 分解について $W_{x_{k-1}}^{x_k}(g) = W_{x_{k-1}}^{x_k}(\varphi) + W_{x_{k-1}}^{x_k}(\psi)$ が成り立つ. この事実と Theorem 5.8 (C) を用いれば直ちに従う. □

Theorem 5.10 函数 f が区間 $[a, b]$ で有界, g は有界変動とし, f は g に関して *Riemann-Stieltjes* 積分可能とする. このとこ, 任意の部分区間 $[c, d] \subset [a, b]$ においても f は g に関して *Riemann-Stieltjes* 積分可能である.

Proof. 区間 $[c, d]$ の分割で $\mathrm{mesh}(\Delta)$ を保ったまま $[a, b]$ の分割に拡張できることと, Theorem 5.8 (C) より従う. □

Remark 5.11 函数 f が g に関して区間 $[a, c]$ と $[c, b]$ の両方で *Riemann-Stieltjes* 積分可能であっても, 合併区間 $[a, b]$ では *Riemann-Stieltjes* 積分可能であるとは限らない. 実際 f が c で左連続で *jump* を持ち, g が c で右連続で *jump* を持つようにすれば, 容易に反例を作ることができる.

Theorem 5.12 函数 f, g はともに, 区間 $[a, b]$ で有界変動とすると *Riemann-Stieltjes* 積分 $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ が存在する為の必要十分条件は, f, g が不連続点を共有しないこと.

Proof. 必要性については, Theorem 5.7 より従う. 十分性については, 任意の $\varepsilon > 0$ が与えられたとして

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{W_a^b(f) + W_a^b(g)}$$

と置く. ($W_a^b(f) = W_a^b(g) = 0$ の時は f, g ともに定数函数となり Riemann-Stieltjes 積分 $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ が存在するので, $W_a^b(f) + W_a^b(g) > 0$ と仮定して良い).

このときある $\delta > 0$ を x', x'' が $|x'' - x'| < \delta$ を満たせば

$$\mathrm{osc}_{[x', x'']} f < \varepsilon_1 \text{ または } |g(x'') - g(x')| < \varepsilon_1$$

が成り立つように取れる. 実際, これを否定すると任意の $\delta > 0$ について $|x'' - x'| < \delta$

$$\mathrm{osc}_{[x', x'']} f \geq \varepsilon_1 \text{ かつ } |g(x'') - g(x')| \geq \varepsilon_1$$

を満たす $x', x'' \in [a, b]$ が存在する. 自然数 n について $\delta = \frac{1}{n}$ とおいて, このような x', x'' を取り, x'_n, x''_n と表すことにすると, $|x''_n - x'_n| < \frac{1}{n}$

$$\mathrm{osc}_{[x'_n, x''_n]} f \geq \varepsilon_1 \text{ かつ } |g(x''_n) - g(x'_n)| \geq \varepsilon_1$$

が成り立つ. そこで ξ'_n, x''_n を

$$|f(\xi''_n) - f(\xi'_n)| \geq \frac{\varepsilon_1}{2}$$

が成り立つように取る. 収束するように部分列を取り $x'_{n_k} \to x_0$ とすれば, $x''_{n_k}, \xi'_{n_k}, \xi''_{n_k} \to x_0$ が成り立つが, これより f, g ともに x_0 で不連続となり, 矛盾を生じる.

上記のような $\delta > 0$ が取れたとする. このとき任意の分割 $\Delta : a = x_0 < \cdots < x_n$ $\mathrm{mesh}(\Delta) < \delta$ について

$$\text{“}\operatorname{osc}_{[x_{k-1},x_k]} f < \varepsilon_1 \text{ または } |g(x_k) - g(x_{k-1})| < \varepsilon_1\text{“} fork = 1, \ldots, n$$

が成り立つ. よって

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \operatorname{osc}_{[x_{k-1},x_k]} f \cdot |g(x_k) - g(x_{k-1})| \\
\leq &\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_1 |g(x_k) - g(x_{k-1})| + sum_{k=1}^{n} \varepsilon_1 \operatorname{osc}_{[x_{k-1},x_k]} f \\
\leq &\frac{\varepsilon W_a^b(g)}{W_a^b(f) + W_a^b(g)} + \frac{\varepsilon W_a^b(f)}{W_a^b(f) + W_a^b(g)} = \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つので, f は g に関して Riemann-Stieltjes 積分可能である. □

6 Riemann-Stieltjes積分に関する公式

Theorem 6.1 $[a, b]$ 上の有界な函数 f が $[a, b]$ 上の 有界変動函数 g について *Riemann-Stieltjes* 積分可能ならば

$$\left| \int_a^b f(x)\, dg(x) \right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \cdot W_a^b(g).$$

Proof. $\int_a^b f(x)\, dg(x)$ の近似和について

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\{g(x_k) - g(x_{k-1})\} \right| \\
\leq &\sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)||g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq \sup_{[a,b]} |f| \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq \sup_{[a,b]} |f| \cdot W_a^b(g)
\end{aligned}$$

が成り立つことより従う. □

Theorem 6.2 $[a, b]$ 上の有界な函数 f_1, f_2 が $[a, b]$ 上の増加函数 g についてともに *Riemann-Stieltjes* 積分可能であり $f_1(x) \leq f_2(x)$ が $[a, b]$ 上で成り立てば

$$\int_a^b f_1(x)\, dg(x) \ \leq \int_a^b f_1(x)\, dg(x).$$

Proof. 近似和について, $g(x_k)-g(x_{k-1})\geq 0$ より

$$\sum_{k=1}^{n} f_1(\xi_k)\{g(x_k)-g(x_{k-1})\} \leq \sum_{k=1}^{n} f_2(\xi_k)\{g(x_k)-g(x_{k-1})\}$$

が成り立つからである. □

Theorem 6.3 $[a,b]$ 上の有界な函数 f が $[a,b]$ 上の 有界変動函数 g について *Riemann-Stieltjes* 積分可能ならば, 任意の $c\in(a,b)$ について f は $[a,c]$ 及び $[c,b]$ で g に関して *Riemann-Stieltjes* 積分可能であり

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^c f(x)\,dg(x) + \int_c^b f(x)\,dg(x).$$

Proof. 前半は Theorem 5.10 でより従う. 後半については $\Delta : a = x_0 < \cdots < x_k = c = y_0 < \cdots < y_\ell = b$ という形の $[a,b]$ の分割 Δ において $\mathrm{mesh}(\Delta)\to 0$ とすれば付随する $[a,c]$, $[c,b]$ の分割 $\Delta_1 : a = x_0 < \cdots < x_k = c$, $\Delta_2 : c = y_0 < \cdots < y_\ell = b$ についても $\mathrm{mesh}(\Delta_1)\to 0$, $\mathrm{mesh}(\Delta_2)\to 0$ が成り立つから, 近似和

$$\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\{g(x_i)-g(x_{i-1})\} + \sum_{i=1}^{\ell} f(\eta_i)\{g(y_i)-g(y_{i-1})\}$$

は, $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ と $\int_a^c f(x)\,dg(x) + \int_c^b f(x)\,dg(x)$ の双方に収束するので, 両者は一致する. □

Theorem 6.4 $[a,b]$ 上の有界な函数 f_1, f_2 が $[a,b]$ 上の有界変動函数 g についてともに *Riemann-Stieltjes* 積分可能であれば, 任意の定数 c_1, c_2 について $c_1f_1+c_2f_2$ は g に関して *Riemann-Stieltjes* 積分可能であり

$$\int_a^b \{c_1f_1(x)+c_2f_2(x)\}\,dg(x) = c_1\int_a^b f_1(x)\,dg(x) + c_2\int_a^b f_2(x)\,dg(x).$$

Proof. $x,y\in[x_{k-1},x_k]$ について

$$|c_1f_1(y)+c_2f_2(y)-(c_1f_1(x)+c_2f_2(x))| \leq |c_1||f_1(y)-f_1(x)|+|c_2||f_2(y)-f_2(x)| \leq \mathrm{osc}_{[x_{k-1},x_k]} f_1 + \mathrm{osc}_{[x_{k-1},x_k]} f_2$$

より

$$\mathrm{osc}_{[x_{k-1},x_k]}(c_1f_1+c_2f_2) \leq \mathrm{osc}_{[x_{k-1},x_k]} f_1 + \mathrm{osc}_{[x_{k-1},x_k]} f_2$$

が成り立つことより

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{osc}_{[x_{k-1},x_k]}(c_1f_1+c_2f_2) W_{x_{k-1}}^{x_k}(g) \leq c_1\sum_{k=1}^{n} \mathrm{osc}_{[x_{k-1},x_k]} f_1\cdot W_{x_{k-1}}^{x_k}(g) + c_2\sum_{k=1}^{n} \mathrm{osc}_{[x_{k-1},x_k]} f_2\cdot W_{x_{k-1}}^{x_k}(g)$$

が成り立つ. この不等式と Theorem 5.8 を組み合わせれば, $c_1f_1+c_2f_2$ の g に関する Riemann-Stieltjes 積分可能性が従う. 積分の線形性については, 近似和の線形性

$$\sum_{k=1}^{n}\{c_1f_1(\xi_k)+c_2f_2(\xi_k)\}\{g(x_k)-g(x_{k-1})\} = c_1\sum_{k=1}^{n} f_1(\xi_k)\{g(x_k)-g(x_{k-1})\} + c_2\sum_{k=1}^{n} f_2(\xi_k)\{g(x_k)-g(x_{k-1})\}$$

において $\mathrm{mesh}(\Delta)\to 0$ として極限を取れば直ちに従う. □

Theorem 6.5 $[a,b]$ 上の有界な函数 f が $[a,b]$ 上の有界変動函数 g_1, g_2 の双方にについて *Riemann-Stieltjes* 積分可能であれば, 任意の定数 c_1, c_2 について f は $c_1g_1+c_2g_2$ に関して *Riemann-Stieltjes* 積分可能であり

$$\int_a^b f(x)\,d\{c_1g_1(x)+c_2g_2(x)\} = c_1\int_a^b f(x)\,dg_1(x) + c_2\int_a^b f(x)\,dg_2(x).$$

Proof. 不等式 $W_{x_{k-1}}^{x_k(c_1g_1+c_2g_2)} \le |c_1|W_{x_{k-1}}^{x_k(g_1} + |c_c|W_{x_{k-1}}^{x_k(g_2}$ と Theorem 5.8 を組み合わせれば, f の $c_1g_1+c_2g_2$ に関する Riemann-Stieltjes 積分可能性が従う. 積分の線形性については, 近似和の線形性

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\{c_1g_1(x_k)+c_2g_2(x_k)-(c_1g(x_{k-1})+c_2g_2(x_{k-1})\}\\ =&c_1\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\{g_1(x_k)-g_1(x_{k-1})\}+c_2\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\{g_2(x_k)-g_2(x_{k-1})\}\end{aligned}$$

において $\mathrm{mesh}(\Delta)\to 0$ として極限を取れば直ちに従う. □

Theorem 6.6 $[a,b]$ 上の有界な函数 f が $[a,b]$ 上の単調函数 g について *Riemann-Stieltjes* 積分可能であれば,

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \mu\{g(b)-g(a)\}$$

を満たす $\mu \in [\inf_{[a,b]} f, \sup_{[a,b]} f]$ が存在する.

Proof. 減少の場合も同様であるから g が増加の時に示しておこう. $g(b) = g(a)$ ならば $\int_a^b f(x)\,dg(x) = 0$ ゆえ, 任意の $\mu \in \mathbb{R}$ について等式が成り立つ.

$g(b) > g(a)$ の時は

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)\,dg(x)}{g(b)-g(a)}$$

と置けば, Theorem 6.2 より

$$\inf_{[a,b]} f\cdot\{g(b)-g(a)\} = \int_a^b \inf_{[a,b]} f\,dg(x) \le \int_a^b f(x)\,dg(x) \le \int_a^b \sup_{[a,b]} f\,dg(x) = \sup_{[a,b]} f\cdot\{g(b)-g(a)\}$$

が成り立つ. この不等式の両辺を $g(b)-g(a)$ で割れば $\mu \in [\inf_{[a,b]} f, \sup_{[a,b]} f]$ が従う. □

Theorem 6.7 (部分積分) 函数 f, g はともに区間 $[a,b]$ 上の有界変動函数であり, 不連続点を共有しないとする. このとき

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) + \int_a^b f(x)\,dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

が成り立つ.

Proof. f の g 及び, g の f に関する Riemann-Stieltjes 積分可能性は Theorem 5.12 より従う. 等式については分割 $\Delta : a = x_0 < \cdots < x_n = b$ に関する近似和について成り立つ等式

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\{g(x_k) - g(x_{k-1})\} + \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1})\{f(x_k) - f(x_{k-1})\} = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

において, $\mathrm{mesh}(\Delta) \to 0$ として極限を取れば良い. □

Theorem 6.8 (置換積分) 区間 $[a, b]$ 上の有界な函数 φ が, 有界変動函数 g について *Riemann-Stieltjes* 積分可能ならば $G(x) = \int_a^x \varphi(x)\, dg(x)$ は $[a, b]$ で有界変動である. 有界函数 f について f が G に関して *Riemann-Stieltjes* 積分可能であることと $f\varphi$ が g に関して *Riemann-Stieltjes* 積分可能であることは同値であり,

$$\int_a^b f(x)\, dG(x) = \int_a^b f(x)\varphi(x)\, dg(x)$$

が成り立つ.

Proof. まず任意の部分区間 $[c, d] \subset [a, b]$ について

$$|G(d) - G(c)| = \left| \int_c^d \varphi(x)\, dg(x) \right| \le \sup_{[c,d]} |\varphi| \cdot W_c^d(g) \le \sup_{[a,b]} |\varphi| \cdot W_c^d(g)$$

が成り立つことより

$$\sum_{k=1}^{n} |G(x_k) - G(x_{k-1})| \le \sum_{k=1}^{n} \sup_{[x_{k-1},x_k]} |\varphi| W_{x_{k-1}}^{x_k}(g) \le \sup_{[a,b]} \sum_{k=1}^{n} W_{x_{k-1}}^{x_k}(g) = \sup_{[a,b]} W_a^b(g)$$

となるので G は有界変動である.

次に任意の分割 $\Delta : a = x_0 < \cdots < x_n = b$ と付随する点列 $\{\xi_k\}$ について

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(G(x_k) - G(x_{k-1})) - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\varphi(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1}) \right| \\
=&\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi(x)\, dg(x) - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\varphi(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} dg(x) \right| \\
=&\left| \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)\{\varphi(x) - \varphi(\xi_k)\}\, dg(x) \right| \\
\le&\sum_{k=1}^{n} \sup_{[x_{k-1},x_k]} |f| \cdot \mathrm{osc}_{[x_{k-1},x_k]}\, \varphi \cdot W_{x_{k-1}}^{x_k}(g) \\
\le&\sup_{[a,b]} |f| \sum_{k=1}^{n} \mathrm{osc}_{[x_{k-1},x_k]}\, \varphi \cdot W_{x_{k-1}}^{x_k}(g)
\end{aligned}$$

φ は g に関して $[a, b]$ 上で Riemann-Stieltjes 積分可能であるから $\mathrm{mesh}(\Delta) \to 0$ のとき再右辺 $|rightarrow 0$ である. ここで f が G に関して Riemann-Stieltjes 積分可能であると仮定すれば,

$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(G(x_k)-G(x_{k-1})) \to \int_a^b f(x)\,dG(x)$ が成り立つので $\lim_{\mathrm{mesh}(\Delta)\to 0}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\varphi(\xi_k)(g(x_k)-g(x_{k-1}))$ も存在することになる．この極限こそ $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dg(x)$ であり，$f\varphi$ は g に関して Riemann-Stieltjes 積分可能になりさらに $\int_a^b f(x)\,dG(x) = \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dg(x)$ が成り立つ.

$f\varphi$ が g に関して Riemann-Stieltjes 積分可能な場合も同様である. $\square$

Theorem 6.9 各 $n \in \mathbb{N}$ について, 函数 f_n は区間 $[a,b]$ 上の有界函数であり, 有界変動函数 g に関して *Riemann-Stieltjes* 積分可能とする．また函数列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は, 函数 f に $[a,b]$ 上, 一様収束するとする. このとき f は g に関して *Riemann-Stieltjes* 積分可能であり

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,dg(x)$$

が成り立つ.

Proof. $\varepsilon_n = \sup_{[a,b]}|f_n(x) - f(x)|$ と置くと, $\varepsilon_n \to 0$ である. 任意の部分区間 $[c,d] \subset [a,b]$ について

$$|f_n(x) - f_n(y)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - f_n(y)| \le 2\varepsilon_n + \operatorname{osc}_{[c,d]} f, \quad x, y \in [c,d]$$

が成り立つので

$$\operatorname{osc}_{[c,d]} f_n \le 2\varepsilon_n + \operatorname{osc}_{[c,d]} f$$

が成り立つ. f_n と f を入れ替えて同じ議論を行えば

$$\operatorname{osc}_{[c,d]} f \le 2\varepsilon_n + \operatorname{osc}_{[c,d]} f_n$$

が成り立つので, 結局

$$|\operatorname{osc}_{[c,d]} f_n - \operatorname{osc}_{[c,d]} f| \le 2\varepsilon_n$$

が成り立つ.

任意の $\varepsilon > 0$ について $n_0 \in \mathbb{N}$ を

$$\varepsilon_{n_0} < \frac{\varepsilon}{4(W_a^b(g)+1)}$$

が成り立つように取り, $\delta > 0$ を $\mathrm{mesh}(\Delta) < \delta$ ならば

$$\sum_{k=1}^N \operatorname{osc}_{[x_{k-1},x_k]} f_{n_0} \cdot W_{x_{k-1}}^{x_k}(g) < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つように取る. このとき

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^N \operatorname{osc}_{[x_{k-1},x_k]} f \cdot W_{x_{k-1}}^{x_k}(g) \\
\le&\sum_{k=1}^N (\operatorname{osc}_{[x_{k-1},x_k]} f_{n_0} + 2\varepsilon_{n_0}) \cdot W_{x_{k-1}}^{x_k}(g) \\
\le&\sum_{k=1}^N \operatorname{osc}_{[x_{k-1},x_k]} f_{n_0} \cdot W_{x_{k-1}}^{x_k}(g) + 2\varepsilon_{n_0} W_a^b(g) \\
\le&\frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\varepsilon}{4(W_a^b(g)+1)} W_a^b(g) < \varepsilon
\end{aligned}$$

より f は g に関して Riemann-Stieltjes 積分可能である. また Theorem 6.4 と Theorem 6.1 より

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dg(x) - \int_a^b f_n(x)\,dg(x)\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dg(x)\right| \leq \varepsilon_n M_a^b(g) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ. $\square$

Theorem 6.10 (Helly's Second Theorem) 函数 f は $[a,b]$ で連続で g は有界変動とする. また $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $[a,b]$ 上の有界変動函数の列で, $a,b \in Z$ を満たす $[a,b]$ の稠密部分集合 Z 上で $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ を満たすとする. このとき $\{W_a^b(g_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が有界ならば

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,dg_n(x) = \int_a^b f(x)\,dg(x)$$

が成り立つ.

Proof. $\varphi_n = g_n - g$ と置くとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,d\varphi_n(x) = 0$$

を示せば良い. まず $W_a^b(\varphi_n) \leq W_a^b(g_n) + W_a^b(g)$ より $W_a^b(\varphi_n) \leq M$, $n = 1, 2, \ldots$ を満たす M が存在する. 任意の $\varepsilon > 0$ が与えられたとして f の一様連続性より $\delta > 0$ を $\mathrm{mesh}(\Delta) < \delta$ ならば

$$\mathrm{osc}_{[x_{k-1},x_k]} f \leq \frac{\varepsilon}{2M}$$

が成り立つように取れる. このとき Lemma 5.6 より

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\varphi_n(x) - \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(\varphi_n(x_k) - \varphi_n(x_{k-1}))\right| \leq \frac{\varepsilon}{2M} W_a^b(\varphi_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

あらかじめ分割 $\Delta : a = x_0 < c \cdots < x_n = b$ の分点は全て Z の元であるように取ることが出来るので, $n_0 \in \mathbb{N}$ を $n \geq n_0$ ならば

$$\left|\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(\varphi_n(x_k) - \varphi_n(x_{k-1}))\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となるように取ることが出来る. 上の 2 つの不等式を合わせて

$$\left|\int_a^b f(x)\,dg(x)\right| < \varepsilon$$

が成り立ちので

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,dg_n(x) = \int_a^b f(x)\,dg(x)$$

である. $\square$

7　有限測度と Riemann-Stieltjes 積分

μ が $\mathbb{R}$ の位相的 Borel 集合族 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上の有限 (つまり $\mu(\mathbb{R}) < \infty$) 測度とする．また $C_c(\mathbb{R})$ で，$\mathbb{R}$ 上の support が有界な連続関数の全体を表す．

Theorem 7.1 函数

$$g(x) = \mu((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}$$

は右連続な増加函数であり，$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \mu(\mathbb{R})$ を満たす．また任意の $f \in C_c(\mathbb{R})$ について

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dg(x)$$

が成り立つ．但し右辺の積分は $\operatorname{supp} f \subset [a,b]$ となる区間 $[a,b]$ について $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,dg(x)$ と定義する．

Proof.　はじめに $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dg(x)$ が $[a,b]$ のとり方に依らず定まることを示しておこう．これには $[a,b] \subset [A,B]$ のときに $\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_A^B f(x)\,dg(x)$ を示せば良い．これは Theorem 6.3 と区間 $[A,a]$ と $[b,B]$ に於いて f が恒等的に 0 となることより

$$\int_A^B f(x)\,dg(x) = \int_A^a f(x)\,dg(x) + \int_a^b f(x)\,dg(x) + \int_b^B f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,dg(x)$$

となるからである．

任意の $\varepsilon > 0$ が与えられたとして Riemann-Stieltjes 積分の定義と Theorem 5.8 より $\delta > 0$ を $\mathrm{mesh}(\Delta) < \delta$ を満たす任意の分割 $\Delta : a = x_0 < \cdots < x_n = b$ と，それに付随する点列 $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ について

$$\left| \int_a^b f(x)\,dg(x) - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n \mathrm{osc}_{[x_{k-1},x_k]} f \cdot |g(x_k) - g(f(\xi_k))| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つように取れる．このとき

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x) = \int_{(a,b]} f(x)d\mu(x) = \sum_{k=1}^n \int_{(x_{k-1},x_k]} f(x)d\mu(x)$$

と

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\mu((x_{k-1},x_k]) = \sum_{k=1}^n \int_{(x_{k-1},x_k]} f(\xi_k)d\mu(x)$$

が成り立つことより

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\mu(x) - \int_a^b f(x)\,dg(x)\right| \\
\le &\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\mu(x) - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(g(x_k)-g(x_{k-1}))\right| + \left|\int_a^b f(x)\,dg(x) - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(g(x_k)-g(x_{k-1}))\right| \\
= &\left|\sum_{k=1}^n \int_{(x_{k-1},x_k]} (f(x)-f(\xi_k))d\mu(x)\right| + \frac{\varepsilon}{2} \\
\le &\sum_{k=1}^n \int_{(x_{k-1},x_k]} \mathrm{osc}_{[x_{k-1},x_k]}\, f\, d\mu(x) + \frac{\varepsilon}{2} \\
= &\sum_{k=1}^n \mathrm{osc}_{[x_{k-1},x_k]}\, f \cdot |g(x_k)-g(x_{k-1})| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

□

Remark 7.2 上記の証明中では f の連続性を使っていないことに注意すれば, $\operatorname{supp} f \subset [a,b]$ を満たす区間 $[a,b]$ において f が g に関して *Riemann-Stieltjes* 積分可能でありさえすれば

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x) = \int_a^b f(x)\,dg(x)$$

が成り立つ.

さて今度は 測度 μ が $\mathbb{R}$ 上の測度ではなく, 有界閉区間 $[a,b]$ 上の位相的 Borel 集合族$\mathcal{B}([a,b])$ 上の有限測度の場合を考えよう. この場合

$$g(x) = \mu([a,x]), \quad a \le x \le b$$

と定義しても $\int_{[a,b]} f(x)d\mu(x) = \int_a^b f(x)\,dg(x)$ が成り立つとは限らない.

Example 7.3 μ が点 a に *unit mass* を持つ *Dirac* 測度ならば, 任意の連続函数 f について $\int_{[a,b]} f(x)\,d\mu(x) = f(a)$ であるが, 一方 $g(x) \equiv 1$ となってしまうので, $\int_a^b f(x)\,dg(x) = 0$ である.

そこで以下のように g の定義を変更する.

Theorem 7.4 函数

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ \mu([a,b]), & a < x \le b \end{cases}$$

は増加函数であり, $(a,b]$ で右連続, $g(a)=0$, $g(b)=\mu([a,b])$ を満たす. また任意の $f \in C([a,b])$ について

$$\int_{[a,b]} f(x)d\mu(x) = \int_a^b f(x)\,dg(x)$$

が成り立つ.

Proof. 任意の $\varepsilon > 0$ が与えられたとして Riemann-Stieltjes 積分の定義と Theorem 5.8 より $\delta > 0$ を $\mathrm{mesh}(\Delta) < \delta$ を満たす任意の分割 $\Delta : a = x_0 < \cdots < x_n = b$ と, それに付随する点列 $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ について

$$\left| \int_a^b f(x)\, dg(x) - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$
$$\sum_{k=1}^n \operatorname{osc}_{[x_{k-1}, x_k]} f \cdot |g(x_k) - g(f(\xi_k))| < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つように取れる. また必要ならば $\delta > 0$ をより小さく取り直せば f の点 a での連続性より

$$|f(x) - f(a)|\mu(\{a\}) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad a \leq x \leq x_1$$

が成り立つとして良い.

このとき

$$\int_{[a,b]} f(x) d\mu(x) = f(a)\mu(\{a\}) + \int_{(a,b]} f(x) d\mu(x) = f(a)\mu(\{a\}) + \sum_{k=1}^n \int_{(x_{k-1}, x_k]} f(x) d\mu(x)$$

と

$$g(x_1) - g(x_0) = g(x_1) - g(a) = g(x_1) = \mu([a, x_1]) = \mu(\{a\}) + \mu((a, x_1])$$

より

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) =& f(\xi_1)\mu(\{a\}) + \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\mu((x_{k-1}, x_k]) \\
=& f(\xi_1)\mu(\{a\}) + \sum_{k=1}^n \int_{(x_{k-1}, x_k]} f(\xi_k) d\mu(x)
\end{aligned}$$

が成り立つことより

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{[a,b]} f(x)\, d\mu(x) - \int_a^b f(x)\, dg(x) \right| \\
\leq& \left| \int_{[a,b]} f(x)\, d\mu(x) - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) \right| + \left| \int_a^b f(x)\, dg(x) - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) \right| \\
=& \left| (f(a) - f(\xi_1))\mu(\{a\}) + \sum_{k=1}^n \int_{(x_{k-1}, x_k]} (f(x) - f(\xi_k)) d\mu(x) \right| + \frac{\varepsilon}{3} \\
\leq& |f(a) - f(\xi_1)|\mu(\{a\}) + \sum_{k=1}^n \int_{(x_{k-1}, x_k]} \operatorname{osc}_{[x_{k-1}, x_k]} f\, d\mu(x) + \frac{\varepsilon}{3} \\
=& \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{k=1}^n \operatorname{osc}_{[x_{k-1}, x_k]} f \cdot |g(x_k) - g(x_{k-1})| + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

有界閉区間 $[a,b]$ 上の函数 g が増加ならば各内点において左右の極限が存在する. そこで

$$g_+(x) = \begin{cases} g(a), & x = a \\ \lim_{x \to x+0} g(x), & a < x < b \\ g(b), & x = b \end{cases}, \qquad g_-(x) = \begin{cases} g(a), & x = a \\ \lim_{x \to x-0} g(x), & a < x < b \\ g(b), & x = b \end{cases}$$

と置けば $a \le x_1 < x_2 \le b$ について

$$g(a) \le g_-(x_1) \le g(x_1) \le g_+(x_1) \le g_-(x_2) \le g(x_2) \le g_+(x_2) \le g(b)$$

が成り立ち, g_-, g_+ も増加でありそれぞれ (a,b) において左または右連続である.

次の定理は $g_\pm$ と g の端点での値が等しい, つまり $g_\pm(a) = g(a)$, $g_\pm(b) = g(b)$ が成り立つように定義したから成り立つことに注意しておこう.

Theorem 7.5 (増加函数の変形と Riemann-Stieltjes 積分) 有界閉区間 $[a,b]$ 上の有界函数 f が $[a,b]$ 上の増加函数 g に関して *Riemann-Stieltjes* 積分可能であるとする. このとき f は $g_\pm$ についても *Riemann-Stieltjes* 積分可能であり,

$$\int_a^b f(x)\,dg_\pm(x) = \int_a^b f(x)\,dg(x)$$

が成り立つ.

Proof. どちらの場合もほぼ同様に証明できるので, g_+ の場合に示しておこう.

任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を $\mathrm{mesh}(\Delta) < \delta$ をみたす任意の分割 $\Delta : a = x_0 < \cdots < x_n = b$ と付随する点列 $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ について

$$\left| \int_a^b f(x)\,dg(x) - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$
$$\sum_{k=1}^n \mathrm{osc}_{[x_{k-1},x_k]} f \cdot W_{x_{k-1}}^{x_k}(g) < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つように取る．このとき $\mathrm{mesh}(\Delta) < \dfrac{\delta}{2}$ を満たす任意の分割 Δ と付随する点列 $\{\xi_k\}$ について

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(g_+(x_k) - g_+(x_{k-1})) - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1}))\right| \\
=&\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(g_+(x_k) - g(x_k)) - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(g_+(x_{k-1}) - g(x_{k-1}))\right| \\
=&\left|f(\xi_n)(g_+(b) - g(b)) - f(\xi_1)(g_+(a) - g(a)) + \sum_{k=1}^{n-1}(f(\xi_k) - f(\xi_{k+1}))(g_+(x_k) - g(x_k))\right| \\
=&\left|\sum_{k=1}^{n-1}(f(\xi_k) - f(\xi_{k+1}))(g_+(x_k) - g(x_k))\right| \\
\leq&\sum_{k=1}^{n-1} |f(\xi_k) - f(\xi_{k+1})||g_+(x_k) - g(x_k)|
\end{aligned}$$

ここで各 k について $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k \leq \xi_{k+1} \leq x_{k+1}$ であるから Δ' を Δ の偶数番目の分点 $x_0, x_2, \ldots$ に b を加えたものよりなる $[a, b]$ の分割とし, Δ'' を奇数番目の分点 $x_1, x_3, \ldots$ に a と b を加えたものよりなる $[a, b]$ の分割とする．$\Delta' : a = y_0 < \cdots < y_k = b$, $\Delta'' : a = z_0 < \cdots < z_\ell = b$, と置こう．このとき $\mathrm{mesh}(\Delta') \leq 2\,\mathrm{mesh}(\Delta) < \delta$ $\mathrm{mesh}(\Delta'') \leq 2\,\mathrm{mesh}(\Delta) < \delta$ であるから

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-1} |f(\xi_k) - f(\xi_{k+1})||(g_+(x_k) - g(x_k)| \\
\leq&\sum_{i=1}^{k} \mathrm{osc}_{[y_{i-1}, y_i]} f \cdot W_{y_{i-1}}^{y_i}(g) + \sum_{i=1}^{\ell} \mathrm{osc}_{[z_{i-1}, z_i]} f \cdot W_{z_{i-1}}^{z_i}(g) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}
\end{aligned}$$

以上より $\mathrm{mesh}(\Delta) < \frac{\delta}{2}$ を満たす任意の分割 Δ と付随する点列 $\{\xi_k\}$ について

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\,dg(x) - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(g_+(x_k) - g_+(x_{k-1}))\right| \\
\leq&\left|\int_a^b f(x)\,dg(x) - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1}))\right| \\
&+\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(g_+(x_k) - g_+(x_{k-1})) - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1}))\right| \\
\leq&\frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

これは f が g_+ について Riemann-Stieltjes 積分可能であり $\int_a^b f(x)\,dg^+(x) = \int_a^b f(x)\,dg(x)$ が成り立つことを示す．$\square$

参考文献

[1] S. Łojasiewicz, An introduction to the theory of real functions, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1988.

索 引