

Schwarz の補題と応用: Ahlfors, Conformal Invariants の第 1 章
を読む

柳原 宏

2023 年の 5 月から山口大学で Ahlfors の Conformal Invariants [2] についてのゼミを開始した。複素解析の分野では大変有名な本であり, AMS Chelsea Pub. からの再版に大沢先生による日本語の訳本 [32] もある。

ゼミの参加者は 5 名で, 全員が研究者であるから, 学生用の講義の時には煩雑すぎて控えるような, 証明の細部も省略することなく検討した。このファイルはゼミのときのノートをまとめたものであり, Ahlfors [2] の第 1 章の内容に詳しい証明をつけ, 説明を補足したものである。このため記述が冗長になっていることをお断りしておく。

目次

| | |
|-------------------------------------|----|
| 第 I 部 | 4 |
| 第 1 章 準備 | 5 |
| 1.1 複素線積分 | 5 |
| 1.2 一次分数変換の円々対応と鏡像 | 14 |
| 1.3 Gauss 曲率 | 22 |
| 第 2 章 有界正則函数 | 31 |
| 2.1 Schwarz-Pick の定理 | 31 |
| 2.2 有限 Blaschke 積 | 35 |
| 2.3 Carathéodory の補間問題と Schur パラメータ | 37 |
| 2.4 Nevanlinna-Pick の補間問題 | 41 |
| 第 3 章 星状函数と凸函数 | 49 |
| 3.1 Darboux の定理 | 49 |
| 3.2 Starlike univalent functions | 51 |
| 3.3 Convex univalent functions | 54 |
| 3.4 Hayman の証明法 | 58 |
| 3.5 平面曲線の曲率と Carathéodory の定理 | 59 |
| 第 4 章 角微分 | 63 |
| 4.1 角微分 | 63 |
| 4.2 Herglotz の表現公式を用いた Julia の補題の証明 | 71 |
| 第 5 章 単位円板上の双曲計量 | 74 |
| 5.1 単位円板の自己等角写像 | 74 |
| 5.2 双曲計量 | 78 |
| 5.3 双曲計量に関する曲線の長さ | 79 |
| 5.4 双曲計量に関する最短曲線 | 82 |
| 第 6 章 基本群と被覆空間 | 88 |
| 6.1 道のホモトピー | 88 |
| 6.2 基本群 | 93 |
| 6.3 被覆空間 | 96 |

| | | |
|---------------|--------------------------------------|------------|
| 6.4 | 被覆空間と基本群 | 103 |
| 6.5 | 被覆空間の同型 | 107 |
| 6.6 | 被覆空間の存在定理 | 111 |
| 6.7 | 被覆変換と正規被覆空間 | 117 |
| 6.8 | 不連続群と被覆空間 | 121 |
| 第 7 章 | Riemann 面上の双曲計量 | 124 |
| 7.1 | Riemann 面と等角構造 | 124 |
| 7.2 | 被覆 Riemann 面 | 128 |
| 7.3 | 単連結 Riemann 面の分類 | 129 |
| 7.4 | 双曲計量 | 130 |
| 第 8 章 | Ultrahyperbolic Metric | 136 |
| 8.1 | Ultrahyperbolic metrics | 136 |
| 8.2 | SK-metric と Ahlfors の補題の一意性 | 140 |
| 8.3 | $\lambda_{0,1}$ の評価 | 144 |
| 第 9 章 | 領域の幾何的性質の双曲計量への反映 –Minda の理論– | 147 |
| 9.1 | Riemann 面における等角計量 | 147 |
| 9.2 | Ahlfors の補題の拡張 | 147 |
| 9.3 | 円, 直線に関する反転と等角計量 | 149 |
| 第 10 章 | Picard の定理 | 153 |
| 10.1 | 双曲計量の評価から導かれる Schottky 型の評価式 | 153 |
| 10.2 | Hayman による Schottky 型の評価式 | 154 |
| 10.3 | Picard の定理 | 158 |
| 第 11 章 | Bloch and Landau constants | 161 |
| 11.1 | 像 Riemann 面 | 161 |
| 11.2 | 不分岐円板と Bloch 定数 | 162 |
| 11.3 | Landau 定数 | 165 |
| 11.4 | SK-metric | 167 |
| 11.5 | Bloch-Landau 定数再訪 | 167 |
| 参考文献 | | 170 |

第 I 部

第 1 章

準備

Ahlfors [2] 第 1 章第 1 節では“単位円板内の長さ有限な曲線 γ は不変な長さ

$$\int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1-|z|^2}$$

を持つ。”とある。複素解析の入門的な講義、教科書では長さ有限な曲線 (rectifiable curve) に関する線積分を取り扱わず、区分的に C^1 級の曲線に限定し線積分を定義するのが最近の傾向らしい。このような入門書を読んだから、Ahlfors [2] を読み始めると、最初から躓くことになってしまう。そこではじめに Stieltjes 積分の基本事項と複素線積分についてまとめておくが、既知な読者は適当に読み飛ばして頂きたい。

§2 は一次 (分数変換) による複素平面内の円または直線の像が円または直線になるという円円対応と呼ばれる事実について強引な計算を行って示しておいた。また円または直線 Γ に関し鏡像の位置にある 2 点の像は、 Γ の像である円または直線に関し鏡像の位置にあることもやはりかなり強引な計算で示した。§2 についても既に学んでいる方も多いと思う。

§3 は 3 次元空間内の曲面の Gauss 曲率に関して解説を行った。といっても第 2 章以降で使うのは等角な Riemann 計量から Gauss 曲率を計算する公式のみであり、この節は完全な蛇足 (というには分量が多すぎるが) である。読者もご存知の通り、数学書を読むのは本当に骨が折れる。我慢して読み進めるには知的体力とでも言うべき忍耐力が必要である。残念なことに、この知的体力は有限であり、簡単に尽きてしまう。この節は適当に読み飛ばして先に進み、本当に必要と思う時 (来るとは思えないが) に到ってから読むのがよい。

1.1 複素線積分

1.1.1 長さ有限な曲線

以下、ある区間から \mathbb{C} への連続写像のことを (複素平面内の) 曲線と言うこととする。区間 $[a, b] := \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$ ($a < b$) 上の曲線 $\gamma : z = z(t) = x(t) + iy(t)$, について、区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

$$(1.1) \quad S(\Delta) = S(\Delta, \gamma) := \sum_{k=1}^n |z(t_k) - z(t_{k-1})|$$

と置く。曲線 γ が長さ有限 (rectifiable) であるとは区間 $[a, b]$ の全ての分割 $\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ に関する $S(\Delta)$ の上限 L が有限であるときを言う。つまり

$$(1.2) \quad L = L_a^b(\gamma) := \sup_{\Delta} S(\Delta) < \infty$$

が成り立つことである。このとき上限 L を γ の長さと呼ぶ。ここで不等式 $|x(t_k) - x(t_{k-1})| \leq |z(t_k) - z(t_{k-1})|$ より $\sum_{k=1}^n |x(t_k) - x(t_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^n |z(t_k) - z(t_{k-1})| \leq L$ が成り立つ。従って γ が長さ有限ならば、実部 $x(t)$ は有界変動であり、全く同様に虚部 $y(t)$ も有界変動である。逆に $|z(t_k) - z(t_{k-1})| \leq |x(t_k) - x(t_{k-1})| + |y(t_k) - y(t_{k-1})|$ より実部 $x(t)$ と虚部 $y(t)$ が有界変動ならば γ は長さ有限である。

曲線の長さはパラメータの取り方に依らない。つまり次が成り立つ。

Theorem 1.1. 写像 $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ が連続で非減少であり $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ ならば

$$L_a^b(\gamma) = L_\alpha^\beta(\gamma \circ \varphi).$$

が成り立つ。

Proof. 区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta: a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ に対して $t_j = \varphi(s_j)$ を満たす $s_j, j = 1, 2, \dots, n-1$ を取り、 $s_0 = \alpha, s_n = \beta$ と置く。このとき区間 $[\alpha, \beta]$ の分割 $\tilde{\Delta}: \alpha = s_0 < s_1 < \dots < s_{n-1} < s_n = \beta$ について

$$\sum_{k=1}^n |z(t_k) - z(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^n |z(\varphi(s_k)) - z(\varphi(s_{k-1}))| \leq L_\alpha^\beta(\gamma \circ \varphi)$$

が成り立つ。従って $L_a^b(\gamma) \leq L_\alpha^\beta(\gamma \circ \varphi)$ である。

逆に区間 $[\alpha, \beta]$ の任意の分割 $\tilde{\Delta}: \alpha = s_0 < s_1 < \dots < s_n = \beta$ に対して $t_k = \varphi(s_k), k = 0, 1, \dots, n$ と置く。このとき $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$ である。 $t'_0 = a$ と置き t'_1 を t_1, \dots, t_n の中で t'_0 を越える最初のものとする。同様に t'_2 を t'_1 を越える最初のものとし、次々に取って行き $a = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_m = b$ を得たとする。つまり $\{t'_k\}_{k=1}^m$ とは $\{t_k\}_{k=1}^n$ の中で相異なるものを取り出し順に並べたものである。ここで区間 $[a, b]$ の分割を $\Delta: a = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_m = b$ と置けば

$$\sum_{k=1}^n |\gamma \circ \varphi(s_k) - \gamma \circ \varphi(s_{k-1})| = \sum_{k=1}^n |z(t_k) - z(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^m |z(t'_k) - z(t'_{k-1})| \leq L_a^b(\gamma)$$

より $L_\alpha^\beta(\gamma \circ \varphi) \leq L_a^b(\gamma)$ が成り立つ。 \square

さて $a \leq c < d \leq b$ を満たす c, d について $L_c^d(\gamma)$ で部分曲線 $z = z(t), c \leq t \leq d$ の長さを表す。このとき

Theorem 1.2. 任意の $c \in [a, b]$ について

$$(1.3) \quad L = L_a^b(\gamma) = L_a^c(\gamma) + L_c^b(\gamma), \quad a \leq c \leq b$$

が成り立つ。

証明は容易であるから読者の演習問題としよう。

2つの曲線 $\gamma: z = z(t), a \leq t \leq b$ と $\tilde{\gamma}: z = \tilde{z}(t), b \leq t \leq c$ が $z(b) = \tilde{z}(b)$ を満たせば、 γ の次に $\tilde{\gamma}$ をつないだ曲線を

$$\gamma + \tilde{\gamma} = \begin{cases} z(t), & a \leq t \leq b \\ \tilde{z}(t), & b < t \leq c \end{cases}$$

と置けば $\gamma + \tilde{\gamma}$ も曲線であり、 γ と $\tilde{\gamma}$ がともに長さ有限ならば $\gamma + \tilde{\gamma}$ も長さ有限であり

$$(1.4) \quad L_a^c(\gamma + \tilde{\gamma}) = L_a^b(\gamma) + L_b^c(\tilde{\gamma})$$

が成り立つ。これも証明は容易であるから読者の演習問題としよう。

Theorem 1.3. 長さ有限な曲線 $\gamma : z(t)$, $a \leq t \leq b$ について $L_a^t(\gamma)$, $a \leq t \leq b$ は t について非減少で連続である.

Proof. 非減少性は明らかであろう. まず $a \leq c < b$ とし, $L_a^t(\gamma)$ が c において右連続であることを示そう. 任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を $|s - t| \leq \delta$ ならば $|z(t) - z(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$ となるように取る. また 区間 $[c, b]$ の分割 $\Delta : c = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ を

$$L_c^b(\gamma) < \sum_{k=1}^n |z(t_k) - z(t_{k-1})| + \frac{\varepsilon}{2}$$

かつ $t_1 - t_0 < \delta$ となるように取る. このとき

$$\begin{aligned} L_c^b(\gamma) &< |z(t_1) - z(t_0)| + \sum_{k=2}^n |z(t_k) - z(t_{k-1})| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=2}^n |z(t_k) - z(t_{k-1})| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq L_{t_1}^b(\gamma) + \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ. よって $c = t_0 \leq t \leq t_1$ ならば

$$0 \leq L_c^b(\gamma) - L_t^b(\gamma) \leq L_c^b(\gamma) - L_{t_1}^b(\gamma) < \varepsilon$$

が成り立つ. これより

$$0 \leq L_a^t(\gamma) - L_a^c(\gamma) = L_a^b(\gamma) - L_t^b(\gamma) - (L_a^b(\gamma) - L_c^b(\gamma)) = L_c^b(\gamma) - L_{t_1}^b(\gamma) < \varepsilon$$

を得るので $L_a^t(\gamma)$ は $t = c$ において右連続である.

今度は $a < c \leq b$ とし, $L_a^t(\gamma)$ が c において左連続であることを示そう. 任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を $|s - t| \leq \delta$ ならば $|z(t) - z(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$ となるように取る. また 区間 $[a, c]$ の分割 $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = c$ を

$$L_a^c(\gamma) < \sum_{k=1}^n |z(t_k) - z(t_{k-1})| + \frac{\varepsilon}{2}$$

かつ $t_n - t_{n-1} < \delta$ となるように取る. このとき

$$\begin{aligned} L_a^c(\gamma) &< \sum_{k=1}^{n-1} |z(t_k) - z(t_{k-1})| + |z(t_n) - z(t_{n-1})| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \sum_{k=1}^{n-1} |z(t_k) - z(t_{k-1})| + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq L_a^{t_{n-1}}(\gamma) + \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ. よって $t_{n-1} \leq t \leq t_n = c$ ならば

$$0 \leq L_a^c(\gamma) - L_a^t(\gamma) \leq L_a^c(\gamma) - L_a^{t_{n-1}}(\gamma) < \varepsilon$$

が成り立つので $t = c$ において左連続である. □

分割 $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ について $|\Delta| := \max_{k=1, \dots, n} (t_k - t_{k-1})$ を Δ の幅と呼ぶ.

Theorem 1.4. 長さ有限な曲線 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ について

$$(1.5) \quad L_a^b(\gamma) = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |z(t_k) - z(t_{k-1})|$$

が成り立つ。つまり任意の $\varepsilon > 0$ についてある $\delta > 0$ で次の性質を持つものが存在する。区間 $[a, b]$ の分割 Δ が $|\Delta| < \delta$ を満たせば

$$|L_a^b(\gamma) - S(\Delta)| < \varepsilon$$

が成り立つ。

証明の前に重要な注意をしておこう。分割 Δ' が分割 Δ の分点を全て含んでいるとき Δ' は Δ の細分であると言う。例えば分割 Δ の隣り合う 2 つの分点 t_{k-1}, t_k の間に分点 s を追加すれば $|z(t_k) - z(t_{k-1})| \leq |z(t_k) - z(s)| + |z(s) - z(t_{k-1})|$ が成り立つ。従って Δ' が Δ の細分ならば $S(\Delta) \leq S(\Delta')$ が成り立つ。

Proof. 任意の $\varepsilon > 0$ について分割 $\Delta_0 : a = s_0 < s_1 < \dots < s_m = b$

$$L_a^b(\gamma) < S(\Delta_0) + \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つように取り、 $\lambda = \min\{s_1 - s_0, \dots, s_m - s_{m-1}\}$ と置く。また $\delta > 0$ を $|s - t| < \delta$ ならば $|z(s) - z(t)| < \frac{\varepsilon}{4m}$ が成り立つように取る。

さて $|\Delta| < \min\{\delta, \lambda\}$ を満たす任意の分割 $\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ について、 Δ_0 の分点を Δ に追加して得られる分割を Δ' とする。このとき各 $k = 1, \dots, n$ について $[t_{k-1}, t_k]$ に含まれる s_j は高々 1 つであり、このような区間において

$$0 \leq |z(t_k) - z(s_j)| + |z(s_j) - z(t_{k-1})| - |z(t_k) - z(t_{k-1})| \leq |z(t_k) - z(s_j)| + |z(s_j) - z(t_k)| \leq 2 \frac{\varepsilon}{4m} = \frac{\varepsilon}{2m}$$

であるから

$$0 \leq S(\Delta') - S(\Delta) \leq m \times \frac{\varepsilon}{2m} = \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ。よって

$$L_a^b(\gamma) \geq S(\Delta) > S(\Delta') - \frac{\varepsilon}{2} \geq S(\Delta_0) - \frac{\varepsilon}{2} > L_a^b(\gamma) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = L_a^b(\gamma) - \varepsilon$$

が成り立つ。 □

Theorem 1.5. γ が区分的に C^1 級ならば

$$L_a^b(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

が成り立つ。

Proof. theorem 1.2 を考慮すれば区間 $[a, b]$ 全体で C^1 級の場合に示せば十分である。このとき $z(t) = x(t) + iy(t)$ とし任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を $|s - t| \leq \delta$ ならば $|x(s) - x(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, |y(s) - y(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ かつ $|\Delta| < \delta$ ならば $|S(\Delta) - L| < \varepsilon$ が成り立つように取る。

さて分割 $\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ は $|\Delta| < \delta$ を満たすとする. 各 k について平均値の定理より $z(t_k) - z(t_{k-1}) = (x'(\xi_k) + iy'(\eta_k))(t_k - t_{k-1})$ を満たす $\xi_k, \eta_k \in [t_{k-1}, t_k]$ を取ると,

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b |z'(t)| dt - S(\Delta) \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \{|z'(t)| - |x'(\xi_k) + iy'(\eta_k)|\} dt \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |x'(t) - x'(\xi_k) + i(y'(t) - y'(\eta_k))| dt \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} 2 \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dt = \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ. □

1.1.2 複素 Stieltjes 積分

それでは同じ区間で定義された複素数値関数 $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ について Stieltjes 積分 $\int_a^b f(t) dg(t)$ と $\int_a^b f(t) |dg(t)|$ の定義を述べよう.

Definition 1.6. 区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ について $t_{k-1} \leq \xi_k \leq t_k, k = 1, \dots, n$ を満たす点列 $\{\xi_k\}$ を Δ に付随する点列と言う. このとき極限

$$(1.6) \quad \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \{g(t_k) - g(t_{k-1})\}$$

$$(1.7) \quad \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) |g(t_k) - g(t_{k-1})|$$

が存在すれば, それぞれを $\int_a^b f(t) dg(t)$, $\int_a^b f(t) |dg(t)|$ と表す. $\int_a^b f(t) dg(t)$ は f の g に関する Stieltjes 積分と呼ばれる. $\int_a^b f(t) |dg(t)|$ については流布した名前はないので, ここでは便宜的に f の $|dg|$ に関する Stieltjes 積分と呼ぶことにする. Stieltjes 積分の定義を ε - δ 式に丁寧に書けば, $\int_a^b f(t) dg(t) = \ell \in \mathbb{C}$ であるとは

$$(1.8) \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \Delta \text{ and } \{\xi_k\} \text{ with } |\Delta| < \delta : \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \{g(t_k) - g(t_{k-1})\} - \ell \right| < \varepsilon$$

が成り立つことである. $\{\xi_k\}$ については $t_{k-1} \leq \xi_k \leq t_k, k = 1, \dots, n$ を満たせば任意であることを注意しておこう. また $|dg|$ に関する Stieltjes 積分の ε - δ 式の定義については, 上の論理式において $\{g(t_k) - g(t_{k-1})\}$ を $|g(t_k) - g(t_{k-1})|$ に置き換えると得られる.

関数 $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ について全ての分割 Δ に関する有限値な上限が存在するとき

$$L(g) := \sup_{\Delta} \sum_{k=1}^n |g(t_k) - g(t_{k-1})| < \infty$$

複素有界変動と呼ぶことにする. このとき $g(t) = u(t) + iv(t)$ と, 実部と虚部に分解すれば前節で見たように g が複素有界変動であることと, u, v が有界変動であることは同値である. また g が連続で曲線とみなせるときは複素有界変動とは長さ有限であることに他ならず, $L(g)$ は g の長さである.

Theorem 1.7. 函数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ は連続, 函数 $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ は連続で複素有界変動ならば *Stieltjes* 積分 $\int_a^b f(t) dg(t)$, $\int_a^b f(t) |dg(t)|$ はともに存在する.

証明の前に記号を準備しておこう.

$$S(\Delta, \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})), \quad \tilde{S}(\Delta, \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)|g(t_k) - g(t_{k-1})|,$$

と置く.

Proof. はじめに $\int_a^b f(t) dg(t)$ の場合を証明し, その後に $\int_a^b f(t) |dg(t)|$ の場合にどのように証明を変更するかについて説明する.

L を g の長さとする. $L = 0$ のとき定理は明らかに成り立つので $L > 0$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ を

$$|f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{L+1} \quad \text{for } |s - t| < \delta$$

が成り立つように取る.

(i) 分割 $\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ が $|\Delta| < \delta$ を満たせば Δ に付随する任意の点列 $\{\xi_k\}, \{\xi'_k\}$ について

$$|S(\Delta, \{\xi_k\}) - S(\Delta, \{\xi'_k\})| < \varepsilon$$

が成り立つ.

\therefore

$$\begin{aligned} |S(\Delta, \{\xi_k\}) - S(\Delta, \{\xi'_k\})| &= \left| \sum_{k=1}^n (f(\xi_k) - f(\xi'_k))(g(t_k) - g(t_{k-1})) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |f(\xi_k) - f(\xi'_k)| |g(t_k) - g(t_{k-1})| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{L+1} \sum_{k=1}^n |g(t_k) - g(t_{k-1})| \leq \frac{\varepsilon}{L+1} L < \varepsilon \end{aligned}$$

(ii) 分割 $\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ が $|\Delta| < \delta$ を満たし, 分割 $\Delta^* : a = t_0^* < t_1^* < \dots < t_m^* = b$ が Δ の細分 (Δ の全ての分点が Δ^* の分点であること) ならば, Δ, Δ^* に付随する任意の点列 $\{\xi_k\}, \{\xi_k^*\}$ について

$$|S(\Delta, \{\xi_k\}) - S(\Delta^*, \{\xi_k^*\})| < \varepsilon$$

が成り立つ.

∴ 各 $k = 0, 1, \dots, n$ について $t_k = t_{\alpha_k}^*$ を満たす α_k を取ると

$$\begin{aligned}
& |S(\Delta, \{\xi_k\}) - S(\Delta^*, \{\xi_k^*\})| \\
&= \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (g(t_k) - g(t_{k-1})) - \sum_{j=1}^m f(\xi_j^*) (g(t_j^*) - g(t_{j-1}^*)) \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (g(t_k) - g(t_{k-1})) - \sum_{k=1}^n \sum_{j=\alpha_{k-1}+1}^{\alpha_k} f(\xi_j^*) (g(t_j^*) - g(t_{j-1}^*)) \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^n \sum_{j=\alpha_{k-1}+1}^{\alpha_k} (f(\xi_k) - f(\xi_j^*)) (g(t_j^*) - g(t_{j-1}^*)) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^n \sum_{j=\alpha_{k-1}+1}^{\alpha_k} |f(\xi_k) - f(\xi_j^*)| |g(t_j^*) - g(t_{j-1}^*)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{L+1} \sum_{k=1}^n \sum_{j=\alpha_{k-1}+1}^{\alpha_k} |g(t_j^*) - g(t_{j-1}^*)| \leq \frac{\varepsilon}{L+1} L < \varepsilon
\end{aligned}$$

(iii) 分割 Δ, Δ' が $|\Delta|, |\Delta'| < \delta$ を満たせばそれぞれに付随する任意の点列 $\{\xi_k\}, \{\xi'_k\}$ について

$$|S(\Delta, \{\xi_k\}) - S(\Delta', \{\xi'_k\})| < 2\varepsilon$$

が成り立つ。

∴ Δ と Δ' の分点を全て合わせて出来る共通細分を Δ'' で表す。このとき Δ'' に付随する任意の点列 $\{\xi_k''\}$ について (ii) より

$$|S(\Delta, \{\xi_k\}) - S(\Delta'', \{\xi_k''\})| < \varepsilon, \quad |S(\Delta', \{\xi'_k\}) - S(\Delta'', \{\xi_k''\})| < \varepsilon$$

が成り立つからである。

ここで $|\Delta_n| \rightarrow 0$ となる分割の列 $\{\Delta_n\}$ と、付随する列 $\{\xi_k^{(n)}\}$, $n \in \mathbb{N}$ を取れば (iii) より $\{S(\Delta_n, \{\xi_k^{(n)}\})\}$ は Cauchy 列をなすので収束する。その極限を ℓ と置く。

さて分割 Δ が $|\Delta| < \delta$ を満たすとす。また $\{\xi_k\}$ を Δ に付随する列とする。 $|\Delta_n| < \delta$ かつ $|S(\Delta_n, \{\xi_k^{(n)}\}) - \ell| < \varepsilon$ を満たす n を取れば

$$|S(\Delta, \{\xi_k\}) - \ell| \leq |S(\Delta, \{\xi_k\}) - S(\Delta_n, \{\xi_k^{(n)}\})| + |S(\Delta_n, \{\xi_k^{(n)}\}) - \ell| < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

これで $\int_a^b f(t) dg(t)$ の存在が証明された。

$\int_a^b f(t) |dg(t)|$ の存在も一箇所を除いて同様に証明される。まず上記で $S(\Delta, \{\xi_k\})$ とあるところは $\tilde{S}(\Delta, \{\xi_k\})$ に変更する。他の $S(\Delta, \{\xi'_k\})$, $S(\Delta^*, \{\xi_k^*\})$ など同様に変更する。(i) については、それ以外に変更することなく証明が通用する。(ii) においては $M = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$ と置き $\tilde{S}(\Delta, g) = \sum_{k=1}^n |g(t_k) - g(t_{k-1})|$ という

記号を用いることにし、予め $\delta > 0$ を $|\Delta| < \delta$ ならば $L(g) - \frac{\varepsilon}{M+1} < \tilde{S}(\Delta, g)$ が成り立つように取っておけば

$$\begin{aligned}
& \left| \tilde{S}(\Delta, \{\xi_k\}) - \tilde{S}(\Delta^*, \{\xi_k^*\}) \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) |g(t_k) - g(t_{k-1})| - \sum_{j=1}^m f(\xi_j^*) |g(t_j^*) - g(t_{j-1}^*)| \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) |g(t_k) - g(t_{k-1})| - \sum_{k=1}^n \sum_{j=\alpha_{k-1}+1}^{\alpha_k} f(\xi_j^*) |g(t_j^*) - g(t_{j-1}^*)| \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \left\{ |g(t_k) - g(t_{k-1})| - \sum_{j=\alpha_{k-1}+1}^{\alpha_k} |g(t_j^*) - g(t_{j-1}^*)| \right\} + \sum_{k=1}^n \sum_{j=\alpha_{k-1}+1}^{\alpha_k} (f(\xi_k) - f(\xi_j^*)) |g(t_j^*) - g(t_{j-1}^*)| \right| \\
&\leq \max_{a \leq t \leq b} |f(t)| \{S(\Delta^*, g) - S(\Delta, g)\} + \sum_{k=1}^n \sum_{j=\alpha_{k-1}+1}^{\alpha_k} |f(\xi_k) - f(\xi_j^*)| |g(t_j^*) - g(t_{j-1}^*)| \\
&\leq M(L(g) - S(\Delta, g)) + \frac{\varepsilon}{L+1} \sum_{k=1}^n \sum_{j=\alpha_{k-1}+1}^{\alpha_k} |g(t_j^*) - g(t_{j-1}^*)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ。

(iii) においては (ii) における変更に伴い

$$\left| \tilde{S}(\Delta, \{\xi_k\}) - \tilde{S}(\Delta', \{\xi_k'\}) \right| < 4\varepsilon$$

とすればよい。 □

Remark 1.8. *Stieltjes* 積分は、通常 f, g が実数値函数の場合に定義され、 f が有界、 g が有界変動であり、かつ f と g が不連続点を共有しないとき、積分が存在することを示される。ここでは複素線積分への応用を見込んで、 f, g を複素数値に拡張し、 f, g に連続性を、 g には長さ有限 (\iff 実部と虚部が有界変動) という条件を課して証明を行った。

Definition 1.9. 長さ有限な曲線 $\gamma: z = z(t)$, $a \leq t \leq b$ とその像 $\gamma([a, b])$ を含む集合 E 上で定義された函数 $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ について *Stieltjes* 積分 $\int_a^b f(z(t)) dz(t)$ と $\int_a^b f(z(t)) |dz(t)|$ を、それぞれ $\int_\gamma f dz$, $\int_\gamma f |dz|$ と表し γ に沿った f の複素線積分、弧長に関する複素線積分と呼ぶ。また $z(t) = x(t) + iy(t)$ と分解するとき *Stieltjes* 積分 $\int_a^b f(z(t)) dx(t)$, $\int_a^b f(z(t)) dy(t)$ をそれぞれ f の曲線 γ に沿う x, y に関する線積分と呼ぶ。

以下では *Stieltjes* 積分に関する性質を述べる。ここでは一々述べないが上の定義より直ちに対応する複素線積分に関する結果に翻訳が可能であろう。

線形性

$$(1.9) \quad \int_a^b (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) dg(t) = \alpha \int_a^b f_1(t) dg(t) + \beta \int_a^b f_2(t) dg(t),$$

$$(1.10) \quad \int_a^b (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) |dg(t)| = \alpha \int_a^b f_1(t) |dg(t)| + \beta \int_a^b f_2(t) |dg(t)|$$

が成り立つことは、定義より直ちに得られる。また γ の逆向きの曲線 $-\gamma: [-b, -a] \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$-z(t) = z(-t), \quad -b \leq t \leq -a$$

で定義すれば $\tilde{f}(t) = f(-t)$ について

$$(1.11) \quad \int_{-b}^{-a} \tilde{f} dg(t) = - \int_a^b f(t) dg(t), \quad \int_{-b}^{-a} \tilde{f} |dg(t)| = \int_a^b f(t) |dg(t)|$$

が成り立つ. また不等式

$$(1.12) \quad \left| \int_a^b f(t) dg(t) \right| \leq \max_{a \leq t \leq b} |f(t)| \cdot L_a^b(\gamma) \quad \left| \int_a^b f(t) |dg(t)| \right| \leq \max_{a \leq t \leq b} |f(t)| \cdot L_a^b(\gamma)$$

も成り立つ.

Theorem 1.10. 函数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ が連続で $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ が C^1 級ならば

$$(1.13) \quad \int_a^b f(t) dg(t) = \int_a^b f(t)g'(t) dt, \quad \int_a^b f(t) |dg(t)| = \int_a^b f(t)|g'(t)| dt$$

が成り立つ.

Proof. Stieltjes 積分と Riemann 積分の定義より任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を分割 Δ が $|\Delta| < \delta$ を満たせば

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dg(t) - \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})) \right| &< \varepsilon \\ \left| \int_a^b f(t)g'(t) dt - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)g'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) \right| &< \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つように取ることが出来る. ここで ζ_k, ξ_k は $[t_{k-1}, t_k]$ に属する限り任意であること注意しよう.

各 k について平均値の定理より $g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(\eta_k)(t_k - t_{k-1})$ を満たす η_k を取り, $\zeta_k = \xi_k = \eta_k$ と置けば, 上の 2 つの不等式における $\sum_{k=1}^n$ に関する和の部分は一致するので, 辺々加えると三角不等式より $\left| \int_a^b f(t) dg(t) - \int_a^b f(t)g'(t) dt \right| < 2\varepsilon$ を得る. よって (1.13) の 1 つ目の等式が示された. 2 つ目の等式についても同様である. \square

最後に $\int_a^b f(t) |dg(t)|$ を弧長に関する積分と呼ぶ理由を示しておこう. $L_a^t(g)$ で g を区間 $[a, t]$ に制限したときの曲線としての長さを表す.

Theorem 1.11.

$$(1.14) \quad \int_a^b f(t) |dg(t)| = \int_a^b f(t) dL_a^t(g)$$

が成り立つ.

Proof. $M = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$ と置く. Stieltjes 積分の定義より任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を分割 Δ が

$|\Delta| < \delta$ を満たせば

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) |dg(t)| - \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) |g(t_k) - g(t_{k-1})| \right| &< \varepsilon \\ \left| \int_a^b f(t) dL_a^t(g) - \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (L_a^{t_k}(g) - L_a^{t_{k-1}}(g)) \right| &< \varepsilon \\ \left| L_a^b(g) - \sum_{k=1}^n |g(t_k) - g(t_{k-1})| \right| &< \frac{\varepsilon}{M+1} \end{aligned}$$

が成り立つように取ることが出来る. $\xi_k = \zeta_k$ としてよいので

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) |g(t_k) - g(t_{k-1})| - \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) (L_a^{t_k}(g) - L_a^{t_{k-1}}(g)) \right| \\ &\leq \max_{a \leq t \leq b} |f(t)| \sum_{k=1}^n \{L_a^{t_k}(g) - L_a^{t_{k-1}}(g) - |g(t_k) - g(t_{k-1})|\} \\ &\leq M \left\{ L_a^b(g) - \sum_{k=1}^n |g(t_k) - g(t_{k-1})| \right\} \leq \frac{M\varepsilon}{M+1} < \varepsilon \end{aligned}$$

これらの不等式を組み合わせると $\left| \int_a^b f(t) |dg(t)| - \int_a^b f(t) dL_a^t(g) \right| < 3\varepsilon$ を得る. \square

1.2 一次分数変換の円々対応と鏡像

1.2.1 一次分数変換の円々対応

xy 平面において方程式

$$(1.15) \quad A(x^2 + y^2) + b_1x + b_2y + C = 0 \quad (A, b_1, b_2, C \text{ は実定数})$$

は $A \neq 0$ のとき

$$\left(x + \frac{b_1}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{b_2}{2A}\right)^2 = \frac{b_1^2 + b_2^2 - 4AC}{4A^2}$$

と変形出来るので $b_1^2 + b_2^2 - 4AC > 0$ ならば円を表す. また $A = 0$ のときは $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$ ならば直線を表す.

(1.15) は $B = \frac{b_1 - ib_2}{2}$ と置けば

$$(1.16) \quad A|z|^2 + Bz + \overline{B}z + C = 0 \quad (A, C \text{ は実定数}, B \text{ は複素定数})$$

と表すことも出来る. この形のときは $A \neq 0$ で $|B|^2 - AC > 0$ のときに円を $A = 0$ で $B \neq 0$ のときに直線を表す. 従って両方を合わせると

Lemma 1.12. (1.16) が円または直線を表すための必要十分条件は $|B|^2 > AC$ である. またこのとき $A \neq 0$ ならば円を $A = 0$ ならば直線を表す.

それでは一次分数変換 $w = \varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ による方程式 (1.15) で表される円または直線の像がどのようなかを調べてみよう. それには $z = \varphi^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}$ を (1.15) に代入すれば

$$(1.17) \quad A \frac{dw-b}{-cw+a} \frac{\overline{d\overline{w}-\overline{b}}}{-\overline{c\overline{w}+\overline{a}}} + B \frac{dw-b}{-cw+a} + \overline{B} \frac{\overline{d\overline{w}-\overline{b}}}{-\overline{c\overline{w}+\overline{a}}} + C = 0$$

を得る. 分母を払って整理すれば

$$(1.18) \quad \begin{aligned} & \{A|d|^2 + C|c|^2 - B(\bar{c}d + d\bar{c})\}|w|^2 + \{B(\bar{a}d + \bar{b}c) - A\bar{b}d - C\bar{a}c\}w \\ & + \overline{\{B(\bar{a}d + \bar{b}c) - A\bar{b}d - C\bar{a}c\}w} + A|b|^2 + C|a|^2 - B(\bar{a}b + a\bar{b}) = 0 \end{aligned}$$

となる. これを

$$A'|w|^2 + B'w + \overline{B'w} + C' = 0$$

と置こう. $A', C' \in \mathbb{R}$ であることは容易に分かる. また少々長い計算になるが

$$\begin{aligned} |B'|^2 &= |B(\bar{a}d + \bar{b}c) - A\bar{b}d - C\bar{a}c|^2 \\ &= B^2|\bar{a}d + \bar{b}c|^2 + |A\bar{b}d + C\bar{a}c|^2 - B(\bar{a}d + \bar{b}c)(A\bar{b}d + C\bar{a}c) - B(\bar{a}d + \bar{b}c)(A\bar{b}d + C\bar{a}c) \\ &= B^2(|a|^2|d|^2 + |b|^2|c|^2 + \bar{a}d + \bar{b}c + a\bar{d} + \bar{b}c) + A^2|b|^2|d|^2 + C^2|a|^2|c|^2 + AC(\bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}b\bar{c}d) \\ &\quad - AB\{|b|^2(\bar{c}d + \bar{c}d) + (\bar{a}b + \bar{a}b)|d|^2\} - BC\{|a|^2(\bar{c}d + \bar{c}d) + (\bar{a}b + \bar{a}b)|c|^2\} \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} A'C' &= \{A|d|^2 + C|c|^2 - B(\bar{c}d + d\bar{c})\}\{A|b|^2 + C|a|^2 - B(\bar{a}b + a\bar{b})\} \\ &= A^2|b|^2|d|^2 + C^2|a|^2|c|^2 + B^2\{\bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}b\bar{c}d\} \\ &\quad + AC\{|a|^2|d|^2 + |b|^2|c|^2\} - AB\{(\bar{a}b + \bar{a}b)|d|^2 + |b|^2(\bar{c}d + \bar{c}d)\} - BC\{(\bar{a}b + \bar{a}b)|c|^2 + (\bar{c}d + \bar{c}d)|a|^2\} \end{aligned}$$

より

$$(1.19) \quad |B'|^2 - A'C' = (B^2 - AC)|ad - bc|^2$$

が成り立つ. 従って $|B|^2 > AC$ より $|B'|^2 > A'C'$ が成り立つことが分かるので

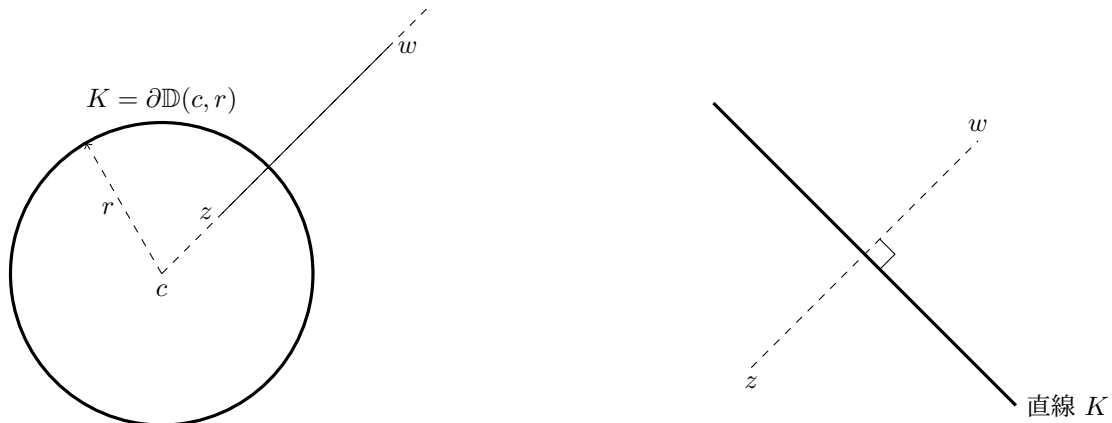
Theorem 1.13. 一次分数変換による円または直線の像は, 円または直線である.

Remark 1.14. 複素解析では直線も円の一種とみなし ∞ を通る円と言ったりする. そこでこれからは, 円というときは, 直線も含めて考えることにする. このとき上の定理は “一次分数変換による円の像は円である.” となる.

1.2.2 円に関する反転

円 K に関する反転と呼ばれる変換を定義しよう. まず $K = \partial\mathbb{D}(c, r)$, $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ の場合, 次の変換を考える. $z \neq c, \infty$ に対し c から z へ伸びる半直線上にあり, $|w - c||z - c| = r^2$ を満たす点 w を考えよう. w は円 K に関する z の鏡像と呼ぶ. また中心 $z = c$ については ∞ をその鏡像と定義する. この z について, その鏡像を対応させる \hat{C} の変換を円 K に関する反転と呼ぶ.

K が直線の場合も, K に関する反転を考える. といってもこの場合は直線に関する対称変換のことを, 反転と定義するだけの話である.



定義から明らかなように同じ円に関する反転を 2 回繰り返せば、恒等変換になる。それでは z の鏡像 w の式表示を求めておこう。 $w - c$ と $z - c$ の偏角は一致するので

$$(1.20) \quad (w - c)\overline{(z - c)} = r^2$$

が成り立つから $z \neq c, \infty$ について

$$w = c + \frac{r^2}{\overline{z - c}}$$

と表すことが出来る。

K が直線の場合の反転の式も求めておこう。例えば K が実軸 $\text{Im } z = 0$ の場合は複素共役 $w = \bar{z}$ を取ればよいが、一般の場合で、 $\theta, c \in \mathbb{R}$ について $K = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(e^{-i\theta}z) = c\}$ と表されるときを考える。このとき $z \in K$ とは $z = e^{i\theta}(t + ic)$, $t \in \mathbb{R}$ と表されることに他ならないので、 K は直線 $\text{Im } \zeta = c$ を原点のまわりに θ 回転した直線である。ここで z, w が互いに鏡像の位置にあるとすると、中点 $\frac{z+w}{2}$ が K 上にあるので

$$z + w = 2e^{i\theta}(t + ic), \exists t \in \mathbb{R}$$

また $\arg(w - z) = \theta + \frac{\pi}{2}$ であるから

$$w - z = 2ie^{i\theta}s, \exists s \in \mathbb{R}$$

と表せる。これら 2 式を辺々足し引きすれば

$$w - ice^{i\theta} = e^{i\theta}(t + is), \quad z - ice^{i\theta} = e^{i\theta}(t - is)$$

を得るので、

$$e^{-i\theta}(w - ice^{i\theta}) = t + is = \overline{t - is} = \overline{e^{-i\theta}(z - ice^{i\theta})} = e^{i\theta}\bar{z} + ic$$

より、直線 $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(e^{-i\theta}z) = c\}$ に関する反転は

$$(1.21) \quad w = e^{2i\theta}\bar{z} + 2ice^{i\theta}$$

を得る。

円に関する反転は、平行移動、相似変換に、回転について不変であることを注意しておく。つまり φ が平行移動、相似変換または回転のとき点 z の円 K に関する鏡像が w ならば点 $\varphi(z)$ の円 $\varphi(K)$ に関する鏡像は $\varphi(w)$ である。

鏡像は Apollonius の円と関係が深い。

Theorem 1.15. 次が成り立つ.

- (i) z_1, z_2 が K に関して互いに鏡像の位置にあるとき, $z \in K$ について距離 $|z - z_1|$ と $|z - z_2|$ の比は一定である.
- (ii) $k > 0$ を定数とする. 点 z_1, z_2 からの距離の比が一定で $|z - z_2| = k|z - z_1|$ であるような点 z の全体 K は円であり, z_1, z_2 はその円に関して互いに鏡像の位置にある.

Proof. (i) K が有界な円の場合は, 適当な平行移動と相似変換, 回転を施すことにより $K = \partial\mathbb{D}$ であり $z_1 = r, z_2 = \frac{1}{r}, r > 0$ と仮定してよい. このとき $z = e^{it} \in \partial\mathbb{D}$ に対し

$$\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = \frac{|e^{it} - r|}{|e^{it} - \frac{1}{r}|} = r \frac{|e^{it} - r|}{|re^{it} - 1|} = r \frac{|e^{it} - r|}{|r - e^{-it}|} = r \frac{|e^{it} - r|}{|r - e^{it}|} = r$$

次に K が直線の場合は z_1, z_2 の垂直二等分線が K であるから $z \in K$ について $|z - z_1| = |z - z_2|$ が成り立ち, 比は 1 である.

(ii) この場合もやはり, 適当な平行移動と回転を施すことにより $z = 1 = a, z_2 = b$ で $a, b \in \mathbb{R}$ と仮定してよい. このとき

$$\begin{aligned} |z - z_2| = k|z - z_1| &\iff |z - b| = k|z - a| \\ &\iff |z - b|^2 = k^2|z - a|^2 \\ &\iff |z|^2 - b(z + \bar{z}) + b^2 = k^2\{|z|^2 - a(z + \bar{z}) + a^2\} \end{aligned}$$

となり $k > 1$ ならば

$$\begin{aligned} &\iff (k^2 - 1)|z|^2 - (k^2a - b)(z + \bar{z}) = -k^2a^2 + b^2 \\ &\iff |z|^2 - \frac{k^2a - b}{k^2 - 1}(z + \bar{z}) = \frac{-k^2a^2 + b^2}{k^2 - 1} \\ &\iff \left| z - \frac{k^2a - b}{k^2 - 1} \right|^2 = \frac{(k^2a - b)^2}{(k^2 - 1)^2} + \frac{-k^2a^2 + b^2}{k^2 - 1} = \left(\frac{k(a - b)}{k^2 - 1} \right)^2 \\ &\iff \left| z - \frac{k^2a - b}{k^2 - 1} \right| = \frac{k(a - b)}{k^2 - 1} \end{aligned}$$

となり K は有界な円である. $0 < k < 1$ の場合も同様である. 最後に $k = 1$ の場合は

$$\begin{aligned} &\iff (a - b)(z + \bar{z}) = a^2 - b^2 \\ &\iff \operatorname{Re} z = \frac{a + b}{2} \end{aligned}$$

となり, K は $z_1 = a, z_2 = b$ の垂直二等分線である. □

Theorem 1.16. 円 K に関する点 z とその鏡像 w の 2 点を通る円 K' は K と直交する. 逆に円 K' が円 K と直交するとき K の中心から伸びる半直線と K' の 2 交点は K に関し互いに鏡像の位置にある.

Proof. 前半を示そう. K' を z と w を通る円とし, K' と K が直交することを示そう. これには K が単位円周 $\partial\mathbb{D}(0, 1)$ の場合に示せば十分である. $z = r_1e^{i\theta}, w = r_2e^{i\theta}$ と置くと $r_1r_2 = 1$ を満たす. このとき K' の中心を a と置けば a は z と w の垂直二等分線上にあるので, ある $t \in \mathbb{R}$ により

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}e^{i\theta} + te^{-i(\frac{\pi}{2} - \theta)} = \left(\frac{r_1 + r_2}{2} - it \right) e^{i\theta}$$

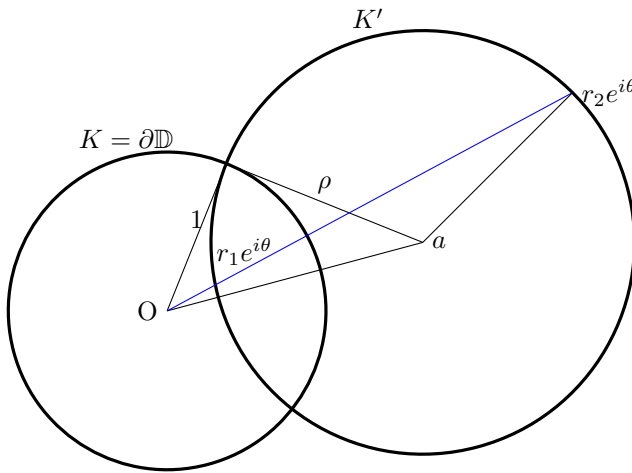
と表せるので

$$|a|^2 = \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 + t^2$$

である。また K' の半径を ρ と置けば

$$\rho^2 = |r_j e^{i\theta} - a|^2 = \left| \left\{ r_j - \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) + it \right\} e^{i\theta} \right|^2 = \left(\frac{r_1 - r_2}{2}\right)^2 + t^2$$

である。これらより直ちに $|a|^2 = \rho^2 + 1$ を得る。つまり $K = \partial\mathbb{D}(0,1)$ と K' の中心間の距離 $|a|$, 及び K , K' の半径 $1, \rho$ について 中心間の距離² = K の半径² + K' の半径² が成り立つ。これより K と K' が直交することが従う。



後半も K が単位円周 $\partial\mathbb{D}$ の場合に示そう。2点 $e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}$ において直交する円周 K' の中心を $re^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$, 半径を ρ と置けば

$$r = \frac{1}{\cos \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}}, \quad \rho = \tan \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \quad (\rho^2 + 1 = a^2 \text{ に注意})$$

原点から θ 方向に伸びる半直線を引き, K' との 2 交点を $z = r_1 e^{i\theta}, w = r_2 e^{i\theta}$ と置くと, r_1, r_2 は方程式 $|re^{i\theta} - re^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}| = \rho$ の解であるから

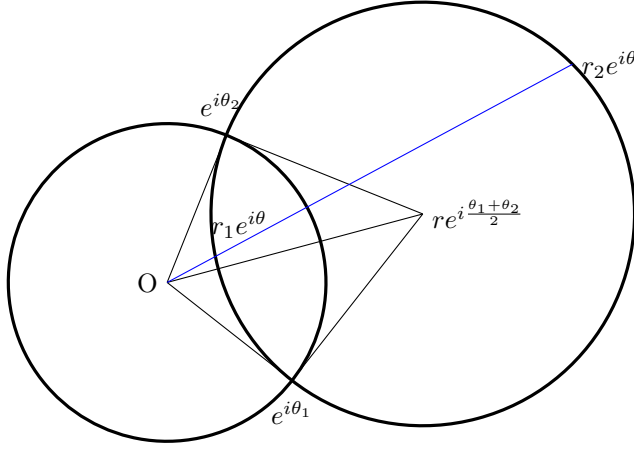
$$r_1 = r \cos \left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) - \sqrt{r^2 \cos^2 \left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) - 1},$$

$$r_2 = r \cos \left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) + \sqrt{r^2 \cos^2 \left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) - 1}$$

であるから

$$r_1 \cdot r_2 = 1$$

を満たす。つまり $r_1 e^{i\theta}, r_2 e^{i\theta}$ は $K = \partial\mathbb{D}$ に関し互いの反転像である。



□

Theorem 1.17. 円 K が $A|z|^2 + Bz + \overline{Bz} + C = 0$, $A, C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$ $|B|^2 > AC$ で表されているとき K に関する反転は

$$(1.22) \quad w = \frac{-\overline{Bz} - C}{A\overline{z} + B}$$

で表される.

Proof. 円 K が $A|z|^2 + Bz + \overline{Bz} + C = 0$, $A, C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$, $|B|^2 > AC$ で表されているとき $A \neq 0$ ならば

$$\left(z + \frac{\overline{B}}{A}\right) \left(\overline{z} + \frac{B}{A}\right) = \frac{|B|^2 - AC}{A^2}$$

と変形されるので, K の中心 $c = -\frac{\overline{B}}{A}$, 半径 $r = \frac{|B|^2 - AC}{A^2}$ である. これらを (1.20) に代入すると z と w が K に関し互いに鏡像の位置にあれば

$$(1.23) \quad \left(w + \frac{\overline{B}}{A}\right) \left(\overline{z} + \frac{B}{A}\right) = \frac{|B|^2 - AC}{A^2}$$

$$(1.24) \quad \iff Aw\overline{z} + Bw + \overline{Bz} + C = 0$$

$$(1.25) \quad \iff w = \frac{-\overline{Bz} - C}{A\overline{z} + B}$$

$A = 0$ の場合, 円 K は直線 $Bz + \overline{Bz} + C = 0$ となり $\operatorname{Re}(Bz) = -\frac{C}{2}$ と表される. $B = -\rho e^{-i\theta}$ と置けば, この直線は $\operatorname{Re} e^{-i\theta} z = \frac{C}{2\rho}$ と表されるので, (1.21) に代入すると, K に関する反転の表示式は

$$w = e^{2i\theta} \overline{z} + i \frac{C}{\rho} e^{i\theta} = -\frac{\overline{B}}{B} \overline{z} - \frac{C}{B} = \frac{-\overline{Bz} - C}{0\overline{z} + B}$$

(1.25) 式の $A = 0$ の場合と一致する. □

Theorem 1.18. 円 K に関し, 互いに鏡像の位置にある点 z_1, z_2 の一次分数変換 φ による像 $\varphi(z_1), \varphi(z_2)$ は円 $\varphi(K)$ に関して互いに鏡像の位置にある.

Proof. 円 K が $A|z|^2 + Bz + \overline{Bz} + C = 0$, $A, C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$ $|B|^2 > AC$ と表されているとき $z = z_1, w = z_2$ は (1.24) を満たす. $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$ のとき $z_j = \varphi^{-1}(w_j) = \frac{dw_j - b}{-cw_j + a}$, $j = 1, 2$ を代入すれば

$$A \frac{dw_1 - b}{-cw_1 + a} \frac{\overline{dw_2 - b}}{-\overline{cw_2 + a}} + B \frac{dw_1 - b}{-cw_1 + a} + \overline{B} \frac{\overline{dw_2 - b}}{-\overline{cw_2 + a}} + C = 0$$

を得る. これは (1.17) において w を w_1 に, \bar{w} を \bar{w}_2 に置き換えたものであり, 分母を払えば全く同様に

$$(1.26) \quad \{A|d|^2 + C|c|^2 - B(c\bar{d} + d\bar{c})\}w_1\bar{w}_2 + \{B(\bar{a}d + \bar{b}c) - A\bar{b}d - C\bar{a}c\}w_1 \\ + \overline{\{B(\bar{a}d + \bar{b}c) - A\bar{b}d - C\bar{a}c\}}w_2 + A|b|^2 + C|a|^2 - B(\bar{a}b + \bar{a}b) = 0$$

$$(1.27) \quad A'w_1\bar{w}_2 + B'w_1 + \overline{B'}\bar{w}_2 + C' = 0$$

を得る. $|B'|^2 > A'C'$ であったから, これは w_1, w_2 が円 $\varphi(K) : A'|w|^2 + B'w + \overline{B'}\bar{w} + C' = 0$ に関して互いに鏡像の位置にあることを意味する. \square

Theorem 1.19. 円 K_1 に関する反転に, 円 K_2 に関する反転を合成すると一次分数変換になる. 一般に円に関する反転を偶数回合成すると, 一次分数変換である. 逆に一次分数変換は, 円に関する反転の偶数回の合成として表せる.

Proof. Theorem 1.17 より K_1, K_2 に関する反転は

$$S_j(z) = \frac{a_j\bar{z} + b_j}{c_j\bar{z} + d_j}, \quad j = 1, 2$$

の形に表せる. よって

$$S_2(S_1(z)) = \frac{a_2\overline{\frac{a_1\bar{z} + b_1}{c_1\bar{z} + d_1}} + b_2}{c_2\overline{\frac{a_1\bar{z} + b_1}{c_1\bar{z} + d_1}} + d_2} = \frac{(a_2\bar{a}_1 + b_2\bar{c}_1)z + a_2\bar{b}_1 + b_2\bar{d}_1}{(c_2\bar{a}_1 + d_2\bar{c}_1)z + c_2\bar{b}_1 + d_2\bar{d}_1}$$

となるので, $S_2 \circ S_1$ は一次分数変換である.

上で示したことより, 円に関する反転の $2k$ 回の合成は, 一次分数変換の k 回の合成として表せるので, 一次分数変換である.

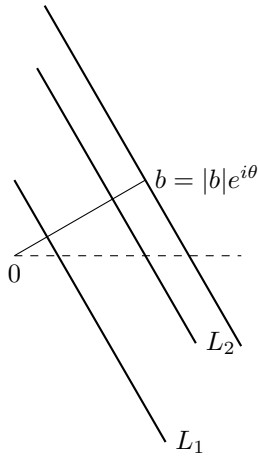
後半を示すために代表的な一次分数変換を円に関する反転 2 つを合成したものとして表そう. まずは平行移動 $T(z) = z + b$ を考えよう. $b = 0$ のとき T は恒等変換となり, $S(z) = \bar{z}$ を 2 つの合成で表せる. そこで $b \neq 0$ とする. $\arg b = \theta$ とおいて, 原点と b を結ぶ線分と直交し, $\rho_1 b, \rho_2 b, \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ を通る 2 直線をそれぞれ L_1, L_2 と置くと, $L_j = \{z \in \mathbb{C} \mid e^{(\frac{\pi}{2} - \theta)}z = \rho_j\}, j = 1, 2$ と表せる. よってこれらの直線に関する反転 $S_j, j = 1, 2$ は (1.21) より

$$S_j(z) = e^{(2\theta - \pi)i}\bar{z} + 2i\rho_j e^{(\theta - \frac{\pi}{2})i}$$

である. よって

$$S_2(S_1(z)) = e^{(2\theta - \pi)i}\overline{e^{(2\theta - \pi)i}\bar{z} + 2i\rho_1 e^{(\theta - \frac{\pi}{2})i}} + 2i\rho_2 e^{(\theta - \frac{\pi}{2})i} \\ = z + 2i(\rho_2 - \rho_1)e^{(\theta - \frac{\pi}{2})i} \\ = z + 2(\rho_2 - \rho_1)e^{i\theta}$$

よって $\rho_2 - \rho_1 = \frac{|b|}{2}$ となるように取って置けば $S_2(S_1(z)) = z + b$ となる.



次に回転 $T(z) = e^{i\theta}$ については原点を通る 2 直線 $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(e^{-i\theta_j} z) = 0\}$, $j = 1, 2$ に関する反転はそれぞれ $z \mapsto e^{2i\theta_j} \bar{z}$ であるから合成すると

$$e^{2i\theta_2} \overline{e^{2i\theta_1} \bar{z}} = e^{2i(\theta_2 - \theta_1)} z$$

となるので, $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\theta}{2}$ を満たす θ_1, θ_2 について反転の合成である.

相似変換 $T(z) = Az$, $A > 0$ については原点中心で半径が r_j , $j = 1, 2$ に関する反転が $z \mapsto \frac{r_j^2}{\bar{z}}$ であるから合成すれば

$$\frac{r_2^2}{\frac{r_1^2}{\bar{z}}} = \frac{r_2^2}{r_1^2} z$$

であるから $A = \frac{r_2^2}{r_1^2}$ を満たす r_1, r_2 を取ればよい.

変換 $T(z) = -\frac{1}{z}$ について, これは明らかに単位円周に関する反転 $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ と虚軸に関する反転 $z \mapsto -\bar{z}$ の合成である.

一般の一次分数変換 $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ については $c \neq 0$ のとき $ad - bc = 1$ を用いて

$$T(z) = \frac{a(cz+d) + bc - ad}{c(cz+d)} = \frac{bc - ad}{c(cz+d)} + \frac{a}{c} = \frac{bc - ad}{c^2(z + \frac{d}{c})} + \frac{a}{c}$$

と書き直されるので

$$T_1(z) = z + \frac{d}{c}, \quad T_2(z) = c^2 z, \quad T_3(z) = -\frac{1}{z}, \quad T_4(z) = z + \frac{a}{c}$$

と置くとき $T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1(z)$ と分解される. T_1, T_3, T_4 については, それぞれ 2 回の反転の合成で表されることを示した. T_2 について $c^2 = Ae^{i\theta}$ を満たす $A > 0$ と $\theta \in \mathbb{R}$ を取れば $T_2(z) = A(e^{i\theta} z)$ であるから回転と相似変換の合成であり, 4 つの反転の合成で表すことが出来る.

$c = 0$ のときは $T(z) = \alpha z + \beta$ の形になるので $\alpha = Ae^{i\theta}$ と置いて

$$T_1(z) = e^{i\theta} z, \quad T_2(z) = Az, \quad T_3(z) = z + \beta$$

により $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$ と表せる. よって偶数回の反転の合成である. □

1.3 Gauss 曲率

後章で導入する ultrahyperbolic metric とは定曲率 -1 を持つ等角計量を一般化したものである。ultrahyperbolic metric の導入や応用を述べる際に曲率とは何か、その意味について知っている必要はない。単に計量から曲率を計算する等式を覚えていれば十分であると、Ahlfors は述べている。確かにそうなのであるが、それは曲率の意味も既に知っていて、十分に理解しているからそう言えるのである。この節では本当にそうなのか確かめる為に、 \mathbb{R}^3 内の曲面に関する第一、二基本形式と Gauss 曲率に関する解説を行い、Gauss 曲率が第一基本形式のみで表せるという Gauss の驚異の theorem を導こう。Ahlfors のお言葉を素直に信じられない、筆者のようなヒネクレものでなければ以下を読む必要はない。

1.3.1 曲面片

\mathbb{R}^2 の座標を $u = (u_1, u_2)$, \mathbb{R}^3 の座標を $x = (x_1, x_2, x_3)$ で表す。また $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ のように太

文字で表したら対応する原点からの位置ベクトルの列ベクトル表示とする。

Definition 1.20. U を \mathbb{R}^2 内の領域とする。このとき C^1 -級の写像 $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ が (パラメタライズされた) 曲面片 (parameterized surface element) であるとは f がはめ込み (immersion) であること、つまり $x = f(u) = (f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2), f_3(u_1, u_2))$ と分解して表示する時、函数行列

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(u) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(u_1, u_2) & \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(u_1, u_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(u_1, u_2) & \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(u_1, u_2) \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1}(u_1, u_2) & \frac{\partial f_3}{\partial u_2}(u_1, u_2) \end{pmatrix}$$

の階数が各点で 2、つまり最大階数であることである。換言すれば、ベクトル

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1}(u_1, u_2) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(u_1, u_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(u_1, u_2) \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1}(u_1, u_2) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2}(u_1, u_2) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(u_1, u_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(u_1, u_2) \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_2}(u_1, u_2) \end{pmatrix}$$

が各点で線形独立であることである。以下では曲面片のことを単に曲面とすることにする。

1.3.2 曲面上の曲線と第 1 基本形式

さて曲面 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ 上の曲線とは \mathbb{R}^2 上の曲線 $u = \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ と f の合成 $f \circ \alpha$ であるから、これの接ベクトルは合成関数の微分の連鎖公式より

$$(1.28) \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\alpha(t)) \dot{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) & \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) & \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1}(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) & \frac{\partial f_3}{\partial u_2}(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1(t) \\ \dot{\alpha}_2(t) \end{pmatrix}$$

である。ただし $\dot{\cdot}$ は t に関する微分を表す。

さて曲面上にもう一本の曲線が $u = \beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$ により与えられたとし、 $t = t_0$ で α と β は交点を持つ、つまり $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ とする。このとき交点における 2 本の接ベクトルの内積は

$$(1.29) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \dot{\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \dot{\beta} \\ &= {}^t \dot{\alpha} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \dot{\beta} \\ &= (\dot{\alpha}_1 \ \dot{\alpha}_2) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \frac{\partial f_3}{\partial u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3}{\partial u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \end{pmatrix} \\ &= (\dot{\alpha}_1 \ \dot{\alpha}_2) \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表せる。そこで正値対称行列

$$(1.30) \quad \begin{aligned} (g_{ij}) &= \begin{pmatrix} g_{11}(u) & g_{12}(u) \\ g_{21}(u) & g_{22}(u) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E(u) & F(u) \\ F(u) & G(u) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と置けば、 u 座標に関する接ベクトル $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ に対応する像曲線における内積は

$$(1.31) \quad I(\dot{\alpha}, \dot{\beta}) = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \dot{\alpha}_i \dot{\beta}_j$$

で与えられる。この対称行列 (g_{ij}) に関する各点における 2 次形式を

$$(1.32) \quad (ds)^2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} du_i du_j = E(du_1)^2 + 2F du_1 du_2 + G(du_2)^2$$

と表し, 第 1 基本形式と呼ぶ. 基本形式の式において du, dv などの意味が明確でないが, du, dv は単に実数であると考えてもよいし, (1.32) において du, dv の位置には本来その前の式 (1.31) の $\dot{\alpha}_i, \dot{\beta}_j$ のような接ベクトル (微分) の成分が入るものであるから, 単に u, v と書かずに du, dv と書いたと思ってもよい. また

$$(1.33) \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \frac{du_i}{dt} \frac{du_j}{dt} = E \left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du_1}{dt} \frac{du_2}{dt} + G \left(\frac{du_2}{dt}\right)^2$$

において形式的に分母の $(dt)^2$ を払い式を覚えやすい形に表したものと考えてもよい. (1.32) を使用する場合, 実際には (1.31) または (1.33) の形で使うので, ここで厳密な意味 (可微分多様体の接空間を学習すれば分かる) を考える必要は無い.

U 内の曲線 $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$, $a \leq t \leq b$ について像曲線 $f(\alpha)$ の接ベクトルの大きさは

$$(1.34) \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{I(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})}$$

であるから, その弧長は第 1 基本形式を用いて

$$\int_a^b \sqrt{I(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})} dt = \int_a^b \sqrt{E(\alpha(t))\dot{\alpha}_1(t)^2 + 2F(\alpha(t))\dot{\alpha}_1(t)\dot{\alpha}_2(t) + G(\alpha(t))\dot{\alpha}_2(t)^2} dt$$

を用いて計算される. 第 1 基本形式はベクトルの内積であるから, これより 2 つのベクトルの角度を定めること及び上で見たように曲線の長さを測ることが出来るので, 計量 (metric) と呼ばれる.

一方, 曲面の面積 A については $A = \iint_U \left| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \right| du_1 du_2$ により計算される. 2 つの空間ベクトル \mathbf{p}, \mathbf{q} についてなす角を $\theta \in [0, \pi)$ と置けば

$$|\mathbf{p} \times \mathbf{q}| = |\mathbf{p}||\mathbf{q}| \sin \theta = |\mathbf{p}||\mathbf{q}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 |\mathbf{q}|^2 - |\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}|^2}$$

この等式を $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2}$ に適用すると

$$(1.35) \quad \begin{aligned} A &= \iint_U \left| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \right| du_1 du_2 \\ &= \iint_U \sqrt{\left| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \right|^2 \left| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \right|^2 - \left| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \right|^2} du_1 du_2 \\ &= \iint_U \sqrt{EG - F^2} du_1 du_2 = \iint_U \sqrt{\det(g_{ij})(u)} du_1 du_2 \end{aligned}$$

を得る. このように曲面積も第 1 基本形式を用いて計算される. そこで

$$dA = \sqrt{EG - F^2} du_1 du_2 = \sqrt{\det(g_{ij})(u)} du_1 du_2$$

のことを面積要素と呼ぶ. これは第 1 基本計量の導入のところで, その意味について述べたときと同様に, 意味のはっきりしないものであるが, 曲面内の集合の面積を計算する際に u 座標での積分に変換するときに覚えやすく表した公式とでも思って頂きたい.

1.3.3 法曲率と第 2 基本形式

曲面 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ において, $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1}$ と $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2}$ は曲面上の接ベクトルで一次独立であるから

$$\mathbf{n}(u) = \frac{1}{\left| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2}(u) \right|} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2}(u)$$

は接平面と直交するので単位法ベクトルと呼ぶ。曲面上の曲線が $x(t) = f(\alpha(t)) = f(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ で与えられたとき、弧長 s に関する 2 次微分 $\mathbf{x}'' = \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}$ のことを曲率ベクトルと呼ぶ。これの \mathbf{n} 成分を $\kappa_n = \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{n}$ と表し、法曲率と呼ぶ。法曲率の t に関する表示を求めよう。 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}' \frac{ds}{dt}$ より $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}'' \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mathbf{x}' \frac{d^2s}{dt^2}$ であるが、接ベクトル \mathbf{x}' と法ベクトル \mathbf{n} は直交するので $\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{n} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \kappa_n$ であるから

$$\kappa_n = \frac{\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} = \frac{\ddot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}}|^2} \cdot \frac{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2}}{\left| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \right|}$$

である。上式を利用し、法曲率を計算するために $\dot{\mathbf{x}}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_k}$ は既に求めているので $\ddot{\mathbf{x}}$ を計算する必要がある。等式 (1.28) の両辺の第 k 成分を取れば $\dot{x}_k = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial f_k}{\partial u_j} \dot{\alpha}_j$ であるから t で微分すると

$$\ddot{x}_k = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 f_k}{\partial u_i \partial u_j} \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial f_k}{\partial u_j} \ddot{\alpha}_j, \quad k = 1, 2, 3$$

を得る。よって

$$(1.36) \quad \ddot{\mathbf{x}} = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial u_i \partial u_j} \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_j} \ddot{\alpha}_j$$

そこでベクトル

$$(1.37) \quad \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial u_i \partial u_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial u_i \partial u_j} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial u_i \partial u_j} \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial u_i \partial u_j} \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, 2$$

を考えよう。これを接平面の成分と法線成分に分解し $i, j = 1, 2$ について

$$(1.38) \quad \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial u_i \partial u_j} = \Gamma_{ij}^1 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} + \Gamma_{ij}^2 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} + h_{ij} \mathbf{n}, \quad (\text{Gauss の等式})$$

と置く。係数 Γ_{ij}^k は Christoffel 記号と呼ばれ、後で E, F, G 及びその微分を用いて表す表示を求める。また $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_j} \cdot \mathbf{n} = 0$ と \mathbf{n} が単位ベクトルであることより

$$(1.39) \quad h_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial u_i \partial u_j} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i}$$

が成り立つ。ここで第 1 基本形式のときと同様に対称行列を

$$(1.40) \quad h = (h_{ij}) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

と置き、この対称行列 $h = (h_{ij})$ に関する各点における 2 次形式

$$(1.41) \quad \sum_{i,j=1}^2 h_{ij} du_i du_j = L(du_1)^2 + 2M du_1 du_2 + N(du_2)^2$$

を第 2 基本形式と呼ぶ。

それでは法曲率 κ_n の計算に戻ろう。(1.36)において $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_j}$ と \mathbf{n} は直交するので

$$\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial u_i \partial u_j} \cdot \mathbf{n} \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j = \sum_{i,j=1}^2 h_{ij} \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j$$

また (1.32) より $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j$ であったから結局

$$(1.42) \quad \kappa_n = \frac{\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} = \frac{\sum_{i,j=1}^2 h_{ij} \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j}{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j}$$

となる。これより特に法曲率 κ_n は $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1(t) \\ \dot{\alpha}_2(t) \end{pmatrix}$ のみで定まることが分かる。

1.3.4 Gauss 曲率

法曲率 $\kappa_n = \frac{\sum_{i,j=1}^2 h_{ij} \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j}{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j}$ の最大値・最小値を求めよう。それには $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ が $\sum_{i,j=1}^2 g_{ij} u_i u_j = 1$ という条件下で動くとき $\sum_{i,j=1}^2 h_{ij} u_i u_j$ の最大・最小問題を考えればよい。Lagrange の未定乗数法により、極値を取る点において

$$\frac{\partial}{\partial u_k} \left(\sum_{i,j=1}^2 h_{ij} u_i u_j \right) = \lambda \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\sum_{i,j=1}^2 g_{ij} u_i u_j \right), \quad k = 1, 2$$

を満たす定数 $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在する。よって

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 h_{k,j} u_j + \sum_{i=1}^2 h_{i,k} u_i &= \lambda \left\{ \sum_{j=1}^2 g_{k,j} u_j + \sum_{i=1}^2 g_{i,k} u_i \right\} \\ \Rightarrow h\mathbf{u} &= \lambda g\mathbf{u} \\ \Rightarrow (h - \lambda g)\mathbf{u} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

$\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ゆえ λ は 2 次方程式

$$\det(h - \lambda g) = \begin{vmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{vmatrix} = (EG - F^2)\lambda - (EN + GL - 2FM)\lambda + LN - M^2 = 0$$

を満たす。この方程式の解を $\lambda_k, k = 1, 2$ と置き $(h - \lambda_k g)\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$, を満たす $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ を取る。条件 ${}^t \mathbf{u}_k g \mathbf{u}_k = 1$ より ${}^t \mathbf{u}_k h \mathbf{u}_k = \lambda_k$ を得るので $\lambda_k, k = 1, 2$ が最大値と最小値を与える。 $k = 1, 2$ について λ_k と \mathbf{u}_k を主曲率と主方向ベクトルと呼ぶ。また $\lambda_1 \lambda_2$ を Gauss 曲率と言い、 $\frac{1}{2} \{\lambda_1 + \lambda_2\}$ を平均曲率と言う。解と係数の関係より

$$(1.43) \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (\text{Gauss 曲率})$$

$$(1.44) \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} \quad (\text{平均曲率})$$

が成り立つ。 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば主方向は直交する。これは

$$\lambda_2 {}^t \mathbf{u}_1 g \mathbf{u}_2 = {}^t \mathbf{u}_1 h \mathbf{u}_2 = {}^t \mathbf{u}_2 h \mathbf{u}_1 = {}^t \mathbf{u}_2 \lambda_1 g \mathbf{u}_1 = \lambda_1 {}^t \mathbf{u}_1 g \mathbf{u}_2$$

より ${}^t \mathbf{u}_1 g \mathbf{u}_2 = 0$ となることより分かる。

1.3.5 Christoffel 記号の計算

ここでは Christoffel 記号 Γ_{ij}^k の第 1 基本形式の偏微分を用いた表示式を求めておこう. Γ_{ij}^k とは $\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial u_i \partial u_j}$ の接ベクトル $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_k}$ に関する成分であった.

記号が煩雑になるので

$$(1.45) \quad \mathbf{f}_k = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_k}, \quad k = 1, 2,$$

$$(1.46) \quad \mathbf{f}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial u_i \partial u_j}, \quad i, j = 1, 2,$$

$$(1.47) \quad E = g_{11} = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1 \quad F = g_{12} = g_{21} = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_1, \quad G = g_{22} = \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2$$

を用いる. また E の u_1, u_2 に関する偏微分を E_1, E_2 のように表す. F, G についても同じである.

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\partial}{\partial u_1} (\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1) = 2\mathbf{f}_{11} \cdot \mathbf{f}_1 \\ E_2 &= \frac{\partial}{\partial u_2} (\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1) = 2\mathbf{f}_{12} \cdot \mathbf{f}_1 \\ G_1 &= \frac{\partial}{\partial u_1} (\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2) = 2\mathbf{f}_{21} \cdot \mathbf{f}_2 \\ G_2 &= \frac{\partial}{\partial u_2} (\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2) = 2\mathbf{f}_{22} \cdot \mathbf{f}_2 \\ F_1 &= \frac{\partial}{\partial u_1} (\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2) = \mathbf{f}_{11} \cdot \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_{21} \cdot \mathbf{f}_1 = E_2 + \mathbf{f}_{21} \cdot \mathbf{f}_1 \\ F_2 &= \frac{\partial}{\partial u_2} (\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2) = \mathbf{f}_{12} \cdot \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_{22} \cdot \mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_{12} \cdot \mathbf{f}_2 + G_{u_1} \\ F_1 &= \frac{\partial}{\partial u_1} (\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_1) = \mathbf{f}_{21} \cdot \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_{11} \cdot \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_{21} \cdot \mathbf{f}_1 + E_{u_2} \\ F_2 &= \frac{\partial}{\partial u_2} (\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_1) = \mathbf{f}_{22} \cdot \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_{12} \cdot \mathbf{f}_2 = G_1 + \mathbf{f}_{12} \cdot \mathbf{f}_2 \end{aligned}$$

これらの等式より $\mathbf{f}_{11} \cdot \mathbf{f}_1 = \frac{1}{2}E_1$, $\mathbf{f}_{11} \cdot \mathbf{f}_2 = F_1 - \frac{1}{2}E_2$ のように $\mathbf{f}_{ij} \cdot \mathbf{f}_k$ を E, G, F の偏微分で表すことが出来る. 一方 Gauss の等式 (1.38) をこれらの記号を用いて書き直すと

$$\mathbf{f}_{ij} = \Gamma_{ij}^1 \mathbf{f}_1 + \Gamma_{ij}^2 \mathbf{f}_2 + h_{ij} \mathbf{n}$$

となる. これより例えば

$$\mathbf{f}_{ij} \cdot \mathbf{f}_2 = \Gamma_{ij}^1 \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 + \Gamma_{ij}^2 \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2 = \Gamma_{ij}^1 F + \Gamma_{ij}^2 G$$

のような等式を得る. 全てを列挙すれば

$$(1.48) \quad \begin{cases} \mathbf{f}_{1,1} \cdot \mathbf{f}_1 = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_1 \\ \mathbf{f}_{1,1} \cdot \mathbf{f}_2 = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_1 - \frac{1}{2} E_2 \\ \mathbf{f}_{1,2} \cdot \mathbf{f}_1 = \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_2 \\ \mathbf{f}_{1,2} \cdot \mathbf{f}_2 = \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_1 \\ \mathbf{f}_{2,1} \cdot \mathbf{f}_1 = \Gamma_{21}^1 E + \Gamma_{21}^2 F = \frac{1}{2} E_2 \\ \mathbf{f}_{2,1} \cdot \mathbf{f}_2 = \Gamma_{21}^1 F + \Gamma_{21}^2 G = \frac{1}{2} G_1 \\ \mathbf{f}_{2,2} \cdot \mathbf{f}_1 = \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_2 - \frac{1}{2} G_1 \\ \mathbf{f}_{2,2} \cdot \mathbf{f}_2 = \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_2 \end{cases}$$

これらの等式を行列で表現すると

$$(1.49) \quad \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E_1 & E_2 & E_2 & 2F_2 - G_1 \\ 2F_1 - E_2 & G_1 & G_1 & G_2 \end{pmatrix}$$

となるので, Γ_{ij}^k の表示は次のようになる.

$$(1.50) \quad \begin{cases} 2(EG - F^2)\Gamma_{11}^1 = GE_1 - 2FF_1 + FE_2 \\ 2(EG - F^2)\Gamma_{11}^2 = -FE_1 + 2EF_1 - EE_2 \\ 2(EG - F^2)\Gamma_{12}^1 = GE_2 - FG_1 \\ 2(EG - F^2)\Gamma_{12}^2 = EG_1 - FE_2 \\ 2(EG - F^2)\Gamma_{21}^1 = GE_2 - FG_1 \\ 2(EG - F^2)\Gamma_{21}^2 = EG_1 - FE_2 \\ 2(EG - F^2)\Gamma_{22}^1 = 2GF_2 - GG_1 - FG_2 \\ 2(EG - F^2)\Gamma_{22}^2 = 2EG_2 - 2FF_2 + FG_1 \end{cases}$$

1.3.6 Gauss の驚異の定理

Gauss の驚異の定理とは Gauss 曲率 $\frac{LN - M^2}{EG - F^2}$ が第 1 基本形式の係数 E, G, F 及びその 2 次までの偏微分で表わせることを主張するものである. Gauss の等式 (1.38) より

$$\begin{aligned} L\mathbf{n} &= \mathbf{f}_{1,1} - \{\Gamma_{11}^1 \mathbf{f}_1 + \Gamma_{11}^2 \mathbf{f}_2\} \\ M\mathbf{n} &= \mathbf{f}_{1,2} - \{\Gamma_{12}^1 \mathbf{f}_1 + \Gamma_{12}^2 \mathbf{f}_2\} \\ M\mathbf{n} &= \mathbf{f}_{2,1} - \{\Gamma_{21}^1 \mathbf{f}_1 + \Gamma_{21}^2 \mathbf{f}_2\} \\ N\mathbf{n} &= \mathbf{f}_{2,2} - \{\Gamma_{22}^1 \mathbf{f}_1 + \Gamma_{22}^2 \mathbf{f}_2\} \end{aligned}$$

であるから, $LN - M^2$ を計算するには, 右辺の内積を計算すればよい. それには $\mathbf{f}_{1,1} \cdot \mathbf{f}_{2,2} - \mathbf{f}_{1,2} \cdot \mathbf{f}_{2,1}$ 及び $\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j, \mathbf{f}_{i,j} \cdot \mathbf{f}_k$ の内積の計算が必要である. $\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j$ については E, F, G で表せるし, $\mathbf{f}_{i,j} \cdot \mathbf{f}_k$ については (1.48) より E, F, G の 1 階偏導関数で表せる. また Γ_{ij}^k については (1.50) を用いればよい. 最後に $\mathbf{f}_{1,1} \cdot \mathbf{f}_{2,2} - \mathbf{f}_{1,2} \cdot \mathbf{f}_{2,1}$

についても (1.50) より

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{11} \cdot \mathbf{f}_{22} - \mathbf{f}_{12} \cdot \mathbf{f}_{21} &= \frac{\partial}{\partial u_2} (\mathbf{f}_{11} \cdot \mathbf{f}_2) - \mathbf{f}_{112} \cdot \mathbf{f}_2 - \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} (\mathbf{f}_{12} \cdot \mathbf{f}_2) - \mathbf{f}_{112} \cdot \mathbf{f}_2 \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial u_2} (\mathbf{f}_{11} \cdot \mathbf{f}_2) - \frac{\partial}{\partial u_1} (\mathbf{f}_{12} \cdot \mathbf{f}_2) \\
&= \frac{\partial}{\partial u_2} \left(F_1 - \frac{1}{2} E_2 \right) - \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{1}{2} G_1 \right) \\
&= F_{12} - \frac{1}{2} (E_{22} + G_{11})
\end{aligned}$$

となり, E, F, G の 2 階偏導関数で表せる.

実際の計算については

$$\begin{aligned}
LN &= \{\mathbf{f}_{11} - (\Gamma_{11}^1 \mathbf{f}_1 + \Gamma_{11}^2 \mathbf{f}_2)\} \cdot \{\mathbf{f}_{22} - (\Gamma_{22}^1 \mathbf{f}_1 + \Gamma_{22}^2 \mathbf{f}_2)\} \\
&= \mathbf{f}_{11} \cdot \mathbf{f}_{22} - \{\Gamma_{22}^1 \mathbf{f}_{11} \cdot \mathbf{f}_1 + \Gamma_{22}^2 \mathbf{f}_{11} \cdot \mathbf{f}_2\} - \{\Gamma_{11}^1 \mathbf{f}_{22} \cdot \mathbf{f}_1 + \Gamma_{11}^2 \mathbf{f}_{22} \cdot \mathbf{f}_2\} \\
&\quad + \Gamma_{11}^1 \{\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F\} + \Gamma_{11}^2 \{\Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G\} \\
&= \mathbf{f}_{11} \cdot \mathbf{f}_{22} - \Gamma_{22}^1 \frac{1}{2} E_1 - \Gamma_{22}^2 \left(F_1 - \frac{1}{2} E_2 \right) - \left\{ \Gamma_{11}^1 \left(F_2 - \frac{1}{2} G_1 \right) + \Gamma_{11}^2 \frac{1}{2} G_1 \right\} \\
&\quad + \Gamma_{11}^1 \left(F_2 - \frac{1}{2} G_1 \right) + \Gamma_{11}^2 \frac{1}{2} G_2 \\
&= \mathbf{f}_{11} \cdot \mathbf{f}_{22} + \frac{1}{2} \{\Gamma_{22}^2 E_2 - \Gamma_{22}^1 E_1 - 2\Gamma_{22}^2 F_1\}
\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}
M^2 &= \{\mathbf{f}_{12} - (\Gamma_{12}^1 \mathbf{f}_1 + \Gamma_{12}^2 \mathbf{f}_2)\} \cdot \{\mathbf{f}_{21} - (\Gamma_{21}^1 \mathbf{f}_1 + \Gamma_{21}^2 \mathbf{f}_2)\} \\
&= \mathbf{f}_{12} \cdot \mathbf{f}_{21} - \{\Gamma_{21}^1 \mathbf{f}_{12} \cdot \mathbf{f}_1 + \Gamma_{21}^2 \mathbf{f}_{12} \cdot \mathbf{f}_2\} - \{\Gamma_{11}^1 \mathbf{f}_{21} \cdot \mathbf{f}_1 + \Gamma_{11}^2 \mathbf{f}_{21} \cdot \mathbf{f}_2\} \\
&\quad + \Gamma_{12}^1 \{\Gamma_{21}^1 E + \Gamma_{21}^2 F\} + \Gamma_{12}^2 \{\Gamma_{21}^1 F + \Gamma_{21}^2 G\} \\
&= \mathbf{f}_{12} \cdot \mathbf{f}_{21} - \Gamma_{21}^1 \frac{1}{2} E_2 + \Gamma_{21}^2 \frac{1}{2} G_1 - \Gamma_{11}^1 \frac{1}{2} E_2 + \Gamma_{11}^2 \frac{1}{2} G_1 \\
&\quad + \Gamma_{12}^1 \frac{1}{2} E_2 + \Gamma_{12}^2 \frac{1}{2} G_1 \\
&= \mathbf{f}_{12} \cdot \mathbf{f}_{21} - \Gamma_{21}^1 \frac{1}{2} E_2 - \Gamma_{21}^2 \frac{1}{2} G_1
\end{aligned}$$

今までの 3 つの等式を組み合わせ

$$(1.51) \quad LN - M^2 = F_{12} - \frac{1}{2} (E_{22} + G_{11}) + \frac{1}{2} \{\Gamma_{2,2}^2 E_2 - \Gamma_{2,2}^1 E_1 - 2\Gamma_{2,2}^2 F_1 + \Gamma_{2,1}^1 E_2 + \Gamma_{2,1}^2 G_1\}$$

を得る. 以上より

Theorem 1.21. 曲面 $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ の Gauss 曲率は

$$\begin{aligned}
(1.52) \quad &\frac{LN - M^2}{EG - F^2} \\
&= \frac{1}{EG - F^2} \left\{ F_{12} - \frac{1}{2} (E_{22} + G_{11}) + \frac{1}{2} (\Gamma_{2,2}^2 E_2 - \Gamma_{2,2}^1 E_1 - 2\Gamma_{2,2}^2 F_1 + \Gamma_{2,1}^1 E_2 + \Gamma_{2,1}^2 G_1) \right\} \\
&= -\frac{E_{22} + G_{11} - 2F_{12}}{2(EG - F^2)} + \frac{F(E_1 G_2 - E_2 G_1 + 4F_1 F_2 - F_1 G_1 - 2E_2 F_2)}{4(EG - F^2)^2} \\
&\quad + \frac{E(E_2 G_2 - 2F_1 G_2 + G_1^2)}{4(EG - F^2)^2} + \frac{G(E_1 G_1 - 2E_1 F_2 + E_2^2)}{4(EG - F^2)^2}
\end{aligned}$$

ただし $E = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1}$, $F = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2}$, $G = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2}$ であり, 下添え字の 1, 2 は u_1, u_2 に関する偏微分を表す.

Corollary 1.22. 直交座標, つまり第 1 基本形式が $Edu_1^2 + Gdu_2^2$ の形の場合, Gauss 曲率は

$$-\frac{E_{22} + G_{11}}{2EG} + \frac{EE_2G_2 + EG_1^2 + GE_1G_1 + GE_2^2}{4E^2G^2} = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) \right\}$$

で与えられる.

Corollary 1.23. 等温座標, つまり第 1 基本形式が $E(u_1, u_2)(du_1^2 + du_2^2)$ の形の場合, Gauss 曲率は

$$\frac{E_1^2 + E_2^2 - E(E_{11} + E_{22})}{2E^3}$$

で与えられる. また $\lambda = \sqrt{E}$ と置けば Gauss 曲率は

$$\frac{\lambda_1^2 + \lambda_1^2 - \lambda(\lambda_{11} + \lambda_{11})}{\lambda^4} = -\frac{\Delta(\log \lambda)}{\lambda^2}$$

で与えられる. ただし Δ は Laplace-Beltrami 作用素 $\frac{\partial^2}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_2^2}$ である.

第 2 章

有界正則函数

2.1 Schwarz-Pick の定理

Schwarz Lemma とは次を主張する結果である.

Theorem 2.1 (Schwarz の補題). $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ が正則で $f(0) = 0$ を満たせば

- (i) $|f(z)| \leq |z|$ が成り立つ. また $|z_0| = |w_0|$ を満たす $z_0, w_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ について $f(z_0) = w_0$ が成り立つ必要十分条件は $f(z) = \frac{w_0}{z_0} z, z \in \mathbb{D}$ であること.
- (ii) $|f'(0)| \leq 1$ が成り立つ. また $\eta \in \partial\mathbb{D}$ について $f'(0) = \eta$ が成り立つ必要十分条件は $f(z) = \eta z, z \in \mathbb{D}$ であること.

念のために証明を述べるが, それには以下の定理が必要である.

Theorem 2.2 (最大絶対値の原理). D を \mathbb{C} 内の有界領域とし $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ を正則とする. また $M \geq 0$ とする. このとき任意の $\zeta \in \partial D$ について $\limsup_{D \ni z \rightarrow \zeta} |f(z)| \leq M$ ならば D 上で $|f(z)| < M$ またはある $\eta \in \partial\mathbb{D}$ について $f = M\eta$ である.

Proof. 1. $U = \sup_{z \in D} |f(z)| \geq 0$ と置くと, $U < \infty$ である. 実際, $U = \infty$ ならば $|f(z_n)| \rightarrow \infty$ を満たす $z_n \in D, n \in \mathbb{N}$ が取れる. \bar{D} は有界閉集合, つまり compact であるから, 必要ならば部分列を取ることにより $z_n \rightarrow z_0 \in \bar{D}$ としてよい. このとき仮定より $z_0 \notin \partial D$ であるから $z_0 \in \mathbb{D}$ である. よって $|f(z_0)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)| = \infty$ となり, f が D で連続であることに矛盾する.

2. $U \leq M$ を背理法を用いて示そう. そこで $U > M$ と仮定する.

$$D_1 = \{z \in D : |f(z)| = U\}$$

と置く. $|f|$ の連続性より D_1 は閉集合である. また上と同様な議論によりある $z_0 \in D$ で $|f(z_0)| = U$ となるものが少なくとも 1 つ存在するので $D_1 \neq \emptyset$ である.

さて $z_0 \in D_1$ について $\mathbb{D}(z_0, r_0) \subset D$ を満たす $r_0 > 0$ を取れば $r \in (0, r_0]$ について

$$U = |f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U d\theta \leq U$$

が成り立つ. $|f(z_0 + re^{i\theta})|$ は θ について連続であるから $|f(z_0 + re^{i\theta})| = U$ が成り立つ. また $r \in (0, r_0]$ は任意であるから, $\mathbb{D}(z_0, r_0)$ 上で $|f(z)| = U$ が成立する. 従って $\mathbb{D}(z_0, r_0) \subset D_1$ である. これより特に z_0 は

D_1 の内点であることが分かり、従って D_1 は開集合である。

以上で D_1 は空でない開かつ閉集合であることが示された。 D は連結であるから $D_1 = D$ でなければならぬ。よって D 上で $|f(z)| = U$ が成り立つ。しかしながらこれは $\zeta \in \partial D$ $\limsup_{D \ni z \rightarrow \zeta} |f(z)| \leq M < U$ に反する。よって $U \leq M$ である。

3. $U \leq M$ より D 上で $|f(z)| \leq M$ が成り立つことが分かる。ここで D 上で $|f(z)| < M$ ならば定理は自明に成り立つので、そうではない、つまり $|f(z_0)| = M$ を満たす $z_0 \in D$ が存在すると仮定する。このとき

$$D_2 = \{z \in D : |f(z)| = M\}$$

と置けば、2 と全く同様に D_2 は D の空でない開かつ閉部分集合であることが分かるので $D_2 = D$ である。よって $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ と分解すると $u^2 + v^2 = M^2$ が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} \begin{cases} uu_x + vv_x = 0 \\ uu_y + vv_y = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} uu_x - vv_y = 0 \\ uu_y + vv_x = 0 \end{cases} \quad (\because \text{Cauchy-Riemann の方程式}) \\ &\iff \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$M > 0$ の場合は

$$\det \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} = u^2 + v^2 = M^2 \neq 0,$$

より $u_x = u_y = 0$ D 上で成り立つ。また Cauchy-Riemann の方程式より $v_x = v_y = 0$ も成り立つ。よって f は領域 D 上で定数であり、 $|f| = M$ より、ある $\eta \in \partial \mathbb{D}$ により $f = M\eta$ と表せる。 $M = 0$ の場合は $f = 0$ が直ちに分かり、この場合も $f = M\eta$ と表せる。□

Proof of Theorem 2.1. 仮定より f は $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = c_1 z + c_2 z^2 + \dots$, $|z| < 1$ と Maclaurin 級数に展開される。ここに

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}(0,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, \quad \forall r \in (0, 1)$$

であるが、 $|f(z)| \leq 1$ と合わせると $|c_n| \leq r^n$ を得る。 r の任意性より $|c_n| \leq 1$ が成り立つ。従って f の Maclaurin 級数を形式的に z で割った形の級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} z^n = c_1 + c_2 z + \dots$ の収束半径は 1 以上であり、 \mathbb{D} において正則である。そこで

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} z^n = c_1 + c_2 z + \dots, \quad z \in \mathbb{D}$$

と置くと、 g は \mathbb{D} で正則であり、 $f(z) = zg(z)$ を満たす。また任意の $\zeta \in \partial \mathbb{D}$ について

$$\limsup_{\mathbb{D} \ni z \rightarrow \zeta} |g(z)| = \limsup_{\mathbb{D} \ni z \rightarrow \zeta} \frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1$$

が成り立つ。よって最大絶対値の原理より \mathbb{D} 上で $|g(z)| \leq 1$ が成り立つ。これより $|f(z)| \leq |zg(z)| \leq |z|$ を得る。また $|z_0| = |w_0|$ を満たす $z_0, w_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ について $f(z_0) = w_0$ が成り立てば $|g(z_0)| = 1$ となるので、最大絶対値の原理より g は定数函数であり $g(z_0) = \frac{f(z_0)}{z_0} = \frac{w_0}{z_0}$ ゆえ $g = \frac{w_0}{z_0}$ となる。これより $f(z) = \frac{w_0}{z_0} z$ を得る。逆に $f(z) = \frac{w_0}{z_0} z$ ならば明らかに $f(z_0) = w_0$ が成り立つ。

次に $f(z) = 0$ より

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} g(z) = g(0)$$

であるから $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$ が成り立つ. また $f'(0) = \eta \in \partial\mathbb{D}$ ならば $|g(0)| = |\eta| = 1$ であるから最大絶対値の原理より g は定数関数であり $g = \eta$ が成り立つ. よって $f(z) = zg(z) = \eta z$ である. 逆に $f(z) = \eta z$ ならば明らかに $f'(0) = \eta$ が成り立つ. \square

$a \in \mathbb{D}$ について $\tau(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ と置いたことを思い出しておこう. また $\tau_a^{-1} = \tau_{-a}$, $\tau'_a(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}$ であり, $\tau'_a(0) = 1 - |a|^2$, $\tau'_a(a) = \frac{1}{1-|a|^2}$ であった.

Theorem 2.3 (Schwarz-Pick の補題). $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ が正則で $z_0 \in \mathbb{D}$ とする.

(i)

$$(2.1) \quad \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right|, \quad z \in \mathbb{D}$$

が成り立つ. また $z_1 \in \mathbb{D} \setminus \{z_0\}$ と $\eta \in \partial\mathbb{D}$ について $\frac{f(z_1) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}f(z_1)} = \eta \frac{z_1 - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_1}$ が成り立つ必要十分条件は $f(z) = \tau_{f(z_0)}(\eta \tau_{z_0}^{-1}(z))$, $z \in \mathbb{D}$ であること.

(ii)

$$(2.2) \quad \frac{|f'(z_0)|}{1 - |f(z_0)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

が成り立つ. また $\eta \in \partial\mathbb{D}$ について $\frac{f'(z_0)}{1 - |f(z_0)|^2} = \frac{\eta}{1 - |z|^2}$ が成り立つ必要十分条件は $f(z) = \tau_{f(z_0)}(\eta \tau_{z_0}^{-1}(z))$, $z \in \mathbb{D}$ であること.

Proof. $w_0 = f(z_0)$ と置き, $g = \tau_{w_0} \circ f \circ \tau_{z_0}^{-1}$ と置く. このとき $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ であり $g(0) = 0$ を満たす. よって Schwarz の補題より

$$\begin{aligned} |g(z)| \leq |z| &\iff |\tau_{w_0}(f(z))| \leq |\tau_{z_0}(z)| \\ &\iff \left| \frac{f(z) - w_0}{1 - \bar{w}_0 f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| \end{aligned}$$

となり (2.1) を得る. また $\frac{f(z_1) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}f(z_1)} = \eta \frac{z_1 - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_1}$ とは $\tau_{w_0}(f(z_1)) = \eta \tau_{z_0}(z_1)$ が成り立つことに他ならず, これは

$$g(\tau_{z_0}(z_1)) = \tau_{w_0}(f(\tau_{z_0}^{-1}(\tau_{z_0}(z_1)))) = \eta \tau_{z_0}(z_1)$$

が成り立つことであるから Schwarz の補題の等号条件より $\tau_{w_0}(f(\tau_{z_0}^{-1}(z))) = g(z) = \eta z$ が成り立つ. よって $f(z) = \tau_{w_0}(\eta \tau_{z_0}(z))$, $z \in \mathbb{D}$ が成り立つ. 逆は明らかであろう.

次に $g'(z) = \tau'_{w_0}(f(\tau_{z_0}^{-1}(z)))f'(\tau_{z_0}^{-1}(z))\tau_{z_0}^{-1}'(z)$ より

$$g'(0) = \tau'_{w_0}(w_0)f'(z_0)\tau_{z_0}^{-1}'(0) = \frac{(1 - |z_0|^2)f'(z_0)}{1 - |z_0|^2}$$

である. Schwarz の補題より $|g'(0)| \leq 1$ であるから (2.2) を得る. 等号条件について $\frac{f'(z_0)}{1 - |f(z_0)|^2} = \frac{\eta}{1 - |z|^2}$ が成り立つことは $g'(0) = \eta$ が成り立つことに他ならないので Schwarz の補題の等号条件より $g(z) = \eta z$, $z \in \mathbb{D}$ を得る. これより上と同様にして $f(z) = \tau_{w_0}(\eta \tau_{z_0}(z))$, $z \in \mathbb{D}$ が成り立つことが従う. 逆は明らかであろう. \square

上の Theorem の (ii) は単位円板 \mathbb{D} の双曲計量 $\lambda(z)|dz|$ について

$$(2.3) \quad \lambda(f(z))|f'(z)| \leq \lambda(z)$$

が成り立つことを意味する。これは正則写像 $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ による双曲計量の引き戻しは双曲計量を越えないことを意味し、後の章で詳しく解説する。

Definition 2.4. 正則函数 $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ で \mathbb{D} 上で $|f(z)| \leq 1$ を満たすものの全てがなす集合を \mathcal{B} と表す。Schwarz-Pick の補題を $f \in \mathcal{B}$ に適用する場合、若干の注意が必要である。 $f(z_0) \in \mathbb{D}$ を仮定に追加すれば最大絶対値の原理より $|f(z)| < 1$ が成り立つので Schwarz-Pick の補題がそのまま適用できるが、追加しないときは $|f(z_0)| = 1$ が起こり得る。このとき $f = f(z_0)$ であるから不等式の左辺は恒等的に $|\frac{0}{0}|$ となってしまう。そこで予め $|f(z_0)| = 1$ の場合、左辺は $= 0$ と置くという規約を追加しなければならない。

Corollary 2.5. $f \in \mathcal{B}$ について

$$(2.4) \quad \frac{|f(0)| - |z|}{1 - |f(0)||z|} \leq |f(z)| \leq \frac{|f(0)| + |z|}{1 + |f(0)||z|}$$

が成り立つ。

Proof. $|f(0)| = 1$ の場合、最大絶対値の原理より $|f(z)| \equiv 1$ であり、不等式の最左辺も最右辺もともにそうであるから (2.4) は自明に成り立つ。

$|f(0)| < 1$ の場合は最大絶対値の原理より \mathbb{D} 上で $|f(z)| < 1$ であるから Schwarz-Pick の補題を用いて

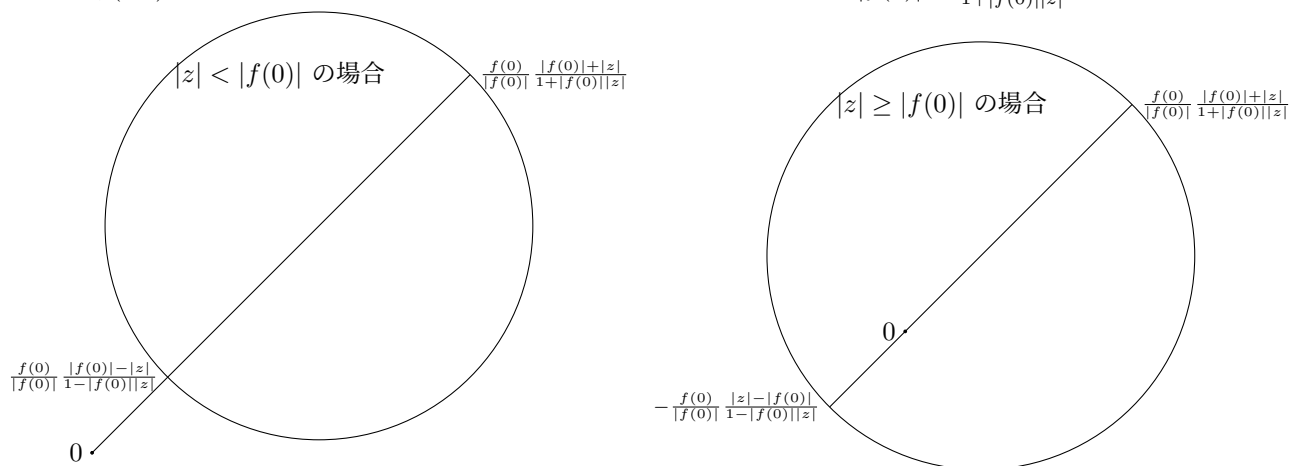
$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(z) - f(0)}{1 - \overline{f(0)}f(z)} \right| \leq |z| \\ \Leftrightarrow & |f(z) - f(0)|^2 \leq |z|^2 |1 - \overline{f(0)}f(z)| \\ \Leftrightarrow & |f(z)|^2 - \overline{f(0)}f(z) + f(0)\overline{f(z)} + |f(0)|^2 \leq |z|^2 \{1 - \overline{f(0)}f(z) + f(0)\overline{f(z)} + |f(0)|^2 |f(z)|^2\} \\ \Leftrightarrow & (1 - |z|^2 |f(0)|^2) |f(z)|^2 - (1 - |z|^2) \overline{f(0)}f(z) + f(0)\overline{f(z)} \leq |z|^2 - |f(0)|^2 \\ \Leftrightarrow & |f(z)|^2 - \frac{1 - |z|^2}{(1 - |z|^2 |f(0)|^2)} (\overline{f(0)}f(z) + f(0)\overline{f(z)}) \leq \frac{|z|^2 - |f(0)|^2}{1 - |z|^2 |f(0)|^2} \\ \Leftrightarrow & \left| f(z) - \frac{1 - |z|^2}{(1 - |z|^2 |f(0)|^2)} f(0) \right|^2 \leq \frac{|z|^2 - |f(0)|^2}{1 - |z|^2 |f(0)|^2} + \frac{(1 - |z|^2)^2}{(1 - |z|^2 |f(0)|^2)^2} \\ \Leftrightarrow & \left| f(z) - \frac{1 - |z|^2}{(1 - |z|^2 |f(0)|^2)} f(0) \right| \leq \frac{(1 - |f(0)|^2)|z|}{1 - |z|^2 |f(0)|^2} \\ \Leftrightarrow & f(z) \in \overline{\mathbb{D}} \left(\frac{1 - |z|^2}{(1 - |z|^2 |f(0)|^2)} f(0), \frac{(1 - |f(0)|^2)|z|}{1 - |z|^2 |f(0)|^2} \right) \end{aligned}$$

上の f の存在範囲を示す閉円板は

$$\begin{aligned} \frac{f(0)}{|f(0)|} \left\{ \frac{1 - |z|^2}{(1 - |z|^2 |f(0)|^2)} + \frac{(1 - |f(0)|^2)|z|}{1 - |z|^2 |f(0)|^2} \right\} &= \frac{f(0)}{|f(0)|} \frac{|f(0)| + |z|}{1 + |f(0)||z|} \\ \frac{f(0)}{|f(0)|} \left\{ \frac{1 - |z|^2}{(1 - |z|^2 |f(0)|^2)} - \frac{(1 - |f(0)|^2)|z|}{1 - |z|^2 |f(0)|^2} \right\} &= \frac{f(0)}{|f(0)|} \frac{|f(0)| - |z|}{1 - |f(0)||z|} \end{aligned}$$

を直径の両端とする。この閉円板は $|z| < |f(0)|$ ならば原点を含まず、直径の両端が原点から最も近い点と最も遠い点を与える。よって (2.4) が成り立つ。

次に $|z| \geq 0$ の場合, 原点はこの閉円板の内側または周上にあるので $|f(z)|$ の下からの評価式は得られないが, (2.4) の最左辺は負であるから左側の不等式は自明に成り立つ. また $|f(z)| \leq \frac{|f(0)|+|z|}{1+|f(0)||z|}$ も成り立つ.



□

2.2 有限 Blaschke 積

Definition 2.6. 重複を許した n 個の点 $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ と $\eta \in \partial\mathbb{D}$ について

$$(2.5) \quad B(z) = \eta \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z}, \quad z \in \mathbb{C}$$

の形に表される函数を有限 Blaschke 積と呼ぶ. また B の零点の (重複度も込めた) 個数である n を B の次数と言い $\deg B = n$ と表す. これは B を有理函数とみなしたときの次数と一致する. ただし絶対値が 1 の定数函数を位数 0 の Blaschke 積と規約する.

Theorem 2.7. 有限 Blaschke 積 B を \mathbb{D} 上の正則函数とみなしたとき, 次の性質を持つ.

- (i) B は $\bar{\mathbb{D}}$ への連続拡張を持つ.
- (ii) $\partial\mathbb{D}$ 上で $|B| = 1$.
- (iii) B の \mathbb{D} 内の零点は有限個.

逆に $f \in \mathcal{B}$ が (i), (ii), (iii) を満たせば f は有限 Blaschke 積である.

Proof. 前半は明らかである. 後半については f の零点を重複も込めて $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ と置き, $B(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z}$ と置けば, 任意の境界点 $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ について

$$\limsup_{\mathbb{D} \ni z \rightarrow \zeta} \frac{|f(z)|}{|B(z)|} \leq 1 \quad \text{and} \quad \limsup_{\mathbb{D} \ni z \rightarrow \zeta} \frac{|B(z)|}{|f(z)|} \leq 1$$

が成り立つ. よって最大絶対値の原理より \mathbb{D} 上で $\frac{|f(z)|}{|B(z)|} = 1$ が成り立つ. 従って, ある $\eta \in \partial\mathbb{D}$ により $f(z) = \eta B(z)$ と表すことが出来る. つまり f は有限 Blaschke 積である. □

Proposition 2.8. B_1, B_2 が有限 Blaschke 積ならば積 $B_1 B_2$ も有限 Blaschke 積である. また $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ で B が次数 n の有限 Blaschke 積ならば $\varphi \circ B, B \circ \varphi$ も次数 n の有限 Blaschke 積である.

Proof. 前半の主張は明らかであるから、後半を示そう。 $\varphi(z) = \eta_1 \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$, $B(z) = \eta_2 \prod_{j=1}^n \frac{z-z_j}{1-\bar{z}_j z}$ とする。このとき $\varphi \circ B$ 及び $B \circ \varphi$ は \mathbb{D} で正則であり定理 2.7 の (i), (ii) を満たす。 $\varphi \circ B$ の零点とは $B(\zeta) = z_0$ を満たす $\zeta \in \mathbb{D}$ のことである。 B を次数 n の有理関数とみなしたとき、 $B(\zeta) = z_0$ を満たす ζ は $\hat{\mathbb{C}}$ 内に重複度を込めて丁度 n 個存在する。しかしながら $|z| \geq 1$ のとき $|B(z)| \geq 1 > |z_0|$ であるから、このような ζ は単位円板 \mathbb{D} 内にも存在する。従って $\varphi \circ B$ の零点は \mathbb{D} 内に重複度を込めて丁度 n 個存在する。よって $\varphi \circ B$ は (iii) も満たすので有限 Blaschke 積であり、 $\deg \varphi \circ B = n$ である。

また B の零点 a には $B \circ \varphi$ の零点 $b = \varphi^{-1}(a)$ が対応し、この対応は B の零点の全体から $B \circ \varphi$ の零点全体への全単射であり、零点の位数も保存されるので、 $B \circ \varphi$ は B と重複度を込めて同数の零点を持つ。よって $B \circ \varphi$ は B と同じ次数の有限 Blaschke 積である。 \square

Theorem 2.9 (Carathéodory). $f \in \mathcal{B}$ が $f(z) = c_0 + c_1 z + \dots$ と Maclaurin 展開されたとする。任意の $n = 0, 1, \dots$ について Maclaurin 展開がはじめの n 次まで f のそれと一致する、つまり $B_n(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$ を満たし、次数が高々 n 次の有限 Blaschke 積 B_n が存在する。

Landau の記号を用いると $B_n(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$ とは $f(z) - B_n(z) = O(z^{n+1})$, $z \rightarrow 0$ と表せることを注意しておこう。

Proof. $|c_0| = 1$ のとき $B_0 = c_0$ と置けば B_0 は 0 次の Blaschke 積であり $f - B_0 = 0$ であるから、任意の n について $f - B_0 = O(z^{n+1})$ が成り立つ。よって $|c_0| = 1$ のとき定理が成り立つ。

今度は $|f(0)| = |c_0| < 1$ のときを考えよう。 $n = 0$ の場合 $B(z) = \tau_{c_0}^{-1}(z) = \frac{z-c_0}{1+\bar{c}_0 z} = c_0 + (1-|c_0|^2)z + \dots$ と置けば $f(z) - B(z) = O(z)$ が成り立つ。よって $n = 0$ のときに定理が成り立つ。

帰納法を用いて証明するために $n \geq 1$ とし $n-1$ まで定理が成り立つと仮定する。このとき

$$g(z) = \frac{1}{z} \frac{f(z) - c_0}{1 - \bar{c}_0 f(z)}, \quad z \in \mathbb{D}$$

と置けば $g \in \mathcal{B}$ であるから、帰納法の仮定より $g(z) - B_{n-1}(z) = O(z^n)$ を満たす高々 $n-1$ 次の Blaschke 積 B_{n-1} が存在する。このとき

$$B_n(z) = \frac{z B_{n-1}(z) + c_0}{1 + \bar{c}_0 z B_{n-1}(z)}$$

と置けば

$$\begin{aligned} f(z) - B_n(z) &= \frac{z g(z) + c_0}{1 + \bar{c}_0 z g(z)} - \frac{z B_{n-1}(z) + c_0}{1 + \bar{c}_0 z B_{n-1}(z)} \\ &= \frac{\text{分子}}{(1 + \bar{c}_0 z g(z))(1 + \bar{c}_0 z B_{n-1}(z))}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{分子} &= (z g(z) + c_0)(1 + \bar{c}_0 z B_{n-1}(z)) - (z B_{n-1}(z) + c_0)(1 + \bar{c}_0 z g(z)) \\ &= (1 - |c_0|^2) z (g(z) - B_{n-1}(z)) = O(z^{n+1}) \end{aligned}$$

より $f(z) - B_n(z) = O(z^{n+1})$ が成り立つ。 \square

Proposition 2.10. $f \in \mathcal{B}$ について B_n を定理 2.9 の有限 Blaschke 積とすれば $n \rightarrow \infty$ のとき \mathbb{D} 上、局所一様に $B_n(z) \rightarrow f(z)$ が成り立つ。

Proof. 実を言えば近似列の関数は Blaschke 積である必要はなく、単に \mathcal{B} の関数 g_n で $f(z) - g_n(z) = O(z^{n+1})$ でありさえすれば $n \rightarrow \infty$ のとき \mathbb{D} 上、局所一様に $B_n(z) \rightarrow f(z)$ が成り立つ。

実際

$$|c_k| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz \right| \leq \frac{2\pi r}{2\pi} \frac{1}{r^{k+1}} = \frac{1}{r^k} \rightarrow 1 \quad (r \nearrow 1)$$

であるから $|c_k| \leq 1$ が成り立つ. g_n の係数についても同じ評価式が成り立つので

$$|f(z) - g_n(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2|z|^{n+1} = \frac{2|z|^{n+1}}{1-|z|}$$

より局所一様収束すること分かる. □

2.3 Carathéodory の補間問題と Schur パラメータ

$n = 0, 1, 2, \dots$ とする. $(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ について $f \in \mathcal{B}$ で $f(z) = c_0 + \dots + c_n z^n + \dots$ を満たすものの存在・非存在を問う問題を Carathéodory の補間問題と言う. また存在する場合には, その表示を求めることも問題の一部とする. これは函数族 \mathcal{B} の係数体 (coefficient body) と呼ばれる集合

$$(2.6) \quad \mathcal{C}(n) = \{(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : \exists f \in \mathcal{B} \text{ with } f(z) = c_0 + \dots + c_n z^n + \dots \text{ in } \mathbb{D}\}$$

について $c \in \mathcal{C}(n)$ か $c \notin \mathcal{C}(n)$ かどうかを判定する条件を求めよと言う問題と見ることもできる.

さて定理 2.9 は Carathéodory の補間問題の解 f が存在すれば有限 Blaschke 積の解も存在することを言っている. $n = 0$ の場合, $c_0 = f(0)$ であるから函数が存在する為の条件は $|c_0| \leq 1$ である. また $n = 1$ のときは $|c_0| \leq 1$ かつ $|c_1| \leq 1 - |c_0|^2$ が条件となることを示すのは定理 2.9 の証明を参考にすれば難しい. 一般の n については 1917 年に Schur [29] により必要十分条件が求められた. ([30] はその英訳である.) Schur は $(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ から帰納的に計算される $n+1$ 個のパラメータを導入し函数 $f \in \mathcal{B}$ が存在するための必要十分条件をこれらのパラメータを用いて記述し, さらに $f(z) = c_0 + \dots + c_n z^n + \dots$ を満たす $f \in \mathcal{B}$ の表現公式も導いている. 以下では [11] の第 1 章, 及び原典である [30] をもとに Schur の結果を解説する. ここでは用語として $c = (c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ を長さ $n+1$ の Carathéodory データと呼び, $f(z) = c_0 + \dots + c_n z^n + \dots$ を満たす $f \in \mathcal{B}$ を, このデータに関する Carathéodory 問題の解と呼ぶ.

まず $n = 0$ のとき $f(z) = c_0 + O(z)$ を満たす $f \in \mathcal{B}$ の存在は $|c_0| > 1$ のとき非存在, $|c_0| = 1$ のときは一意解 $f = c_0$ のみが存在する. そして $|c_0| < 1$ のときもし解 f が存在すれば

$$\tilde{f}(z) = \frac{f(z) - c_0}{z(1 - \overline{c_0}f(z))} = \tau_{c_0} \circ f(z)$$

と置く時 $\tilde{f} \in \mathcal{B}$ であり, 逆に任意の $\tilde{f} \in \mathcal{B}$ について上の等式を逆に解いた

$$f(z) = \frac{z\tilde{f}(z) + c_0}{1 + \overline{c_0}z\tilde{f}(z)} = \tau_{c_0}^{-1}(z\tilde{f}(z))$$

は解である.

一般の n に関する Carathéodory の補間問題の解は次の命題を再帰的に用いることにより得られる.

Proposition 2.11. $c = (c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ を長さ $n+1$ の Carathéodory データとする.

- (i) $|c_0| > 1$ または $|c_0| = 1$ で $(c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$ のとき Carathéodory 問題は解を持たない.
- (ii) $|c_0| = 1$ かつ $(c_1, \dots, c_n) = (0, \dots, 0)$ のとき Carathéodory 問題は唯一解 $f = c_0$ を持つ.

(iii) $|c_0| < 1$ のとき f がデータ c に関する Carathéodory 問題の解ならば

$$\tilde{f}(z) = \frac{f(z) - c_0}{z(1 - \bar{c}_0 f(z))}$$

は長さ n のデータ \tilde{c} に関する Carathéodory 問題の解である. ここにデータ $\tilde{c} = (\tilde{c}_0, \dots, \tilde{c}_{n-1})$ は

$$(2.7) \quad \tilde{c}_0 = \frac{c_1}{1 - |c_0|^2}, \quad \tilde{c}_p = \frac{c_{p+1} + \bar{c}_0 \sum_{\ell=1}^p \tilde{c}_{p-\ell} c_\ell}{1 - |c_0|^2} \quad (p = 1, \dots, n-1).$$

により定義される. 逆に長さ n のデータ $\tilde{c} = (\tilde{c}_0, \dots, \tilde{c}_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ に関し \tilde{f} が Carathéodory 問題の解ならば $c_0 \in \mathbb{D}$ について

$$f(z) = \frac{z\tilde{f}(z) + c_0}{1 + \bar{c}_0 z\tilde{f}(z)} = \tau_{c_0}^{-1}(z\tilde{f}(z))$$

は長さ $n+1$ のデータ $c = (c_0, \dots, c_n)$ に関する Carathéodory 問題の解である. ここに

$$(2.8) \quad c_1 = (1 - |c_0|^2)\tilde{c}_0, \quad c_p = (1 - |c_0|^2)\tilde{c}_{p-1} - \bar{c}_0 \sum_{\ell=1}^{p-1} \tilde{c}_{p-1-\ell} c_\ell \quad (p = 2, \dots, n-1)$$

Proof. $|f(0)| = |c_0|$ であるから $|c_0| > 1$ のとき解 $f \in \mathcal{B}$ は存在しない. $|c_0| = 1$ のときは解 f が存在すれば最大値の原理より $f = c_0$ であるから $c_1 = \dots = c_n = 0$ である. 従って $|c_0| = 1$ のとき $(c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$ ならば解は存在せず, $(c_1, \dots, c_n) = (0, \dots, 0)$ のとき $f = c_0$ は唯一解である.

$|c_0| < 1$ の時を考えよう. このとき f がデータ $c = (c_0, \dots, c_n)$ に関する Carathéodory 問題の解ならば $\tilde{f}(z) = \frac{f(z) - c_0}{z(1 - \bar{c}_0 f(z))}$ は $\tilde{f} \in \mathcal{B}$ であり, $\tilde{f}(z) = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 z + \dots + \tilde{c}_{n-1} z^{n-1} + \dots$ と置けば

$$z\tilde{f}(z) - \bar{c}_0 z\tilde{f}(z)f(z) = z\tilde{f}(z)(1 - \bar{c}_0 f(z)) = f(z) - c_0 = c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$$

において両辺の z と z^{p+1} ($p = 1, \dots, n-1$) の係数を比べ

$$(1 - |c_0|^2)\tilde{c}_0 = c_1$$

$$(1 - |c_0|^2)\tilde{c}_p - \bar{c}_0 \sum_{\ell=1}^p \tilde{c}_{p-\ell} c_\ell = c_{p+1}$$

を得る. これより直ちに (2.7) と (2.8) が従う. □

Schur の皮むきアルゴリズム (the Schur layer-peeling algorithm) Carathéodory データ $c = (c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ について命題 2.11 を逐次的に適用し, Schur パラメータと呼ばれる $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_k)$, $0 \leq k \leq n$ を帰納的に定義しながら, 解の存在・非存在を考えることを Schur の皮むきアルゴリズムと呼ぶ.

冗長で退屈に感じるかも知れないが, 少し詳しく説明する. はじめに $c^{(0)} = (c_0^{(0)}, \dots, c_n^{(0)}) = (c_0, \dots, c_n)$ と置き

$$(2.9) \quad \gamma_0 = c_0^{(0)} = c_0$$

と定義する. $|\gamma_0| > 1$ のときは $k = 0$ とし, $\gamma = (\gamma_0)$ と置く. このときデータ $c = (c_0, \dots, c_n)$ の解 f_0 は存在しない. 実際もし存在すれば $|f_0(0)| = |\gamma_0| > 1$ となり $f_0 \in \mathcal{B}$ に反する. $|\gamma_0| = 1$ のときは $k = n$ とし $p = 1, \dots, n$ について

$$\gamma_p = \begin{cases} \infty, & \text{if } c_p^{(0)} \neq 0, \\ 0, & \text{if } c_p^{(0)} = 0 \end{cases}$$

と置き $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_n)$ を定義する. このとき $c_p^{(0)} \neq 0$ つまり $\gamma_p \neq 0$ となる $p \in \{1, \dots, n\}$ が 1 つでもあればデータ $c^{(0)} = (c_0^{(0)}, \dots, c_n^{(0)}) = (c_0, \dots, c_n)$ に関する解は存在しない. 実際 f_0 が $c^{(0)}$ の解ならば $f_0(z) = c_0^{(0)} + c_1^{(0)}z + \dots + c_n^{(0)}z^n + \dots$ を満たすが, 一方最大値の原理より $f_0 = c_0^{(0)}$ であるから矛盾を生じる. また $c_0^{(0)} = \dots = c_n^{(0)} = 0$ つまり $\gamma_1 = \dots = \gamma_n = 0$ ならばデータ $c^{(0)} = (c_0^{(0)}, \dots, c_n^{(0)}) = (c_0, \dots, c_n)$ に関する解 f_0 は一意的に存在し $f = \gamma_0$ である. $|\gamma_0| < 1$ の場合は長さ 1 のデータ $\gamma_0 = c_0^{(0)}$ に関する解 f_0 が存在し

$$f_1(z) = \frac{f_0(z) - \gamma_0}{z(1 - \overline{\gamma_0}f_0(z))}$$

と置くと $f_1 \in \mathcal{B}$ である. また長さ n のデータ $c^{(1)} = (c_0^{(1)}, \dots, c_{n-1}^{(1)}) \in \mathbb{C}^n$ を

$$c_0^{(1)} = \frac{c_1^{(0)}}{1 - |\gamma_0|^2}, \quad c_p^{(1)} = \frac{c_{p+1}^{(0)} + \overline{\gamma_0} \sum_{\ell=1}^p c_{p-\ell}^{(1)} c_\ell^{(0)}}{1 - |\gamma_0|^2} \quad (1 \leq p \leq n-1).$$

と定義する. このとき f_0 がデータ $c^{(0)} = (c_0^{(0)}, \dots, c_n^{(0)}) = (c_0, \dots, c_n)$ に関する解であることと f_1 がデータ $c^{(1)} = (c_0^{(1)}, \dots, c_{n-1}^{(1)})$ の解であることは同値である.

次の操作は $\gamma_1 = c_0^{(1)}$ と置く. $|\gamma_1| > 1$ のときは $k = 1$ とし, $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1)$ と置く. このときデータ $c = (c_0, \dots, c_n)$ の解 f_0 は存在しない. 実際もし存在すれば $|f_1(0)| = |\gamma_1| > 1$ となり $f_1 \in \mathcal{B}$ に反する. $|\gamma_1| = 1$ のときは $k = n$ とし $p = 2, \dots, n$ について

$$\gamma_p = \begin{cases} \infty, & \text{if } c_p^{(1)} \neq 0, \\ 0, & \text{if } c_p^{(1)} = 0 \end{cases}$$

と置き $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_n)$ を定義する. このとき $c_p^{(1)} \neq 0$ つまり $\gamma_p \neq 0$ となる $p \in \{2, \dots, n\}$ が 1 つでもあればデータ $c^{(1)} = (c_0^{(1)}, \dots, c_{n-1}^{(1)})$ に関する解は存在しない. 実際 f_1 が $c^{(1)}$ の解ならば $f_1(z) = c_0^{(1)} + c_1^{(1)}z + \dots + c_{n-1}^{(1)}z^{n-1} + \dots$ を満たすが, 一方最大値の原理より $f_1 = c_0^{(1)}$ であるから矛盾を生じる. これより特にデータ $c^{(0)} = (c_0^{(0)}, \dots, c_n^{(0)})$ に関する解 f_0 も存在しない. また $c_0^{(1)} = \dots = c_n^{(1)} = 0$ つまり $\gamma_2 = \dots = \gamma_n = 0$ ならばデータ $c^{(1)} = (c_0^{(1)}, \dots, c_{n-1}^{(1)})$ に関する解 f_1 は一意的に存在し $f_1 = \gamma_1$ である. 従ってデータ $c^{(0)} = (c_0^{(0)}, \dots, c_n^{(0)})$ に関する解 f_0 も一意的に存在し $f_0 = \tau_{\gamma_0}(\gamma_1 z)$ (1 次 Blaschke 積) である.

$|\gamma_1| < 1$ の場合は $f_1(0) = \gamma_1$ を満たす $f_1 \in \mathcal{B}$ が存在し

$$f_2(z) = \frac{f_1(z) - \gamma_1}{z(1 - \overline{\gamma_1}f_1(z))}$$

と置けば $f_2 \in \mathcal{B}$ である. そして

$$f_0(z) = \frac{zf_1(z) - \gamma_0}{1 - zf_1(z)} = \tau_{\gamma_0}(zf_1(z)) = \tau_{\gamma_0}(z\tau_{\gamma_1}(zf_2(z)))$$

は長さ 2 のデータ $(c_0^{(0)}, c_1^{(0)})$ の解である. ここで長さ $n-1$ のデータ $c^{(2)} = (c_0^{(2)}, \dots, c_{n-2}^{(2)}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ を

$$c_0^{(2)} = \frac{c_1^{(1)}}{1 - |\gamma_1|^2}, \quad c_p^{(2)} = \frac{c_{p+1}^{(1)} + \overline{\gamma_1} \sum_{\ell=1}^p c_{p-\ell}^{(2)} c_\ell^{(1)}}{1 - |\gamma_1|^2} \quad (1 \leq p \leq n-2).$$

と定義する. このとき f_0 がデータ $c^{(0)} = (c_0^{(0)}, \dots, c_n^{(0)}) = (c_0, \dots, c_n)$ に関する解であることと f_1 がデータ $c^{(1)} = (c_0^{(1)}, \dots, c_{n-1}^{(1)})$ の解であることは同値であり, さらにこれは f_2 がデータ $c^{(2)} = (c_0^{(2)}, \dots, c_{n-2}^{(2)})$ の解であることと同値である.

ここで帰納的に $1 \leq j \leq n-1$ について $c^{(0)} = (c_0^{(0)}, \dots, c_n^{(0)})$, \dots , $c^{(j)} = (c_0^{(j)}, \dots, c_{n-j}^{(j)})$, $\gamma_0 = c_0^{(0)}, \dots, \gamma_{j-1} = c_{j-1}^{(j-1)}$ が既に定まったとし, $|\gamma_0| = |c_0^{(0)}| < 1, \dots, |\gamma_{j-1}| = |c_{j-1}^{(j-1)}| < 1$ を満たすとする. ここで $\gamma_j = c_0^{(j)}$ と置く. $|\gamma_j| > 1$ のときは $k = j$ とし, $\gamma = (\gamma_0, \gamma_j)$ と置く. このときデータ $f_j(0) = \gamma_j$ を満たす $f_j \in \mathcal{B}$ は存在しない. 従ってデータ $c = (c_0, \dots, c_n)$ の解 f_0 も存在しない. $|\gamma_j| = 1$ のときは $k = n$ とし $p = j+1, \dots, n$ について

$$\gamma_p = \begin{cases} \infty, & \text{if } c_p^{(j)} \neq 0, \\ 0, & \text{if } c_p^{(j)} = 0 \end{cases}$$

と置き $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_n)$ を定義する. このとき $c_p^{(j)} \neq 0$ つまり $\gamma_p \neq 0$ となる $p \in \{2, \dots, n\}$ が 1 つでもあればデータ $c^{(j)} = (c_0^{(j)}, \dots, c_{n-j}^{(j)})$ に関する解 f_j は存在しない. これより特にデータ $c^{(0)} = (c_0^{(0)}, \dots, c_n^{(0)})$ に関する解 f_0 も存在しない. また $c_1^{(j)} = \dots = c_{n-j}^{(j)} = 0$ つまり $\gamma_{j+1} = \dots = \gamma_n = 0$ ならばデータ $c^{(1)} = (c_0^{(1)}, \dots, c_n^{(1)})$ に関する解 f_j は一意的に存在し $f_j = \gamma_1$ である. 従ってデータ $c^{(0)} = (c_0^{(0)}, \dots, c_n^{(0)})$ に関する解 f_0 も一意的に存在し

$$f_0 = \tau_{\gamma_0}^{-1}(z\gamma_1) = \dots = \tau_{\gamma_0}^{-1}(z\tau_{\gamma_1}^{-1}(\dots z\tau_{\gamma_{j-1}}^{-1}(z\gamma_j)\dots))$$

j 次 Blaschke 積である. $|\gamma_j| < 1$ の場合は $f_j(0) = \gamma_j$ を満たす $f_j \in \mathcal{B}$ が存在し

$$f_{j+1}(z) = \frac{f_j(z) - \gamma_j}{z(1 - \overline{\gamma_j}f_j(z))}$$

と置けば $f_{j+1} \in \mathcal{B}$ である. そして

$$f_0(z) = \frac{zf_1(z) - \gamma_0}{1 - z\overline{\gamma_0}f_1(z)} = \tau_{\gamma_0}(zf_1(z))\tau_{\gamma_0}^{-1}(z\tau_{\gamma_1}^{-1}(\dots z\tau_{\gamma_{j-1}}^{-1}(z\gamma_j)\dots))$$

は長さ $j+1$ のデータ $(c_0^{(0)}, \dots, c_j^{(0)})$ の解である. ここで長さ $n-j$ のデータ $c^{(j+1)} = (c_0^{(j+1)}, \dots, c_{n-j-1}^{(j+1)}) \in \mathbb{C}^{n-j-1}$ を

$$c_0^{(j+1)} = \frac{c_1^{(j)}}{1 - |\gamma_j|^2}, \quad c_p^{(j+1)} = \frac{c_{p+1}^{(j)} + \overline{\gamma_1} \sum_{\ell=1}^p c_{p-\ell}^{(j+1)} c_\ell^{(j)}}{1 - |\gamma_j|^2} \quad (1 \leq p \leq n-j-1).$$

と定義する. このとき f_0 がデータ $c^{(0)} = (c_0^{(0)}, \dots, c_n^{(0)}) = (c_0, \dots, c_n)$ に関する解であることと f_{j+1} がデータ $c^{(j+1)} = (c_0^{(j+1)}, \dots, c_{n-j-1}^{(j+1)})$ の解であることと同値である.

以上のこの操作を繰り返し, データ $c = (c_0, \dots, c_n)$ の Schur パラメータ $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_k)$, $k = 0, \dots, n$ を定義する.

ここまで読み進めることが出来たなら, 次の定理は容易に理解されるであろう.

Theorem 2.12. *Carathéodory* データ $c = (c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ について *Schur* パラメータ $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_k)$, $0 \leq k \leq n$ を得たとする.

(i) $k = n$ で $|\gamma_0| < 1, \dots, |\gamma_n| < 1$ ならば f が *Carathéodory* 問題の解であるための必要十分条件は

$$(2.10) \quad f(z) = \tau_{\gamma_0}^{-1}(z\tau_{\gamma_1}^{-1}(\dots z\tau_{\gamma_n}^{-1}(z\omega(z))\dots)), \quad \omega \in \mathcal{B}$$

と表せることである.

(ii) If $k = n$ and $|\gamma_0| < 1, \dots, |\gamma_{j-1}| < 1, |\gamma_j| = 1, \gamma_{j+1} = \dots = \gamma_n = 0$ for some $j = 0, \dots, n$ のとき Carathéodory 問題は一意解

$$(2.11) \quad f(z) = \tau_{\gamma_0}^{-1}(z\tau_{\gamma_1}^{-1}(\dots z\tau_{\gamma_{j-1}}^{-1}(\gamma_j z)\dots)).$$

を持ち これは次数 j の Blaschke 積である.

(iii) 条件 (2.12) と (2.12) のどちらも成り立たないとき Carathéodory problem は解を持たない.

Carathéodory データ c について条件 (2.12), (2.12), (2.12) は係数体 $\mathcal{C}(n)$ についてそれぞれ $c \in \text{Int } \mathcal{C}(n)$, $c \in \partial\mathcal{C}(n)$ $c \notin \mathcal{C}(n)$ であるための必要十分条件を述べている.

上では帰納的に Schur パラメータを定義したが, もう少し直接的な表現については [29] and [30] を参照. 参考までに $n = 0, 1, 2$ については

$$(2.12) \quad \gamma_0 = c_0, \quad \gamma_1 = \frac{c_1}{1 - |c_0|^2}, \quad \gamma_2 = \frac{(1 - |c_0|^2)c_2 + \overline{c_0}c_1^2}{(1 - |c_0|^2)^2 - |c_1|^2}$$

である.

Corollary 2.13. Schur の補間定理の (i) $k = n$ で $|\gamma_0| < 1, \dots, |\gamma_n| < 1$ の場合 $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_n)$ のみに依存するある n 次多項式 A_n, B_n, C_n, D_n により Caratheodory 問題の解 $f \in \mathcal{B}$

$$(2.13) \quad f(z) = \frac{zA_n(z)\omega(z) + B_n(z)}{zC_n(z)\omega(z) + D_n(z)}$$

の形に表せる.

Proof.

$$\tau_{\gamma_n}^{-1}(z\omega(z)) = \frac{z\omega(z) + \gamma_n}{1 + \overline{\gamma_n}z\omega(z)} = \frac{zA_0\omega(z) + B_0}{zC_0\omega(z) + D_0}$$

より

$$\begin{aligned} \tau_{\gamma_{n-1}}^{-1}(z\tau_{\gamma_n}^{-1}(z\omega(z))) &= \frac{z\tau_{\gamma_n}^{-1}(z\omega(z)) + \gamma_{n-1}}{1 + \overline{\gamma_{n-1}}z\tau_{\gamma_n}^{-1}(z\omega(z))} \\ &= \frac{z\frac{zA_0\omega(z) + B_0}{zC_0\omega(z) + D_0} + \gamma_{n-1}}{1 + \overline{\gamma_{n-1}}z\frac{zA_0\omega(z) + B_0}{zC_0\omega(z) + D_0}} \\ &= \frac{z(zA_0 + \gamma_{n-1}C_0)\omega(z) + zB_0 + \gamma_{n-1}D_0}{z(C_0 + \overline{\gamma_{n-1}}A_0z) + D_0 + \overline{\gamma_{n-1}}B_0z} \end{aligned}$$

となるので, 帰納的に繰り返せばよい. □

2.4 Nevanlinna-Pick の補間問題

Schwarz-Pick の補題を用いると $z_0, w_0 \in \mathbb{D}$ を固定し $f(z_0) = w_0$ を満たすという条件下で $f \in \mathcal{B}$ を動かしたとき, 固定点 $z_1 \in \mathbb{D} \setminus \{z_0\}$ において f の取る値 $f(z_1)$ の範囲が, ある閉円板になることが分かる. 実際 $f(z_0) = w_0$ ならば Schwarz-Pick の補題と補題 5.8 の計算より

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z_1) - w_0}{1 - \overline{w_0}f(z_1)} \right| &\leq \delta(z_1, z_0) = \left| \frac{z_1 - z_0}{1 - \overline{z_0}z_1} \right| \\ \iff \left| f(z_1) - \frac{(1 - \delta(z_1, z_0)^2)w_0}{1 - |w_0|^2\delta(z_1, z_0)^2} \right| &\leq \frac{(1 - |w_0|^2)\delta(z_1, z_0)}{1 - |w_0|^2\delta(z_1, z_0)^2} \end{aligned}$$

を得るが、これは $f(z_1)$ が中心 $\frac{(1-\delta(z_1, z_0))^2 w_0}{1-|w_0|^2 \delta(z_1, z_0)^2}$ 、半径 $\frac{(1-|w_0|^2) \delta(z_1, z_0)}{1-|w_0|^2 \delta(z_1, z_0)^2}$ の閉円板に含まれることを示す。逆にこの円板内の任意の点 w_1 について $f(z_0) = w_0$ 、 $f(z_1) = w_1$ を満たす $f \in \mathcal{B}$ が存在することを示すことも出来るが、後から同様な議論を何度も行うので、ここでは証明を控えておく。

Pick [24] と Nevanlinna [23] はもっと先に進み次の問題を考えた。 $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ を相異なる n 点とし、 $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ とするとき

$$(2.14) \quad f(z_j) = w_j, \quad j = 1, \dots, n$$

を満たす $f \in \mathcal{B}$ の存在、非存在について研究を行った。ここでは与えられた $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ と $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ について上式を満たす $f \in \mathcal{B}$ を Pick-Nevanlinna の補間問題の解と呼ぶことにする。

Theorem 2.14 (Pick-Nevanlinna の補間定理). $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ を相異なる点とし、 $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ とする。このとき $f \in \mathcal{B}$ で

$$(2.15) \quad f(z_j) = w_j, \quad j = 1, \dots, n$$

を満たすものが存在する為の必要十分条件は *Hermite* 形式

$$Q_n(t_1, \dots, t_n) = \sum_{j,k=1}^n \frac{1 - w_j \overline{w_k}}{1 - z_j \overline{z_k}} t_j \overline{t_k}$$

が $Q_n \geq 0$ 、つまり任意の $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{C}$ について $Q_n(t_1, \dots, t_n) \geq 0$ となることである。また $Q_n \geq 0$ ならば (2.15) を満たす高々 n 次の *Blaschke* 積が存在する。

証明の前に簡単な補題を 2 つ準備しておこう。1 つめは直接的な計算により容易に確かめることが出来る。

Lemma 2.15. $\tau_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ について

$$(2.16) \quad \frac{1 - \tau_a(z_1) \overline{\tau_a(z_2)}}{1 - z_1 \overline{z_2}} = \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}z_1)(1 - a\overline{z_2})}$$

が成り立つ。

Lemma 2.16. 2 次の *Hermite* 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ について 2 次形式を $Q(t_1, t_2) = \sum_{j,k=1}^2 a_{jk} a_{jk} t_j \overline{t_k}$ と置く。このとき $Q(t_1, t_2) \geq 0$ が成り立つ為の必要十分条件は $a_{11} \geq 0$ 、 $a_{22} \geq 0$ かつ $\det A \geq 0$ が成り立つことである。

Proof. $Q(t_1, t_2) \geq 0$ 、 $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$ ならば A の 2 つの固有値 λ_1, λ_2 はともに非負であるから $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \geq 0$ である。また $a_{11} = Q(1, 0) \geq 0$ 、 $a_{22} = Q(0, 1) \geq 0$ である。

逆に $a_{11} \geq 0$ 、 $a_{22} \geq 0$ かつ $\det A \geq 0$ が成り立つとする。 $a_{11} = 0$ ならば $\det A = -|a_{12}|^2 \geq 0$ より $a_{12} = 0$ となり $a_{21} = \overline{a_{12}} = 0$ である。よって $a_{22} \geq 0$ と合わせ $Q(t_1, t_2) = a_{22}|t_2|^2 \geq 0$ が成り立つ。

$a_{11} > 0$ の場合は

$$\begin{aligned} Q(t_1, t_2) &= a_{11} \left(t_1 \overline{t_1} + t_1 \frac{\overline{a_{21}}}{a_{11}} t_2 + \overline{t_1} \frac{a_{21}}{a_{11}} t_2 \right) + a_{22} |t_2|^2 \\ &= a_{11} \left| t_1 + \frac{a_{21}}{a_{11}} t_2 \right|^2 + \left(a_{22} - \frac{|a_{21}|^2}{a_{11}} \right) |t_2|^2 \\ &= a_{11} \left| t_1 + \frac{a_{21}}{a_{11}} t_2 \right|^2 + \frac{\det A}{a_{11}} |t_2|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

□

Proof of Theorem 2.14. $n = 0$ のとき $Q_1 \geq 0$ が成り立つ為の必要十分条件は $|w_1|^2 \leq 1$ である. $|w_1| = 1$ ならば $f = w_1$ は (2.15) を満たす \mathcal{B} における唯一の解であり, 0 次の Blaschke 積である. また $|w_1| < 1$ ならば $f = \tau_{w_1}^{-1} \circ \tau_{z_1}$ は (2.15) を満たす \mathcal{B} における解の 1 つであり 1 次の Blaschke 積である. 逆に (2.15) を満たす $f \in \mathcal{B}$ が存在すれば明らかに $|w_1| = |f(z_1)| \leq 1$ である.

次に証明に直接必要ではないが, 洞察を得るために $n = 2$ の場合を考えよう. 上の補題より

$$\begin{aligned} Q_2 \geq 0 &\iff \frac{1 - |w_1|^2}{1 - |z_1|^2} \geq 0, \quad \frac{1 - |w_2|^2}{1 - |z_2|^2} \geq 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{1 - |w_1|^2}{1 - |z_1|^2} \frac{1 - |w_2|^2}{1 - |z_2|^2} - \frac{|1 - w_1 \bar{w}_2|^2}{|1 - z_1 \bar{z}_2|^2} \geq 0 \\ &\iff |w_1| \leq 1, \quad |w_2| \leq 1 \quad \text{かつ} \quad \frac{1 - |w_1|^2}{1 - |z_1|^2} \frac{1 - |w_2|^2}{1 - |z_2|^2} - \frac{|1 - w_1 \bar{w}_2|^2}{|1 - z_1 \bar{z}_2|^2} \geq 0 \end{aligned}$$

ここで w_2 の絶対値に関し分類を行う. $|w_2| = 1$ のときは上より $w_1 = w_2$ が分かるので $f = w_2$ は (2.15) を満たす \mathcal{B} における唯一の解であり, 0 次の Blaschke 積である. $|w_2| < 1$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{1 - |w_1|^2}{1 - |z_1|^2} \frac{1 - |w_2|^2}{1 - |z_2|^2} - \frac{|1 - w_1 \bar{w}_2|^2}{|1 - z_1 \bar{z}_2|^2} \geq 0 &\iff \frac{(1 - |w_1|^2)(1 - |w_2|^2)}{|1 - w_1 \bar{w}_2|^2} \geq \frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}{|1 - z_1 \bar{z}_2|^2} \\ &\iff \left| \frac{w_1 - w_2}{1 - \bar{w}_2 w_1} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_2 z_1} \right| \end{aligned}$$

よって

$$z'_1 = \tau_{z_2}(z_1) = \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_2 z_1}, \quad w'_1 = \tau_{w_2}(w_1) = \frac{w_1 - w_2}{1 - \bar{w}_2 w_1}$$

と置けば $|w'_1| \leq |z'_1|$ であり $n = 1$ の場合の Theorem より $g(z'_1) = \frac{w'_1}{z'_1}$ を満たす高々 1 次の Blaschke 積 $g \in \mathcal{B}$ が存在する. このとき $f(z) = \tau_{w'_1}^{-1}(\tau_{z'_1}(z)g(\tau_{z'_1}(z)))$ と置けば f は高々 2 次の Blaschke 積であり

$$\begin{aligned} f(z_1) &= \tau_{w_2}^{-1}(\tau_{z_2}(z_1)g(\tau_{z_2}(z_1))) = \tau_{w_2}^{-1}(z'_1 g(z'_1)) = \tau_{w_2}^{-1}(w'_1) = \tau_{w_2}^{-1}(\tau_{w_2}(w_1)) = w_1 \\ f(z_2) &= \tau_{w_2}^{-1}(\tau_{z_2}(z_2)g(\tau_{z_2}(z_2))) = \tau_{w_2}^{-1}(0) = w_2 \end{aligned}$$

が成り立つ.

逆に $n = 2$ のとき (2.15) を満たす $f \in \mathcal{B}$ が存在すれば $|w_j| = |f(z_j)| \leq 1$ であり Schwarz-Pick の補題より $\left| \frac{w_1 - w_2}{1 - \bar{w}_2 w_1} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_2 z_1} \right|$ が成り立つ. よって $Q_2 \geq 0$ である.

それでは帰納法により定理を証明しよう. $n \geq 2$ とし, $n - 1$ まで Theorem が成り立つと仮定する. まず $|w_n| = 1$ のときを考えよう.

$Q_n \geq 0$ とすると各 $j = 1, \dots, n - 1$ について 2 次の Hermite 行列

$$\begin{pmatrix} \frac{1 - |w_j|^2}{1 - |z_j|^2} & \frac{1 - w_j \bar{w}_n}{1 - z_j \bar{z}_n} \\ \frac{1 - w_n \bar{w}_j}{1 - z_n \bar{z}_j} & \frac{1 - |w_n|^2}{1 - |z_n|^2} \end{pmatrix}$$

の行列式が非負であることと合わせ $|1 - w_j \bar{w}_n| = 0$ となり, これより $w_j = w_n$, $j = 1, \dots, n - 1$ が成り立つ. よって $f = w_n$ は (2.15) を満たす \mathcal{B} における唯一の解であり 0 次の Blaschke 積である. 逆に (2.15) を満たす $f \in \mathcal{B}$ が存在すれば $f = w_n$ が成り立ち, $w_1 = \dots = w_n$ であり $Q_n \geq 0$ が成り立つ.

今度は $|w_n| < 1$ と仮定する. $Q_n \geq 0$ ならば各 j について $t_k = \delta_{jk}$, $k = 1, \dots, n$ と置いて Q_n に代入すれば $\frac{1 - |w_j|^2}{1 - |z_j|^2} \geq 0$ より $|w_j| \leq 1$ が成り立つ. そこで

$$(2.17) \quad z'_j = \tau_{z_n}(z_j) = \frac{z_j - z_n}{1 - \bar{z}_n z_j} \quad \text{and} \quad w'_j = \tau_{w_n}(w_j) = \frac{w_j - w_n}{1 - \bar{w}_n w_j}, \quad j = 1, \dots, n$$

と置く. このとき $z'_n = w'_n = 0$ 及び z_1, \dots, z_n が互いに相異なるので z'_1, \dots, z'_n も互いに相異なることに注意しよう. これより特に $z'_1 \neq 0, j = 1, \dots, n-1$ が成り立つ. さて変換

$$(2.18) \quad \mathcal{B} \ni f \mapsto g = \tau_{w_n} \circ f \circ \tau_{z_n}^{-1} \in \mathcal{B}$$

は $|w_n|, |z_n| < 1$ であるから全単射であり

$$(2.19) \quad f(z_j) = w_j, j = 1, \dots, n \iff g(z'_j) = w'_j, j = 1, \dots, n-1, \text{ and } g(0) = 0$$

が成り立つ. そして f が次数 m の Blaschke 積であることと g が次数 m の Blaschke 積であることは同値である. また $z'_1, \dots, z'_{n-1}, z'_n = 0, w'_1, \dots, w'_{n-1}, w'_n = 0$ に対応する 2 次形式を Q'_n と置くと

$$\frac{1 - z'_j \overline{z'_k}}{1 - z_j \overline{z_k}} = \frac{1 - \tau_{z_n}(z_j) \overline{\tau_{z_n}(z_k)}}{1 - z_j \overline{z_k}} = \frac{1 - |z_n|^2}{(1 - \overline{z_n} z_j)(1 - z_n \overline{z_k})} = \alpha_j \overline{\alpha_k}, \quad \alpha_j = \frac{\sqrt{1 - |z_n|^2}}{1 - \overline{z_n} z_j} \neq 0$$

$$\frac{1 - w'_j \overline{w'_k}}{1 - w_j \overline{w_k}} = \frac{1 - \tau_{w_n}(w_j) \overline{\tau_{w_n}(w_k)}}{1 - w_j \overline{w_k}} = \frac{1 - |w_n|^2}{(1 - \overline{w_n} w_j)(1 - w_n \overline{w_k})} = \beta_j \overline{\beta_k}, \quad \beta_j = \frac{\sqrt{1 - |w_n|^2}}{1 - \overline{w_n} w_j} \neq 0$$

より

$$(2.20) \quad \frac{1 - w'_j \overline{w'_k}}{1 - z'_j \overline{z'_k}} t_j \overline{t_k} = \frac{1 - w_j \overline{w_k}}{1 - z_j \overline{z_k}} \frac{\beta_j}{\alpha_j} \overline{\frac{\beta_k}{\alpha_k}} t_j \overline{t_k}$$

であるから Q_n, Q'_n の表現行列を $A_n = (a_{jk}), A'_n = (a'_{jk})$ と置けば

$$(2.21) \quad a'_{jk} = \frac{\beta_j}{\alpha_j} \overline{\frac{\beta_k}{\alpha_k}} a_{jk}$$

より

$$(2.22) \quad \text{rank } A'_n = \text{rank } A_n$$

$$(2.23) \quad \det A'_n = \prod_{j=k}^n \left| \frac{\beta_j}{\alpha_j} \right|^2 \det A_n$$

$$(2.24) \quad Q'_n(t_1, \dots, t_n) = Q_n \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} t_1, \dots, \frac{\beta_n}{\alpha_n} t_n \right)$$

が成り立つ. これより特に $Q'_n \geq 0 \iff Q_n \geq 0$ が成り立つことに注意する.

さらに $h(z) = \frac{g(z)}{z}$ と置くと

$$(2.25) \quad g(z'_j) = w'_j, j = 1, \dots, n-1 \text{ and } g(0) = 0 \iff h(z'_j) = \frac{w'_j}{z'_j}, j = 1, \dots, n-1$$

そして g が次数 m の Blaschke 積であることと h が次数 $m-1$ の Blaschke 積であることは同値である. ここで帰納法の仮定より h の存在は

$$(2.26) \quad \tilde{Q}_{n-1}(s_1, \dots, s_{n-1}) = \sum_{j,k=1}^n \frac{1 - \frac{w'_j}{z'_j} \overline{\frac{w'_k}{z'_k}}}{1 - z'_j \overline{z'_k}} s_j \overline{s_k}$$

で定義される 2 次形式 \tilde{Q}_{n-1} について $\tilde{Q}_{n-1} \geq 0$ と同値である. よって Theorem の証明は $Q'_n \geq 0 \iff \tilde{Q}_{n-1} \geq 0$ を示すことに還元された. これは

$$\begin{aligned} Q'_n(t_1, \dots, t_n) &= |t_n|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} t_j \bar{t}_n + \sum_{k=1}^{n-1} t_n \bar{t}_k + \sum_{j,k=1}^{n-1} \frac{1 - w'_j \bar{w}'_k}{1 - z'_j \bar{z}'_k} t_j \bar{t}_k \\ &= \left| t_n + \sum_{j=1}^{n-1} t_j \right|^2 + \sum_{j,k=1}^{n-1} \left(\frac{1 - w'_j \bar{w}'_k}{1 - z'_j \bar{z}'_k} - 1 \right) t_j \bar{t}_k \end{aligned}$$

ここで

$$(2.27) \quad \frac{1 - w'_j \bar{w}'_k}{1 - z'_j \bar{z}'_k} - 1 = \frac{z'_j \bar{z}'_k - w'_j \bar{w}'_k}{1 - z'_j \bar{z}'_k} = \frac{1 - \frac{w'_j \bar{w}'_k}{z'_j \bar{z}'_k}}{1 - z'_j \bar{z}'_k} z'_j \bar{z}'_k, \quad j, k = 1, \dots, n-1$$

より

$$(2.28) \quad Q'_n(t_1, \dots, t_n) = \left| t_n + \sum_{j=1}^{n-1} t_j \right|^2 + \tilde{Q}_{n-1}(z'_1 t_1, \dots, z'_{n-1} t_{n-1})$$

が成り立つ. これより直ちに $\tilde{Q}_{n-1} \geq 0 \implies Q'_n \geq 0$ が従う. 逆に $Q'_n \geq 0$ ならば

$$\tilde{Q}_{n-1}(s_1, \dots, s_{n-1}) = - \left| t_n + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{s_j}{z'_j} \right|^2 + Q'_n \left(\frac{s_1}{z'_1}, \dots, \frac{s_{n-1}}{z'_{n-1}}, t_n \right)$$

において $t_n = -\sum_{j=1}^{n-1} \frac{s_j}{z'_j}$ と置けば $\tilde{Q}_{n-1}(s_1, \dots, s_{n-1}) \geq 0$ を得る. これで証明は完了したのであるが, 後述する系を証明する準備として \tilde{Q}_{n-1} の表現行列 $\tilde{A}_{n-1} := (\tilde{a}_{jk})$ について見ておこう. (2.27) より $a'_{jk} - 1 = \tilde{a}_{jk} z'_j \bar{z}'_k$, $j, k = 1, \dots, n-1$ であるから Q'_n の表現行列 $A'_n = (a'_{jk})$ は

$$(2.29) \quad A'_n = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & (1 + z'_j \bar{z}'_k \tilde{a}_{jk}) & & \vdots \\ & & & 1 \\ 1 & \dots & & 1 \end{pmatrix}$$

rank A'_n を計算するために各 $j = 1, \dots, n-1$ 行から n 行を引き, 引き続いて $k = 1, \dots, n-1$ 列から n 列を引く. 最後に各 $j = 1, \dots, n-1$ 行を z'_j で割り, 各 $k = 1, \dots, n-1$ 列を \bar{z}'_k で割れば

$$(2.30) \quad \begin{aligned} \text{rank } A'_n &= \text{rank} \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & (z'_j \bar{z}'_k \tilde{a}_{jk}) & & \vdots \\ & & & 0 \\ 1 & \dots & & 1 \end{pmatrix} \\ &= \text{rank} \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & (z'_j \bar{z}'_k \tilde{a}_{jk}) & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & (\tilde{a}_{jk}) & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix} = \text{rank } \tilde{A}_{n-1} + 1 \end{aligned}$$

を得る。また同様な計算により

$$(2.31) \quad \det A'_n = \prod_{j=1}^{n-1} |z'_j|^2 \det \tilde{A}_{n-1}$$

が成り立つ。 □

Corollary 2.17. $Q_n \geq 0$ とし, A_n を 2 次形式 Q_n を表現する *Hermite* 行列とする. このとき補間問題 $f(z_j) = w_j, j = 1, \dots, n$ が $f \in \mathcal{B}$ において唯一解を持つための必要十分条件は $\det A_n = 0$ であり, このとき $m := \text{rank } A_n < n$ と置けば, 唯一解 f は次数 m の *Blaschke* 積である. 逆に, 次数 $m < n$ の *Blaschke* 積がこの補間問題の解ならば $\text{rank } A_n = m$ である.

Proof. $n = 1$ の場合を考えよう. $Q_1 \geq 0$ より $|w_1| \leq 1$ が成り立つが, $\det A_n = \frac{1-|w_1|^2}{1-|z_1|^2} = 0$ ならば $|w_1| = 1$ となり $\text{rank } A_1 = 0$ である. また補間問題は唯一解 $f = w_1$ を持ち, これは 0 次の *Blaschke* 積である. 逆に補間問題の解が唯一ならば $|w_1| = 1$ であり, $\det A_1 = 0$ が成り立つ. (実際 $|w_1| < 1$ ならば $f(z) = \tau_{w_1}^{-1}(f_0(z)\tau_{z_1}(z)), f_0 \in \mathcal{B}$ が全ての解を与える.)

帰納法で証明を行うために $n \geq 2$ とし $n-1$ まで系が正しいと仮定し $Q_n \geq 0$ とする. $|w_n| = 1$ ならば $w_1 = \dots = w_n$ となり補間問題は唯一解 $f = w_n$ を持ち, これは 0 次の *Blaschke* 積である. また $A_n = 0$ であるから $\det A_n = 0$ であり $\text{rank } A_n = 0$ である. 従ってこの場合, 系は成り立つ.

今度は $|w_n| < 1$ とする. このとき $Q_n \geq 0 \iff Q'_n \geq 0 \iff \tilde{Q}_{n-1} \geq 0$ であり,

$$\prod_{j=1}^{n-1} |z'_j|^2 \det \tilde{A}_{n-1} = \det A'_n = \prod_{j=1}^n \left| \frac{\beta_j}{\alpha_j} \right|^2 \det A_n$$

であるから $\det A_n = 0$ ならば $\det \tilde{A}_{n-1} = 0$ が成り立ち, このとき帰納法の仮定より, 補間問題 $h(z'_j) = \frac{w'_j}{z'_j}, j = 1, \dots, n-1$ は次数 $\text{rank } \tilde{A}_{n-1}$ の *Blaschke* 積である唯一解を持つ. 従って補間問題 $g(z'_j) = w'_j, j = 1, \dots, n$ は次数 $\text{rank } A'_n = \text{rank } \tilde{A}_{n-1} + 1$ の *Blaschke* 積である唯一解を持ち, さらに補間問題 $f(z_j) = w_j, j = 1, \dots, n$ は次数 $\text{rank } A_n = \text{rank } A'_n$ の *Blaschke* 積である唯一解を持つ.

逆に補間問題 $f(z_j) = w_j, j = 1, \dots, n$ が次数 m の *Blaschke* 積を唯一解に持てば, 上の論理を逆に辿ることにより補間問題 $h(z'_j) = \frac{w'_j}{z'_j}, j = 1, \dots, n-1$ は次数 $m-1$ の *Blaschke* 積を唯一解を持つことになり, 帰納法の仮定より $\text{rank } \tilde{A}_{n-1} = m-1$ が成り立ち, よって $\text{rank } A_n = \text{rank } \tilde{A}_{n-1} + 1 = m$ が成り立つ. □

Corollary 2.18. $Q_n \geq 0$ であり, $\det A_n > 0$ とする. このとき $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ について

$$(2.32) \quad W(z_0) = \{f(z_0) : f \in \mathcal{B} \text{ with } f(z_j) = w_j, j = 1, \dots, n\}$$

と置けば, $W(z_0)$ は (1 点に退化することのない) 閉円板で \mathbb{D} に含まれる. また補間問題 $f(z_j) = w_j, j = 1, \dots, n$ の解 $f \in \mathcal{B}$ について $f(z_0) \in \partial W(z_0)$ を満たす為の必要十分条件は f が n 次の *Blaschke* 積であること. さらに各 $w_0 \in \partial W(z_0)$ について補間問題 $f(z_j) = w_j, j = 1, \dots, n$ の解 $f \in \mathcal{B}$ で $f(z_0) = w_0$ を満たすものが一意的に存在する.

Proof. $Q_n \geq 0$ で $\det A_n > 0$ とする. $n = 1$ のときは $Q_1 \geq 0$ and $\det A_1 > 0 \iff |w_1| < 1$ である. このとき $f \in \mathcal{B}$ が $f(z_1) = w_1$ を満たすための必要十分条件は $f(z) = \tau_{w_1}^{-1}(g(z)\tau_{z_1}(z)), g \in \mathcal{B}$ と表せることであるから

$$W(z_0) = \{\tau_{w_1}^{-1}(w\tau_{z_1}(z_0)) : w \in \overline{\mathbb{D}}\}$$

が成り立ち、非退化閉円板である。またこのとき

$$f(z_0) \in \partial W(z_0) \iff g = \tilde{w}_0 \in \partial \mathbb{D} \iff f = \tau_{w_1}^{-1}(\tilde{w}_0 \cdot \tau_{z_1})$$

となり、 f は次数 1 の Blaschke 積である。また $w_0 \in \partial W(z_0)$ は $w_0 = \tau_{w_1}^{-1}(\tilde{w}_0 \cdot \tau_{z_1}(z_0))$, $\tilde{w}_0 \in \partial \mathbb{D}$ と一意的に表せ、 $f(z_0) = w_0$ となる為の必要十分条件は $g = \tilde{w}_0$ であり、 $f = \tau_{w_1}^{-1}(\tilde{w}_0 \cdot \tau_{z_1})$ が唯一解である。これで $n = 1$ のときに系が成り立つことが示された。

$n \geq 2$ とし、 $n - 1$ まで系が成り立つと仮定する。 $Q_n \geq 0$ と $\det A_n > 0$ より $|w_n| < 1$ が成り立つので、これより特に

$$\det \tilde{A}_{n-1} = \frac{\prod_{j=1}^n \left| \frac{\beta_j}{\alpha_j} \right|^2}{\prod_{j=1}^{n-1} |z'_j|^2} \det A_n > 0$$

であり、 $\tilde{Q}_{n-1} \geq 0$ である。よって帰納法の仮定より $z'_0 \in \mathbb{D} \setminus \{z'_1, \dots, z'_n\}$ について

$$\tilde{W}(z'_0) := \left\{ h(z'_0) : h \in \mathcal{B} \text{ with } h(z'_j) = \frac{w'_j}{z'_j}, j = 1, \dots, n-1 \right\}$$

は非退化閉円板であり、よって $(f = \tau_{w_n}^{-1} \circ g \circ \tau_{z_n}, g(z) = zh(z))$ に注意

$$\begin{aligned} W(z_0) &= \left\{ \tau_{w_n}^{-1}(\tau_{z_n}(z_0)h(\tau_{z_n}(z_0))) : h(z_0) : h \in \mathcal{B} \text{ with } h(z'_j) = \frac{w'_j}{z'_j}, j = 1, \dots, n-1 \right\} \\ &= \tau_{w_n}^{-1}(z'_0 \tilde{W}(z'_0)), \quad z'_0 = \tau_{z_n}(z_0) \end{aligned}$$

も非退化閉円板である。 $f(z_0) \in \partial W(z_0)$ である為の必要十分条件は $h(z'_0) \in \partial \tilde{W}(z'_0)$ であり、このとき帰納法の仮定より h は次数 $n - 1$ の Blaschke 積であり、従って f は次数 n の Blaschke 積である。さらに各 $w_0 \in \partial W(z_0)$ は $w_0 = \tau_{w_n}^{-1}(z'_0 \tilde{w}_0)$, $\tilde{w}_0 \in \partial \tilde{W}(z'_0)$ と表せるが、帰納法の仮定より補間問題 $h(z'_j) = \frac{w'_j}{z'_j}$, $j = 1, \dots, n-1$, $h(z'_0) = \tilde{w}_0$ ($= \frac{w'_n}{z'_n}$) は唯一の解を持ち、従って対応する補間問題 $f(z_j) = w_j$, $j = 1, \dots, n$, $f(z_0) = w_0$ も唯一の解を持つ。□

この節の最後に、 $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ が $f(z_j) = w_j$, $j = 1, \dots, n$ の解ならば Hermite 形式 $Q(t_1, \dots, t_n) = \sum_{j,k=1}^n \frac{1-w_j \bar{w}_k}{1-z_j \bar{z}_k} t_j \bar{t}_k \geq 0$ となることの Pick [24] におけるオリジナルの証明を紹介しておこう。

Theorem 2.19. $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$, $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ とする。このとき $f \in \mathcal{B}$ で

$$(2.33) \quad f(z_j) = w_j, \quad j = 1, \dots, n$$

を満たすものが存在すれば Hermite 形式

$$Q_n(t_1, \dots, t_n) = \sum_{j,k=1}^n \frac{1-w_j \bar{w}_k}{1-z_j \bar{z}_k} t_j \bar{t}_k \geq 0, \quad t_1, \dots, t_n \in \mathbb{C}$$

が成り立つ。

Proof. 函数 $F(z) = \frac{1+f(z)}{1-\bar{f}(z)}$ は \mathbb{D} で正則で $\operatorname{Re} F(z) > 0$ を満たすので Herglotz の表現公式よりある $\partial \mathbb{D}$ 上の Borel 測度 μ により

$$F(z) = \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu(\zeta) + i \operatorname{Im} F(0), \quad z \in \mathbb{D}$$

と表せる. これより

$$\begin{aligned} F(z_j) + \overline{F(z_k)} &= \int_{\partial\mathbb{D}} \left\{ \frac{\zeta + z_j}{\zeta - z_j} - \frac{\bar{\zeta} + \bar{z}_k}{\bar{\zeta} - \bar{z}_k} \right\} d\mu(\zeta) \\ &= 2 \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1 - z_j \bar{z}_k}{(\zeta - z_j)(\bar{\zeta} - \bar{z}_k)} d\mu(\zeta) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^n \frac{F(z_j) + \overline{F(z_k)}}{1 - z_j \bar{z}_k} t_j \bar{t}_k &= 2 \int_{\partial\mathbb{D}} \sum_{j,k=1}^n \frac{t_j \bar{t}_k}{(\zeta - z_j)(\bar{\zeta} - \bar{z}_k)} d\mu(\zeta) \\ &= 2 \int_{\partial\mathbb{D}} \left| \sum_{j=1}^n \frac{t_j}{\zeta - z_j} \right| d\mu(\zeta) \geq 0 \end{aligned}$$

ここで

$$F(z_j) + \overline{F(z_k)} = \frac{1 + w_j}{1 - w_j} + \frac{1 + \bar{w}_k}{1 - \bar{w}_k} = \frac{2(1 - w_j \bar{w}_k)}{(1 - w_j)(1 - \bar{w}_k)}$$

より

$$Q_n \left(\frac{t_1}{1 - w_1}, \dots, \frac{t_n}{1 - w_n} \right) = \int_{\partial\mathbb{D}} \left| \sum_{j=1}^n \frac{t_j}{\zeta - z_j} \right| d\mu(\zeta) \geq 0$$

が成り立つ. t_j の代わりに $t_j(1 - w_j)$, $j = 1, \dots, n$ を代入すれば $Q_n(t_1, \dots, t_n) \geq 0$ を得る. □

第3章

星状函数と凸函数

Ahlfors [2] の第1章3節は convex univalent functions に関する概略の説明である。この節では Darboux の定理を引用なしに多用するので、まず Darboux の定理を正確に述べ、証明を行うことから始めよう。

3.1 Darboux の定理

$\mathbb{D}(c, r)$ で複素平面 \mathbb{D} 内の中心 $c \in \mathbb{C}$ 半径 $r > 0$ の開円板を表す。つまり $\mathbb{D}(c, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - c| < r\}$ である。また閉円板の場合は $\overline{\mathbb{D}}(c, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - c| \leq r\}$ と表す。特に単位円板の場合は $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0, 1)$, $\overline{\mathbb{D}} = \overline{\mathbb{D}}(0, 1)$ と表す。

Theorem 3.1 (Darboux の定理). 単位円板 \mathbb{D} 上の正則函数 f が $\overline{\mathbb{D}}$ に連続に拡張されるとする。もし $f|_{\partial\mathbb{D}}$ が単射ならば制限写像 $f|_{\partial\mathbb{D}} : \partial\mathbb{D} \rightarrow f(\partial\mathbb{D})$ は Jordan 曲線 (= 単純閉曲線) になるが、このとき f は \mathbb{D} を $f(\partial\mathbb{D})$ の内側の領域に等角 (= 全単射かつ双正則) に写像する。

上の定理は Darboux の定理 ([?]) または Darboux-Picard の定理 ([4]) と呼ばれる。この節では [?] を参考にさせて頂いて Darboux の定理の精密化を試みる。証明には Jordan の曲線定理が必要になるので、正確に述べておこう。

Jordan の曲線定理 $\gamma : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ を単純閉曲線、すなわち単位円周 $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ から \mathbb{C} 内への単射連続写像とすると、その像 $J = \gamma(\partial\mathbb{D})$ の補集合 $\mathbb{C} \setminus J$ は丁度 2 つの成分よりなり、一方は非有界で、もう一方は有界である。非有界な方を $D_o(J)$ 有界な方を $D_i(J)$ と表し、それぞれ J の外側、内側と呼ぶことにすると、

$$\partial D_o(J) = \partial D_i(J) = J$$

が成り立つ。また $D_i(J)$ の各点 w について J に関する回転数

$$\frac{1}{2\pi i} \int_J \frac{d\zeta}{\zeta - w}$$

は w に依らず一定で 1 または -1 であり、 $w \in D_o(J)$ の回転数も w に依らず一定で 0 になる。

上で回転数を $\frac{1}{2\pi i} \int_J \frac{d\zeta}{\zeta - w}$ のように複素積分の形で表したが、実際には積分ではなく、 γ に長さ有限という仮定を課す必要はない。回転数とは $\varphi_0 = \arg(\gamma(e^{i0}) - w)$ を任意に定め、 $k(\theta) = \arg(\gamma(e^{i\theta}))$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ が連続になるように持ち上げたとき $\frac{k(2\pi) - k(0)}{2\pi}$ のことであり、 γ の連続性より定義可能である。

Theorem 3.2. D を \mathbb{C} 内の有界領域とし, 写像 $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{C}$ は連続であり像 $f(D)$ は \mathbb{C} 内の開集合であるとする. このとき次が成り立つ.

- (i) $\partial f(D) \subset f(\partial D)$.
- (ii) コンパクト集合 E について $f(\partial D) \subset E$ ならば $\mathbb{C} \setminus E$ の任意の成分 G について $G \subset f(D)$ または $G \cap f(D) = \emptyset$ のどちらか一方が成り立つ.
- (iii) J を単純閉曲線の像とする. このとき $f(\partial D) \subset J$ ならば $f(\partial D) = J$ が成り立ち, さらに $f(D) = D_i(J)$, が成り立つ. すなわち f は \bar{D} から $D_i(J) \cup J$ への全射であり, $D, \partial D$ のそれぞれを $D_i(J), J$ のそれぞれの上へ写像する. 特に $f|_{\partial D}: \partial D \rightarrow J$ が単射ならば制限 $f|_{\partial D}: \partial D \rightarrow J$ は全単射で同相写像である.

Proof. (i) を示そう. $w_0 \in \partial f(D)$ とすれば $f(z_n) \rightarrow w_0$ を満たす D 内の点列 $\{z_n\}$ が存在する. \bar{D} はコンパクトであるから必要ならば部分列を取ることにより $z_n \rightarrow z_0 \in \bar{D}$ と仮定してよい. このとき f の連続性より $f(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w_0$ である. もし $z_0 \in D$ ならば $w_0 = f(z_0)$ は開集合 $f(D)$ の内点となり矛盾を生じる. 従って $z_0 \in \partial D$ であり $w_0 = f(z_0) \in f(\partial D)$ が成り立つ.

(ii) を背理法で示すために G を E の補集合 $\mathbb{C} \setminus E$ の成分とし, “ $G \subset f(D)$ または $G \cap f(D) = \emptyset$ ” が成り立たないと仮定する. つまり “ $G \cap f(D) \neq \emptyset$ かつ $G \cap f(D) \neq \emptyset$ ” と仮定する. このとき G の連結性より

$$\emptyset \neq G \cap \partial f(D) \subset G \cap f(\partial D) \subset G \cap E$$

となり矛盾である.

(iii) を示そう. $\mathbb{C} \setminus J$ の非有界な成分 $D_o(J)$ について (ii) より “ $D_o(J) \subset f(D)$ または $D_o(J) \cap f(D) = \emptyset$ ” のどちらか一方が成り立つが $D_o(J)$ は非有界で $f(D)$ は有界であるから $D_o(J) \subset f(D)$ が成り立つことはない. 従って $D_o(J) \cap f(D) = \emptyset$ が成り立つことになる. よって

$$f(D) \subset \mathbb{C} \setminus D_o(J) = D_i(J) \cup J$$

が成り立つ. また $D_i(J)$ についても “ $D_i(J) \subset f(D)$ または $D_i(J) \cap f(D) = \emptyset$ ” のどちらか一方が成り立つ. もし後者が成り立つとすれば $f(D) \subset D_o(J) \cup J$ となるが, $f(D) \subset D_i(J) \cup J$ と合わせて $f(D) \subset J$ となる. Jordan の曲線定理より $J = \partial D_i(J) = \partial D_o(J)$ であるから J は内点を持たない. しかし $f(D)$ は開集合であるから矛盾を生じる. 従って $D_i(J) \subset f(D)$ が成り立つ. よって

$$(3.1) \quad D_i(J) \subset f(D) \subset D_i(J) \cup J$$

が成り立つ. ここで点 $f(D) \cap J \neq \emptyset$ ならば $f(\mathbb{D})$ は開集合であること, 及び $J = \partial D_o(J)$ より $f(D) \cap D_o(J) \neq \emptyset$ となり矛盾を生じる. 従って $f(D) \cap J = \emptyset$ であり (3.1) と合わせて $f(D) = D_i(J)$ が分かる. さらにこれより

$$J = \partial D_i(J) = \partial f(D) \subset f(\partial D) \subset J$$

となるので $f(\partial D) = J$ が成り立つ. $f|_{\partial D}: \partial D \rightarrow J$ が単射ならば, 上で見たように全射でもあるから全単射である. そしてコンパクト空間から Hausdorff 空間への連続な全単射であるから逆写像も連続である. \square

Darboux の定理の証明. $J = f(\partial \mathbb{D})$ と置けば定理 3.2 より $f(\mathbb{D}) = D_i(J)$ である. 各 $w_0 \in D_i(J)$ について $w_0 \notin J = f(\partial \mathbb{D})$ より $r_0 \in (0, 1)$ を $w_0 \notin f(\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}(0, r_0))$ となるように取ることが出来る. このとき $r \in (r_0, 1)$ について

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{f(\partial \mathbb{D}(0, r))} \frac{dw}{w - w_0}$$

の左辺は \mathbb{D} 内にある f の w 点の重複度を考慮した個数であり、非負の整数である。また右辺は w_0 に関する閉曲線 $f(\partial\mathbb{D}(0, r))$ の回転数であり、 $r \nearrow 1$ のとき Jordan の曲線定理より 1 または -1 に収束する。よってこの積分値は r に関わりなく一定で 1 に等しい。つまり $f(z_0) = w_0$ を満たす $z_0 \in \mathbb{D}$ はただ一つであり、 f は単葉である。 \square

3.2 Starlike univalent functions

複素平面 \mathbb{C} 内の集合 E が点 w_0 に関して starlike (あまり使われないけど星状と訳されることがある) であるとは、任意の $w \in E$ について w_0 と w を結ぶ線分 $[w_0, w] = \{(1-t)w_0 + tw : 0 \leq t \leq 1\}$ が E に含まれる、つまり $[w_0, w] \subset E$ が成り立つ時を言う。以下では $w_0 = 0$ の場合のみを考えることにして、原点 0 に関して starlike の時、単に starlike と言うことにする。集合 E が starlike ならばその閉包 \bar{E} も starlike になることは明らかであろう。

記号 $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ で \mathbb{D} 上の正則関数全体を表すことにする。さて $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ が $f(0) = 0$ を満たすとする。このとき f が starlike univalent であるとは f が単葉であり、像領域 $f(\mathbb{D})$ が starlike であることと定義する。以下では univalent を省略し単に starlike と言うことにする。

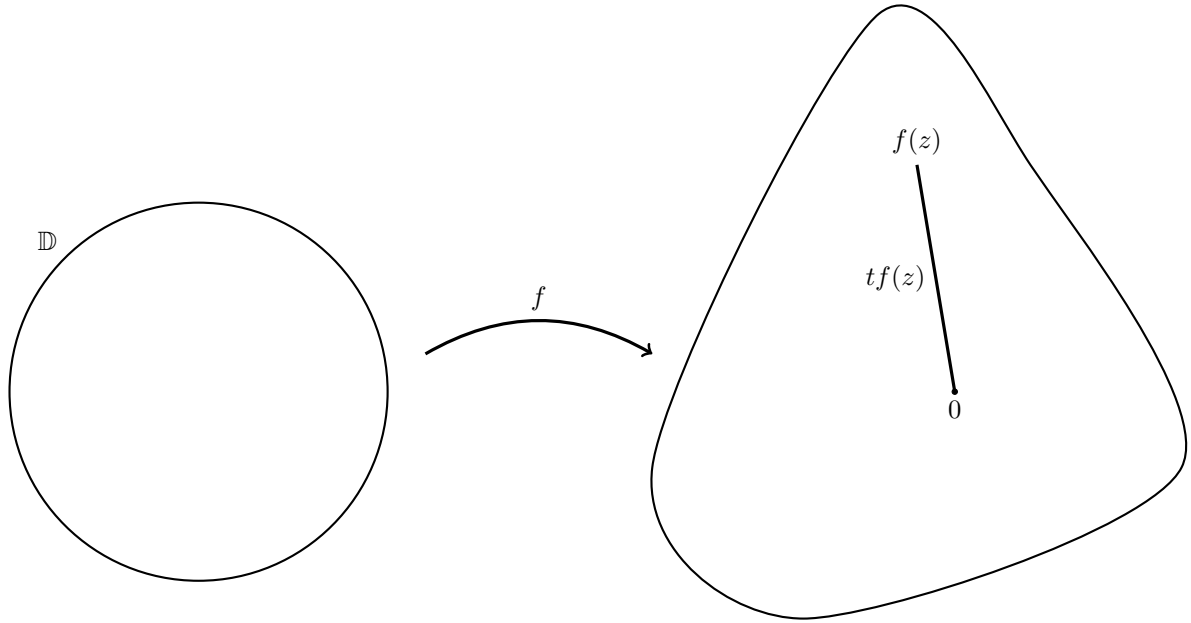
Theorem 3.3. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ は $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ を満たすとする。このとき f が starlike である為の必要十分条件は

$$(3.2) \quad \operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0, \quad z \in \mathbb{D}$$

が成り立つこと。

Proof. f が starlike のとき任意の $r \in (0, 1)$ について $f(\mathbb{D}(0, r))$ は starlike な領域であることを示そう。それには $0 < t < 1$ を満たす t について $tf(\mathbb{D}(0, r)) \subset f(\mathbb{D}(0, r))$ を示せばよい。

$f(\mathbb{D})$ が starlike であることから任意の $t \in (0, 1)$ について $\omega_t(z) = f^{-1}(tf(z))$ が定義可能であり $\omega_t : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ は $\omega_t(0) = 0$ を満たす。よって Schwarz の補題から $|\omega_t(z)| \leq |z|$ が成り立つ。また $tf = f \circ \omega_t$ が成り立つので $z \in \mathbb{D}(0, r)$ ならば $tf(z) = f(\omega_t(z)) \in f(\mathbb{D}(0, r))$ が成り立つ。



以上より f は $\mathbb{D}(0, r)$ を $f(\partial\mathbb{D}(0, r))$ で囲まれた starlike な Jordan 領域 $f(\mathbb{D}(0, r))$ へ等角に写像し, $\partial\mathbb{D}(0, r)$ を $f(\partial\mathbb{D}(0, r))$ に全単射に写像し, 境界曲線は C^ω 級である.

ここで偏角 $\arg f(re^{i\theta})$ を考える. 厳密に定義するには $\theta_0 \in \mathbb{R}$ を固定し, 単位円板に slit を入れた領域 $\Omega_{\theta_0} := \mathbb{D} \setminus [0, -e^{i\theta_0}]$ を考える. Ω_{θ_0} は単連結であり, f はここで正則で零点を持たないので対数関数の 1 価な分枝 $g = \log f$ が存在する. つまり Ω_{θ_0} 上で正則な函数 g で $f(z) = e^{g(z)}$ を満たすものが存在する. そこで $\arg f(z) = \text{Im} \log f(z)$ と置く.

各固定された $r \in (0, 1)$ について写像 $(\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi] \ni \theta \mapsto \arg f(re^{i\theta}) = \text{Im} \log f(re^{i\theta})$ は単射であることを示そう. この事実を背理法で示す為に $\theta_1, \theta_2 \in (\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi], \theta_1 \neq \theta_2$ について $\arg f(re^{i\theta_1}) = \arg f(re^{i\theta_2})$ が成り立つと仮定する. このときもし $|f(re^{i\theta_1})| = |f(re^{i\theta_2})|$ ならば $f(re^{i\theta_1}) = f(re^{i\theta_2})$ となり f の単葉性に反するので $|f(re^{i\theta_1})| \neq |f(re^{i\theta_2})|$ である. どちらの場合も同様であるから, ここでは $|f(re^{i\theta_1})| < |f(re^{i\theta_2})|$ と仮定し証明を進める.

ここから矛盾を導くには 2 つの方法がある.

1 幾何学的方法 $f(\overline{\mathbb{D}(0, r)}) = \overline{f(\mathbb{D}(0, r))}$ は starlike であるから $[0, f(re^{i\theta_2})] \subset f(\overline{\mathbb{D}(0, r)})$ が成り立つ. 開線分 $(f(re^{i\theta_1}), f(re^{i\theta_2}))$ の中に $f(\mathbb{D}(0, r))$ に属する点が存在すれば, その点を中心とする小円板で $f(\mathbb{D}(0, r))$ に含まれるものを取る. 小円板内の各点と 0 を結んだ線分が $f(\mathbb{D}(0, r))$ に含まれることから, 特に $f(re^{i\theta_1}) \in f(\mathbb{D}(0, r))$ が従い, 矛盾を生じる. よって $(f(re^{i\theta_1}), f(re^{i\theta_2})) \subset \partial f(\mathbb{D}(0, r)) = f(\partial\mathbb{D}(0, r))$ が成り立つ. ここで f^{-1} の $f(\partial\mathbb{D}(0, r))$ への制限は $f(\partial\mathbb{D}(0, r))$ から $\partial\mathbb{D}(0, r)$ への同相写像である. ただし $f(\partial\mathbb{D}(0, r)), \partial\mathbb{D}(0, r)$ とともに \mathbb{C} に関する相対位相のもとで考えている. 従って $f^{-1}((f(re^{i\theta_1}), f(re^{i\theta_2})))$ は $\partial\mathbb{D}(0, r)$ 内の連結開集合であるから $\partial\mathbb{D}(0, r)$ の部分開弧であり, この開弧上で $\arg f(re^{i\theta})$ は一定値であるから $\frac{d}{d\theta}(\arg f(re^{i\theta})) = 0$ が成り立つ. ここで

$$\frac{d}{d\theta}(\arg f(re^{i\theta})) = \frac{d}{d\theta} \text{Im} \log f(re^{i\theta}) = \text{Im} \left(\frac{d}{d\theta} \log f(re^{i\theta}) \right) = \text{Im} \left(\frac{ire^{i\theta} f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right) = \text{Re} \left(\frac{re^{i\theta} f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right)$$

より $\frac{d}{d\theta}(\arg f(re^{i\theta}))$ は 1 価であり, 実解析的である. よって $\frac{d}{d\theta}(\arg f(re^{i\theta})) = 0$ が全ての θ について成り立

つ. そこで

$$u(z) = \operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right), \quad z \in \mathbb{D}$$

と置けば, u は \mathbb{D} で調和であり $\partial\mathbb{D}(0, r)$ 上で $u = 0$ であるから $\mathbb{D}(0, r)$ でも $u = 0$ である. これは $u(0) = 1$ に矛盾する.

2 函数論的方法 $t := f(re^{i\theta_1})/f(re^{i\theta_2}) \in (0, 1)$ と置き, $\omega(z) = f^{-1}(tf(z))$, $z \in \mathbb{D}$ と置けば $\omega(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ であり $\omega(0) = 0$ である. さて $\omega(re^{i\theta_2}) = f^{-1}(tf(re^{i\theta_2})) = re^{i\theta_1}$ であるから Schwarz の補題より $\omega(z) \equiv e^{i(\theta_1 - \theta_2)}z$ が成り立つ. よって $tf(z) \equiv f(\omega(z)) = f(e^{i(\theta_1 - \theta_2)}z)$ が \mathbb{D} で成り立つ. $z = 0$ において両辺の微係数を取れば $tf'(0) = e^{i(\theta_1 - \theta_2)}f'(0)$ となるが, これは $f'(0) \neq 0$ に反する.

さて $\arg f(re^{i\theta})$ の θ に関する単射性より

$$\frac{d}{d\theta}(\arg f(re^{i\theta})) \geq 0 \text{ on } (\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi] \quad \text{または} \quad \frac{d}{d\theta}(\arg f(re^{i\theta})) \leq 0 \text{ on } (\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi]$$

が成り立つ. $\arg f(re^{i\theta})$ は $\theta \in \mathbb{R}$ について 1 価とは限らないが

$$\frac{d}{d\theta}(\arg f(re^{i\theta})) = \frac{d}{d\theta} \operatorname{Im} \log f(re^{i\theta}) = \operatorname{Im} \left(\frac{d}{d\theta} \log f(re^{i\theta}) \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{ire^{i\theta} f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{re^{i\theta} f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right)$$

は 1 価であることを注意する. ここで $z = re^{i\theta}$ について

$$u(z) = \operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) = \frac{d}{d\theta}(\arg f(re^{i\theta}))$$

と置けば $u(z)$ は \mathbb{D} で調和である. よって最小値または最大値の原理より

$$u(z) \geq 0 \text{ on } \overline{\mathbb{D}}(0, r) \quad \text{または} \quad u(z) \leq 0 \text{ on } \overline{\mathbb{D}}(0, r)$$

が成り立つ. しかしながら $u(0) = 1$ であるから前者が成り立つ. $r \in (0, 1)$ は任意であるから $u(z) \geq 0$ が \mathbb{D} で成り立つことになるが, 再び最小値の原理より $u(z) > 0$ が \mathbb{D} で成り立つ.

逆に \mathbb{D} において $u(z) = \operatorname{Re} (zf'(z)/f(z)) > 0$ が成り立つと仮定する. f は原点に 1 位の零点を持ち, 他に零点を持たない. 何故ならば原点以外に f が零点を持てば, そこで $zf'(z)/f(z)$ は一位の極を持つので $zf'(z)/f(z)$ による \mathbb{D} の像は ∞ の近傍である. これは $u(z) > 0$ に反する. 従って上で議論したように $\theta_0 - \pi < \theta \leq \theta_0 + \pi$ において $\arg f(re^{i\theta})$ を定めることができる. そして $\frac{d}{d\theta}(\arg f(re^{i\theta})) = u(z) > 0$ であり

$$\int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} \frac{d}{d\theta}(\arg f(re^{i\theta})) d\theta = \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} u(re^{i\theta}) d\theta = 2\pi u(0) = 2\pi$$

従って $\arg f(re^{i\theta})$ は θ が $\theta_0 - \pi$ から $\theta_0 + \pi$ を動く時, 丁度 2π だけ, 狭義単調に増加する. 従って $\partial D \ni e^{i\theta} \mapsto f(re^{i\theta})$ は単純閉曲線である. よって Darboux の定理より $f|_{\mathbb{D}(0, r)}$ はこの単純閉曲線の内側の領域への等角写像である. 特に f は任意の $r \in (0, 1)$ について $\mathbb{D}(0, r)$ で単葉であるから \mathbb{D} で単葉である. (この事実から $0 < r_1 < r_2 < 1$ について $f(\partial\mathbb{D}(0, r_1))$ は $f(\mathbb{D}(0, r_2))$ 内に含まれる単純閉曲線であることも従う.)

それでは最後に $f(\mathbb{D})$ が starlike であることを示そう. これには $f(\mathbb{D}(0, r))$ が starlike であることを示せばよい. まず $w_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0} \in f(\mathbb{D}(0, r))$ について 0 から w_0 へ向かう半直線を ℓ とし, $t_1 = \sup\{t > 0 : te^{i\varphi_0} \in f(\mathbb{D}(0, r))\}$ と置けば $\rho_0 < t_1$ であり $f(re^{i\theta_1}) = t_1 e^{i\varphi_0} \in \ell$ を満たす $\theta_1 \in \mathbb{R}$ が存在する. もし $[0, w_0] \subset f(\mathbb{D}(0, r))$ が成り立たなければ

$$\emptyset \neq [0, w_0] \cap \partial f(\mathbb{D}(0, r)) \subset [0, w_0] \cap f(\partial\mathbb{D}(0, r))$$

となるが、これは l と $f(\partial\mathbb{D}(0, r))$ がただ 1 点で交わることに矛盾である。よって $[0, w_0] \subset f(\mathbb{D}(0, r))$ が成り立ち $f(\mathbb{D}(0, r))$ は starlike である。□

Theorem 3.4. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ は $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ を満たすとする。このとき f が starlike である為の必要十分条件は、ある $\partial\mathbb{D}$ の Borel 確率測度 μ により

$$(3.3) \quad f(z) = z \exp \left[2 \int_{\partial\mathbb{D}} \log \frac{1}{1 - \bar{\zeta}z} d\mu(\zeta) \right], \quad z \in \mathbb{D}$$

と表されること。

Proof. 函数 $zf'(z)/f(z)$ は \mathbb{D} 上、実部が正である、原点において値 1 を取るので Herglotz の表現公式より、ある $\partial\mathbb{D}$ の Borel 確率測度 μ により

$$(3.4) \quad z \frac{f'(z)}{f(z)} = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu(\zeta) = 1 + \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{2z}{\zeta - z} d\mu(\zeta)$$

と表される。よって

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1}{z} = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{2}{\zeta - z} d\mu(\zeta)$$

となる。原点において値 0 を取る、 $\log \frac{f(z)}{z}$ の一価な分枝が存在するので、これを用いて両辺の 0 から z まで積分すると

$$\log \frac{f(z)}{z} = 2 \int_{\partial\mathbb{D}} \log \frac{\zeta}{\zeta - z} d\mu(\zeta) = 2 \int_{\partial\mathbb{D}} \log \frac{1}{1 - \bar{\zeta}z} d\mu(\zeta)$$

を得る。これより直ちに (3.3) が得られる。逆に (3.3) が成り立てば、式変形を逆に辿ることにより (3.4) が得られるので、 $\operatorname{Re}(zf'(z)/f(z)) > 0$ が従い、 f は starlike である。□

3.3 Convex univalent functions

複素平面 \mathbb{C} 内の集合 E が convex であるとは任意の 2 点 $w_0, w_1 \in E$ について w_0 と w_1 を結ぶ線分 $[w_0, w_1] = \{(1-t)w_0 + tw_1 : 0 \leq t \leq 1\}$ が E に含まれる、つまり $[w_0, w_1] \subset E$ が成り立つ時を言う。集合 E が convex ならばその閉包 \bar{E} も convex になることは明らかであろう。

$f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ がこのとき f が convex univalent であるとは f が単葉で、領域 $f(\mathbb{D})$ が convex であることと定義する。以下では univalent を省略し単に convex とすることにする。

Theorem 3.5. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ は $f'(0) \neq 0$ を満たすとする。このとき f が convex である為の必要十分条件は

$$(3.5) \quad \operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > 0, \quad z \in \mathbb{D}$$

が成り立つことである。

Proof. f が convex のとき $r \in (0, 1)$ について $f(\mathbb{D}(0, r))$ も convex であることを示そう。 $z_0, z_1 \in \mathbb{D}(0, r)$ について

$$\omega(z) = f^{-1} \left((1-t)f \left(\frac{z_0}{r} z \right) + tf \left(\frac{z_1}{r} z \right) \right)$$

と置くと $\omega(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, $\omega(0) = 0$ を満たし, $|\omega'(0)| \leq (1-t)\frac{|z_0|}{r} + t\frac{|z_1|}{r} < 1$ であるから $|\omega(z)| < |z|$, $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ が成り立つ. よって

$$(1-t)f(z_0) + tf(z_1) = f(\omega(r)) \in f(\mathbb{D}(0, r))$$

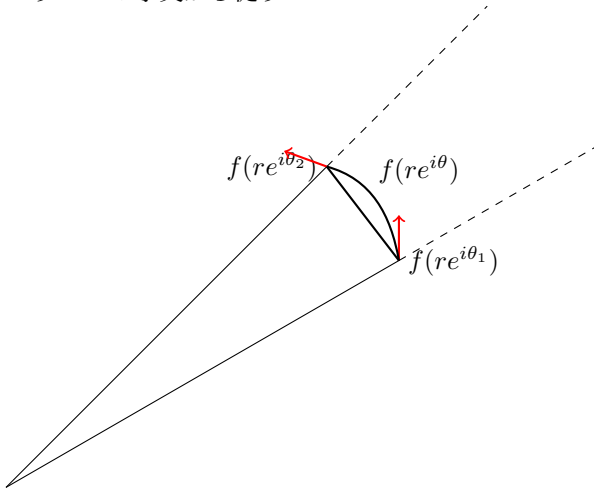
を得る. 従って $(1-t)f(\mathbb{D}(0, r)) + tf(\mathbb{D}(0, r)) = f(\mathbb{D}(0, r))$ が成り立つ, つまり $f(\mathbb{D}(0, r))$ は convex である.

f は単葉であるから $f'(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{D}$ である. よって各 $r \in (0, 1)$ について曲線 $(-\pi, \pi] \ni \theta \mapsto f(re^{i\theta})$ の接ベクトル $ire^{i\theta}f'(re^{i\theta}) \neq 0$ である. この接ベクトルの偏角が $-\pi < \theta \leq \pi$ において狭義増加であることを示そう. これは $-\pi < \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$ を満たす θ_1, θ_2 を取り $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ とする. このとき

1 f は starlike でもあるから, 前節で見たように $(0, f(re^{i\theta})) \subset f(\mathbb{D}(0, r))$ が成り立つ. よって開三角形 $\Delta 0f(re^{i\theta_1})f(re^{i\theta_2})$ は $\Delta 0f(re^{i\theta_1})f(re^{i\theta_2}) \subset f(\mathbb{D}(0, r))$ を満たすことから $f(re^{i\theta})$ は三角形 $\Delta 0f(re^{i\theta_1})f(re^{i\theta_2})$ に属さない.

2 f は starlike でもあるから $f(re^{i\theta})$ は 0 から $f(re^{i\theta_1})$ へ伸びる半直線から 0 から $f(re^{i\theta_2})$ へ伸びる半直線へ反時計回りに進む角領域内にある.

という 2 つの事実から従う.



曲線 $(-\pi, \pi] \ni \theta \mapsto f(re^{i\theta})$ の接ベクトルは $ire^{i\theta}f'(re^{i\theta})$ であるから

$$0 \leq \frac{d}{d\theta} \arg(re^{i\theta}f'(re^{i\theta})) = \frac{d}{d\theta} \operatorname{Im} \log(re^{i\theta}f'(re^{i\theta})) = \operatorname{Im} \frac{d}{d\theta} \log(re^{i\theta}f'(re^{i\theta})) = \operatorname{Re} \left(1 + \frac{re^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right)$$

が従う.

$$v(z) = \operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right), \quad z \in \mathbb{D}$$

と置けば v は \mathbb{D} で調和であり, 上の議論より \mathbb{D} において非負である. また原点において $v(0) = 1$ であるから調和函数における最小値の原理より \mathbb{D} 上で $v(z) > 0$ であることが分かる.

逆に \mathbb{D} 上で $v(z) > 0$ と仮定する. このとき f' は零点を持たず, そこで $1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$ は一位の極を持つことになり $v(z) > 0$ に矛盾する. 従って f' は \mathbb{D} 内に零点を持たず, $\log f'(0) = 0$ を満たす 1 価な分枝 $\log f'(z)$ が存在する. また閉曲線 $f(\partial\mathbb{D}(0, r))$ の接ベクトル $ire^{i\theta}f'(re^{i\theta})$ は 0 となることはなく, その偏角は $\theta + 2^{-1}\pi + \operatorname{Im} \log f'(re^{i\theta})$ である. これを θ で微分すると

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{re^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right) = v(re^{i\theta}) > 0$$

である。また θ が 2π 増える時の偏角の増分は調和函数に関する平均値定理より

$$\int_{-\pi}^{\pi} v(re^{i\theta}) d\theta = 2\pi v(0) = 2\pi$$

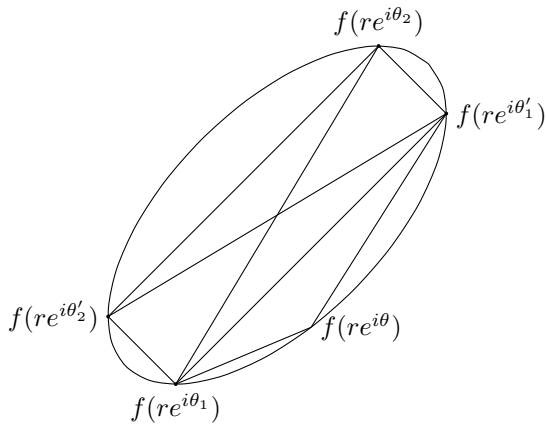
である。

それでは C^1 -級の閉曲線 $C_r : (-\pi, \pi] \ni \theta \mapsto f(re^{i\theta}) \in \mathbb{C}$ は $-\pi < \theta \leq \pi$ において接ベクトルが $\neq 0$ であり、その偏角が狭義単調増加で連続であり、増分が 2π ならば C_r は単純であり、凸領域を囲むことを示そう。これが示されれば定理の証明は完了する。

Claim. C_r は単純閉曲線であり、複素平面内の任意の直線と C_r (の像) である $f(\partial\mathbb{D}(0, r))$ との共通部分は (i) 空である (ii) 1 点よりなる (iii) 相異なる 2 点よりなる

のいずれかの場合しかない。また (iii) の場合 2 交点を結ぶ開線分は C_r の内側にある。

\therefore 適当に回転を施せば、直線が実軸と平行な場合 ($\{\operatorname{Im} w = t\}, t \in \mathbb{R}$ と表せることに注意する) にそうなることを見れば十分である。 $a = \inf\{\operatorname{Im} w : w \in f(\partial\mathbb{D}(0, r))\}, b = \sup\{\operatorname{Im} w : w \in f(\partial\mathbb{D}(0, r))\}$ と置く。直線が $\{\operatorname{Im} w = a\}$ または $\{\operatorname{Im} w = b\}$ の場合は共通部分は 1 点のみよりなる。何故ならばその交点において接ベクトルは実軸と平行であり、接ベクトルが実軸と平行となる θ は丁度 2 つであるからである。ここでそうなる θ を θ_1, θ_2 と置けば $\theta_1 < \theta_2 < \theta_1 + 2\pi$ で θ_1 での接ベクトルは $\arg(ire^{i\theta_1} f'(re^{i\theta_1})) = 0, \theta_2$ での接ベクトルは $\arg(ire^{i\theta_2} f'(re^{i\theta_2})) = \pi$ を満たすと仮定してよい。さて $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ については $0 < \arg(ire^{i\theta} f'(re^{i\theta})) < \pi$ であるから $\operatorname{Im} f(re^{i\theta})$ はここで狭義増加であり、 $\theta \in (\theta_2, \theta_1 + 2\pi)$ については $\pi < \arg(ire^{i\theta} f'(re^{i\theta})) < 2\pi$ であるから $\operatorname{Im} f(re^{i\theta})$ はここで狭義減少である。よって $a < t < b$ の時、実軸と平行な直線 $\{\operatorname{Re} w = t\}$ と $f(\partial\mathbb{D}(0, r))$ の交点は、 (θ_1, θ_2) に於いて 1 点であり、 $(\theta_2, \theta_1 + 2\pi)$ に於いてもう 1 点の 2 点よりなる。また区間 $[\theta_1, \theta_2], [\theta_2, \theta_1 + 2\pi]$ に於いて写像 $\theta \mapsto f(re^{i\theta})$ が単射であることも分かる。



次に $f(\partial\mathbb{D}(0, r))$ が単純であることを言うには $[\theta_1, \theta_2]$ に対応する弧と $[\theta_2, \theta_1 + 2\pi]$ に対応する弧が端点以外で共通部分を持たないことを示せばよい。これには $\theta'_1 \in (\theta_1, \theta_2)$ と $\theta'_2 \in (\theta_2, \theta_1 + 2\pi)$ と

$$\operatorname{Re} f(re^{i\theta'_1}) = \max_{\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2} \operatorname{Re} f(re^{i\theta}), \quad \operatorname{Re} f(re^{i\theta'_2}) = \min_{\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1 + 2\pi} \operatorname{Re} f(re^{i\theta})$$

を満たすように取る。このとき $f(re^{i\theta'_1})$ における接ベクトルは虚軸の上向きと平行であり $\operatorname{Re} f(re^{i\theta})$ は $[\theta_1, \theta'_1]$ において狭義増加で $[\theta'_1, \theta_2]$ で狭義減少であることを注意しよう。任意の $\theta \in (\theta_1, \theta'_1)$ について Cauchy の平均値定理と接ベクトルの偏角 $i \arg(ire^{i\theta} f'(re^{i\theta}))$ の増加性よりある $\theta_1^* \in (\theta_1, \theta)$ $\theta_2^* \in (\theta, \theta'_1)$ に

ついて (偏角の代わりに \tan を考えると)

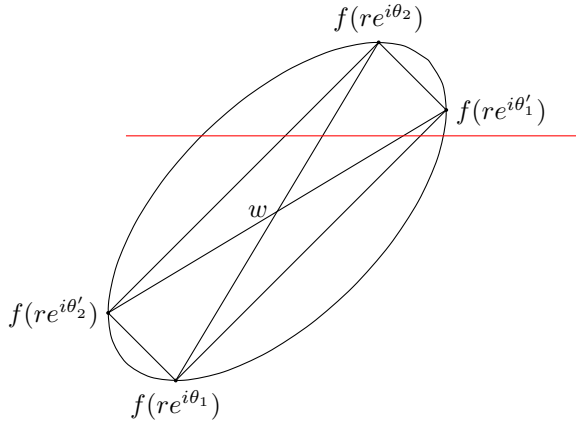
$$\frac{\operatorname{Im}\{f(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta_1})\}}{\operatorname{Re}\{f(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta_1})\}} = \frac{\operatorname{Im}\{ire^{i\theta_1^*} f'(re^{i\theta_1^*})\}}{\operatorname{Re}\{ire^{i\theta_1^*} f'(re^{i\theta_1^*})\}} < \frac{\operatorname{Im}\{ire^{i\theta_2^*} f'(re^{i\theta_2^*})\}}{\operatorname{Re}\{ire^{i\theta_2^*} f'(re^{i\theta_2^*})\}} = \frac{\operatorname{Im}\{f(re^{i\theta_1}) - f(re^{i\theta})\}}{\operatorname{Re}\{f(re^{i\theta_1}) - f(re^{i\theta})\}}$$

が成り立つ. また 4 つの正数 a, b, c, d について $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$ ならば $\frac{b}{a} < \frac{b+d}{a+c} < \frac{d}{c}$ が成り立つことを利用すれば

$$\frac{\operatorname{Im}\{f(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta_1})\}}{\operatorname{Re}\{f(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta_1})\}} < \frac{\operatorname{Im}\{f(re^{i\theta_1}) - f(re^{i\theta_1})\}}{\operatorname{Re}\{f(re^{i\theta_1}) - f(re^{i\theta_1})\}} < \frac{\operatorname{Im}\{f(re^{i\theta_1}) - f(re^{i\theta})\}}{\operatorname{Re}\{f(re^{i\theta_1}) - f(re^{i\theta})\}}$$

従って $f(re^{i\theta})$ は $f(re^{i\theta_1})$ と $f(re^{i\theta_1})$ を結ぶ直線の右側の開半平面と領域 $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} f(re^{i\theta_1}) < \operatorname{Im} w < \operatorname{Im} f(re^{i\theta_1})\}$ の共通部分内にある. 類似の議論を (θ'_1, θ_2) , (θ_2, θ'_2) , $(\theta'_2, \theta_1 + 2\pi)$ についても行えば, 閉曲線 $f(\partial\mathbb{D}(0, r))$ は $f(re^{i\theta_1})$, $f(re^{i\theta'_1})$, $f(re^{i\theta_2})$, $f(re^{i\theta'_2})$ の 4 点を頂点とする 4 角形 (凸である) の外部または周上にあることが分かる. よって閉曲線 $f(\partial\mathbb{D}(0, r))$ の $[\theta_1, \theta_2]$ に対応する弧と $[\theta_2, \theta_1 + 2\pi]$ に対応する弧は端点以外で共通部分を持たず, $f(\partial\mathbb{D}(0, r))$ は単純である. また $\operatorname{Im} f(re^{i\theta_1}) < t < \operatorname{Im} f(re^{i\theta_2})$ について直線 $\{\operatorname{Im} w = t\}$ と $f(\partial\mathbb{D}(0, r))$ の交点が丁度 2 つであることが分かる. さらに 2 交点を結ぶ開線分は単純閉曲線 $f(\partial\mathbb{D}(0, r))$ の内側に含まれることを示そう. この開線分は $f(\partial\mathbb{D}(0, r))$ と交わらないので, この開線分上で $f(\partial\mathbb{D}(0, r))$ に関する回転数は一定値である. よってこの一定値が 1 であること示せば十分である.

実際 $f(re^{i\theta_1})$ と $f(re^{i\theta_2})$ を結ぶ対角線と $f(re^{i\theta'_1})$ と $f(re^{i\theta'_2})$ を結ぶ対角線の交点 w_0 の $f(\partial\mathbb{D}(0, r))$ に関する回転数は 1 である. この事実は, w_0 を中心とする偏角 $\arg(f(re^{i\theta}) - w_0)$ の変化を 4 つの区間について見ることにより分かる. 従って w_0 は単純閉曲線 $f(\partial\mathbb{D}(0, r))$ の内側にある. また 2 本の開対角線は $f(\partial\mathbb{D}(0, r))$ と交わらないので, この開対角線上で回転数は一定値 1 である. さらに 2 交点を結ぶ開線分と $f(re^{i\theta_1})$ と $f(re^{i\theta_2})$ を結ぶ対角線は交わる. よって 2 交点を結ぶ開線分上で $f(\partial\mathbb{D}(0, r))$ に関する回転数は一定値 1 である. 以上で Claim は証明された.



さて Darboux の定理より $f(\mathbb{D}(0, r))$ は単純閉曲線 $f(\partial\mathbb{D}(0, r))$ で囲まれた領域と一致する. これが凸であることは次のようにして分かる. $\zeta_0, \zeta_1 \in f(\mathbb{D}(0, r))$ を任意に取るとき ζ_0, ζ_1 を結ぶ直線と $f(\partial\mathbb{D}(0, r))$ の交点は直線内において閉線分 $[\zeta_0, \zeta_1]$ の外側に少なくとも 2 点存在する. Claim より交点は他には存在せず ζ'_0, ζ'_1 と置けば

$$[\zeta_0, \zeta_1] \subset (\zeta'_0, \zeta'_1) \subset D_i(f(\partial\mathbb{D}(0, r))) = f(\mathbb{D}(0, r))$$

が成り立つ. ($D_i(f(\partial\mathbb{D}(0, r)))$ は曲線の内側の領域を表す.) □

3.4 Hayman の証明法

前節で \mathbb{D} 上の正則函数 f で $f'(0) \neq 0$ であるものについて convex univalent であることと $\operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > 0$, $z \in \mathbb{D}$ が成り立つことが必要十分条件であることを示したが, 必要性を示すのに Hayman による simple な方法があるので紹介しておこう.

正則函数 $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ が convex univalent のとき $z = re^{it} \in \mathbb{D}$, $0 \leq r < 1$, $0 \leq \pi < 2\pi$ について $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{t}{2}}$ と置き

$$g(z) = \frac{1}{2} \{f(\sqrt{z}) + f(-\sqrt{z})\}$$

と置く. このとき f の凸性より, $g(\mathbb{D}) \subset f(\mathbb{D})$ であるから

$$\omega(z) = f^{-1}(g(z)), z \in \mathbb{D}$$

が定義可能で $\omega(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ が成り立つ. また $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ と展開すれば

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} z^k$$

であるから g は \mathbb{D} 上正則である. よって $\omega : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ も正則であり $\omega(0) = 0$ を満たす. よって Schwarz の補題より

$$|\omega'(0)| = \left| \frac{a_2}{a_1} \right| = \left| \frac{f''(0)}{2f'(0)} \right| \leq 1$$

が成り立つ. 従って f が convex univalent ならば

$$(3.6) \quad \left| \frac{f''(0)}{f'(0)} \right| \leq 2$$

が成り立つ. この不等式を $h(z) = f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right) - f(z_0)$ に適用すると

$$\begin{aligned} h'(z) &= \frac{1-|z_0|^2}{(1+\bar{z}_0 z)^2} f' \left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z} \right), \\ h''(z) &= -\frac{2\bar{z}_0(1-|z_0|^2)}{(1+\bar{z}_0 z)^3} f' \left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z} \right) + \frac{(1-|z_0|^2)^2}{(1+\bar{z}_0 z)^4} f'' \left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z} \right) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} (3.7) \quad & \left| -2\bar{z}_0(1-|z_0|^2)f'(z_0) + (1-|z_0|^2)^2 f''(z_0) \right| \leq 2(1-|z_0|^2) |f'(z_0)| \\ \Rightarrow & \left| -\frac{2|z_0|^2}{1-|z_0|^2} + \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} \right| \leq \frac{2|z_0|}{1-|z_0|^2} \\ \Rightarrow & \left| 1 + \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{1+|z_0|^2}{1-|z_0|^2} \right| \leq \frac{2|z_0|}{1-|z_0|^2} \end{aligned}$$

これより特に

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} \right) \geq \frac{1+|z_0|^2}{1-|z_0|^2} - \frac{2|z_0|}{1-|z_0|^2} = \frac{1-|z_0|}{1+|z_0|}$$

を得る. これらの不等式は convex univalent である為の条件 $\operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > 0$ よりも強いことを言っているように見えるが, Schwarz の補題を使えば, 逆を導くことが出来るので実のところは同値である. 実際

$k(z) = 1 + \frac{zf'(z)}{f'(z)}$ と置けば $\operatorname{Re} k(z) > 0$ と $k(0) = 1$ より Schwarz の補題を $\frac{1-k(z)}{1+k(z)}$ に適用すれば

$$\left| \frac{1-k(z)}{1+k(z)} \right| \leq |z| \iff \left| k(z) - \frac{1+|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{2|z|}{1-|z|^2}$$

と同じ不等式が得られる。

3.5 平面曲線の曲率と Carathéodory の定理

C^2 級の平面曲線 $\gamma : z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$ の曲率について説明しておこう。まず $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$ のように, t についての微分を $\dot{}$ で表す。また 2 次微分を $\ddot{}$ で表す。接ベクトル $\dot{z}(t)$ がつねに $\dot{z}(t) \neq 0$ を満たすとき, 曲線は正則であると言う。以下では C^2 級の正則曲線を取り扱う。長さのパラメータ $s = \int_a^t |\dot{z}(\tau)| d\tau$ を用いた微分を z' のように $'$ で表す。

さて接ベクトル $\dot{z}(t)$ を正規化した単位接ベクトルを $e(t) = \frac{\dot{z}(t)}{|\dot{z}(t)|}$ と表す。このとき $e(t)$ を長さパラメータ s で微分し, t で表した

$$e'(t) := \frac{de}{ds}(t) = \frac{de}{dt}(t) \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \frac{de}{dt} = \frac{1}{|\dot{z}(t)|} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\dot{z}(t)}{|\dot{z}(t)|} \right\}$$

を曲率ベクトルと呼ぶ。 $e(t)\overline{e(t)} \equiv 1$ であるから $e'(t)\overline{e(t)} + e(t)\overline{e'(t)} = 0$ より $\operatorname{Re}(e'(t)\overline{e(t)}) = 0$ であるから, 各点で

$$e'(t) = i\kappa(t)e(t), \quad \kappa(t) \in \mathbb{R}$$

と表すことが出来る。この $\kappa(t)$ を曲率と呼ぶ。曲率とは, 速度ベクトル = 接ベクトルが一定値 1 になるようにパラメータを取り直したとき接ベクトルが変化する比率を接ベクトルを反時計回りに $\pi/2$ 回転した方向を正として表したものであり, 曲線の曲がり方を表す量である。

$\kappa(t)$ の表示を求めておこう。 $e(t) = \frac{\dot{z}(t)}{|\dot{z}(t)|} = e^{i \arg \dot{z}(t)}$ であるから

$$\begin{aligned} e'(t) &= \frac{1}{|\dot{z}(t)|} \frac{d}{dt} \{ e^{i \arg \dot{z}(t)} \} \\ &= \frac{1}{|\dot{z}(t)|} i e^{i \arg \dot{z}(t)} \frac{d}{dt} \{ \arg \dot{z}(t) \} \\ &= \frac{1}{|\dot{z}(t)|} i e(t) \frac{d}{dt} \{ \arg \dot{z}(t) \} \end{aligned}$$

であるから

$$(3.8) \quad \kappa(t) = \frac{1}{|\dot{z}(t)|} \frac{d}{dt} \{ \arg \dot{z}(t) \}$$

となる。 Ahlfors [2] では, これを

$$\kappa(t) = \frac{d \arg \dot{z}(t)}{|dz(t)|} = \frac{d \arg dz}{|dz(t)|}$$

と表している。曖昧な表現とも見えるが慣れると便利である。さて $\arg \dot{z}(t) = \operatorname{Im} \log \dot{z}(t)$ であるから, 計算を

進めると

$$\begin{aligned}
 \kappa(t) &= \frac{1}{|\dot{z}(t)|} \frac{d}{dt} \operatorname{Im} \{ \log \dot{z}(t) \} \\
 &= \frac{1}{|\dot{z}(t)|} \operatorname{Im} \left\{ \frac{d}{dt} \log \dot{z}(t) \right\} \\
 &= \frac{1}{|\dot{z}(t)|} \operatorname{Im} \left(\frac{\ddot{z}(t)}{\dot{z}(t)} \right) \\
 &= \frac{1}{|\dot{z}(t)|^3} \operatorname{Im} \left(\ddot{z}(t) \overline{\dot{z}(t)} \right) = \frac{-\ddot{x}(t)\dot{y}(t) + \dot{y}(t)\dot{x}(t)}{\{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\}^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

を得る。最後の表示式は、初等的な微分幾何学の教科書でお馴染みの読者も多いであろう。

応用上よく現れる、曲線が正則函数による $\mathbb{D}(0, r)$ の像である $w(t) = f(re^{it})$, $0 \leq t \leq 2\pi$ の場合、

$$\dot{w}(t) = ire^{it} f'(re^{it}) = iz f'(z), \quad \ddot{w}(t) = -re^{it} f'(re^{it}) - (re^{it})^2 f''(re^{it}) = -z f'(z) - z^2 f''(z)$$

であるから

$$\begin{aligned}
 (3.9) \quad \kappa(t) &= \frac{1}{|iz f'(z)|^3} \operatorname{Im} \left\{ -(z f'(z) + z^2 f''(z)) \overline{iz f'(z)} \right\} \\
 &= \frac{1}{|z f'(z)|^3} \operatorname{Re} \left\{ (z f'(z) + z^2 f''(z)) \overline{z f'(z)} \right\} \\
 &= \frac{1}{|z f'(z)|} \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right\}
 \end{aligned}$$

である。

Definition 3.6 (2 次の接触と曲率円). 2 つの正則曲線 $\gamma: z(t)$, $\tilde{\gamma}: \tilde{z}(t)$ について、それぞれの単位接ベクトルを $e(t)$, $\tilde{e}(t)$, 曲率を $\kappa(t)$, $\tilde{\kappa}(t)$ と表す. $t = t_0$ のときに $z_0 = z(t_0) = \tilde{z}(t_0)$ を満たすとする. このとき γ と $\tilde{\gamma}$ が z_0 において 1 次の接触を持つとは $e(t_0) = \tilde{e}(t_0)$ を満たすことと定義する. これは $\dot{z}(t_0)$ と $\dot{\tilde{z}}(t_0)$ が互いの正の定数倍となっていることと同値である. また γ と $\tilde{\gamma}$ が z_0 において 2 次の接触を持つとは、1 次の接触を持つことに加えて $\kappa(t_0) = \tilde{\kappa}(t_0)$ が成り立つときを言う. $\frac{de}{ds}(t_0) = i\kappa(t_0)e(t)$, $\frac{d\tilde{e}}{ds}(t_0) = i\tilde{\kappa}(t_0)\tilde{e}(t)$ であるから、これは 2 つの曲率ベクトルが一致すること、つまり $\frac{de}{ds}(t_0) = \frac{d\tilde{e}}{ds}(t_0)$ 同値である. つまり γ , $\tilde{\gamma}$ ともに長さパラメータが入っていて $t = t_0$ が $s = s_0$ に対応するときそれぞれの 2 次の Taylor 展開

$$\begin{aligned}
 z(s) &= z(s_0) + z'(s_0)(s - s_0) + \frac{z''(s_0)}{2}(s - s_0)^2 + o(s - s_0)^2 \\
 \tilde{z}(s) &= \tilde{z}(s_0) + \tilde{z}'(s_0)(s - s_0) + \frac{\tilde{z}''(s_0)}{2}(s - s_0)^2 + o(s - s_0)^2
 \end{aligned}$$

が一致することに他ならない. 特に $\tilde{\gamma}$ が、ある円または直線のパラメータ表示であり γ と z_0 において 2 次の接触を持つならば $\tilde{\gamma}$ を γ の z_0 における曲率円であると言う. 中心 $c \in \mathbb{C}$, 半径 r の円は弧長を用いて表示すれば

$$w(s) = c + re^{i\frac{s+s_0}{r}}$$

であるから接点 $c + re^{is_0/r} = z(s_0)$ と、単位接ベクトル $ie^{is_0/r} = z'(s_0)$, 半径 $r = \frac{z''(s_0)}{iz'(s_0)}$ が与えられれば曲率円は一意に定まる. $\kappa(t_0) > 0$ のとき曲率円は $e(t_0)$ の左側にあり、半径 $1/\kappa(t_0)$ であり $\kappa(t_0) < 0$ のとき曲率円は $e(t_0)$ の右側にあり、半径 $-1/\kappa(t_0)$ である. $\kappa(t_0) = 0$ のときは曲率円は z_0 を通り $e(t_0)$ と平行な直線とする.

C^2 級の正則曲線 $\gamma : z(t)$ に等角写像 f を施したとき, $f(\gamma)$ の接ベクトルと曲率を表す公式を求めておこう. $f(\gamma) : w(t) = f(z(t))$ と表せるので

$$\dot{w}(t) = f'(z(t))\dot{z}(t), \quad \ddot{w}(t) = f''(z(t))\dot{z}(t)^2 + f'(z(t))\ddot{z}(t)$$

より $f(\gamma)$ の単位接ベクトルは $\frac{f'(z(t))\dot{z}(t)}{|f'(z(t))|\dot{z}(t)|} = \frac{f'(z(t))}{|f'(z(t))|}e(t)$ であり

$$\begin{aligned} (3.10) \quad \kappa_{f(\gamma)}(t) &= \frac{1}{|\dot{w}(t)|} \operatorname{Im} \left(\frac{\ddot{w}(t)}{\dot{w}(t)} \right) \\ &= \frac{1}{|f'(z(t))\dot{z}(t)|} \operatorname{Im} \left(\frac{f''(z(t))\dot{z}(t)^2 + f'(z(t))\ddot{z}(t)}{f'(z(t))\dot{z}(t)} \right) \\ &= \frac{1}{|f'(z(t))|} \left\{ \operatorname{Im} \left(\frac{f''(z(t))}{f'(z(t))} \frac{\dot{z}(t)}{|\dot{z}(t)|} \right) + \operatorname{Im} \left(\frac{\ddot{z}(t)}{\dot{z}(t)|\dot{z}(t)|} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{|f'(z(t))|} \left\{ \operatorname{Im} \left(\frac{f''(z(t))}{f'(z(t))} \frac{\dot{z}(t)}{|\dot{z}(t)|} \right) + \kappa_{\gamma}(t) \right\} \end{aligned}$$

これより特に 2 つの正則曲線 $\gamma : z(t)$ と $\tilde{\gamma} : \tilde{z}(t)$ が z_0 において 2 次の接触を持てば $f(\gamma)$, $f(\tilde{\gamma})$ も $w_0 = f(z_0)$ において 2 次の接触を持つことが分かる.

Theorem 3.7 (曲率円の一次変換による不変性). C^2 級の正則曲線 $\gamma : z(t)$ の $z_0 = z(t_0)$ における曲率円を C とすれば, 一次変換 $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$ による像曲線 $\varphi(\gamma)$ の $\varphi(z_0)$ における曲率円は $\varphi(C)$ である.

Proof. γ と C は z_0 において 2 次の接触を持つのでそれぞれの単位接ベクトル, 曲率は等しい. 従って像曲線 $\varphi(\gamma)$ と $\varphi(C)$ の単位接ベクトルも一致し, 等式 (3.10) より, それぞれの曲率も等しい. よって $\varphi(\gamma)$ と $\varphi(C)$ は $w_0 = f(z_0)$ において 2 次の接触を持つ. φ は一次変換であるから $\varphi(C)$ も円であり, $\varphi(\gamma)$ と 2 次の接触を持つので $\varphi(C)$ は $\varphi(\gamma)$ の w_0 における曲率円である. \square

Theorem 3.8 (Carathéodory). $\gamma : z(t)$, $a < t < b$ を \mathbb{D} 内の C^2 級の正則曲線とし, ある *convex univalent* な函数 f で $f(\gamma)$ が線分となるものが存在するとする. このとき γ の各点 $z(t)$ における曲率円は $\partial\mathbb{D}$ と交わる.

Proof. $t_0 \in (a, b)$, $z_0 = z(t_0)$ と置く. また $z = \varphi(\zeta) = \frac{\zeta+z_0}{1+\bar{z}_0\zeta}$ と置く. このとき $\gamma_0 : \zeta(t) = \varphi^{-1}(z(t))$ は $\zeta(t_0) = \varphi^{-1}(z_0) = 0$ を満たす. さて $F = f \circ \varphi$ は *convex univalent* であり, 仮定より $F(\gamma_0) = f(\gamma)$ は, ある線分上にあるから曲率は恒等的に 0 である, よって

$$\begin{aligned} \kappa_{F(\gamma)}(t) &= \frac{1}{|F'(\zeta(t_0))|} \left\{ \operatorname{Im} \left(\frac{F''(\zeta(t_0))}{F'(\zeta(t_0))} \frac{\dot{\zeta}(t_0)}{|\dot{\zeta}(t_0)|} \right) + \kappa_{\gamma_0}(t_0) \right\} \\ &= \frac{1}{|F'(0)|} \left\{ \operatorname{Im} \left(\frac{F''(0)}{F'(0)} \frac{\dot{\zeta}(t_0)}{|\dot{\zeta}(t_0)|} \right) + \kappa_{\gamma_0}(t_0) \right\} = 0 \end{aligned}$$

である. 評価式 (3.6) より

$$|\kappa_{\gamma_0}(t_0)| = \left| \operatorname{Im} \left(\frac{F''(0)}{F'(0)} \frac{\dot{\zeta}(t_0)}{|\dot{\zeta}(t_0)|} \right) \right| \leq \left| \frac{F''(0)}{F'(0)} \right| \leq 2$$

が成り立つ. 従って γ_0 の $0 = \zeta(t_0)$ における曲率円 C_0 の半径は $\frac{1}{2}$ 以上であるから, C_0 は $\partial\mathbb{D}$ と交わる. ここで Theorem 3.7 より $\gamma = \varphi(\gamma_0)$ の $z(t_0) = \varphi(0)$ における曲率円は $C = \varphi(C_0)$ であり, $\varphi(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$ であるから C と $\partial\mathbb{D}$ も交わる. \square

Ahlfors [2] には, 上の定理は Carathéodory によるとあるだけで論文が引用されていない. 調べたところ, この定理の原論文は [6] のようである.

第 4 章

角微分

4.1 角微分

$z_0, w_0 \in \mathbb{D}$ とする. 正則函数 $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ が $f(z_0) = w_0$ を満たせば

$$\left| \frac{f(z) - w_0}{1 - \overline{w_0}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right|$$

が成り立つ. ここで \mathbb{D} の点 z_0, w_0 を \mathbb{D} の境界に近づけて見よう. ここでは設定を simple にするために $z_0, w_0 \rightarrow 1$ とする. ただし上式の形のままで $z_0, w_0 \rightarrow 1$ としても両辺ともに 1 に収束し, 意味のある不等式は得られない. そこで等式 $1 - \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right|^2 = \frac{(1 - |z_0|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \overline{z_0}z|^2}$ を利用すると

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \frac{(1 - |w_0|^2)(1 - |f(z)|^2)}{|1 - \overline{w_0}f(z)|^2} &\geq \frac{(1 - |z|^2)(1 - |z_0|^2)}{|1 - \overline{z_0}z|^2} \\ \therefore \frac{|1 - \overline{w_0}f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} &\leq \frac{1 - |w_0|}{1 - |z_0|} \frac{1 + |w_0|}{1 + |z_0|} \frac{|1 - \overline{z_0}z|^2}{1 - |z|^2} \end{aligned}$$

ここで z_0 を z_n で置き換え w_0 を $w_n = f(z_n)$ とし $z_n \rightarrow 1, f(z_n) \rightarrow 1$ かつ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - |w_n|}{1 - |z_n|} = k \in (0, \infty)$$

と仮定する. ($k < \infty$ とする理由はお分かりであろう. $k \neq 0$ とする理由は, さもないと $f(z) = 1$ となり矛盾を生じるからである.) このとき

$$\frac{|1 - f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \leq k \frac{|1 - \overline{z_0}z|^2}{1 - |z|^2}$$

という不等式を得る.

Ahlfors [2] の第 1 章 4 節では Carathéodry [5] によるとして, より詳しい解説がなされている. (実際には [5] を読むくらいならば Carathéodry の著書の英訳 [7] の §§295-297 を見る方が容易であろう.) ここでは Ahlfors [2] の解説に沿って述べよう.

$a \in \mathbb{R}$ と $R \in (0, 1)$ について

$$K(a, r) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \right| < R \right\}$$

は中心 a , 半径 $d = 2 \tanh^{-1} R = \log \frac{1+R}{1-R}$ の非 Euclid 開円板である.

$K_n = K(z_n, R_n)$ を非 Euclid 開円板の列とし $n \rightarrow \infty$ のとき $z_n \rightarrow 1$ かつ

$$\frac{1 - |z_n|}{1 - R_n} \rightarrow k \in (0, \infty)$$

と仮定する. このとき K_n は次式で定義される horocycle

$$(4.2) \quad K_\infty(k) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2} < k \right\} = \mathbb{D} \left(\frac{1}{1+k}, \frac{k}{1+k} \right)$$

に収束することを示そう. ただし収束の意味は, 次の (1), (2) が成り立つという意味である.

(1) 無数の n について $z \in K_n$ が成り立つならば $z \in \overline{K_\infty}$. つまり

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} K_n := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} K_n \subset \overline{K_\infty}.$$

(2) $z \in K_\infty$ ならば十分大きな全ての n について $z \in K_n$ が成り立つ. つまり

$$K_\infty \subset \liminf_{n \rightarrow \infty} K_n := \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} K_n.$$

注意) horocycle とは $\partial\mathbb{D}$ に内接する円という意味であるが, 今の場合, 円周ではなく円板なので horodisk と呼んだ方が良くかも知れない.

(1),(2) の証明. まず

$$\begin{aligned} z \in K(z_n, R_n) &\iff 1 - \left| \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z} \right|^2 > 1 - R_n^2 \\ &\iff \frac{(1 - |z|^2)(1 - |z_n|^2)}{|1 - \bar{z}_n z|^2} < 1 - R_n^2 \\ &\iff \frac{|1 - \bar{z}_n z|^2}{1 - |z|^2} < \frac{1 - |z_n|^2}{1 - R_n^2} = \frac{1 + |z_n|}{1 + R_n} \frac{1 - |z_n|}{1 - R_n} \end{aligned}$$

に注意する. (1) $z \in K_n$ が無数の n について成り立てばこのような n に沿って極限を取れば $z_n \rightarrow 1$, $R_n \rightarrow 1$ と $(1 - |z_n|)/(1 - R_n) \rightarrow k$ より

$$\frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2} \leq k$$

が成り立つ.

(2) 逆に $z \in K_\infty$ ならば

$$\frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2} < k_0 < k$$

を満たす k_0 を取る. このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1 - \bar{z}_n z|^2}{1 - |z|^2} = \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2} < k_0$ と $k_0 < k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - |z_n|^2}{1 - R_n^2}$ より十分大きな全ての n について

$$\frac{|1 - \bar{z}_n z|^2}{1 - |z|^2} < k_0 < \frac{1 + |z_n|}{1 + R_n} \frac{1 - |z_n|}{1 - R_n}$$

が成り立つ. つまり $z \in K_n$ が十分大きな全ての n について成り立つ. \square

以上の準備のもとで正則函数 $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ について点列 $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{D}$ で $z_n \rightarrow 1$, $w_n = f(z_n) \rightarrow 1$ かつ

$$\frac{1 - |f(z_n)|}{1 - |z_n|} = \frac{1 - |w_n|}{1 - |z_n|} \rightarrow \alpha \in [0, \infty)$$

が成り立つと仮定する.

このとき任意の $k > 0$ について $\frac{1 - |z_n|}{1 - R_n} = k$ を満たす R_n を取る. まず明らかに $R_n < 1$ であり, $1 - |z_n| < k$ を満たす n について

$$0 < k - (1 - |z_n|) = \frac{1 - |z_n|}{1 - R_n} - (1 - |z_n|) = \frac{R_n(1 - |z_n|)}{1 - R_n}$$

より $R_n > 0$ である. 従って十分大きな全ての n について $0 < R_n < 1$ が成り立つので, 以下ではこのような n の範囲でのみ考えることにする. この時 Schwarz-Picik の補題より

$$f(K_n) = f(K(z_n, R_n)) \subset K(w_n, R_n), \quad w_n = f(z_n)$$

が成り立つ. また $K_n(z_n, R_n) \rightarrow K_\infty(k)$ であり,

$$\frac{1 - |w_n|}{1 - R_n} = \frac{1 - |w_n|}{1 - |z_n|} \frac{1 - |z_n|}{1 - R_n} \rightarrow \alpha k, \quad n \rightarrow \infty$$

である. 従って $\alpha > 0$ のときは $K(w_n, R_n) \rightarrow K_\infty(\alpha k)$ であるから

$$\begin{aligned} z \in K_\infty(k) &\implies z \in K(z_n, R_n) \quad \text{for all sufficiently large } n \\ &\implies f(z) \in K(w_n, R_n) \quad \text{for infinitely many } n \\ &\implies f(z) \in \overline{K_\infty(\alpha k)} \end{aligned}$$

これと f の連続性より

$$\frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2} \leq k \implies \frac{|1 - f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \leq \alpha k$$

が成り立つ. またさらに $k > 0$ の任意性より

$$(4.3) \quad \frac{|1 - f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \leq \alpha \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}$$

が成り立つ.

$\alpha = 0$ の場合は

$$\begin{aligned} z \in K_\infty(k) &\implies z \in K(z_n, R_n) \quad \text{for all sufficiently large } n \\ &\implies f(z) \in K(w_n, R_n) \quad \text{for infinitely many } n \\ &\implies \frac{|1 - \overline{w_n} f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} < \frac{1 + |w_n|}{1 + R_n} \frac{1 - |w_n|}{1 - R_n} \quad \text{for infinitely many } n \end{aligned}$$

において $\frac{1 + |w_n|}{1 + R_n} \frac{1 - |w_n|}{1 - R_n} \rightarrow \alpha k = 0$ であるから

$$\frac{|1 - f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \leq 0$$

を得るが, 左辺は正であるから矛盾を生じる. つまり

$$\frac{1 - |f(z_n)|}{1 - |z_n|} \rightarrow 0, \quad z_n \rightarrow 1$$

を満たす点列は存在しない。

以上で

$$z_n \rightarrow 1 \quad \text{and} \quad \frac{1 - |f(z_n)|}{1 - |z_n|} \rightarrow \alpha \in (0, \infty)$$

を満たす \mathbb{D} 内の点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在すれば

$$(4.4) \quad \beta := \sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{|1 - f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2} \leq \alpha$$

が成り立つことが示された。

ここで視点を変え、正則関数 $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ について $\beta(f) = \sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{|1 - f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2}$ と置き、これを基準にして考えて見よう。まず $\beta(f) = \infty$ ならば $z_n \rightarrow 1$ かつ $\frac{1 - |f(z_n)|}{1 - |z_n|}$ が有限値に収束するような点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ は存在し得ないので

$$\liminf_{z \rightarrow 1} \frac{1 - |f(z)|}{1 - |z|} = +\infty$$

が成り立つ。これに $|1 - f(z)| \geq 1 - |f(z)|$ を考慮すれば

$$(4.5) \quad \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - f(z)}{1 - |z|} = \infty (= \beta(f))$$

が成り立つ。ただし左辺の極限は複素数に関する無限遠点であり $\frac{|1 - f(z)|}{1 - |z|} \rightarrow +\infty$ の意味であるから $= \beta(f)$ と形式的に書くことは可能であるが、注意を要する。

一方、 $\beta(f) < \infty$ の場合は $0 < x_n \rightarrow 1$ を満たす任意の実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ について

$$|1 - f(x_n)|^2 < \frac{|1 - f(x_n)|^2}{1 - |f(x_n)|^2} \leq \beta \frac{(1 - x_n)^2}{1 - x_n^2} = \beta \frac{1 - x_n}{1 + x_n} \rightarrow 0$$

であるから $f(x_n) \rightarrow 1$ が成り立つ。また不等式

$$\beta \geq \frac{|1 - f(x_n)|^2}{1 - |f(x_n)|^2} \frac{1 - x_n^2}{(1 - x_n)^2} \geq \frac{1 + x_n}{1 + |f(x_n)|} \frac{|1 - f(x_n)|}{1 - x_n} \geq \frac{1 + x_n}{1 + |f(x_n)|} \frac{1 - |f(x_n)|}{1 - x_n}$$

が成り立つ。そこで $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$\limsup_{x \nearrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - |f(x_n)|}{1 - x_n}$$

を満たすように取れば

$$\limsup_{x \nearrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - |f(x_n)|}{1 - x_n} \leq \beta(f)$$

を得る。同様な方法により

$$\limsup_{x \nearrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x} \leq \limsup_{x \nearrow 1} \frac{|1 - f(x)|}{1 - x} \leq \beta(f)$$

が成り立つことが分かる。また (4.4) より

$$\beta(f) \leq \liminf_{x \nearrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x} \leq \liminf_{x \nearrow 1} \frac{|1 - f(x)|}{1 - x}$$

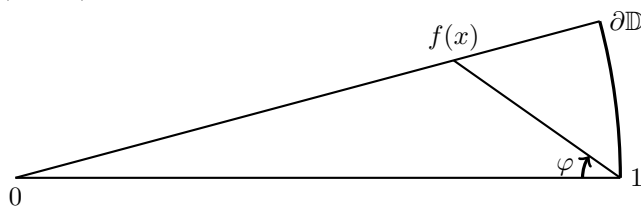
が成り立つ. よって $\beta(f) < \infty$ ならば

$$(4.6) \quad \lim_{x \nearrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x} = \lim_{x \nearrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x} = \beta(f)$$

が成り立つ. 実はこれよりさらに

$$(4.7) \quad \lim_{x \nearrow 1} \frac{1 - f(x)}{1 - x} = \beta(f)$$

を導くことが出来る. これを示すには $1 - f(x) = |1 - f(x)|e^{i \arg(1 - f(x))}$ より $\varphi := \arg(1 - f(x)) \rightarrow 0$ ($x \nearrow 1$) を示せば十分である.



余弦定理より

$$1^2 + |1 - f(x)|^2 - |f(x)|^2 = 2 \cdot 1 \cdot |1 - f(x)| \cos \varphi$$

であるから

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \left\{ |1 - f(x)| + \frac{1 - |f(x)|}{|1 - f(x)|} (1 + |f(x)|) \right\} \geq \frac{1 + |f(x)|}{2} \frac{1 - |f(x)|}{|1 - f(x)|}$$

が成り立つ. ここで (4.6) より $\frac{1 - |f(x)|}{|1 - f(x)|} \rightarrow 1$ であるから $f(x) \rightarrow 1$ と合わせて $\cos \varphi \rightarrow 1$ となり $\varphi \rightarrow 0$ が成り立つ.

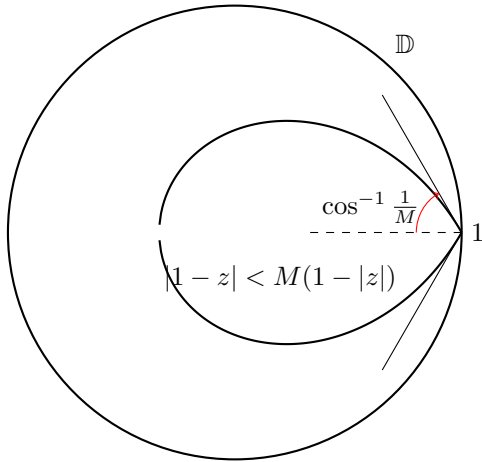
ここまでの議論をまとめると

Proposition 4.1. 正則函数 $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ について $\beta(f) = \sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{|1 - f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2}$ と置く時 $\beta(f) < \infty$, $\beta(f) = \infty$ にかかわらず *radial limit* が存在し

$$\lim_{x \nearrow 1} \frac{1 - f(x)}{1 - x} = \beta(f)$$

が成り立つ.

この命題の $x \nearrow 1$ とした時の *radial limit* から, $M > 1$ を任意に固定し, 条件 $|1 - z| < M(1 - |z|)$ のもとで $z \rightarrow 1$ としたときの結果に拡張しよう. この条件は z が下図のように 1 の左側に上下に角度が $\cos^{-1} \frac{1}{M}$ ずつ開いた部分から 1 に近づくことを意味する.



そこで任意の $M > 1$ について条件 $|1 - z| < M(1 - |z|)$ のもとで $z \rightarrow 1$ としたときの極限が存在するとき、この極限を非接極限 (nontangential limit) または (少し古めの用語であるが) 角極限 (angular limit) と呼ぶことにし、 $\angle \lim_{z \rightarrow 1}$ と表す。またこの角極限

$$\angle \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - f(z)}{1 - z}$$

が有限値の場合、 $\angle \lim_{z \rightarrow 1} f(z) = 1$ が成り立つので、 $f(1) = 1$ とみなせば極限値は $f'(1)$ とみなすことが出来る。そこでこれを $z = 1$ における f の角微分と呼ぶ。

Theorem 4.2. 正則函数 $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ について

$$\beta(f) = \sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{|1 - f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2} \in (0, \infty]$$

と置けば

$$\angle \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - f(z)}{1 - z} = \beta(f)$$

が $\beta(f)$ が有限値かどうかに関わりなく成り立つ。さらに $\beta(f) < \infty$ の場合

$$\angle \lim_{z \rightarrow 1} f'(z) = \beta(f)$$

も成り立つ

Proof. $\beta(f) = \infty$ の場合 (4.5) において $\mathbb{D} \ni z \rightarrow 1$ である限り、近づき方に関係なく $\frac{|1-f(z)|}{1-|z|} \rightarrow \infty$ を示した。よって $|1 - z| < M(1 - |z|)$ のもとで $z \rightarrow 1$ とすれば

$$\frac{|1 - f(z)|}{|1 - z|} \geq \frac{1}{M} \frac{|1 - f(z)|}{1 - |z|} \rightarrow \infty$$

が成り立つ。

$\beta(f) < \infty$ の場合は

$$(4.8) \quad \beta(f) \frac{1 + f(z)}{1 - f(z)} - \frac{1 + z}{1 - z} = \frac{1 + F(z)}{1 - F(z)}$$

を用いて \mathbb{D} 上の正則函数 F を定義しよう。 $\operatorname{Re} \frac{1+w}{1-w} = \frac{1-|w|^2}{|1-w|^2}$ を利用すると

$$\beta(f) \frac{1 - |f(z)|^2}{|1 - f(z)|^2} - \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2} = \frac{1 - |F(z)|^2}{|1 - F(z)|^2}$$

を得る. 両辺を $\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ で割って \inf を取ると

$$\frac{1}{\beta(F)} = \inf_{z \in \mathbb{D}} \frac{1 - |F(z)|^2}{|1 - F(z)|^2} \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2} = \beta(f) \inf_{z \in \mathbb{D}} \frac{1 - |f(z)|^2}{|1 - f(z)|^2} \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2} - 1 = \beta(f) \frac{1}{\beta(f)} - 1 = 0$$

となるので $\beta(F) = \infty$ である. 従って $\angle \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-F(z)}{1-z} = \infty$ であり, $\angle \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-z}{1-F(z)} = 0$ が成り立つ. これに加えて $|1-z| < M(1-|z|)$ のもとで

$$|1 - f(z)|^2 < \frac{|1 - f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \leq \beta(f) \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2} \leq \beta(f) M^2 \frac{(1 - |z|)^2}{1 - |z|^2} = \beta(f) M^2 \frac{1 - |z|}{1 + |z|}$$

が成り立つことから従う $\angle \lim_{z \rightarrow 1} f(z) = 1$ 及び $|F(z)| < 1$ を合わせると

$$\begin{aligned} & \angle \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \beta(f) \frac{1-z}{1-f(z)} (1+f(z)) - (1+z) \right\} = \angle \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-z}{1-F(z)} (1+F(z)) \\ \implies & \angle \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ 2\beta(f) \frac{1-z}{1-f(z)} - 2 \right\} = 0 \\ \implies & \beta(f) \angle \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{1-z}{1-f(z)} \right\} = 1 \\ \therefore & \angle \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-f(z)}{1-z} = \beta(f). \end{aligned}$$

最後に (4.8) の両辺を微分すれば

$$\beta(f) \frac{f'(z)}{(1-f(z))^2} - \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{F'(z)}{(1-F(z))^2}$$

であるから, これに $\frac{|F'(z)|}{1-|F(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}$ を合わせ $|1-z| < M(1-|z|)$ を用いて

$$\begin{aligned} \left| f'(z) \frac{\beta(f)(1-z)^2}{(1-f(z))^2} - 1 \right| &= \frac{|F'(z)|}{|1-F(z)|^2} |1-z|^2 \\ &\leq \frac{1 - |F(z)|^2}{|1-F(z)|^2} \frac{|1-z|^2}{1 - |z|^2} \\ &= \frac{1 + |F(z)|}{1 + |z|} \cdot \frac{1 - |F(z)|}{1 - |z|} \cdot \frac{|1-z|^2}{|1-F(z)|^2} \\ &\leq M^2 \frac{1 + |F(z)|}{1 + |z|} \cdot \frac{1 - |z|}{1 - |F(z)|} \end{aligned}$$

を得る. 最右辺の nontangential limit が 0 であること, 及び $\frac{(1-z)^2}{(1-f(z))^2}$ の nontangential limit が $\frac{1}{\beta(f)^2}$ であることより $f'(z)$ の nontangential limit が $\beta(f)$ であることが分かる. \square

$\beta(f) < \infty$ の時 $\beta(f) = \angle \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-f(z)}{1-z}$ は f の 1 における角微係数 (angular derivative) と呼ばれる. このとき角極限として $f(1) = 1$ であり, β は $f'(z)$ の角極限でありかつ差分商 $\frac{f(z)-1}{z-1}$ の角極限でもある. このとき 1 から出発し角領域内を通り 1 において接線を持つ 2 つの曲線の接線同士のなす角は f により保存される. 実際 2 つの曲線を $z_j(t)$, $0 \leq t \leq 1$ とし $z_j'(0)$ が存在すれば

$$\frac{f(z_j(t)) - f(z_j(0))}{t-0} = \frac{f(z_j(t)) - 1}{z_j(t) - 1} \frac{z_j(t) - z_j(0)}{t-0} \rightarrow \beta(f) z_j'(0) \quad (t \searrow 1)$$

である. 従って角領域に限れば $f(1) = 1$ と拡張された f は 1 において等角である.

$\delta, \gamma \in \mathbb{R}$ を任意に取り固定し $f_1(z) = e^{-i\delta} f(e^{i\gamma} z)$ とおいて f_1 に Theorem 4.2 を適用すれば

$$\beta(f_1) = \sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{|1 - e^{-i\delta} f(e^{i\gamma} z)|}{1 - |e^{-i\delta} f(e^{i\gamma} z)|^2} \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2} = \sup_{\zeta \in \mathbb{D}} \frac{|e^{i\delta} - f(\zeta)|}{1 - |f(\zeta)|^2} \frac{1 - |\zeta|^2}{|e^{i\gamma} - \zeta|^2}$$

であり

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{f_1(z) - 1}{z - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^{-i\delta} f(e^{i\gamma} z) - 1}{z - 1} = \lim_{\zeta \rightarrow e^{i\gamma}} \frac{e^{-i\delta} f(\zeta) - 1}{e^{-i\gamma} \zeta - 1} = e^{i(\gamma - \delta)} \lim_{\zeta \rightarrow e^{i\gamma}} \frac{f(\zeta) - e^{i\delta}}{\zeta - e^{i\gamma}}$$

であるから、正則函数 $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ について

$$(4.9) \quad \angle \lim_{z \rightarrow e^{i\gamma}} \frac{f(z) - e^{i\delta}}{z - e^{i\gamma}} = e^{i(\delta - \gamma)} \sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{|e^{i\delta} - f(z)|}{1 - |f(z)|^2} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\gamma} - z|^2}$$

が成り立つという結果を得る。もちろん極限が有限値であるとき $\angle \lim_{z \rightarrow e^{i\gamma}} = e^{i\delta}$ であり、これを満たさない函数について極限は ∞ である。

単位円板よりも右半平面で Julia の補題を使うのが便利な場合も数多い。この場合 Julia の補題は右半平面 $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ から自身への正則函数 $f = u + iv$ について

$$(4.10) \quad \angle \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z} = \angle \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{u(z)}{x} = \inf_z \frac{u(z)}{x}$$

が成り立つという結果に翻訳される。ただしこの場合の角極限とは任意の $M > 1$ について $|z+1| - |z-1| < \frac{2}{M}$ という双曲線で囲まれた領域において $z \rightarrow \infty$ とした時の共通の極限という意味である。これは任意の $\varepsilon > 0$ について $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ という角領域に制限し $z \rightarrow \infty$ とした時の共通の極限と表すことも出来る。このように Stolz 領域に関する極限については次節で考えることとし、正則函数 $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ について

$$F(\zeta) = \frac{f\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right) - 1}{f\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right) + 1}, \quad \zeta \in \mathbb{D}$$

と置けば F は \mathbb{D} から自身への正則函数であり

$$\begin{aligned} \sup_{\zeta \in \mathbb{D}} \frac{|1 - F(\zeta)|^2}{1 - |F(\zeta)|^2} \frac{1 - |\zeta|^2}{|1 - \zeta|^2} &= \sup_{\operatorname{Re} z > 0} \frac{\left|1 - \frac{f(z)-1}{f(z)+1}\right|}{1 - \left|\frac{f(z)-1}{f(z)+1}\right|^2} \frac{\left|1 - \frac{z-1}{z+1}\right|}{1 - \left|\frac{z-1}{z+1}\right|^2} \\ &= \sup_{\operatorname{Re} z > 0} \frac{4}{|f(z)+1|^2 - |f(z)-1|^2} \frac{|z+1|^2 - |z-1|^2}{4} \\ &= \sup_{\operatorname{Re} z > 0} \frac{z + \bar{z}}{f(z) + \overline{f(z)}} \\ &= \sup_{\operatorname{Re} z > 0} \frac{x}{u(z)} = \frac{1}{\inf_{\operatorname{Re} z > 0} \frac{u(z)}{x}} \end{aligned}$$

また

$$\zeta \rightarrow 1 \text{ in } 1 - |\zeta| < M|1 - \zeta| \iff z \rightarrow \infty \text{ in } |z+1| - |z-1| < \frac{2}{M}$$

でありこのとき $F(\zeta) \rightarrow 1$ は $\frac{f(z)-1}{f(z)+1} \rightarrow 1$ さらに $f(z) \rightarrow \infty$ に対応する。

$$\frac{1 - F(\zeta)}{1 - \zeta} = \frac{1 - \frac{f(z)-1}{f(z)+1}}{1 - \frac{z-1}{z+1}} = \frac{z+1}{f(z)+1} = \frac{z}{f(z)} \frac{1 + \frac{1}{z}}{1 + \frac{1}{f(z)}}$$

より

$$\angle \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{1 - F(\zeta)}{1 - \zeta} = \angle \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{f(z)}$$

が成り立つ。これで

$$\angle \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z} = \inf_{\operatorname{Re} z > 0} \frac{u(z)}{x}$$

が示された。また

$$\angle \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{x}{u(z)} = \angle \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{1 - |F(\zeta)|^2}{1 - |\zeta|^2} = \angle \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{1 + |F(\zeta)|}{1 + |\zeta|} \frac{1 - |F(\zeta)|}{1 - |\zeta|} = \angle \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{1 - |F(\zeta)|}{1 - |\zeta|} = \beta(F)$$

より

$$\angle \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z} = \angle \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{u(z)}{x}$$

が従う。

4.2 Herglotz の表現公式を用いた Julia の補題の証明

\mathbb{D} 上で $\operatorname{Re}(1+f)/(1-f) = \frac{1-|f|^2}{|1-f|^2} > 0$ であるから、ある $\partial\mathbb{D}$ 上の Borel 測度 μ を用いて

$$\frac{1+f(z)}{1-f(z)} = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} d\mu(\zeta) + iC, C \in \mathbb{R}$$

と表される。ここで $c = \mu(\{1\}) \geq 0$, $\mu_0 = \mu - c\delta_1$ と置くと (δ_1 は 1 における Dirac 測度)

$$(4.11) \quad \frac{1+f(z)}{1-f(z)} = c \frac{1+z}{1-z} + \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} d\mu_0(\zeta) + iC$$

となり、両辺の実部を取ると

$$\frac{1-|f(z)|^2}{|1-f(z)|^2} = c \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} + \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} d\mu(\zeta).$$

を得る。これより直ちに

$$\frac{1-|f(z)|^2}{|1-f(z)|^2} \geq c \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$$

が従う。また

$$\frac{1-|f(z)|^2}{|1-f(z)|^2} \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} = c + I(z), \quad I(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{|1-z|^2}{|\zeta-z|^2} d\mu_0(\zeta)$$

と書き直せる。

それではここで $\angle \lim_{z \rightarrow 1} I(z) = 0$ を示そう。実際 $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を円弧 $A = \{e^{i\theta} : |\theta| \leq \delta\}$ $\mu_0(A) < \varepsilon$ となるように取り、

$$I(z) = \int_A \frac{|1-z|^2}{|\zeta-z|^2} d\mu_0(\zeta) + \int_{\partial\mathbb{D} \setminus A} \frac{|1-z|^2}{|\zeta-z|^2} d\mu_0(\zeta) = I_1(z) \pm I_2(z)$$

と分解すると $|1-z| < M(1-|z|)$ において

$$\frac{|1-z|^2}{|\zeta-z|^2} \leq \frac{M(1-|z|)^2}{(1-|z|)^2} = M$$

より $|I_1| \leq M\varepsilon$ が成り立ち, $I_2(z)$ については明らかに $\angle \lim_{z \rightarrow 1} I_2(z) = 0$ であることより従う.

$c > 0$ のとき

$$\frac{|1 - f(z)|^2 |1 - z|^2}{1 - |f(z)|^2 |1 - z|^2} \leq \frac{1}{c}$$

が成り立つ. また $\angle \lim_{z \rightarrow 1} I(z) = 0$ より

$$\angle \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - |f(z)|^2 |1 - z|^2}{|1 - f(z)|^2 |1 - z|^2} = c$$

となるので, 逆数を取ると

$$\angle \lim_{z \rightarrow 1} \frac{|1 - f(z)|^2 |1 - z|^2}{1 - |f(z)|^2 |1 - z|^2} = \frac{1}{c}$$

を得る. これより特に

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{|1 - f(z)|^2 |1 - z|^2}{1 - |f(z)|^2 |1 - z|^2} = \frac{1}{c}$$

が成り立つ. ここで (4.11) の両辺を $1 - z$ 倍し

$$\frac{1 - z}{1 - f(z)} (1 + f(z)) - c(1 + z) - iC(1 - z) = \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{(1 - z)(\zeta + z)}{\zeta - z} d\mu_0(\zeta)$$

とすれば, 右辺の nontangential limit が 0 となることが前と同様に示されるので $\angle \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - z}{1 - f(z)} (1 + f(z)) = 2c$ を得る. これより特に $\angle \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 + f(z)}{1 - f(z)} = \infty$ となり $\angle \lim_{z \rightarrow 1} f(z) = 1$ を得る. これを考慮に入れて上の等式において Stolz 領域から $z \rightarrow 1$ とすれば

$$\angle \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - z}{1 - f(z)} = c = \frac{1}{\beta(f)}$$

を得る.

$c = 0$ の場合も同様である.

ここで Julia の補題を

$$\frac{|1 - f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \leq \beta \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2}, \quad \beta = \angle \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - f(z)}{1 - z}$$

と表した時, $\beta < \infty$ の場合の等号条件について考えておこう. つまりある $z_0, w_0 \in \mathbb{D}$ で

$$\frac{|1 - w_0|^2}{1 - |w_0|^2} = \beta \frac{|1 - z_0|^2}{1 - |z_0|^2}$$

となるものについて $f(z_0) = w_0$ が成り立つ為の条件である. これは

$$0 = \frac{1 - |f(z_0)|^2}{|1 - f(z_0)|^2} - \frac{1}{\beta} \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - z_0|^2} = \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{1 - |z_0|^2}{|\zeta - z_0|^2} d\mu_0(\zeta)$$

となるので $\mu_0 = 0$ が成り立つ. よって

$$(4.12) \quad \frac{1 + f(z)}{1 - f(z)} = \frac{1}{\beta} \frac{1 + z}{1 - z} + iC.$$

となり $f(z_0) = w_0$ より

$$(4.13) \quad \frac{1 + w_0}{1 - w_0} = \frac{1}{\beta} \frac{1 + z_0}{1 - z_0} + iC \quad \text{and} \quad \frac{1 + \overline{w_0}}{1 - \overline{w_0}} = \frac{1}{\beta} \frac{1 + \overline{z_0}}{1 - \overline{z_0}} - iC.$$

(4.12) and (4.13) を合わせると we have

$$\sigma_{w_0}(f(z)) = \frac{\frac{1+f(z)}{1-f(z)} - \frac{1+w_0}{1-w_0}}{\frac{1+f(z)}{1-f(z)} + \frac{1+\overline{w_0}}{1-\overline{w_0}}} = \frac{\frac{1+z}{1-z} - \frac{1+z_0}{1-z_0}}{\frac{1+z}{1-z} + \frac{1+\overline{z_0}}{1-\overline{z_0}}} = \sigma_{z_0}(z)$$

ただし

$$\sigma_a(z) = \frac{1 - \bar{a}}{1 - a} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

である.

第 5 章

単位円板上の双曲計量

5.1 単位円板の自己等角写像

a, b, c, d を複素定数とする. 一次分数変換 $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$ は Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ から自身への正則な全単射であり, φ による円の像は円である. ただしここでは直線も円の一種であり, 特に ∞ を通る円であるとみなす. 一次変換は円の内部 (直線の場合は半平面) を像である円の内部または外部へ等角に (= 全単射正則に) 写像する. また円 K に関し互いに鏡像の位置にある 2 点 z_1, z_2 の像 $\varphi(z_1), \varphi(z_2)$ は円 $\varphi(K)$ に関し互いに鏡像の位置にある.

以上の事実を踏まえ, 単位円板 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ を自身に等角に写像する一次変換の形を求めておこう. なお本書では写像が等角であるとは, 正則な全単射であることを意味する. さて $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ が $S(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ を満たすとする. このとき上の事実から S による円 $\partial\mathbb{D}$ の像は $\partial\mathbb{D}$ であり $S(\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$ が成り立つことに注意しておこう. まず $a \neq 0$ である. 実際 $a = 0$ ならば $ad-bc \neq 0$ より $c \neq 0$ であり $S(\infty) = 0$ が従う. これは $S(\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$ に反する. $c = 0$ のときは $d \neq 0$ であり $S(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ となる. 従って S は相似変換と平行移動の合成変換であるから円の中心を円の中心に写像し, 像の円の半径はもとの円の半径の $\left|\frac{a}{d}\right|$ 倍である. φ は単位円周 $\partial\mathbb{D}$ を自身に写像するので $\frac{b}{d} = 0$ と $\left|\frac{a}{d}\right| = 1$ であり, つまり $S(z) = e^{i\theta}z$, $\theta \in \mathbb{R}$ と表せる.

$c \neq 0$ のときを考えよう. $0 = S\left(-\frac{b}{a}\right)$, $\infty = S\left(-\frac{d}{c}\right)$ は単位円周 $\partial\mathbb{D}$ に関し互いに鏡像の位置にあり, S^{-1} も一次変換であるから $-\frac{b}{a}$ と $-\frac{d}{c}$ は \mathbb{D} に関し互いに鏡像の位置にあり, とともに ∞ ではない. よってともに 0 ではなく $\frac{d}{c} = \frac{\bar{a}}{b}$ が成り立つ. よって $d = c\frac{\bar{a}}{b}$ であり

$$S(z) = \frac{az+b}{cz+c\frac{\bar{a}}{b}} = \frac{\bar{b}az+b}{c\bar{b}z+\bar{a}}$$

となる. ここで $S(1) \in \partial\mathbb{D}$ より $\left|\frac{\bar{b}}{c}\right| = 1$ であるから $\frac{\bar{b}}{c} = e^{2i\theta} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}}$ と置くと

$$S(z) = \frac{ae^{i\theta}z + be^{i\theta}}{be^{i\theta}z + ae^{i\theta}} = \frac{a'z + b'}{b'z + a'}, \quad a' = ae^{i\theta} \text{ and } b' = be^{i\theta}$$

と表せる. また $|S(0)| < 1$ より $\left|\frac{b'}{a'}\right| < 1$ である.

以上より \mathbb{D} を自身へ等角に写像する一次変換は

$$(5.1) \quad S(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}, \quad a, b \in \mathbb{C} \text{ with } |a|^2 - |b|^2 > 0$$

の形に表すことが出来る. (行列式に相当する $|a|^2 - |b|^2 > 0$ については $|a|^2 - |b|^2 = 1$ と仮定することもある.) 逆に S がこの形で表されているときに $S(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ を示しておこう.

$$\begin{aligned} 1 - |S(z)|^2 &= \frac{|\bar{b}z + \bar{a}|^2 - |az + b|^2}{|\bar{b}z + \bar{a}|^2} \\ &= \frac{(\bar{b}z + \bar{a})(b\bar{z} + a) - (az + b)(\bar{a}z + \bar{b})}{|\bar{b}z + \bar{a}|^2} \\ &= \frac{(|a|^2 - |b|^2)(1 - |z|^2)}{|\bar{b}z + \bar{a}|^2} \end{aligned}$$

より $|z| < 1$ ならば $|S(z)| < 1$, つまり $S(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ が従う. また $w = S(z)$ を逆に解いて $z = S^{-1}(w) = \frac{\bar{a}w - b}{-\bar{b}w + a}$ であり, やはり (5.1) の形をしているので $S^{-1}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ が従う. よって $S(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ が成り立つ.

(5.1) の代わりに, 等角写像論という分野でよく使われる標準形についても述べておこう. それは $e^{i\alpha} = \frac{a}{\bar{a}}$, $z_0 = -\frac{b}{\bar{a}}$ と置き

$$(5.2) \quad S(z) = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ and } z_0 \in \mathbb{D}$$

である. こちらは $S(z_0) = 0$ より $z_0 = S^{-1}(0)$ と $S'(0) = e^{i\alpha}(1 - |z_0|^2)$ より $\alpha = \arg S'(0)$ であることが示されているという利点がある. こちらの場合は

$$\begin{aligned} 1 - |S(z)|^2 &= \frac{|1 - \bar{z}_0 z|^2 - |z - z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} \\ &= \frac{(1 - \bar{z}_0 z)(1 - z_0 \bar{z}) - (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} \\ &= \frac{(1 - |z_0|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} \end{aligned}$$

より従う

$$(5.3) \quad 1 - \left| e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right|^2 = \frac{(1 - |z_0|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{z}_0 z|^2}$$

と

$$(5.4) \quad S^{-1}(w) = \frac{w + e^{i\alpha} z_0}{e^{i\alpha} + \bar{z}_0 w} = e^{-i\alpha} \frac{w + e^{i\alpha} z_0}{1 + e^{i\alpha} \bar{z}_0 w}$$

が成り立つので, 前と同様な議論により $S(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ が示される, \mathbb{D} から自身への等角な一次変換は (5.2) の形に表され, 逆に (5.2) の形の一次変換は \mathbb{D} から自身への等角写像である.

以下では記号 $\text{Aut}(\mathbb{D})$ により \mathbb{D} を自身へ等角に写像する一次変換の全体を表そう. $\text{Aut}(\mathbb{D})$ は写像の合成を積, 恒等変換を単位元, そして逆写像を逆元として群をなす.

$S \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ が (5.1) の形で表されるとき

$$\begin{aligned} S(z_1) - S(z_2) &= \frac{az_1 + b}{\bar{b}z_1 + \bar{a}} - \frac{az_2 + b}{\bar{b}z_2 + \bar{a}} \\ &= \frac{(az_1 + b)(\bar{b}z_2 + \bar{a}) - (az_2 + b)(\bar{b}z_1 + \bar{a})}{(\bar{b}z_1 + \bar{a})(\bar{b}z_2 + \bar{a})} \\ &= \frac{(|a|^2 - |b|^2)(z_1 - z_2)}{(\bar{b}z_1 + \bar{a})(\bar{b}z_2 + \bar{a})} \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} 1 - \overline{S(z_1)}S(z_2) &= \frac{(b\bar{z}_1 + a)(\bar{b}z_2 + \bar{a}) - (\bar{a}\bar{z}_1 + \bar{b})(az_2 + b)}{(b\bar{z}_1 + a)(\bar{b}z_2 + \bar{a})} \\ &= \frac{(|a|^2 - |b|^2)(1 - \bar{z}_1z_2)}{(b\bar{z}_1 + a)(\bar{b}z_2 + \bar{a})} \end{aligned}$$

より

$$\frac{S(z_1) - S(z_2)}{1 - \overline{S(z_1)}S(z_2)} = \frac{b\bar{z}_1 + a}{\bar{b}z_1 + \bar{a}} \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1z_2}$$

が成り立つ。従って

$$(5.5) \quad \left| \frac{S(z_1) - S(z_2)}{1 - \overline{S(z_1)}S(z_2)} \right| = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1z_2} \right|$$

が成り立つ。そこで $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ について

$$(5.6) \quad \delta(z_1, z_2) = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1z_2} \right|$$

と置こう。これは等角不変量である。これは単位円板から自身への等角写像 f について不変、つまり $\delta(f(z_1), f(z_2)) = \delta(z_1, z_2)$ が成り立つことが証明される。現時点では f が一次変換の場合について等式がなりたつことが示されているが、後ほど単位円板から自身への等角写像は上の形の一次変換に限ることを証明するので、等式は全ての自己等角写像について成り立つことになる。 $\delta(z_0, z_1)$ は擬双曲距離 (pseudo-hyperbolic distance) と呼ばれる。これは明らかに非負で、 z_1, z_2 について対象である。後ほど定理 5.1 において三角不等式が成り立つことを示すので、 $\delta(z_0, z_1)$ は実際に距離関数である。

$z_0 \in \mathbb{D}$, $\rho \in (0, 1)$ を固定し、集合 $K(z_0, \rho) := \{z : \delta(z_0, z) < \rho\}$ を考えよう。これは $T(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0z}$, $z \in \mathbb{C}$ と置いて $T \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ を定義すれば

$$\delta(z_0, z) < \rho \iff T(z) \in \mathbb{D}(0, \rho) \iff z \in T^{-1}(\mathbb{D}(0, \rho))$$

であるから、 $K(z_0, \rho) = T^{-1}(\mathbb{D}(0, \rho))$ が成り立ち、一次変換 T^{-1} による円板 $\mathbb{D}(0, \rho)$ の像であるから円板で

ある. その中心と半径を求める為に愚直に計算すれば

$$\begin{aligned}
\delta(z_0, z) < \rho &\iff |z - z_0|^2 < \rho^2 |1 - \bar{z}_0 z|^2 \\
&\iff |z|^2 - (\bar{z}_0 z + \bar{z} z_0) + |z_0|^2 < \rho^2 \{1 - (\bar{z}_0 z + \bar{z} z_0) + |z_0|^2 |z|^2\} \\
&\iff |z|^2 - (\bar{z}_0 z + \bar{z} z_0) + |z_0|^2 < \rho^2 \{1 - (\bar{z}_0 z + \bar{z} z_0) + |z_0|^2 |z|^2\} \\
&\iff (1 - \rho^2 |z_0|^2) |z|^2 - (1 - \rho^2)(\bar{z}_0 z + \bar{z} z_0) < \rho^2 - |z_0|^2 \\
&\iff |z|^2 - \frac{1 - \rho^2}{1 - \rho^2 |z_0|^2} (\bar{z}_0 z + \bar{z} z_0) < \frac{\rho^2 - |z_0|^2}{1 - \rho^2 |z_0|^2} \\
&\iff \left| z - \frac{(1 - \rho^2) z_0}{(1 - \rho^2 |z_0|^2)} \right|^2 < \frac{(\rho^2 - |z_0|^2)(1 - \rho^2 |z_0|^2) + (1 - \rho^2)^2 |z_0|^2}{(1 - \rho^2 |z_0|^2)^2} \\
&\iff \left| z - \frac{(1 - \rho^2) z_0}{(1 - \rho^2 |z_0|^2)} \right| < \frac{\rho(1 - |z_0|^2)}{1 - \rho^2 |z_0|^2}
\end{aligned}$$

となるので

$$(5.7) \quad K(z_0, \rho) = \mathbb{D} \left(\frac{(1 - \rho^2) z_0}{1 - \rho^2 |z_0|^2}, \frac{\rho(1 - |z_0|^2)}{1 - \rho^2 |z_0|^2} \right)$$

を得る. ここで

$$\begin{aligned}
\frac{(1 - \rho^2) |z_0|}{1 - \rho^2 |z_0|^2} + \frac{\rho(1 - |z_0|^2)}{1 - \rho^2 |z_0|^2} &= \frac{|z_0| + \rho}{1 + \rho |z_0|} \\
\frac{(1 - \rho^2) |z_0|}{1 - \rho^2 |z_0|^2} - \frac{\rho(1 - |z_0|^2)}{1 - \rho^2 |z_0|^2} &= \frac{|z_0| - \rho}{1 - \rho |z_0|}
\end{aligned}$$

より

$$(5.8) \quad \mathbb{D} \left(0, \frac{|z_0| - \rho}{1 - \rho |z_0|} \right) \subset K(z_0, \rho) \subset \mathbb{D} \left(0, \frac{|z_0| + \rho}{1 + \rho |z_0|} \right)$$

が成り立つ. ただし最左辺は $|z_0| \leq \rho$ のとき空集合であるとする.

Theorem 5.1. $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ について

$$(5.9) \quad \frac{\delta(z_0, z_2) - \delta(z_2, z_1)}{1 - \delta(z_0, z_2)\delta(z_2, z_1)} \leq \delta(z_0, z_1) \leq \frac{\delta(z_0, z_2) + \delta(z_2, z_1)}{1 + \delta(z_0, z_2)\delta(z_2, z_1)}$$

が成り立つ. 特に $z_2 = 0$ のとき

$$(5.10) \quad \frac{|z_0| - |z_1|}{1 - |z_0||z_1|} \leq \left| \frac{z_0 - z_1}{1 - \bar{z}_0 z_1} \right| \leq \frac{|z_0| + |z_1|}{1 + |z_0||z_1|}$$

が成り立つ.

Proof. (5.10) を示せば十分である. 実際 $T(z) = \frac{z - z_2}{1 - \bar{z}_2 z}$ と置き, (5.10) において z_0 の代わりに $T(z_0)$, z_1 の代わりに $T(z_1)$ を代入すれば (5.9) が得られる.

それでは (5.10) を示そう. $z_1 = 0$ のときは自明であるから, $z_1 \neq 0$ とする. $\rho = |z_1|$ と置くと $z = \frac{z_1 - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_1}$ は $K(-z_0, \rho)$ の境界上にある. よって (5.8) より

$$\frac{|z_0| - \rho}{1 - \rho |z_0|} \leq |z| \leq \frac{|z_0| + \rho}{1 + \rho |z_0|}$$

が成り立つ. これに $\rho = |z_0|$ を代入すれば直ちに (5.10) を得る. □

(5.10) は (5.3) を利用した直接的な計算を行うことにより確かめることも容易である。

次のトピックに移る前に等式を 1 つ示しておこう。ここで (5.5) において z_2 を z で置き換えた後に両辺を $z_1 - z$ で割ると

$$\left| \frac{S(z_1) - S(z)}{z_1 - z} \right| \frac{1}{\left| 1 - \overline{S(z_1)} S(z) \right|} = \frac{1}{|1 - \bar{z}_1 z|}$$

を得る。ここで $z_1 \rightarrow z$ とすれば $w = S(z)$ について

$$(5.11) \quad \frac{\left| \frac{dw}{dz} \right|}{1 - |w|^2} = \frac{|S'(z)|}{1 - |S(z)|^2} = \frac{1}{1 - |z|^2}$$

が成り立つ。

5.2 双曲計量

ここで双曲計量と呼ばれる \mathbb{D} 上の Riemann 計量 $\frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - |z|^2)^2}$ を導入しよう。 $f = u + iv : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ を正則関数とすると f による双曲計量 $\frac{4(du^2 + dv^2)}{(1 - |w|^2)^2}$ の引き戻しは

$$du = u_x dx + u_y dy, \quad dv = v_x dx + v_y dy$$

と Cauchy-Riemann の方程式 $u_x = v_y, u_y = -v_x$ と $f' = u_x + iv_y$ より

$$du^2 + dv^2 = (u_x^2 + v_x^2)dx^2 + 2(u_x u_y + v_x v_y)dx dy + (u_y^2 + v_y^2)dy^2 = |f'(z)|^2(dx^2 + dy^2)$$

であるから

$$\frac{4|f'(z)|^2(dx^2 + dy^2)}{(1 - |f(z)|^2)^2}$$

である。 $S \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ の場合は (5.11) で示したように

$$\frac{4|S'(z)|^2(dx^2 + dy^2)}{(1 - |S(z)|^2)^2} = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - |z|^2)^2}$$

が成り立つ。つまり $S \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ による双曲計量の引き戻しは、双曲計量自身であることを意味する。

さて一般に Riemann 計量 $E(x, y)dx^2 + 2F(x, y)dx dy + G(x, y)dy^2$ に関する Lebesgue 可測集合 A の面積積分は $\iint_A \sqrt{EG - F^2} dx dy$ で定義される。双曲計量の場合は $\iint_A \frac{4dx dy}{(1 - |z|^2)^2}$ である。このとき

$$\iint_{S(A)} \frac{4dudv}{(1 - |w|^2)^2} = \iint_A \frac{4dx dy}{(1 - |z|^2)^2}, \quad S \in \text{Aut}(\mathbb{D})$$

が成り立つ。詳しく述べると $A \subset \mathbb{D}$ が Lebesgue 可測ならば $S(A)$ も Lebesgue 可測であり、上の等式が成り立つという意味である。これは次のようにして証明される。任意の $r \in (0, 1)$ について S は $\mathbb{D}(0, r)$ から $S(\mathbb{D}(0, r))$ への Lipschitz 連続な位相同型であるからよって Lebesgue 可測集合の像もまた Lebesgue 可測集合である。従って Lebesgue 可測集合 $E \cap \mathbb{D}(0, r)$ の像である $S(E \cap \mathbb{D}(0, r))$ も Lebesgue 可測であり、 $r \rightarrow 1$ とすれば $S(E)$ の Lebesgue 可測性が分かる。また

$$\iint_{S(E \cap \mathbb{D}(0, r))} \frac{4dudv}{(1 - |w|^2)^2} = \iint_{E \cap \mathbb{D}(0, r)} \frac{4|S'(z)|^2 dx dy}{(1 - |S(z)|^2)^2} = \iint_{E \cap \mathbb{D}(0, r)} \frac{4dx dy}{(1 - |z|^2)^2}$$

が成り立つことより、 $r \nearrow 1$ とすれば所与の等式が成り立つことが分かる。

双曲計量のように $\lambda(z)^2(dx^2 + dy^2)$ の形の計量を等角計量または共形計量 (conformal metric) と呼び、複素解析学では $ds = \lambda(z)|dz|$ のように弧長要素の形で表すことが多い。この場合、双曲計量は $\frac{2|dz|}{1-|z|^2}$ と表され $w = S(z)$ について

$$\frac{2|dz|}{1-|z|^2} = \frac{2|dw|}{1-|w|^2}$$

が成り立つ。

双曲計量の他に複素解析学ではよく使われる計量は \mathbb{C} 上の Euclid 計量 $|dz|$, Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の球面計量 $\frac{2|dz|}{1+|z|^2}$ である。 C^2 級の等角計量 $\rho(z)|dz|$ について Gauss 曲率は

$$(5.12) \quad K(\rho) = -\frac{\Delta \log \rho(z)}{\rho(z)^2}$$

により与えられる。

Problem 5.2. 双曲, Euclid, 球面の 3 つの計量に関し Gauss 曲率はそれぞれ $-1, 0, 1$ となることを計算により確かめよ。

5.3 双曲計量に関する曲線の長さ

微分幾何学で取り扱う曲線は C^1 級以上であるが、複素解析学において曲線と言う用語は単に区間上の連続写像と言う意味に用いる。ただし長さを取り扱うときは、曲線に長さ有限という仮定を置く。ここに曲線 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ が長さ有限であるとは $[a, b]$ の全ての分割 $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ にわたる

$$L_e(\gamma) = \int_{\gamma} |dz| := \sup_{\Delta} \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| < \infty$$

を満たすことである。 $L_e(\gamma)$ を γ の (Euclid 幾何に関する) 長さと言う。

\mathbb{D} 内の長さ有限な曲線 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$ について、双曲計量に関する長さは Stieltjes 積分に類似した

$$L_h(\gamma) = \int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{2|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|}{1-|\gamma(\xi_k)|^2}$$

で定義される。もう少し詳しく説明をしておこう。区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta: a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ について $|\Delta|$ は Δ の幅と呼ばれ $|\Delta| = \max_{k=1, \dots, n} \{t_k - t_{k-1}\}$ である。また $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$ は Δ に付随する分点の列、つまり $t_{k-1} \leq \zeta_k \leq t_k, k = 1, \dots, n$ を満たすとする。このとき $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{2|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|}{1-|\gamma(\xi_k)|^2} = L$ とは

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall |\Delta| < \delta \text{ and } \{\xi_k\} : \left| \sum_{k=1}^n \frac{2|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|}{1-|\gamma(\zeta_k)|^2} - L \right| < \varepsilon$$

が成り立つことを意味し、極限 L を積分 $L_h(\gamma) = \int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1-|z|^2}$ と表す。 γ は連続であり、さらに長さ有限であるから、Stieltjes 積分 $\int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1-|z|^2}$ が存在する。また定義より明らかに

$$2L_e(\gamma) \leq L_h(\gamma)$$

が成り立つ。

曲線 γ が C^1 級の場合

$$\int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} = \int_a^b \frac{2|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}$$

が成り立ち、実用上の計算は殆ど全て右辺を計算することによってなされる。念のためにこの等式を証明しておこう。

Proof. $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ とし、分割 $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ を各 k について平均値の定理より $\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) = (x'(\xi_k) + iy'(\eta_k))(t_k - t_{k-1})$ を満たす $\xi_k, \eta_k \in [t_{k-1}, t_k]$ を取ると、不等式

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b \frac{2|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} - \sum_{k=1}^n \frac{2|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|}{1-|\gamma(\zeta_k)|^2} \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{2|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} dt - \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{2|x'(\xi_k) + iy'(\eta_k)|}{1-|\gamma(\zeta_k)|^2} dt \right\} \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\{ \frac{2|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} - \frac{2|x'(\xi_k) + iy'(\eta_k)|}{1-|\gamma(\zeta_k)|^2} \right\} dt \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left| \frac{2|x'(t) + iy'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} - \frac{2|x'(\xi_k) + iy'(\eta_k)|}{1-|\gamma(\zeta_k)|^2} \right| dt \\ &= \sum_{k=1}^n 2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left| \frac{|x'(t) + iy'(t)|(1-|\gamma(\zeta_k)|^2) - |x'(\xi_k) + iy'(\eta_k)|(1-|\gamma(t)|^2)}{(1-|\gamma(t)|^2)(1-|\gamma(\zeta_k)|^2)} \right| dt \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで

$$\begin{aligned} & \left| |x'(t) + iy'(t)|(1-|\gamma(\zeta_k)|^2) - |x'(\xi_k) + iy'(\eta_k)|(1-|\gamma(t)|^2) \right| \\ &\leq \left| |x'(t) + iy'(t)| - |x'(\xi_k) + iy'(\eta_k)| \right| (1-|\gamma(\zeta_k)|^2) + |x'(\xi_k) + iy'(\eta_k)| \left| |\gamma(t)|^2 - |\gamma(\zeta_k)|^2 \right| \\ &\leq \{ |x'(t) - x'(\xi_k)| + |y'(t) - y'(\xi_k)| \} (1-|\gamma(\zeta_k)|^2) + 2|x'(\xi_k) + iy'(\eta_k)| |\gamma(t) - \gamma(\zeta_k)| \end{aligned}$$

ここで

$$r_0 = \max_{a \leq t \leq b} |\gamma(t)|, \quad M = \max_{a \leq t \leq b} |\gamma'(t)|$$

と置く。任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対し、 $\delta > 0$ を $|s - t| \leq \delta$ ならば

$$\begin{aligned} |x'(s) - x'(t)| &< \frac{(1-r_0^2)^2 \varepsilon}{8(b-a)} \\ |y'(s) - y'(t)| &< \frac{(1-r_0^2)^2 \varepsilon}{8(b-a)} \\ |\gamma(s) - \gamma(t)| &< \frac{(1-r_0^2)^2 \varepsilon}{16M(b-a)} \end{aligned}$$

が成り立つように取る。このとき分割 Δ が $|\Delta| < \delta$ を満たせば

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b \frac{2|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} - \sum_{k=1}^n \frac{2|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|}{1-|\gamma(\zeta_k)|^2} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n 2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left| \frac{|x'(t) + iy'(t)|(1-|\gamma(\zeta_k)|^2) - |x'(\xi_k) + iy'(\eta_k)|(1-|\gamma(t)|^2)}{(1-|\gamma(t)|^2)(1-|\gamma(\zeta_k)|^2)} \right| dt \\ &\leq \sum_{k=1}^n 2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{\varepsilon}{8(b-a)} + \frac{\varepsilon}{8(b-a)} + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \right) dt = \varepsilon \end{aligned}$$

を得る. □

さて双曲計量は $\text{Aut}(\mathbb{D})$ により不変であるから $\int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1-|z|^2}$ も不変, つまり

$$\int_{S(\gamma)} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} = \int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1-|z|^2}, \quad S \in \text{Aut}(\mathbb{D})$$

が成り立つことが期待される. γ が C^1 級の場合は

$$\int_{S(\gamma)} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} = \int_a^b \frac{2|S'(\gamma(t))||\gamma'(t)|}{1-|S(\gamma(t))|^2} dt = \int_a^b \frac{2|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} dt = \int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1-|z|^2}$$

より容易に示される. 長さ有限の場合は次のようにして示される. $|\gamma(t)|, |S(\gamma(t))| \leq r_0$, $a \leq t \leq b$ を満たす $r_0 \in (0, 1)$ を取る. そして $M = \max_{|z| \leq r} |S''(z)|$ と置き, L を γ の長さとする. $\varepsilon > 0$ が与えられたとし $\delta > 0$ を $|\Delta| < \delta$ ならば

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{2|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|}{1-|\gamma(\zeta_k)|^2} - \int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{2|S(\gamma(t_k)) - S(\gamma(t_{k-1}))|}{1-|S(\gamma(\zeta_k))|^2} - \int_{S(\gamma)} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つように取る. ここで必要ならばさらに小さく $\delta > 0$ を取り直し $|s - t| < \delta$ ならば $|\gamma(s) - \gamma(t)| < \frac{(1-r_0^2)\varepsilon}{6ML}$ が成り立つようにする. このとき

$$\begin{aligned} & \left| |S(\gamma(t_k)) - S(\gamma(t_{k-1}))| - |S'(\gamma(\zeta_k))||\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|| \right| \\ & \leq |S(\gamma(t_k)) - S(\gamma(t_{k-1})) - S'(\gamma(\zeta_k))(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}))| \\ & = |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \left| \int_0^1 \{S'((1-\theta)\gamma(t_{k-1}) + \theta\gamma(t_k)) - S'(\gamma(\zeta_k))\} d\theta \right| \\ & \leq M|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \int_0^1 |(1-\theta)\gamma(t_{k-1}) + \theta\gamma(t_k) - \gamma(\zeta_k)| d\theta \\ & \leq M|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \frac{(1-r_0^2)\varepsilon}{6ML} = |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \frac{(1-r_0^2)\varepsilon}{6L} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n \frac{2|S(\gamma(t_k)) - S(\gamma(t_{k-1}))|}{1-|S(\gamma(\zeta_k))|^2} - \sum_{k=1}^n \frac{2|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|}{1-|\gamma(\zeta_k)|^2} \right| \\ & = \left| \sum_{k=1}^n \frac{2|S(\gamma(t_k)) - S(\gamma(t_{k-1}))|}{1-|S(\gamma(\zeta_k))|^2} - \sum_{k=1}^n \frac{2|S'(\gamma(\zeta_k))||\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|}{1-|S(\gamma(\zeta_k))|^2} \right| \\ & \leq \sum_{k=1}^n \frac{2(1-r^2)\varepsilon|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|}{6L(1-|S(\gamma(\zeta_k))|^2)} < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

が成り立つ. よって

$$\left| \int_{S(\gamma)} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} - \int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} \right| < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

が成り立つ.

5.4 双曲計量に関する最短曲線

それでは任意の2点 $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$, $z_0 \neq z_1$ について z_0 と z_1 を結ぶ (つまり始点が z_0 終点が z_1 である) 双曲計量に関する最短曲線を求めよう. まず $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ を

$$\varphi(z) = e^{-i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

と置く. ただし $r > 0$ と $\theta \in \mathbb{R}$ は

$$re^{i\theta} = e^{-i\theta} \frac{z_1 - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_1}$$

を満たすとする. このとき φ により z_0 は 0 へ z_1 は $r \in (0, 1)$ へと写像される. 双曲計量は $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ に関し不変であったから, z_0 と z_1 を結ぶ曲線の像は 0 と $r \in (0, 1)$ を結ぶ曲線であり, 2曲線の長さは等しい. 従って z_0, z_1 の代わりに 0 と $r \in (0, 1)$ を結ぶ双曲計量に関する最短曲線を求めれば十分である.

Proposition 5.3. 長さ有限な曲線 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$, $\gamma(t) = u(t) + iv(t)$ で $\gamma(a) = 0$, $\gamma(b) = r$ を満たすものについて

$$\int_{\gamma} \frac{|dz|}{1 - |z|^2} \geq \int_a^b \frac{du(t)}{1 - u(t)^2} = \log \frac{1+r}{1-r}$$

が成り立つ.

Proof. $[a, b]$ の任意の分割 $\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ と付随する分点の列 $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$ について $|\gamma(t)| \geq |u(t)|$ より

$$\sum_{k=1}^n \frac{2|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|}{1 - |\gamma(\zeta_k)|^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{2|u(t_k) - u(t_{k-1})|}{1 - |u(\zeta_k)|^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{2(u(t_k) - u(t_{k-1}))}{1 - |u(\zeta_k)|^2}$$

が成り立つ. よって $|\Delta| \rightarrow 0$ とすれば

$$\int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1 - |z|^2} \geq \int_a^b \frac{2du(t)}{1 - u(t)^2}$$

が成り立つ. ただし $\gamma(t)$ が連続で長さ有限であるから $u(t)$ は連続で有界変動関数であり, 上式の右辺は $u(t)$ に関する連続関数 $\frac{2}{1-u(t)^2}$ の Stieltjes 積分である. $u(t)$ が C^1 級ならば, 上式の右辺が $\log \frac{1+r}{1-r}$ に一致することは容易に示されるが, Stieltjes 積分に関しても同じ等式が成り立つことを以下のように示すことができる.

任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を $|s - t| \leq \delta$ ならば

$$\left| \frac{2}{1-u(s)^2} - \frac{2}{1-u(t)^2} \right| < \frac{\varepsilon}{2(V_a^b + 1)}$$

が成り立つように取る. ただし V_a^b は $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ の総変動量である. また分割 $\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ と付随する分点の列 $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$ を $|\Delta| < \delta$ かつ

$$(5.13) \quad \left| \int_a^b \frac{2du(t)}{1 - u(t)^2} - \sum_{k=1}^n \frac{2(u(t_k) - u(t_{k-1}))}{1 - |u(\zeta_k)|^2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つように取る. ここで

$$\tilde{u}(t) = \frac{t_k - t}{t_k - t_{k-1}} u(t_{k-1}) + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} u(t_k), \quad \text{for } t_{k-1} \leq t \leq t_k$$

と置く. このとき積分の平均値定理から, 各 k について

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{2d\tilde{u}(t)}{1-\tilde{u}(t)^2} = \frac{u(t_k) - u(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{2d}{1-\tilde{u}(t)^2} = \frac{u(t_k) - u(t_{k-1})}{1-\tilde{u}(\xi_k)^2}$$

を満たす $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ が存在する. さらに $\tilde{u}(\xi_k)$ は $u(t_{k-1})$ と $u(t_k)$ の間にあるので, 中間値の定理より $\tilde{u}(\xi_k) = u(\eta_k)$ を満たす $\eta_k \in [t_{k-1}, t_k]$ が存在する. よって

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{2d\tilde{u}(t)}{1-\tilde{u}(t)^2} = \frac{u(t_k) - u(t_{k-1})}{1-\tilde{u}(\eta_k)^2}$$

である. これらを組み合わせて

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n \frac{2(u(t_k) - u(t_{k-1}))}{1-|u(\zeta_k)|^2} - \int_a^b \frac{2d\tilde{u}(t)}{1-\tilde{u}(t)^2} \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2(u(t_k) - u(t_{k-1}))}{1-|u(\zeta_k)|^2} - \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{2d\tilde{u}(t)}{1-\tilde{u}(t)^2} \right\} \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2}{1-u(\zeta_k)^2} - \frac{2}{1-u(\eta_k)^2} \right\} (u(t_k) - u(t_{k-1})) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{2}{1-u(\zeta_k)^2} - \frac{2}{1-u(\eta_k)^2} \right| |u(t_k) - u(t_{k-1})| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(V_a^b + 1)} \sum_{k=1}^n |u(t_k) - u(t_{k-1})| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

この不等式と (5.13) を合わせて

$$\left| \int_a^b \frac{2du(t)}{1-u(t)^2} - \int_a^b \frac{2d\tilde{u}(t)}{1-\tilde{u}(t)^2} \right| < \varepsilon$$

を得る. しかしながら $\tilde{u}(t)$ は区分的に C^1 級であり, 各 k について

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{2d\tilde{u}(t)}{1-\tilde{u}(t)^2} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{2\tilde{u}'(t)dt}{1-\tilde{u}(t)^2} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{d}{dt} \left\{ \log \frac{1-\tilde{u}(t)}{1+\tilde{u}(t)} \right\} dt = \log \frac{1-\tilde{u}(t_k)}{1+\tilde{u}(t_k)} - \log \frac{1-\tilde{u}(t_{k-1})}{1+\tilde{u}(t_{k-1})}$$

よってこれらを辺々加えて $\tilde{u}(a) = u(a) = 0$, $\tilde{u}(b) = u(b) = r$ より

$$\int_a^b \frac{2d\tilde{u}(t)}{1-\tilde{u}(t)^2} = \log \frac{1-\tilde{u}(b)}{1+\tilde{u}(b)} - \log \frac{1-\tilde{u}(a)}{1+\tilde{u}(a)} = \log \frac{1+r}{1-r}$$

を得る. □

この命題を用いると次が容易に分かる.

Lemma 5.4. 長さ有限な曲線 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$ について $\gamma(a) = z_0$, $\gamma(b) = z_1$ ならば

$$(5.14) \quad \int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} \geq \log \frac{1 + \left| \frac{z_1 - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_1} \right|}{1 - \left| \frac{z_1 - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_1} \right|}$$

が成り立つ.

Theorem 5.5. 長さ有限な曲線 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$ が $\gamma(a) = 0, \gamma(b) = r \in (0, 1)$ を満たせば

$$L_h(\gamma) \geq \log \frac{1+r}{1-r}$$

が成り立つ。また等号が成り立つ必要十分条件は $\gamma([a, b]) = [0, r]$ であり $\gamma(t)$ が t について非減少であること。

Proof. 前半は命題 5.3 において既に示した。また $\gamma([a, b]) = [0, r]$ で非減少ならば $L_h(\gamma) = \log \frac{1+r}{1-r}$ が成り立つことも示している。

それでは $L_h(\gamma) = \log \frac{1+r}{1-r}$ が成り立つと仮定する。まずは $\gamma([a, b]) = [0, r]$ を示そう。 $c \in (a, b)$ とし、部分曲線を $\gamma_1 = \gamma|_{[a, c]}, \gamma_2 = \gamma|_{[c, b]}$ と置くと不等式 $\left| \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z} \right| \geq \frac{|z|-|z_0|}{1-|z_0||z|}$ より

$$\begin{aligned} \log \frac{1+r}{1-r} &= L_h(\gamma) = L_h(\gamma_1) + L_h(\gamma_2) \\ &\geq \log \frac{1+|\gamma(c)|}{1-|\gamma(c)|} + \log \frac{1 + \left| \frac{r-\gamma(c)}{1-r\gamma(c)} \right|}{1 - \left| \frac{r-\gamma(c)}{1-r\gamma(c)} \right|} \\ &\geq \log \frac{1+|\gamma(c)|}{1-|\gamma(c)|} + \log \frac{1 + \frac{r-|\gamma(c)|}{1-r|\gamma(c)|}}{1 - \frac{r-|\gamma(c)|}{1-r|\gamma(c)|}} \\ &= \log \frac{1+|\gamma(c)|}{1-|\gamma(c)|} + \log \frac{1-r|\gamma(c)| + r - |\gamma(c)|}{1-r|\gamma(c)| - r + |\gamma(c)|} = \log \frac{1+r}{1-r} \end{aligned}$$

を得る。これは不等式

$$\left| \frac{r-\gamma(c)}{1-r\gamma(c)} \right| \geq \frac{r-|\gamma(c)|}{1-r|\gamma(c)|}$$

において等号が成り立つことを示している。そこで、この不等式の等号成立条件を考察しよう。まず $r < |\gamma(c)|$ ならば右辺は負であるから等号は成立しない。また $r \geq |\gamma(c)|$ とすると

$$\begin{aligned} \left| \frac{r-\gamma(c)}{1-r\gamma(c)} \right| \geq \frac{r-|\gamma(c)|}{1-r|\gamma(c)|} &\iff 1 - \left| \frac{r-\gamma(c)}{1-r\gamma(c)} \right|^2 \leq 1 - \left(\frac{r-|\gamma(c)|}{1-r|\gamma(c)|} \right)^2 \\ &\iff \frac{(1-r^2)(1-|\gamma(c)|^2)}{|1-r\gamma(c)|^2} \leq \frac{(1-r^2)(1-|\gamma(c)|^2)}{(1-r|\gamma(c)|)^2} \\ &\iff 1-r|\gamma(c)| \leq |1-r\gamma(c)| \end{aligned}$$

であるから等号条件は $0 \leq \gamma(c) \leq 1$ である。 $r \geq |\gamma(c)|$ と合わせ $0 \leq \gamma(c) \leq r$ を得る。これで $\gamma([a, b]) \subset [0, r]$ が示された。 $[0, r] \subset \gamma([a, b])$ についてはこれと中間値の定理より従う。

最後に $\gamma(t)$ が t について非減少であることを背理法で示そう。 $\gamma(c) > \gamma(d)$ を満たす $a \leq c < d \leq b$ が存在すれば中間値の定理より $\gamma(c) = \gamma(d')$ となる $d' \in (d, b)$ が取れる。このとき $\gamma_1 = \gamma|_{[a, c]}, \gamma_2 = \gamma|_{[c, d]}, \gamma_3 = \gamma|_{[d, d']}, \gamma_4 = \gamma|_{[d', b]}$ と置く。このとき γ_1 の終点と γ_4 の始点は一致するのでつないで出来る曲線を $\gamma_1 + \gamma_4$ と表せば、 $\gamma_1 + \gamma_4$ も $0, r$ を結ぶ曲線であり

$$\log \frac{1+r}{1-r} = L_h(\gamma) = L_h(\gamma_1 + \gamma_4) + L_h(\gamma_2) + L_h(\gamma_3) \geq \log \frac{1+r}{1-r} + \log \frac{1 + \frac{\gamma(c)-\gamma(d)}{1-\gamma(c)\gamma(d)}}{1 - \frac{\gamma(c)-\gamma(d)}{1-\gamma(c)\gamma(d)}} > \log \frac{1+r}{1-r}$$

となり矛盾を生じる。 □

$z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ について

$$d_h(z_1, z_2) = \inf\{L_h(\gamma) : \gamma \text{ は } z_1, z_2 \text{ を結ぶ } \mathbb{D} \text{ 内の長さ有限な曲線}\}$$

と置く. $S(z) = e^{-i\alpha} \frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1 z}$, $\alpha = \arg \frac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1 z_2}$ により $S(z_1) = 0$, $S(z_2) = \delta(z_1, z_2) \in [0, 1)$ に写像される. また 0 と $\delta(z_1, z_2)$ を結ぶ線分の S に関する逆像は z_1 と z_2 を結び $\partial\mathbb{D}$ と直交する円弧の \mathbb{D} に含まれる方である. よって次の定理が得られた.

Theorem 5.6. $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ について

$$d_h(z_1, z_2) = \log \frac{1 + \delta(z_1, z_2)}{1 - \delta(z_1, z_2)}$$

であり, z_1, z_2 を結び $\partial\mathbb{D}$ と直交する \mathbb{D} 内の円弧が最短距離を与える曲線である.

\mathbb{D} における双曲計量 $\frac{2|dw|}{1-|w|^2}$ を $w = f(z) = \frac{i-z}{i+z}$ により上半平面 $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ に引き戻すと \mathbb{H} の双曲計量

$$\frac{2|dw|}{1-|w|^2} = \frac{\left| \frac{-2i}{(i+z)^2} \right| |dz|}{1 - \left| \frac{i-z}{i+z} \right|} = \frac{|dz|}{y}$$

を得る. この計量に関する測地線 (= 最短距離を与える長さ有限な曲線) は実軸と直交する \mathbb{H} 内の円弧または実軸と直交する \mathbb{H} 内の半直線である.

次の不等式の片側は, 既に定理 5.5 の証明中で示し使用したが, ここでは別の方法で証明しておこう.

Theorem 5.7. $z, z_0 \in \mathbb{D}$ について

$$(5.15) \quad \frac{||z_0| - |z||}{1 - |z_0||z|} \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| \leq \frac{|z_0| + |z|}{1 + |z_0||z|}$$

が成り立つ.

幾何学的な証明. $z_0 = 0$ のとき不等式は自明であるから $z_0 \neq 0$ とする. $\varphi(z) = \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$ と置くと

$$\varphi\left(\frac{z_0}{|z_0|} t\right) = \frac{\frac{z_0}{|z_0|} t - z_0}{1 - \bar{z}_0 \frac{z_0}{|z_0|} t} = \frac{z_0}{|z_0|} \frac{t - |z_0|}{1 - |z_0| t}$$

であり, $\varphi\left(-\frac{z_0}{|z_0|}\right) = -\frac{z_0}{|z_0|}$, $\varphi\left(\frac{z_0}{|z_0|}\right) = \frac{z_0}{|z_0|}$ であるから, φ は線分 $\ell := \left[-\frac{z_0}{|z_0|}, \frac{z_0}{|z_0|}\right]$ を自身の上に写像される. このとき $r \in (0, 1)$ について $\partial\mathbb{D}(0, r)$ は ℓ と直交する円であるから $\varphi(\partial\mathbb{D}(0, r))$ は $\varphi(\ell) = \ell$ と直交する円である. 特に, $\varphi(\partial\mathbb{D}(0, r))$ は

$$\varphi\left(-\frac{z_0}{|z_0|} r\right) = -\frac{z_0}{|z_0|} \frac{r + |z_0|}{1 + |z_0| r}, \quad \varphi\left(\frac{z_0}{|z_0|} r\right) = \frac{z_0}{|z_0|} \frac{r - |z_0|}{1 - |z_0| r}$$

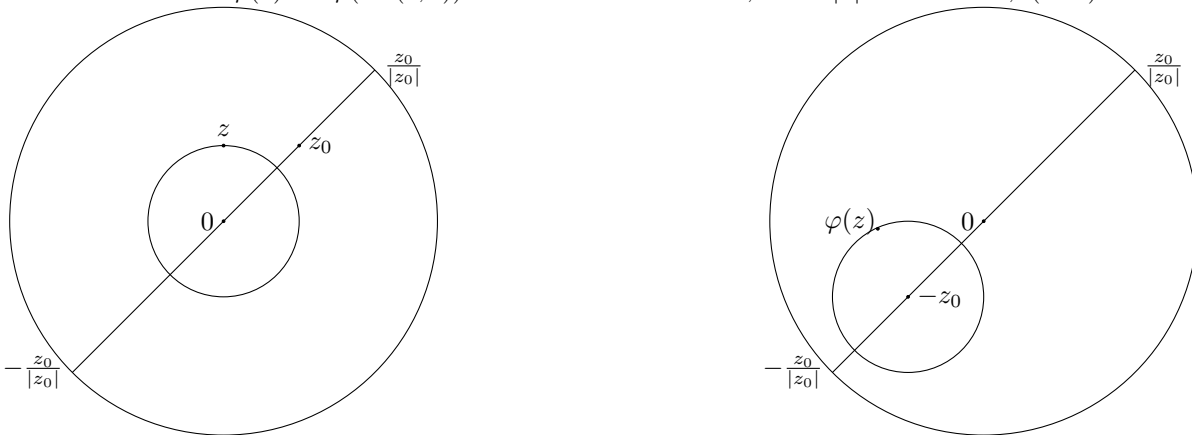
を直径の両端に持つ. $z \in \mathbb{D}$ について $r = |z|$ と置く. $r < |z_0|$ ならばこの直径は

$$\left[-\frac{z_0}{|z_0|} \frac{r + |z_0|}{1 + |z_0| r}, -\frac{z_0}{|z_0|} \frac{|z_0| - r}{1 - |z_0| r} \right]$$

となり, $\varphi(\partial\mathbb{D}(0, r))$ は, その内側に原点を含まないので

$$w \in \varphi(\partial\mathbb{D}(0, r)) \implies \frac{|z_0| - r}{1 - |z_0| r} \leq |w| \leq \frac{r + |z_0|}{1 + |z_0| r}$$

が成り立つ. $w = \varphi(z) \in \varphi(\partial\mathbb{D}(0, r))$ にこの不等式を適用し, $r = |z|$ を用いれば, (5.15) を得る.

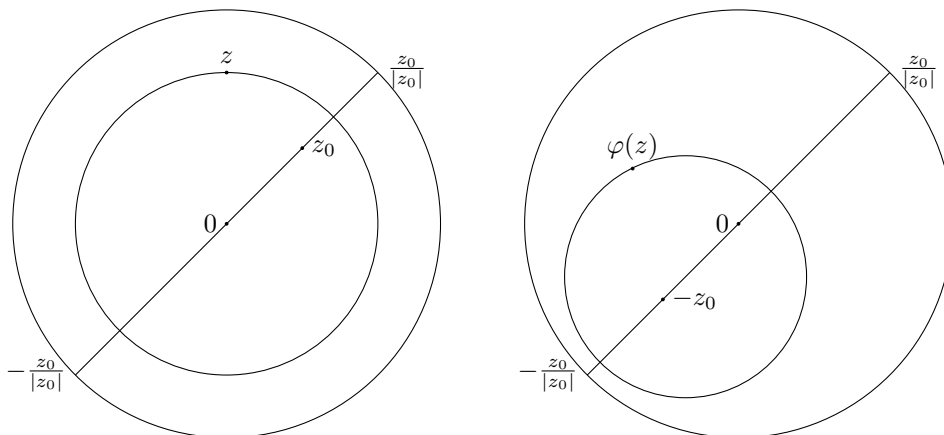


$|z| = r \geq |z_0|$ の場合直径は

$$\left[-\frac{z_0}{|z_0|} \frac{r + |z_0|}{1 + |z_0|r}, \frac{z_0}{|z_0|} \frac{r - |z_0|}{1 - |z_0|r} \right]$$

となるので, 原点は円 $\varphi(\partial\mathbb{D}(0, r))$ の内側および周上にある. この場合は

$$\frac{r - |z_0|}{1 - |z_0|r} \leq |\varphi(z)| \leq \frac{r + |z_0|}{1 + |z_0|r}$$



が成り立つ. □

(5.15) は直接的な計算により示すことが出来る. その前に以下の事実を証明しておこう.

Lemma 5.8. $z_0 \in \mathbb{D}$ と $\rho \in (0, 1)$ について

$$\delta(z, z_0) = \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| = \rho \iff \left| z - \frac{(1 - \rho^2)z_0}{1 - \rho^2|z_0|^2} \right| = \frac{(1 - |z_0|^2)\rho}{1 - \rho^2|z_0|^2}$$

つまり $\delta(z, z_0) = \rho$ を満たす z の集合は円であり, 中心 $\frac{(1 - \rho^2)z_0}{1 - \rho^2|z_0|^2}$ であり, 半径 $\frac{(1 - |z_0|^2)\rho}{1 - \rho^2|z_0|^2}$ である.

Proof. 直接的な計算により

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| = \rho &\iff |z - z_0|^2 = \rho^2 |1 - \bar{z}_0 z| \\
 &\iff |z|^2 - (\bar{z}_0 z + z_0 \bar{z}) + |z_0|^2 = \rho^2 \{1 - (\bar{z}_0 z + z_0 \bar{z}) + |z_0|^2 |z|^2\} \\
 &\iff (1 - \rho^2 |z_0|^2) |z|^2 - (1 - \rho^2)(\bar{z}_0 z + z_0 \bar{z}) = \rho^2 - |z_0|^2 \\
 &\iff |z|^2 - \frac{1 - \rho^2}{(1 - \rho^2 |z_0|^2)} (\bar{z}_0 z + z_0 \bar{z}) = \frac{\rho^2 - |z_0|^2}{1 - \rho^2 |z_0|^2} \\
 &\iff \left| z - \frac{1 - \rho^2}{(1 - \rho^2 |z_0|^2)} z_0 \right|^2 = \frac{\rho^2 - |z_0|^2}{1 - \rho^2 |z_0|^2} + \frac{(1 - \rho^2)^2}{(1 - \rho^2 |z_0|^2)^2} \\
 &\iff \left| z - \frac{1 - \rho^2}{(1 - \rho^2 |z_0|^2)} z_0 \right| = \frac{(1 - |z_0|^2)\rho}{1 - \rho^2 |z_0|^2}
 \end{aligned}$$

□

定理 5.7 の直接的な証明. 上の補題において z_0 の代わりに $-z_0$ を用いて

$$|\delta(z, -z_0)| = \rho \iff \left| z + \frac{1 - \rho^2}{(1 - \rho^2 |z_0|^2)} z_0 \right| = \frac{(1 - |z_0|^2)\rho}{1 - \rho^2 |z_0|^2}$$

z の代わりに $\varphi(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$ を代入すると

$$|\delta(\varphi(z), -z_0)| = \rho \iff \left| \varphi(z) + \frac{1 - \rho^2}{(1 - \rho^2 |z_0|^2)} z_0 \right| = \frac{(1 - |z_0|^2)\rho}{1 - \rho^2 |z_0|^2}$$

ここで $-z_0 = \varphi(0)$ ゆえ

$$\delta(\varphi(z), -z_0) = \delta(\varphi(z), \varphi(0)) = \delta(z, 0) = |z|$$

であるから

$$|z| = \rho \iff \left| \varphi(z) + \frac{1 - \rho^2}{(1 - \rho^2 |z_0|^2)} z_0 \right| = \frac{(1 - |z_0|^2)\rho}{1 - \rho^2 |z_0|^2}$$

を得る. 幾何学的な証明のときと同じ考察により

$$\left| \varphi(z) + \frac{1 - \rho^2}{(1 - \rho^2 |z_0|^2)} z_0 \right| = \frac{(1 - |z_0|^2)\rho}{1 - \rho^2 |z_0|^2} \implies \frac{||z_0| - \rho|}{1 - |z_0|\rho} \leq |\varphi(z)| \leq \frac{|z_0| + \rho}{1 + |z_0|\rho}$$

が成り立つことが分かる. $\rho = |z|$ であるから, これで定理 5.7 が示されたことになる.

□

第 6 章

基本群と被覆空間

この章では基本群と被覆空間について解説する。ただし基本群と被覆空間に関する結果の中でほんの一部、後の章で必要になる事項を説明するだけである。理論において述べるべき標準的な事項の多くを省略せざるを得なかったこれらについては、松本 [35] が参考になるであろう。また一般位相に関する標準的な教科書で大変大部であるが Munkres [22] も参考になる。ただしこの本では被覆空間の導入時に、道連結性、局所道連結性、Hausdorff 性を仮定せず、話題が進むに連れ仮定を追加し叙述を進める方式なので注意が必要である。

6.1 道のホモトピー

X を位相空間とする。閉区間 $I = [0, 1]$ から X への連続写像のことを (X 内の) 道 (path) と呼んだことを思い出しておこう。暫くの間、道を文字 α, β, γ などを用いて表す。道 α について $a = \alpha(0)$ を始点、 $b = \alpha(1)$ を終点と言ひ、 α を a と b を結ぶ道、または a から b への道と言ったりする。記号 $\Gamma(X, a, b)$ で、 a から b への X の道の全体とする。

Definition 6.1. 始点と終点を共有する 2 つの道 $\alpha, \beta \in \Gamma(X, a, b)$ が *path homotopic* であるとは、 α から β への *path homotopy* と呼ばれる連続写像 $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ で

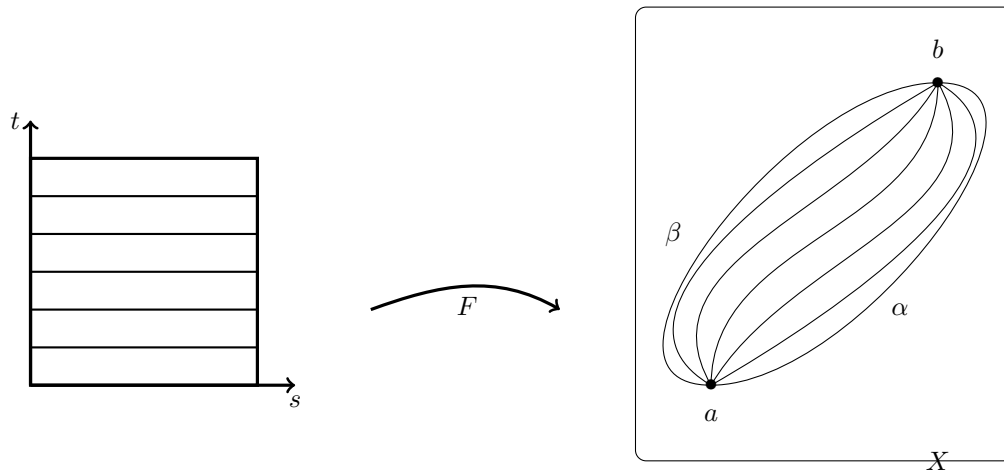
$$(6.1) \quad F(0, s) = a \quad \text{and} \quad F(1, s) = b, \quad 0 \leq s \leq 1$$

かつ

$$(6.2) \quad F(t, 0) = \alpha(s) \quad \text{and} \quad F(t, 1) = \beta(s), \quad 0 \leq s \leq 1$$

を満たすものが存在するときをいう。道 α と β が *path homotopic* のとき $\alpha \sim_p \beta$ と表す。

(6.2) は α から β まで連続的に変形が可能であることを意味し、(6.1) は変形の際に始点と終点が固定されたままであることを意味する。



Theorem 6.2. 関係 \sim_p は同値関係である. つまり

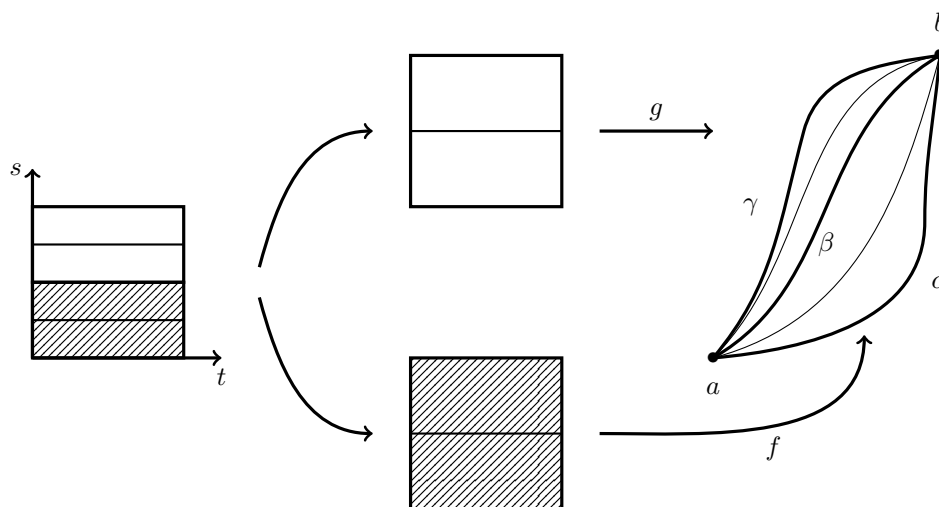
- (i) $\alpha \sim_p \alpha$.
- (ii) $\alpha \simeq_p \beta \implies \beta \sim_p \alpha$.
- (iii) $\alpha \sim_p \beta, \beta \sim_p \gamma \implies \alpha \sim_p \gamma$.

が成り立つ.

Proof. (i) $f(t, s) = \alpha(t)$, $(t, s) \in I \times I$ と置けば, α から α への path homotopy である. よって $\alpha \sim_p \alpha$ が成り立つ. (ii) $\alpha \simeq_p \beta$ ならば α から β への path homotopy $f(t, s)$ が存在する. このとき $f(t, 1-s)$ が β から α への path homotopy を与える. よって $\beta \sim_p \alpha$ が成り立つ.. (iii) α から β への path homotopy を $f(t, s)$ とし, β から γ への path homotopy を $g(t, s)$ とすれば

$$F(t, s) = \begin{cases} f(t, 2s), & (t, s) \in [0, 1] \times [0, 1/2] \\ g(t, 2s - 1), & (s, t) \in [0, 1] \times (1/2, 1] \end{cases}$$

が α から γ への path homotopy を与える.



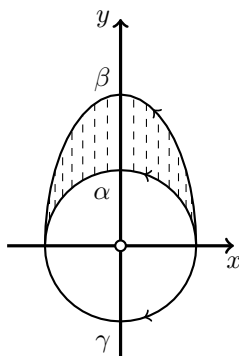
□

Example 6.3 (straight-line homotopy). \mathbb{R}^d 内の凸集合内の始点と終点を共有する 2 つの道 α, β path homotopic である.

$$(6.3) \quad F(t, s) = (1 - s)\alpha(t) + s\beta(t), \quad (t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

が α から β への homotopy を与える. これを α から β への straight-line homotopy と呼ぶ.

Example 6.4. X を punctured plane $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ とする. このとき $\alpha(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s)$, $\beta(s) = (\cos \pi s, 2 \sin \pi s)$, $0 \leq s \leq 1$ と置くと, X 内の道であり, $\alpha \sim_p \beta$ が成り立つ. 実際両者の straight-line homotopy が path homotopy を与える. しかしながら $\gamma(s) = (\cos \pi s, -\sin \pi s)$, $0 \leq s \leq 1$ は α と (勿論 β と) homotopic ではない. これは直観的には頷けるであろうが, 今の段階では証明はそれほど容易ではない. 証明は被覆空間と道のホモトピーの持ち上げの学習が済めば簡単である. また $X = \mathbb{R}^2$ の場合は α, β, γ はどの 2 つも path-homotopic である. このように path-homotopy を考える場合, どの空間の中で考えるかによって大きな違いがあるので注意が必要である.



例えば道 α の始点と道 β の終点が一致していれば α と β の積と呼ばれる 2 つの道をつないで出来る道を定義することが可能である. 道についてはこれ以外にも色々な演算 = 操作を行うことが可能である. このような道に関する操作と path homotopy との関係を見ていこう.

道 $\tilde{\alpha}$ が道 α のパラメータの取り換えであるとは, 連続で非減少な函数 $\sigma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ で $\sigma(0) = 0$, $\sigma(1) = 1$ を満たすものにより $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(\sigma(t))$, $t \in [0, 1]$ と表現されるときを云う.

Theorem 6.5. $\tilde{\alpha}$ が α のパラメータの取り換えならば $\alpha \sim_p \tilde{\alpha}$.

Proof. パラメータの取り換え写像 $\sigma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ を取り

$$f(t, s) = \alpha((1 - s)t + s\sigma(t)), \quad (t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

と置けば, α から $\tilde{\alpha}$ への path homotopy である. □

道 $\alpha \in \Gamma(X, a, b)$ について写像 $\alpha^{-1} \in \Gamma(X, b, a)$ を

$$\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t), \quad t \in [0, 1]$$

と置けば, α^{-1} は α の終点と始点を結ぶ道である. $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$ が成り立つことは容易に分かる. また 2 つの道 $\alpha \in \Gamma(X, a, b)$, $\beta \in \Gamma(X, b, c)$ について道 $\alpha\beta \in \Gamma(X, a, c)$ を

$$\alpha \cdot \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

とおく. このとき

$$(6.4) \quad (\alpha \cdot \beta)^{-1} = \beta^{-1} \cdot \alpha^{-1}$$

が成り立つ. 実際

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot \beta)^{-1}(t) &= (\alpha \cdot \beta)(1-t) = \begin{cases} \alpha(2(1-t)), & 0 \leq 1-t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2(1-t)-1), & \frac{1}{2} \leq 1-t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \beta(1-2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2(1-t)), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned} \beta^{-1} \cdot \alpha^{-1}(t) &= \begin{cases} \beta^{-1}(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha^{-1}(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \beta(1-2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2-2t), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

であるから一致する.

点 $a \in X$ について a に留まって動かない道を 1_a と置く. つまり

$$1_a(t) = a, \quad t \in [0, 1]$$

により $1_a \in \Gamma(X, a, a)$ を定義する.

Theorem 6.6. 道 $\alpha \in \Gamma(X, a, b)$ について次が成り立つ.

- (i) $\alpha \cdot \alpha^{-1} \sim_p 1_a, \alpha^{-1} \cdot \alpha \sim_p 1_b.$
- (ii) $1_a \cdot \alpha \sim_p \alpha, \alpha \cdot 1_b \sim_p \alpha.$

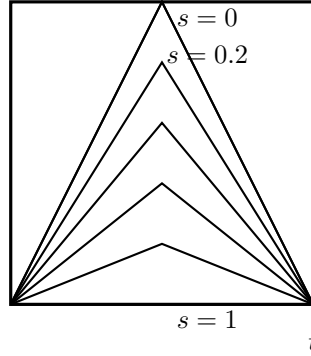
Proof. (i)

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \alpha^{-1}(t) &= \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \bar{\alpha}(2t-1), & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2(1-t)), & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

であるから

$$f(t, s) = \begin{cases} \alpha(2t(1-s)), & (t, s) \in [0, 1/2] \times [0, 1] \\ \alpha(2(1-t)(1-s)), & (t, s) \in (1/2, 1] \times [0, 1] \end{cases}$$

と置けば $\alpha \cdot \alpha^{-1}$ から 1_a への変形を与えるので $\alpha \cdot \alpha^{-1} \sim_p 1_a$ が成り立つ.



また α の代わりに α^{-1} に適用すれば $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$ より $\alpha^{-1}\alpha = \alpha^{-1}(\alpha^{-1})^{-1} \sim_p 1_b$ が従う.
(ii) $1_a\alpha$ は α のパラメータの取り替えである. 従って $1_a\alpha \sim_p \alpha$ である. 詳しく述べれば

$$1_a \cdot \alpha = \begin{cases} \alpha(0), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

であるから $0 \leq s \leq 1$ について

$$f(t, s) = \begin{cases} \alpha(st), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \alpha((1-s)(2t-1) + st), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

とおけば, $1_a \cdot \alpha$ から α への変形を与える. 同様に $0 \leq s \leq 1$ について

$$g(t, s) = \begin{cases} \alpha(2(1-t)s + ts), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \alpha((1-t) + ts), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

と置けば,

$$\alpha \cdot 1_b(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

から α への変形を与える. よって $\alpha \cdot 1_b \sim_p \alpha$ である. □

Theorem 6.7. $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma(X, a, b)$ $\beta, \beta_1, \beta_2 \in \Gamma(X, b, c)$, $\gamma \in \Gamma(X, c, d)$ について

- (i) $\alpha_1 \sim_p \alpha_2$, $\beta_1 \sim_p \beta_2$ ならば $\alpha_1 \cdot \beta_1 \sim_p \alpha_2 \cdot \beta_2$ が成り立つ.
- (ii) $\alpha_1 \sim_p \alpha_2$ ならば $\alpha_1^{-1} \sim_p \alpha_2^{-1}$.
- (iii) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \sim_p \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ が成り立つ.

Proof. (i) α_1 から α_2 への変形を f , β_1 から β_2 への変形を g とする. このとき

$$h(t, s) = \begin{cases} f(2t, s), & (t, s) \in [0, 1/2] \times [0, 1] \\ g(2t - 1, s), & (t, s) \in (1/2, 1] \times [0, 1] \end{cases}$$

と置けば, $\alpha_1 \cdot \beta_1$ から $\alpha_2 \cdot \beta_2$ への変形を与える.

- (ii) α_1 から α_2 への変形を f とすれば $f(1-t, s)$ が α_1^{-1} から α_2^{-1} への変形を与える.

(iii)

$$\begin{aligned}(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma(t) &= \begin{cases} (\alpha \cdot \beta)(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(4t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \beta(4t-1), & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)(t) &= \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (\beta \cdot \gamma)(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(4t-2), & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \gamma(4t-3), & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}\end{aligned}$$

である。従って $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ (は $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ のパラメータの取り替えであるから互いにホモトピックである。または具体的に連続変形を次のように構成することも出来る。

$s = 0$ のとき $[0, \frac{1}{4}]$ $s = 1$ のとき $[0, \frac{1}{2}]$ となるように区間 $[0, \frac{1-s}{4} + \frac{s}{2}] = [0, \frac{s+1}{4}]$ を考え、この範囲を t が動くときに値が $[0, 1]$ を動く函数は

$$\frac{t-0}{\frac{1+s}{4}-0} = \frac{4t}{1+s}.$$

$s = 0$ のとき $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ $s = 1$ のとき $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ となるように区間 $[\frac{1-s}{4} + \frac{s}{2}, \frac{1-s}{2} + \frac{3s}{4}] = [\frac{s+1}{4}, \frac{2+s}{4}]$ を考え、この範囲を t が動くときに値が $[0, 1]$ を動く函数は

$$\frac{t - \frac{1+s}{4}}{\frac{2+s}{4} - \frac{s+1}{4}} = 4t - (1+s).$$

$s = 0$ のとき $[\frac{1}{2}, 1]$ $s = 1$ のとき $[\frac{3}{4}, 1]$ となるように区間 $[\frac{1-s}{2} + 1 \cdot s, 1 \cdot (1-s) + 1 \cdot s] = [\frac{2+s}{4}, 1]$ を考え、この範囲を t が動くときに値が $[0, 1]$ を動く函数は

$$\frac{t - \frac{2+s}{4}}{1 - \frac{2+s}{4}} = \frac{4t - (2+s)}{2-s}.$$

以上より

$$f(t, s) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{4t}{1+s}\right), & 0 \leq t \leq \frac{1+s}{4} \\ \beta(4t - (1+s)), & \frac{1+s}{4} \leq t \leq \frac{2+s}{4} \\ \gamma\left(\frac{4t - (s+2)}{2-s}\right), & \frac{2+s}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

と置けば $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ から $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ への変形を与える。 □

6.2 基本群

始点と終点一致する道のことを閉道 (closed path) またはループ (loop) という。 $a \in X$ を固定し、 a を端点とする閉道の全体は $\Gamma(X, a, a)$ と表されるが、これを $\Gamma(X, a)$ と書くことにする。

さて $\Gamma(X, a)$ の任意の 2 元 α, β にはつねに積 $\alpha \cdot \beta$ が定義できるが $\Gamma(X, a)$ はこの積に関して群になるとは限らない. 例えば単位元 γ が存在すると仮定すれば, 任意の $\alpha \in \Gamma(X, a)$ について $\alpha \cdot \gamma = \alpha$ を満たすはずである. これより $\alpha(t) = \alpha(2t)$ が $0 \leq t \leq 1/2$ で成り立つことになる. 従って任意の $t \in [0, 1]$ について

$$\alpha(t) = \alpha(2^{-1}t) = \alpha(2^{-2}t) = \cdots = \alpha(2^{-n}t) \rightarrow \alpha(0) = a$$

より $\alpha = 1_a$ である. よって $\Gamma(X, a)$ が右単位元を持つ空間 X について $\Gamma(X, a) = \{1_a\}$ が成り立つ. これは X がよほど特殊な空間でないと成り立たないであろう.

$\Gamma(X, a)$ 自身が群になるとは限らないが $\Gamma(X, a)$ を同値関係 \sim_p で割った商集合 $\pi_1(X, a) = \Gamma(X, a) / \sim_p$ は群になる. 以下ではこれを順を追って示していこう.

まず $\alpha \in \Gamma(X, a)$ について α を含む同値類を $[\alpha]$ と表そう. つまり

$$[\alpha] = \{\gamma \in \Gamma(X, a) : \gamma \sim_p \alpha\}$$

である.

まず Theorem 6.2 (i) より同値類 $[\alpha]$, は代表元のとり方に依らず定まる. つまり

$$(6.5) \quad \alpha \sim_p \beta \implies [\alpha] = [\beta]$$

が成り立つ. 次に 2 つの同値類 $[\alpha], [\beta]$ について同値類 $[\alpha \cdot \beta]$ も代表元の取り方に依らず定まる. 実際 Theorem 6.7 (i) より $\alpha \sim_p \alpha', \beta \sim_p \beta'$ ならば $\alpha \cdot \beta \sim_p \alpha' \cdot \beta'$ であるから (6.5) より $[\alpha \cdot \beta] = [\alpha' \cdot \beta']$ である. そこで 2 つの同値類 $[\alpha], [\beta]$ の積を

$$(6.6) \quad [\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \cdot \beta],$$

と定義する.

これで $\pi_1(X, a) = \Gamma(X, a) / \sim_p$ に積が定義されたが, $\Gamma(X, a)$ における結合法則 (Theorem 6.7 (iii)) より

$$([\alpha] \cdot [\beta]) \cdot [\gamma] = [\alpha \cdot \beta] \cdot [\gamma] = [(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma] = [\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)] = [\alpha] \cdot [\beta \cdot \gamma] = [\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma])$$

となり, $\pi_1(X, a)$ においても結合法則

$$(6.7) \quad ([\alpha] \cdot [\beta]) \cdot [\gamma] = [\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma])$$

が成り立つ.

点 a に留まり動かない道 1_a の同値類 $[1_a]$ は $1_a \cdot \alpha \sim_p \alpha$ と $\alpha \cdot 1_a \sim_p \alpha$ を満たす (Theorem 6.6 (ii)) を見よ. よって $[1_a] \cdot [\alpha] = [1_a \cdot \alpha] = [\alpha]$ と $[\alpha] \cdot [1_a] = [\alpha \cdot 1_a] = [\alpha]$ を満たすので 1_a は $\pi_1(X, a)$ の単位元である. さらに $\alpha \cdot \alpha^{-1} \sim_p 1_a$ 及び $\alpha^{-1} \cdot \alpha \sim_p 1_a$ が成り立つ (Theorem 6.6 (i)) を見よ) ので $[\alpha] \cdot [\alpha^{-1}] = [\alpha \cdot \alpha^{-1}] = [1_a]$, $[\alpha^{-1}] \cdot [\alpha] = [\alpha^{-1} \cdot \alpha] = [1_a]$ が成り立つので, 同値類 $[\alpha]$ の逆元は $[\alpha^{-1}]$ で与えられることが分かる. つまり $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$ である.

Definition 6.8. 以上により $\pi_1(X, a) = \Gamma(X, a) / \sim_p$ に積が導入され, 群になることが示された. これを位相空間 X の a を基点とする基本群 (*fundamental group*) と言う.

Theorem 6.9. X を道連結空間とし, $a, b \in X$ とする. このとき $\alpha, \beta \in \Gamma(X, a, b)$ について

$$\alpha \sim_p \beta \iff \alpha \cdot \beta^{-1} \sim_p 1_a$$

が成り立つ. 但し左辺の \sim_p は始点 a と終点 b と止めたままホモトピックの意味であり, 右辺の \sim_p は a を基点とする閉道としてホモトピックの意味である.

Proof. $\alpha \sim_p \beta$ ならば $\alpha \cdot \beta^{-1} \sim_p \beta \cdot \beta^{-1} \sim_p 1_a$ である. 逆に $\alpha \cdot \beta^{-1} \sim_p 1_a$ ならば

$$\beta \sim_p 1_a \cdot \beta \sim_p (\alpha \cdot \beta^{-1}) \cdot \beta \sim_p \alpha \cdot (\beta^{-1} \cdot \beta) \sim_p \alpha \cdot 1_b \sim_p \alpha$$

である. □

基点の取り替え さて $a, b \in X$ とし $\eta \in \Gamma(X, a, b)$, つまり η は a, b を結ぶ道とする. $\alpha \in \Gamma(X, b)$ について $(\eta \cdot \alpha) \cdot \eta^{-1} \in \Gamma(X, a)$ を対応させる写像を $\eta_* : \Gamma(X, b) \rightarrow \Gamma(X, a)$ と表そう. このとき $\alpha, \beta \in \Gamma(X, b)$ について

$$\alpha \sim_p \beta \implies \eta \cdot \alpha \sim_p \eta \cdot \beta \implies (\eta \cdot \alpha) \cdot \eta^{-1} \sim_p (\eta \cdot \beta) \cdot \eta^{-1}$$

であるから, この写像 η_* は $\pi_1(X, b)$ から $\pi_1(X, a)$ への写像を誘導する. つまり

$$\pi_1(X, b) \ni [\alpha] \mapsto [(\eta \cdot \beta) \cdot \eta^{-1}] \in \pi_1(X, a)$$

である. 記号を節約する為に, この誘導された写像も $\eta_* : \pi_1(X, b) \rightarrow \pi_1(X, a)$ と表そう.

Theorem 6.10. 写像 η_* は $\pi_1(X, b)$ から $\pi_1(X, a)$ への群の同型写像である

Proof. 煩雑さを避けるために以後の計算では括弧 $()$ や \cdot を省略して書く. まず準同型であることは

$$\eta_*([\alpha][\beta]) = \eta_*([\alpha\beta]) = [\eta\alpha\beta\eta^{-1}] = [\eta\alpha\eta^{-1}\eta\beta\eta^{-1}] = [\eta\alpha\eta^{-1}][\eta\beta\eta^{-1}] = \eta_*([\alpha])\eta_*([\beta])$$

より従う.

さて η^{-1} は b と a を結ぶ道であるから準同型 $(\eta^{-1})_* : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, b)$ を誘導するが

$$\begin{aligned} (\eta^{-1})_*(\eta_*([\alpha])) &= (\eta^{-1})_*([\eta\alpha\eta^{-1}]) = [\eta^{-1}\eta\alpha\eta^{-1}\eta] = [\alpha] \\ \eta_*((\eta^{-1})_*([\beta])) &= \eta_*([\eta^{-1}\beta\eta]) = [\eta\eta^{-1}\beta\eta\eta^{-1}] = [\beta] \end{aligned}$$

より η_* は全単射であり $(\eta_*)^{-1} = (\eta^{-1})_*$ であることが分かる. 特に η_* は $\pi_1(X, b)$ から $\pi_1(X, a)$ への群の同型写像である □

Definition 6.11. 位相空間 X が道連結であれば X の任意の 2 点 a, b は道で結べるので $\pi_1(X, a), \pi_1(X, b)$ は群として同型である. そこでこの群を基点の取り方に依らず定まる群と考えて $\pi_1(X)$ と表し, X の基本群という. また道連結空間 X の基本群が単位元のみからなるとき, つまり任意の点 $a \in X$ を端点とする閉道が, a に留まり続ける閉道に連続的に変形できるとき S は単連結 (*simply connected*) であると言う.

Theorem 6.12. X を道連結な位相空間とする. このとき X が単連結であるための必要十分条件は任意の $p, q \in X$ と $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma(X, p, q)$ について $\gamma_0 \sim_p \gamma_1$ が成り立つこと.

Proof. 十分であることは $p = q$ として $\gamma_1 = 1_p$ とすれば, 任意の閉道 γ_0 は $\gamma_0 \sim_p 1_p$ となることより従う.

必要性については

$$\begin{aligned} \gamma_0 &\sim_p \gamma_0 \cdot 1_q \\ &\sim_p \gamma_0 \cdot (\gamma_1^{-1} \cdot \gamma_1) \\ &\sim_p (\gamma_0 \cdot \gamma_1^{-1}) \cdot \gamma_1 \\ &\sim_p 1_p \cdot \gamma_1 \quad (\because \gamma_0 \cdot \gamma_1^{-1} \text{ は閉道であり } X \text{ の単連結性より } \gamma_0 \cdot \gamma_1^{-1} \sim_p 1_p) \\ &\sim_p \gamma_1 \end{aligned}$$

より従う. □

連続写像により誘導される基本群の準同型 X, Y を位相空間とし $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. $a \in X$ を任意に取り固定し, $b = f(a) \in Y$ と置く. このとき各 $\alpha \in \Gamma(X, a)$ について $f \circ \alpha \in \Gamma(Y, b)$ を対応させる写像を $f_*: \Gamma(X, a) \rightarrow \Gamma(Y, b)$ で表そう. $\alpha \sim_p \beta$ のとき $f \circ \alpha \sim_p f \circ \beta$ が成り立つので $\alpha \sim_p \beta$ ならば $f_*(\alpha) \sim_p f_*(\beta)$ である. よって $\pi_1(X, a)$ から $\pi_1(Y, b)$ への写像を誘導する. つまり $\pi_a(X, a) \ni [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha] \in \pi_1(Y, b)$ で与えられる写像である. この写像も同じ記号 f_* で表そう. このとき f_* は

$$f_*([\alpha][\beta]) = f_*([\alpha\beta]) = [f \circ (\alpha \cdot \beta)] = [(f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta)] = [f \circ \alpha] \cdot [f \circ \beta] = f_*([\alpha]) \cdot f_*([\beta])$$

を満たすので $\pi_1(X, a)$ から $\pi_1(Y, b)$ への準同型である. また $g: Y \rightarrow Z$ も連続写像ならば

$$(6.8) \quad g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$$

が成り立つことも容易に分かる. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が位相同型 (つまり全単射で f, f^{-1} とともに連続) の場合, f_* は $\pi_1(X, a)$ から $\pi_1(Y, f)$ への群同型になることに注意しておこう. つまり X, Y が位相同型ならば両者の基本群は群同型である.

Theorem 6.13. \mathbb{R}^d は単連結である. 特に \mathbb{R}^d と位相同型な位相空間は単連結である.

Proof. 写像 $F: \mathbb{R}^d \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ を

$$F(x, s) = sx = (sx_1, \dots, sx_d), \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad 0 \leq s \leq 1$$

と置けば, $F(x, 0) = x, F(x, 1) = 0$ を満たし連続である. よって $\alpha \in \Gamma(0, \mathbb{R}^d)$ について $F(\alpha(t), s)$ が α から 1_0 への連続変形を与える. 従って $\pi_1(\mathbb{R}^d, 0) = [1_0]$ であり, 他の基点についても $\pi_1(\mathbb{R}^d, x)$ は $\pi_1(\mathbb{R}^d, 0)$ と同型であるから \mathbb{R}^d は単連結である. \square

\mathbb{R}^d の超球 $B^d = \{x = (x_1, \dots, x_d) : x_1^2 + \dots + x_d^2 < 1\}$ や立方体 \mathbb{R}^d と位相同型であるから単連結である. 他に \mathbb{R}^d の凸部分集合あるいはもっと広く星型部分集合も単連結である.

6.3 被覆空間

特に断らない限り近傍という言葉は開集合に限定し開近傍の意味とする. 位相空間 X が道連結 (path-connected) であるとは 任意の点 $x, y \in X$ について x, y を結ぶ道 (= 曲線, 弧) γ (つまり連続写像 $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ で $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ を満たすもの) が存在するときを言う. X が局所道連結 (locally path-connected) とは 任意の点 $x \in X$ とその近傍 U について, 道連結な x の近傍 V で $x \in V \subset U$ を満たすものが存在することを言う. また X が局所単連結 (locally simply connected) であるとは 任意の点 $x \in X$ とその近傍 U について, 単連結な近傍 V で $x \in V \subset U$ を満たすものが存在するときを言う. ただし V が単連結であるとは, V が道連結空間であり, V の各点について, その点を端点とする任意の閉道を端点に留まったままの自明な曲線に連続変形出来ることである.

Definition 6.14. X を道連結かつ局所道連結な Hausdorff 位相空間とし A を連結な位相空間とする. また $h: A \rightarrow X$ を全射連続写像とする. このとき組 (A, h, X) が被覆空間 (covering space) であるとは 任意の $x \in X$ について x の道連結な近傍 V で次の性質を持つものが存在する時を言う.

$$h^{-1}(V) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \text{ を開集合 } h^{-1}(V) \text{ の連結 (道連結としても同じ) 成分への分解とするととき,}$$

各 $\lambda \in \Lambda$ について $h|_{U_\lambda}: U_\lambda \rightarrow V$ は同相写像である.

このとき X を底空間 (*base space*) $h : A \rightarrow X$ を被覆写像 (*covering map*) と言う。また文脈から省略しても意味が通じる場合、単に A を (X の) 被覆空間ということもある。上の条件の中の近傍 V を x の均一被覆近傍 (*evenly-covered neighborhood*) または標準近傍 (*canonical neighborhood*) と呼び、 $h^{-1}(V)$ の各成分 U_λ のことを *slice* と呼ぶ。 $h^{-1}(V)$ は開集合であり、 A は局所道連結、従って局所連結であるから $h^{-1}(V)$ の連結成分である *slice* も開集合であり、互いに交わらない。各 $a \in h^{-1}(\{x\})$ について $h^{-1}(V)$ の a を含む *slice* は唯ひとつ存在する。これを a を含む $h^{-1}(V)$ の *slice* と呼ぶ。 a を含む *slice* U について $h|_U : U \rightarrow V$ は同相写像であるから U 中で a 以外に $h^{-1}(\{x\})$ に属す点は存在しない。従って $h^{-1}(\{x\})$ は離散集合である。集合 $h^{-1}(\{x\})$ のことを x のファイバー (*fibre*) と呼ぶ。

Proposition 6.15. (A, h, X) が被覆空間ならば A は局所道連結であり、特に道連結である。また A は Hausdorff 空間である。

Proof. $a \in A$ と a の近傍 W が与えられたとして $x = h(a)$ の均一被覆近傍 V を取れば $h^{-1}(V) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ に中に $a \in U_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda$ が存在し $h|_{U_\lambda} : U_\lambda \rightarrow V$ は同相である。よって $h(U_\lambda \cap W)$ は $x = h(a)$ の近傍であるから $V_0 \subset h(U_\lambda \cap W)$ を満たす x の道連結な近傍 V_0 が存在する。このとき $W_0 := h|_{U_\lambda}^{-1}(V_0)$ は a の道連結な近傍で $W_0 \subset W$ を満たす。

A が道連結であることを示そう。 $a \in A$ を任意に取り

$$A_0 = \{b \in A : a \text{ から } b \text{ への } A \text{ 内の道が存在する.}\}$$

と置く。 A は局所道連結であるから A_0 の各点は A_0 の内点である。よって A_0 は開集合である。また $A \setminus A_0$ も同様に開集合である。よって A_0 は A の開かつ閉集合であり、 $a \in A_0$ より $A_0 \neq \emptyset$ である。従って A の連結性より $A_0 = A$ が成り立つ。つまり a は A 内の任意の点と道で結べる。

$a, b \in A, a \neq b$ について $x = h(a), y = h(b)$ と置く。 $x \neq y$ ならば x, y それぞれの均一被覆近傍を U_1, U_2 を取る。また $x \in V_1, y \in V_2$ で $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ を満たす近傍 V_1, V_2 を取ると $U_1 \cap V_1, U_2 \cap V_2$ は x, y それぞれの均一被覆近傍であり、交わらない。よって $h^{-1}(U_1 \cap V_1), h^{-1}(U_2 \cap V_2)$ も交わらない a, b それぞれの近傍である。 $x = y$ のときは、均一被覆近傍 U を取り slice への分解 $h^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ において $a \in U_{\lambda_1}, b \in U_{\lambda_2}$ となる $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ を取る。このとき $\lambda_1 = \lambda_2$ ならば U_{λ_1} 中に $h^{-1}(\{x\})$ の点が 2 点以上存在することになり単射性に矛盾する。よって $\lambda_1 \neq \lambda_2$ であり $U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2} = \emptyset$ が成り立つ。これで A が Hausdorff 空間であることが示された。□

集合 G の部分集合 A が a_0 を含む G の道連結成分であるとは $a_0 \in A$ であり a_0 から G 内の道で結べる点 a の全体が A であるときを言うのであった。

Lemma 6.16. G が道連結かつ局所道連結な位相空間 X の開集合で

$$G = \bigcup_{i \in I} U_i$$

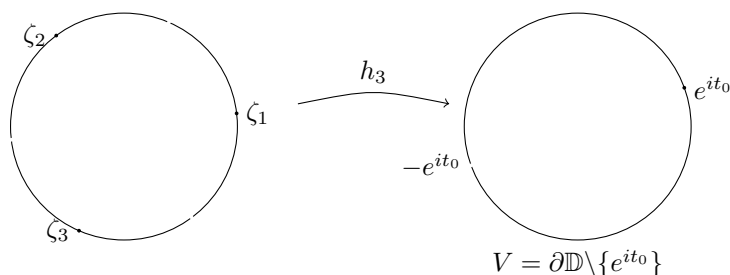
互いに交わらず空でない道連結開集合の和に表されるとき、 U_i は G の道連結成分である。

Proof. 実際 $a_0 \in U_i$ を任意にとると U_i の全ての点 a は a_0 と道で結べるので $U_i \subset V := a_0$ を含む G の道連結成分が成り立つ。 $U_i \subsetneq V$ ならば $a \in V \setminus U_i$ を取り G 内の道で a_0 と a を結ぶとき道の途中である点 $c \in \partial U_i \cap V$ が存在する。 $c \in U_{i'}$ となる $i' \in I \setminus \{i\}$ を取ると $U_{i'}$ は開集合であるから $c \in W \subset U_{i'}$ を満たす c の近傍が存在する。 $c \in \partial U_i$ であるから $\emptyset \neq W \cap U_i \subset U_{i'} \cap U_i$ となり互いに交わらない和であることに矛盾する。□

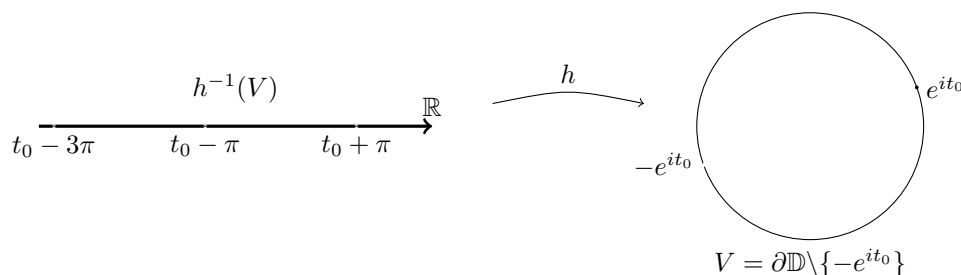
Example 6.17. $n \in \mathbb{N}$ とし $h_n : \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial\mathbb{D}$ を $h_n(\zeta) = \zeta^n$ と置けば, $(\partial\mathbb{D}, h_n, \partial\mathbb{D})$ は被覆空間である. 実際 $e^{it_0} \in \partial\mathbb{D}$ について $V = \partial\mathbb{D} \setminus \{e^{it_0}\}$ と置くと $h_n^{-1}(V)$ は n 個の円弧よりなり

$$h_n^{-1}(V) = \bigcup_{k=0}^{n-1} \left\{ e^{i\theta} : \frac{t_0 + (2k-1)\pi}{n} < \theta < \frac{t_0 + (2k+1)\pi}{n} \right\}$$

と表せる. 各円弧に h_n を制限した写像は $\partial\mathbb{D} \setminus \{e^{it_0}\}$ への同相写像である. この被覆空間は $\partial\mathbb{D}$ の n 重被覆空間と呼ばれる.

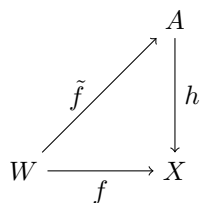


Example 6.18. 写像 $h : \mathbb{R} \rightarrow \partial\mathbb{D}$ を $h(t) = e^{it}$ と置けば, \mathbb{R} は h を被覆写像に持つ $\partial\mathbb{D}$ 上の被覆空間である. 実際 e^{it_0} について $V = \partial\mathbb{D} \setminus \{-e^{it_0}\}$ と置くと $h^{-1}(V) = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (t_0 + (2k-1)\pi, t_0 + (2k+1)\pi)$ であり, 右辺の各区間に h を制限した写像は $S^1 \setminus \{-e^{it_0}\}$ への同相写像である.



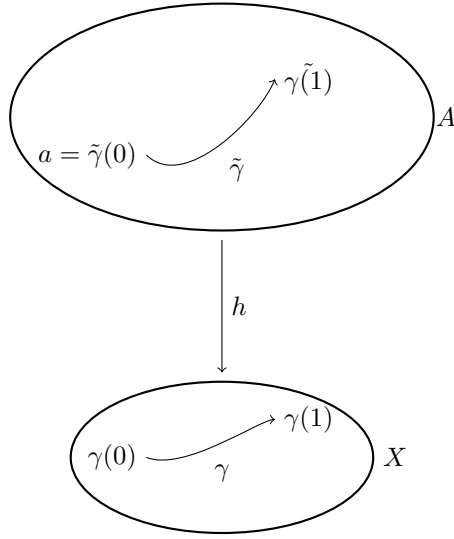
Example 6.19. Example 6.18 の $h : \mathbb{R} \rightarrow \partial\mathbb{D}$ を用いて $h \times \text{id}_{\mathbb{D}} : \mathbb{R} \times \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial\mathbb{D} \times \partial\mathbb{D}$ を定義すると, 無限に長い円筒 $\mathbb{R} \times \partial\mathbb{D}$ からトーラス $T^2 = \partial\mathbb{D} \times \partial\mathbb{D}$ への被覆写像である.

Definition 6.20. (A, h, X) を被覆空間とする. 位相空間 W と連続な写像 $f : W \rightarrow X$ について連続写像 $\tilde{f} : W \rightarrow A$ で $h \circ \tilde{f} = f$ を満たすものを h に関する f の持ち上げ (lift) と言う.



持ち上げを考えると基本的なのは $W = [0, 1]$ の場合である. このときの写像 f は $[0, 1]$ から X への連続写像であるから, X の道である.

Theorem 6.21 (道の持ち上げ定理). (A, h, X) を被覆空間とし, $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ を道とする. このとき任意の $a \in h^{-1}(\gamma(0))$ について γ の持ち上げ $\tilde{\gamma}$ で $\tilde{\gamma}(0) = a$ を満たすものが一意的に存在する.



Proof. 各 $t \in [0, 1]$ について $\gamma(t) \in X$ の均一被覆近傍を取り $V(t)$ と置くと,

$$[0, 1] \subset \bigcup_{0 \leq t \leq 1} \gamma^{-1}(V(t))$$

は開被覆である. このときある $\varepsilon > 0$ で, 次の性質を持つものが存在する. $[0, 1]$ の部分区間 $[a, b]$ の長さが $b - a < \varepsilon$ ならば $[a, b] \subset V(t)$ を満たすように, ある $t \in [0, 1]$ が取れる. このような ε は compact 距離空間における開被覆の Lebesgue 数と呼ばれ, 存在を証明するには背理法を用いれば容易であり, 後ほど証明を与える. これを一旦認めて先に進もう. この ε の存在から十分大きな $n \in \mathbb{N}$ について

$$\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right] \subset \gamma^{-1}(V(t_k)), \quad k = 1, \dots, n$$

を満たす t_1, \dots, t_n が取れる.

始めに $k = 1$ について

$$\gamma \left(\left[0, \frac{1}{n} \right] \right) \subset V(t_1)$$

より $h^{-1}(V(t_1))$ の成分で a を含むものを \tilde{V}_1 と置く. このとき $h|_{\tilde{V}_1} : \tilde{V}_1 \rightarrow V(t_1)$ は同相ゆえ

$$\tilde{\gamma}(t) = (h|_{\tilde{V}_1})^{-1}(\gamma(t)), \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{n}$$

と置けば, $\tilde{\gamma}$ は $[0, \frac{1}{n}]$ で連続であり, $h \circ \tilde{\gamma} = \gamma$, $\tilde{\gamma}(0) = a$ を満たす.

次に

$$\gamma \left(\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right] \right) \subset V(t_2)$$

より $h^{-1}(V(t_2))$ の成分で $\tilde{\gamma}(\frac{1}{n})$ を含むものを \tilde{V}_2 と置く. このとき $h|_{\tilde{V}_2} : \tilde{V}_2 \rightarrow V(t_2)$ は同相ゆえ

$$\tilde{\gamma}(t) = (h|_{\tilde{V}_2})^{-1}(\gamma(t)), \quad \frac{1}{n} < t \leq \frac{2}{n}$$

と置く. このとき

$$(h|_{\tilde{V}_2})^{-1} \left(\gamma \left(\frac{1}{n} \right) \right) = \tilde{\gamma} \left(\frac{1}{n} \right)$$

より $\tilde{\gamma}$ は $[0, \frac{2}{n}]$ で連続であり, $h \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ を満たす. 以上のような短い道をつないでいく操作を n 回行えば, 道 γ の持ち上げである \tilde{X} の道 $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ が得られる.

$\tilde{\gamma}$ の一意性については, 次に述べるもっと一般的な形の一意性定理から直ちに従う. \square

Lemma 6.22. 距離空間 X が点列コンパクトであるとき任意の開被覆 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について, 次の性質を持つ正数 $\varepsilon > 0$ が存在する. X の部分集合 A の直径が ε 以下ならば $A \subset V_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda$ が少なくとも 1 つ存在する.

上の性質を持つ ε を開被覆 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の Lebesgue 数 (Lebesgue number) と呼ぶ.

Proof. Lemma の主張を論理式で表せば

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall A \subset X \text{ with } \text{diam}(A) \leq \varepsilon : \exists \lambda \in \Lambda : A \subset V_\lambda.$$

であるから, これの否定である

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists A \subset X \text{ with } \text{diam}(A) \leq \varepsilon : \forall \lambda \in \Lambda : A \not\subset V_\lambda.$$

を仮定して矛盾を導こう.

各 $n \in \mathbb{N}$ について $A_n \subset X$ を $\text{diam}(A_n) \leq \frac{1}{n}$ かつ

$$(6.9) \quad \forall \lambda \in \Lambda : A_n \not\subset V_\lambda$$

が成り立つように取り, さらに点 $x_n \in A_n$ を任意に取る. X の点列コンパクト性より $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ から収束する部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ が取り出せる. このとき $x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ と置けば $x_0 \in V_{\lambda_0}$ を満たす $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在する. V_{λ_0} は x_0 を含む開集合であるから, 十分大きな全ての k について $A_{n_k} \subset V_{\lambda_0}$ が成り立つ筈であるが, これは (6.9) に矛盾する. \square

Theorem 6.23. (A, h, X) を被覆空間, W を連結位相空間, $f: W \rightarrow X$ を連続写像とする. また $\tilde{f}_j: W \rightarrow A, j=1, 2$ を $h: A \rightarrow X$ に関する f の持ち上げとする. このとき f_1, f_2 がある点 $w_0 \in W$ で一致 (つまり $\tilde{f}_1(w_0) = \tilde{f}_2(w_0)$) すれば W 上で一致する.

Proof.

$$G = \{w \in W : \tilde{f}_1(w) = \tilde{f}_2(w)\}$$

と置けば閉集合である. 実際, 写像 $\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2: W \times W \rightarrow A \times A$ を $\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2(u, v) = (\tilde{f}_1(u), \tilde{f}_2(v))$ で定義すれば連続である. このとき対角線集合を $D = \{(a, a) \in A \times A : a \in A\}$ と置けば $G = (\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2)^{-1}(D)$ である. 従って D が閉集合であれば G もそうである. この D が閉集合であることを保証するのが A の Hausdorff 性である.

次に各点 $w_1 \in G$ が G の内点であることを示そう. これが示されれば閉集合 G は開集合でもあり $w_0 \in W$ ゆえ空でない. 従って W の連結性より $G = W$ つまり W 上で $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ が成り立つことになり, 証明は完了する.

まず $f(w_1)$ の均一被覆近傍 V を取り $h^{-1}(V)$ の $a_1 := \tilde{f}_1(w_1) (= \tilde{f}_2(w_1))$ を含む成分を U と置く. このとき $h|_U: U \rightarrow V$ は同相写像である. また $\tilde{f}_1^{-1}(U) \cap \tilde{f}_2^{-1}(U)$ は w_1 の開近傍であり, ここで

$$h|_U \circ \tilde{f}_j(w) = h \circ \tilde{f}_j(w) = f(w)$$

を満たすので, $\tilde{f}_j(w) = (h|_U)^{-1}(f(w))$ が成り立つ. 特に $\tilde{f}_1(w) = \tilde{f}_2(w)$ が $\tilde{f}_1^{-1}(U) \cap \tilde{f}_2^{-1}(U)$ で成り立つので, $w_1 \in \tilde{f}_1^{-1}(U) \cap \tilde{f}_2^{-1}(U) \subset G$ となり, w_1 は G の内点である. \square

底空間の道はいつでも被覆空間の上に始点を指定した上で、一意的に持ち上げ可能である。道だけではなく、さらにホモトピーまで一意的に持ち上げが可能であることを示そう。

Theorem 6.24 (ホモトピーの持ち上げ定理). (A, h, X) を被覆空間とし, $x, y \in X$ とする. また x, y をそれぞれ始点と終点とする 2 つの道 γ_0, γ_1 がホモトピック (*homotopic*), つまりホモトピーと呼ばれる連続写像 $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ で

$$H(t, 0) = \gamma_0(t), \quad H(t, 1) = \gamma_1(t), \quad H(0, s) = x, \quad H(1, s) = y \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq s \leq 1$$

を満たすものが存在するとする. このとき任意の $a \in h^{-1}(x)$ について H の持ち上げ $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow A$ で $\tilde{H}(0, 0) = a$ を満たすものが一意的に存在し,

$$\tilde{\gamma}_0(t) = \tilde{H}(t, 0), \quad \tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{H}(t, 1) \quad 0 \leq t \leq 1$$

と置けば $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1$ は a を始点とする γ_0, γ_1 それぞれの持ち上げであり 2 つの終点は一致する ($\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1)$). この終点を b と置けば \tilde{H} は道 $\tilde{\gamma}_0$ から道 $\tilde{\gamma}_1$ へのホモトピー (両端を留めたままの連続変形) である. つまり

$$\tilde{H}(0, s) = a, \quad \tilde{H}(1, s) = b \quad 0 \leq s \leq 1$$

が成り立つ.

Proof. 道の持ち上げ定理 (Theorem 6.21) の証明の時と同様に Lebesgue 数の存在定理を用いれば, 十分大きな $n \in \mathbb{N}$ について

$$I_{ij} = \left\{ (t, s) \in [0, 1] \times [0, 1] : \frac{i-1}{n} \leq t \leq \frac{i}{n}, \frac{j-1}{n} \leq s \leq \frac{j}{n} \right\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

と置くととき $H(I_{ij}) \subset V_{ij}$ を満たす均一被覆近傍が取れる.

まず I_{11} における H_{ij} の持ち上げを以下のように定義する. $h(a) = x = H(0, 0)$ より $h^{-1}(V_{11})$ の成分で a を含むものが, ただ 1 つ存在するので, それを \tilde{V}_{11} と置き, 同相写像 $h|_{\tilde{V}_{11}} : \tilde{V}_{11} \rightarrow V_{11}$ を用いて

$$\tilde{H}(t, s) = (h|_{\tilde{V}_{11}})^{-1}(H(t, s)), \quad (t, s) \in I_{11}$$

と置く.

| | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| I_{16} | I_{26} | I_{36} | I_{46} | I_{56} | I_{66} |
| I_{15} | I_{25} | I_{35} | I_{45} | I_{55} | I_{65} |
| I_{14} | I_{24} | I_{34} | I_{44} | I_{54} | I_{64} |
| I_{13} | I_{23} | I_{33} | I_{43} | I_{53} | I_{63} |
| I_{12} | I_{22} | I_{32} | I_{42} | I_{52} | I_{62} |
| I_{11} | I_{21} | I_{31} | I_{41} | I_{51} | I_{61} |

図 6.1

次に $(i, j) = (2, 1)$ に対応した持ち上げを行う。まず I_{11} の右下の頂点 $(1/n, 0)$ において

$$\tilde{H}(1/n, 0) = (h|_{\tilde{V}_{11}})^{-1}(H(1/n, 0)) \in h^{-1}(H(1/n, 0))$$

であるから $h^{-1}(V_{21})$ の成分で $\tilde{H}(1/n, 0)$ を含むものがただ 1 つ存在する。それを \tilde{V}_{21} と置き、同相写像 $h|_{\tilde{V}_{21}} : \tilde{V}_{21} \rightarrow V_{21}$ を用いて

$$\tilde{H}(t, s) = (h|_{\tilde{V}_{21}})^{-1}(H(t, s)), \quad (t, s) \in I_{21}$$

と置く。このとき I_{11} の右の辺と I_{21} の左の辺は一致し両者に共有されるが、この辺上で 2 つの定義が一致することを見ておく必要がある。これは I_{11} で定義した \tilde{H} を共有辺に制限したもの、及び I_{21} で定義した \tilde{H} を共有辺に制限したものは連続写像 $[0, 1/n] \ni s \mapsto H(1/n, s)$ の持ち上げであり、同じ始点を持つように定義したので、Theorem 6.23 より共有辺で一致する。従って特に \tilde{H} は $I_{11} \cup I_{21}$ で連続である。

このような操作を I_{11}, \dots, I_{n1} について次々に行い $I_{11} \cup \dots \cup I_{n1}$ において H の持ち上げである連続写像 \tilde{H} が得られたとする。このとき I_{n1} の右の辺に \tilde{H} を制限した写像は、均一被覆近傍 V_{n1} における定値写像 $[0, 1/n] \ni s \mapsto H(1, s) = y$ の持ち上げであるから、やはり定値写像である。従って $b := \tilde{H}(1, 0)$ と置けば $0 \leq s \leq 1/n$ について $\tilde{H}(1, s) \equiv b$ が成り立つ。同様に $0 \leq s \leq 1/n$ について $a \equiv \tilde{H}(0, s)$ が成り立つ。

次に I_{12}, \dots, I_{n2} について \tilde{H} を定義していくがこのときは I_{i2} の下辺と I_{i1} の上辺での定義が一致することも見て行く必要がある。この場合も Theorem 6.23 より共有辺で一致することが容易に分かる。また $1/n \leq s \leq 2/n$ について $\tilde{H}(0, s) \equiv a, \tilde{H}(1, s) \equiv b$ が成り立つことも同様である。

このように 1 枚の均一被覆近傍で覆える小正方形に分解し、持ち上げを行っていけば H の持ち上げ \tilde{H} で $\tilde{H}(0, s) \equiv a, \tilde{H}(1, s) \equiv b$ を満たすものが得られ、 $\tilde{\gamma}_0(t) = \tilde{H}(t, 0), \tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{H}(t, 1)$ で $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1$ を定義するときそれぞれは γ_0, γ_1 の持ち上げであり、 \tilde{H} は (両端を固定した) γ_0 から γ_1 への連続変形である。□

Corollary 6.25. (A, h, X) を被覆空間とし $x \in X, a \in h^{-1}(\{x\})$ とする。また γ, γ' はともに x を始点とするホモトピックな 2 つの道とする。このとき a を始点とする γ, γ' の持ち上げをそれぞれ $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}'$ とすれば $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}'$ の終点は一致する。

Lemma 6.26. (A, h, X) を被覆空間とし $x, y \in X, \gamma$ を x と y を結ぶ道とする。各 $a \in h^{-1}(\{x\})$ について a を始点とする γ の A への持ち上げを $\tilde{\gamma}$ と置けば、 $\tilde{\gamma}(1) \in h^{-1}(\{y\})$ である。この、始点 a に対し終点 $b = \tilde{\gamma}(1)$ を与える対応を写像 $\psi(a) = b$ と置けば、 $\psi : h^{-1}(x) \rightarrow h^{-1}(y)$ は全単射である。

Proof. 各 $b \in h^{-1}(\{y\})$ について b を始点とする $\tilde{\gamma}$ の持ち上げを $\tilde{\tilde{\gamma}}$ と置き、 a を $\tilde{\tilde{\gamma}}$ の終点とすれば $a \in h^{-1}(\{x\})$ である。そこで $\varphi(b) = a$ で $\varphi : h^{-1}(\{y\}) \rightarrow h^{-1}(\{x\})$ を定義する。このとき $\tilde{\tilde{\gamma}}$ は a を始点とし b を終点とする $h(\tilde{\tilde{\gamma}}) = \overline{h(\tilde{\tilde{\gamma}})} = \tilde{\tilde{\gamma}} = \gamma$ の持ち上げであるから $\psi(a) = b$ が成り立つ。よって $\psi(\varphi(b)) = b, b \in h^{-1}(\{y\})$ つまり $\psi \circ \varphi = \text{id}_{h^{-1}(\{y\})}$ が成り立つ。全く同様にして $\varphi \circ \psi = \text{id}_{h^{-1}(\{x\})}$ も示されるので ψ (及び φ) は全単射である。□

Definition 6.27. (A, h, X) を被覆空間とする。任意の $x, y \in X$ について X の道連結性より x, y を結ぶ道 γ が存在する。Lemma 6.26 より、 $h^{-1}(x)$ と $h^{-1}(y)$ の濃度は等しい。つまりファイバー $h^{-1}(x)$ の濃度は $x \in X$ に依らず一定である。特に $h^{-1}(x)$ の濃度が $n \in \mathbb{N}$ のとき被覆空間 (A, h, X) は有限葉で n 重であると言う。

6.4 被覆空間と基本群

前節において底空間の道は、被覆空間の道へ持ち上げ可能であることを示した。また始点と終点を留めたままホモトピックな2つの道 γ_0, γ_1 は homotopy ごと持ち上げ可能であり、共通な始点を有するように被覆空間 A に持ち上げたものをそれぞれ $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1$ とすれば、両者の終点は一致し、さらに A 内で始点と終点を留めたままホモトピックになることを示した。この節ではこれらの結果を利用して基本群と被覆空間の関係について調べよう。

位相空間 X から Y への連続写像 $f: X \rightarrow Y$ と $x_0 \in X$ について $y_0 = f(x_0)$ とおくと $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ を $\gamma \in \Gamma(X, x_0)$ について $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$ で定義した。これが well-defined であること、及び $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ が準同型になることを思い出しておこう。

Theorem 6.28. (A, h, X) を被覆空間とし $a \in A, x = h(a)$ とする。このとき射影 h が誘導する準同型 $h_*: \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, x)$ は単射である。

Proof. 準同型 $h_*: \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, x)$ が単射であることを示すには $\text{Ker } h_*$ が $\pi_1(A, a)$ の単位元のみからなることを言えばよい。つまり閉道 $\tilde{\gamma} \in \Gamma(A, a)$ の像 $h \circ \tilde{\gamma}$ が X 内で $h \circ \tilde{\gamma} \sim 1_x$ を満たせば A 内で $\tilde{\gamma} \sim 1_a$ となることを示せばよい。これはホモトピーの持ち上げ定理 (Theorem 6.24) より、 $h \circ \tilde{\gamma}$ と 1_x を a を始点とする A の道に持ち上げると

$$h \circ \tilde{\gamma} \text{ の持ち上げ } \sim 1_x \text{ の持ち上げ}$$

が成り立つが、持ち上げの一意性 (Theorem 6.23) より左辺は $\tilde{\gamma}$ であるし、右辺は 1_a である。 \square

さてこの定理より被覆空間 A の基本群 $\pi_1(A, a)$ は底空間 X の基本群 $\pi_1(X, x)$ の部分群 $h_*(\pi_1(A, a))$ に同型であることが分かる。それでは $h(a_1) = h(a_2) = x$ のように x のファイバーに属する2点に対応する $\pi_1(A, a_1)$ と $\pi_1(A, a_2)$ の h_* による像はともに $\pi_1(X, x)$ の部分群であるが、両者の関係については次の定理がある。

Theorem 6.29. (A, h, X) を被覆空間とし、 $x \in X$ とする。

- (i) $a_1, a_2 \in h^{-1}(x)$ ならば $h_*(\pi_1(A, a_1))$ と $h_*(\pi_1(A, a_2))$ は $\pi_1(X, x)$ の部分群として共役である。
- (ii) $a_1 \in h^{-1}(x)$ とする。 $\pi_1(X, x)$ の部分群 H が $h_*(\pi_1(A, a_1))$ と共役ならば、ある $a_2 \in h^{-1}(x)$ で $H = h_*(\pi_1(A, a_2))$ となるものが存在する。

Proof. (i) $a_1, a_2 \in h^{-1}(x)$ のとき、 a_1 と a_2 を結ぶ A 内の道を $\tilde{\ell}$ とすれば $\ell = h \circ \tilde{\ell}$ は x を基点とする閉道である。また

$$\pi_1(A, a_1) \ni [\tilde{\gamma}] \mapsto [\tilde{\ell}]^{-1} \cdot [\tilde{\gamma}] \cdot [\tilde{\ell}] \in \pi_1(A, a_2)$$

は同型写像である (Theorem 6.10) ことを思い出そう。これより特に $\pi_1(A, a_2) = [\tilde{\ell}]^{-1} \pi_1(A, a_1) [\tilde{\ell}]$ が成り立つので

$$h_*(\pi_1(A, a_2)) = h_*([\tilde{\ell}]^{-1} \cdot \pi_1(A, a_1) \cdot [\tilde{\ell}]) = [h \circ \tilde{\ell}]^{-1} h_*(\pi_1(A, a_1)) [h \circ \tilde{\ell}] = [\ell]^{-1} h_*(\pi_1(A, a_1)) [\ell]$$

を得る。よって $h_*(\pi_1(A, a_1))$ と $h_*(\pi_1(A, a_2))$ は共役である。

(ii) $\pi_1(X, x_0)$ の部分群 H が $h_*(\pi_1(A, a_1))$ と共役ならば, x を基点とする, ある閉道 ℓ により

$$H = [\ell]^{-1}h_*(\pi_1(A, a_1))[\ell]$$

と表せる. ℓ の a_1 を始点とする A の道への持ち上げを $\tilde{\ell}$ とし, その終点を $a_2 = \tilde{\ell}(1) \in h^{-1}(x)$ と置けば $\pi_1(A, a_2) = [\tilde{\ell}]^{-1}\pi_1(A, a_1)[\tilde{\ell}]$ であるから (i) と同様に

$$h_*(\pi_1(A, a_2)) = [\ell]^{-1}h_*(\pi_1(A, a_1))[\ell] = H$$

が成り立つ. よって $H = h_*(\pi_1(A, a_2))$ である. □

(A, h, X) を被覆空間とし $f: W \rightarrow X$ を連続写像とする. 今までは道, つまり $W = [0, 1]$ の場合の f の持ち上げについて考えてきたが, 今度は $W = [0, 1]$ とは限らない, 一般の場合の持ち上げについて考えよう. 道の場合と異なりこの場合は, いつでも持ち上げが可能とは限らない. しかしながら基本群の言葉で, 写像 f が持ち上げ可能であるための必要十分条件を記述できる.

$\Gamma(X, x)$ で位相空間 X における x を基点とする閉道の全体を表したことを思い出しておこう.

Lemma 6.30. $\gamma \in \Gamma(X, x)$ について $a \in h^{-1}(x)$ を始点とする γ の持ち上げを $\tilde{\gamma}$ とする. このとき

$$\tilde{\gamma} \text{ が閉道} \iff [\gamma] \in h_*(\pi_1(A, a)).$$

Proof. $\tilde{\gamma}$ が閉道ならば $[\tilde{\gamma}] \in \pi_1(A, a)$ であり

$$[\gamma] = [h \circ \tilde{\gamma}] = h_*([\tilde{\gamma}]) \in h_*(\pi_1(A, a_0))$$

である.

逆に $[\gamma] \in h_*(\pi_1(A, a))$ ならば $\tilde{\gamma}' \in \Gamma(A, a)$ で $[\gamma] = h_*([\tilde{\gamma}']) = [h \circ \tilde{\gamma}']$ を満たすものが存在する. これは X 内で $\gamma \sim h \circ \tilde{\gamma}'$ を意味するが, ホモトピーの持ち上げ定理と一意性定理より

$$\begin{aligned} & \gamma \sim h \circ \tilde{\gamma}' \quad \text{in } X \\ \iff & \gamma \text{ の持ち上げ} \sim h \circ \tilde{\gamma}' \text{ の持ち上げ} \quad \text{in } A \\ \iff & \tilde{\gamma} \sim \tilde{\gamma}' \quad \text{in } A \end{aligned}$$

である (\sim は始点と終点を固定してホモトピックの意味である) が, 特に両辺の道の終点は一致し, $\tilde{\gamma}$ も $\tilde{\gamma}'$ と同様に閉道である. □

Theorem 6.31. (A, h, X) を被覆空間とし, $x, y \in X, a \in h^{-1}(x)$ とする. また α, β を x を始点, y を終点とする X 上の 2 つの道とし, これらの a を始点とする A 内の道への持ち上げを, それぞれ $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ とする. このとき $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ が成り立つこと, つまり $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ の終点が一致する為の必要十分条件は

$$[\alpha \cdot \beta^{-1}] \in h_*(\pi_1(A, a))$$

である.

Proof. まず $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ ならば $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}^{-1}$ が定義でき a を基点とする閉道であるから

$$[\alpha \cdot \beta^{-1}] = [h \circ \tilde{\alpha} \cdot h \circ \tilde{\beta}^{-1}] = [h \circ (\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}^{-1})] = h_*([\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}^{-1}]) \in h_*(\pi_1(A, a))$$

となる.

逆に $[\alpha \cdot \beta^{-1}] \in h_*(\pi_1(A, a))$ ならば $\alpha \cdot \beta^{-1}$ の a を始点とする A への持ち上げを $\widetilde{\alpha \cdot \beta^{-1}}$ と表すとき, Lemma 6.30 より, これは閉道であり

$$\widetilde{\alpha \cdot \beta^{-1}}(0) = \widetilde{\alpha \cdot \beta^{-1}}(1) = a$$

が成り立つ.

それでは $\widetilde{\alpha \cdot \beta^{-1}}$ と $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ の関係を調べよう. $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ のとき

$$\alpha \cdot \beta^{-1}(t) = \alpha(2t)$$

であるから

$$\alpha \cdot \beta^{-1}\left(\frac{t}{2}\right) = \alpha(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

が成り立つ. 従って

$$\widetilde{\alpha \cdot \beta^{-1}}\left(\frac{t}{2}\right), \quad 0 \leq t \leq 1$$

も $\tilde{\alpha}$ と同様に α の持ち上げであり, 始点も $\widetilde{\alpha \cdot \beta^{-1}}(0) = a = \tilde{\alpha}(0)$ となり一致する. よって両者は一致し

$$\widetilde{\alpha \cdot \beta^{-1}}\left(\frac{t}{2}\right) = \alpha(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

が成り立つ. よって特に

$$\tilde{\alpha}(1) = \widetilde{\alpha \cdot \beta^{-1}}\left(\frac{1}{2}\right)$$

である.

次に $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ のとき

$$\alpha \cdot \beta^{-1}(t) = \beta^{-1}(2t - 1) = \beta(2(1 - t))$$

であるから

$$\alpha \cdot \beta^{-1}\left(1 - \frac{t}{2}\right) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

が成り立つ. よって道

$$\widetilde{\alpha \cdot \beta^{-1}}\left(1 - \frac{t}{2}\right), \quad 0 \leq t \leq 1$$

も $\tilde{\beta}$ と同様に β の持ち上げであり, 始点は $\widetilde{\alpha \cdot \beta^{-1}}(1) = a$ であるから両者は一致する. つまり

$$\widetilde{\alpha \cdot \beta^{-1}}\left(1 - \frac{t}{2}\right) = \tilde{\beta}(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

が成り立つ. よって特に

$$\tilde{\beta}(1) = \widetilde{\alpha \cdot \beta^{-1}}\left(\frac{1}{2}\right)$$

である. 以上より

$$\tilde{\alpha}(1) = \widetilde{\alpha \cdot \beta^{-1}}\left(\frac{1}{2}\right) = \tilde{\beta}(1)$$

が成り立つ. □

Lemma 6.30 と Theorem 6.31 より底空間への写像が被覆空間に持ち上げ可能であるための必要十分条件が得られる.

Theorem 6.32. (A, h, X) を被覆空間とし, W を局所道連結な道連結空間とする. また $f: W \rightarrow X$ を連続写像とし $w_0 \in W, x_0 = f(w_0), a_0 \in h^{-1}(x_0)$ とする. このとき $\tilde{f}(w_0) = a_0$ を満たす f の持ち上げ $\tilde{f}: W \rightarrow A$ が存在する為の必要十分条件は

$$f_*(\pi_1(W, w_0)) \subset h_*(\pi_1(A, a_0))$$

が成り立つことである.

上の条件 $f_*(\pi_1(W, w_0)) \subset \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ を Theorem 6.31 を用いて道の持ち上げの言葉に翻訳して述べれば,

$$(6.10) \quad \begin{aligned} &w_0 \text{ を基点とする } W \text{ の任意の閉道 } \ell \text{ の像 } f \circ \ell \text{ を} \\ &a_0 \text{ を始点とする } A \text{ の道への持ち上げると, 再び閉道になる} \end{aligned}$$

である.

Proof. $\tilde{f}(w_0) = a_0$ を満たす f の持ち上げ \tilde{f} が存在すれば $h \circ \tilde{f} = f$ と $\tilde{f}_*(\pi_1(W, w_0)) \subset \pi_1(A, a_0)$ より

$$f_*(\pi_1(W, w_0)) = (h \circ \tilde{f})_*(\pi_1(W, w_0)) = h_*(\tilde{f}_*(\pi_1(W, w_0))) \subset h_*(\pi_1(A, a_0))$$

が成り立つ.

逆に $f_*(\pi_1(W, w_0)) \subset h_*(\pi_1(A, a_0))$ が成り立つと仮定して, 写像 \tilde{f} を以下のように構成する. まず W は道連結であるから, 各 $w \in W$ について w_0 と w を結ぶ道 $\gamma: [0, 1] \rightarrow W$ が取れる. そして x_0 を始点とする X の道 $f \circ \gamma$ を a_0 を始点とする A の道 $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow A$ に持ち上げる. そして

$$\tilde{f}(w) = \tilde{\gamma}(1) \quad (= \tilde{\gamma} \text{ の終点})$$

と置く. 勿論 $\tilde{f}(w)$ が γ のとり方に依らず定まることを示さなければならない. そこで $\delta: [0, 1] \rightarrow W$ も w_0 と w を結ぶ道とし, $\tilde{\delta}: [0, 1] \rightarrow A$ を a_0 を始点とする $f \circ \delta$ の持ち上げとする. このとき $f \circ \gamma$ と $f \circ \delta$ はともに x_0 を始点とし, $f(w)$ を終点とする X 内の道であり $\gamma \cdot \delta^{-1}$ は w_0 を基点とする W の閉道であるから

$$[f \circ \gamma \cdot (f \circ \delta)^{-1}] = [f \circ (\gamma \cdot \delta)^{-1}] = f_*([\gamma \cdot \delta)^{-1}] \in f_*(\pi_1(W, w_0)) \subset h_*(\pi_1(A, a_0))$$

従って Theorem 6.31 より $\tilde{\gamma}$ と $\tilde{\delta}$ の終点は一致する. つまり $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\delta}(1)$ である.

さらに $\tilde{f}(w) = \tilde{\gamma}(1)$ より $h(\tilde{f}(w)) = h(\tilde{\gamma}(1)) = f \circ \gamma(1) = f(w)$ が成り立つ. また $w = w_0$ の時は $\gamma = 1_{w_0}$ と取ることができるが, このとき $f \circ \gamma = f \circ 1_{w_0} = 1_{x_0}$ であり, $\tilde{\gamma} = 1_{a_0}$ である. よって $\tilde{f}(w_0) = 1_{a_0}(1) = a_0$ である.

最後に \tilde{f} が連続であることを示せば証明は完了する. これを示すために $w_1 \in W$ を任意に固定して \tilde{f} が w_1 で連続であることを示そう. $x_1 = f(w_1)$ と置いて x_1 の均一被覆近傍 V を取る. また w_0 と w_1 を結ぶ道 $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow W$ を取り, $f \circ \gamma_1$ の a_0 を始点とする A の道への持ち上げを $\tilde{\gamma}_1$ とする. $a_1 = \tilde{\gamma}_1(1) = \tilde{f}(w_1)$ と置き, $h^{-1}(V)$ の a_1 を含む道連結成分を \tilde{V} と置く. このとき $h|_{\tilde{V}}: \tilde{V} \rightarrow V$ は同相である.

さて f の連続性と W の道弧状連結性より w_1 の道連結な近傍 U で $f(U) \subset V$ を満たすものが取れる. このとき

$$(6.11) \quad \tilde{f}(w) = (h|_{\tilde{V}})^{-1}(f(w)), \quad w \in U$$

が成り立つことを示そう。これが示されれば \tilde{f} が w_1 において連続であることが直ちに従う。

それでは (6.11) が成り立つことを示そう。各 $w \in U$ について w_1 と w を結ぶ道 $\alpha : [0, 1] \rightarrow U$ を取る。 $f \circ \alpha$ は $x_1 = f(w_1)$ と $x := f(w)$ を結ぶ V 内の道であるから、これを a_1 を始点とする A の道 $\tilde{\alpha}$ へ持ち上げる。このとき持ち上げの一意性より

$$\tilde{\alpha} = (h|_{\tilde{V}})^{-1}(f \circ \alpha)$$

が成り立つことに注意する。さて $\tilde{\gamma}_1(1) = \tilde{x}_1 = \tilde{\alpha}(0)$ より道 $\tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\alpha}$ が定義でき

$$h \circ (\tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\alpha}) = (h \circ \tilde{\gamma}_1) \cdot (h \circ \tilde{\alpha}) = f \circ \gamma_1 \cdot f \circ \alpha = f \circ (\gamma_1 \cdot \alpha)$$

である。従って $\tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\alpha}$ は $f \circ (\gamma_1 \cdot \alpha)$ の a_0 を始点とする A への持ち上げ $\widetilde{f \circ (\gamma_1 \cdot \alpha)}$ と一致する。よって

$$\tilde{f}(w) = \widetilde{f \circ (\gamma_1 \cdot \alpha)}(1) = (\tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\alpha})(1) = \tilde{\alpha}(1) = (h|_{\tilde{V}})^{-1}((f \circ \alpha)(1)) = (h|_{\tilde{V}})^{-1}(f(w))$$

が成り立つ。 □

Theorem 6.33 (局所道連結な単連結空間からの連続写像の持ち上げ). (A, h, X) を被覆空間とし S は局所道連結な単連結空間, そして $f : S \rightarrow X$ を連続写像とする. このとき $f(p_0) = h(a_0)$ を満たす任意の $p_0 \in S$, $a_0 \in A$ について連続写像 $\tilde{f} : S \rightarrow A$ で $h \circ \tilde{f} = f$, $\tilde{f}(p_0) = a_0$ を満たすものが存在する.

Proof. 実際 W が単連結のとき基本群 $\pi_1(W, w_0)$ は自明群であるから $f_*(\pi_1(W, w_0)) = [1_{x_0}] \subset h_*(\pi_1(A, a_0))$ が成り立つ. □

6.5 被覆空間の同型

この節では与えられた空間 X についてどのような被覆空間 (A, h, X) が存在し得るかを X の基本群をもとに考えていこう.

Theorem 6.34. X, Y, Z を局所道連結な道連結 Hausdorff 空間とする. また図式

$$\begin{array}{ccc} X & & Y \\ & \searrow f & \\ & & Z \\ & \nearrow h & \\ g & \swarrow & \end{array}$$

において g, h は被覆写像であり, f は連続で $g = h \circ f$ が成り立つとする. このとき f も被覆写像である.

Proof. f が全射であることを示そう. $x_0 \in X$ を任意に取り固定する. $z_0 = g(x_0)$, $y_0 = f(x_0)$ と置くと $h(y_0) = h(f(x_0)) = g(x_0) = z_0$ が成り立つ. 任意の $y \in Y$ について y_0 を始点とし y を終点とする Y 内の道を β とし, $\gamma = h \circ \beta$ と置く. γ を被覆写像 f により x_0 を始点とする X 内の道への持ち上げたものを α とする. このとき Y 内の2つの道 $f \circ \alpha$ と β を比較する. 両者は始点 y_0 を共有し, $h \circ (f \circ \alpha) = g \circ \alpha = \gamma$, $h \circ \beta = \gamma$ であるから, ともに h に関する γ の持ち上げである. よって持ち上げの一意性より $f \circ \alpha = \beta$ である. 特に α の終点を x と置けば $f(x) = \beta$ の終点 y が成り立つ. よって f は全射である.

次に任意の $y_0 \in B$ の φ に関する均一被覆近傍の存在を示そう. $z_0 := h(y_0)$ の 2 つの被覆写像 g, h に関する共通の均一被覆近傍を W とする. $h^{-1}(W) = \bigcup_{j \in J} V_j$ と道成分に分解すれば, 各 j について $h|_{V_j} : V_j \rightarrow W$ は同相写像である. また $y_0 \in V_{j_0}$ を満たすただ一つの $j_0 \in J$ を取る. このとき V_{j_0} が f に関する y_0 の均一被覆近傍であることを示そう.

$g^{-1}(W) = \bigcup_{i \in I} U_i$ と道成分に分解すると各 $i \in I$ について $\varphi(U_i)$ は道連結集合 U_i の連続像であるから, 道連結である. また $h(f(U_i)) = g(U_j) = W$ より $f(U_j) \subset g^{-1}(W) = \bigcup_{i \in I} U_i$ が成り立つ. よって各 $i \in I$ について $\varphi(U_i) \subset V_j$ を満たす $j \in J$ がただ一つ存在し, 他の $j' \in J$ については $f(U_j) \cap U_{j'} = \emptyset$ が成り立つ. 従って特に $f(U_i) \cap V_j \neq \emptyset$ ならば $\varphi(U_j) \subset V_j$ が成り立つ. そこで

$$I_0 = \{i \in I : f(U_i) \cap V_{j_0} \neq \emptyset\}$$

と置けば

$$I_0 = \{i \in I : f(U_i) \subset V_{j_0}\}$$

が成り立つ. f は全射であるから I_0 は空でなく,

$$f^{-1}(V_{j_0}) = \bigcup_{i \in I_0} U_i$$

が成り立つ. 右辺は互いに交わらない道連結な開集合の和であるから Lemma 6.16 より右辺は $f^{-1}(V_{j_0})$ の道連結成分への分解を与えている.

ここで各 $i \in I_0$ について $f(U_i) \subset V_{j_0}$ より $h|_{V_{j_0}} \circ f|_{U_i} = g|_{U_i} : U_i \rightarrow W$ が成り立つが $h|_{V_{j_0}}, g|_{U_i}$ は同相写像であるから $f|_{U_i} = (h|_{V_{j_0}})^{-1} \circ g|_{U_i} : U_i \rightarrow V_{j_0}$ も同相写像である. \square

Definition 6.35. $(A, h), (B, k)$ を X の被覆空間とする. 連続写像 $\varphi : A \rightarrow B$ が $h = k \circ \varphi$ を満たすとき, A から B への準同型 (*homomorphism*) であると言う. ここでは群と群の間の準同型と区別するために, 単に準同型と呼ぶことはやめ, 被覆準同型と言うことにする.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ & \searrow h & \swarrow k \\ & & X \end{array}$$

被覆準同型の合成もまた被覆準同型である. つまり $(A, h), (B, k), (C, m)$ が X の被覆空間で, $\varphi : A \rightarrow B, \psi : B \rightarrow C$ が被覆準同型ならば $\psi \circ \varphi : A \rightarrow C$ は A から C への被覆準同型である.

Theorem 6.34 より被覆準同型 $\varphi : A \rightarrow B$ は必ず全射になり, (A, φ) は B の被覆空間である.

Definition 6.36. X の被覆空間 (A, h) から同じく X の被覆空間 (B, k) への被覆準同型 φ が全単射であり逆写像も連続なとき φ は (被覆) 同型 (*isomorphism*) であると言い, さらに $B = A, k = h$ の場合, 自己同型 (*automorphism*) または被覆変換 (*covering transformation* または *deck transformation*) であると言う. また同型 $\varphi : A \rightarrow B$ が存在する 2 つの被覆空間 $(A, h, X), (B, k, X)$ は (被覆空間として) 同型であると言う. X の被覆空間 (A, h) の被覆変換の全体は写像の合成を積とし, 恒等写像を単位元, 逆写像を逆元として群をなす. これを $\text{Aut}(A, h)$ で表し, 被覆変換群と呼ぶ.

準同型 $\varphi : A \rightarrow B$ とは写像 $h : A \rightarrow X$ の被覆空間 (B, k, X) への持ち上げに他ならないことに注意しよう。従って持ち上げの一意性より次が成り立つ。

Theorem 6.37. $(A, h), (B, k)$ を X の被覆空間とする。このとき 2 つの準同型 $\varphi_j : A \rightarrow B, j = 1, 2$ が 1 点で一致すれば、 A 全体で一致する。

被覆変換 $\varphi \in \text{Aut}(A, h)$ は被覆準同型でもあるから、 id_A 以外の被覆変換は不動点を持たない。

Theorem 6.38. (A, h, X) を被覆空間とし $\varphi : A \rightarrow A$ を被覆変換で $\varphi \neq \text{id}_A$ とすると φ は不動点を持たない。

Proof. 被覆変換 $\varphi : A \rightarrow A$ が不動点 a_0 を持てばもう 1 つの被覆変換 id_A と、 $\varphi(a_0) = a_0 = \text{id}_A(a_0)$ となるから、Theorem 6.37 より A 上で一致する。□

基点を固定したときの被覆準同型の存在について Theorem 6.32 から次の定理が得られる。

Theorem 6.39. (A, h) と (B, k) を共通の底空間 X を持つ 2 つの被覆空間とし $a_0 \in A, b_0 \in B$ は $h(a_0) = k(b_0)$ を満たすとする。このとき

(i) 被覆準同型 $\varphi : A \rightarrow B$ で $\varphi(a_0) = b_0$ を満たすものが存在する為の必要十分条件は

$$h_*(\pi_1(A, a_0)) \subset k_*(\pi_1(B, b_0))$$

が成り立つことである。

(ii) 被覆同型 $\varphi : A \rightarrow B$ で $\varphi(a_0) = b_0$ を満たすものが存在する為の必要十分条件は

$$h_*(\pi_1(A, a_0)) = k_*(\pi_1(B, b_0))$$

が成り立つことである。

(iii) $A = B, h = k, a_0, b_0 = a_1$ の場合、 $\varphi(a_0) = a_1$ を満たす被覆変換 $\varphi \in \text{Aut}(A, h)$ が存在する為の必要十分条件は

$$h_*(\pi_1(A, a_0)) = h_*(\pi_1(A, a_1))$$

が成り立つことである。

Proof. (i) は Theorem 6.32 より直ちに得られる。(ii) について考えよう。被覆同型 φ が存在すれば Theorem 6.32 より $h_*(\pi_1(A, a_0)) \subset k_*(\pi_1(B, b_0))$ が成り立つ。また同様に φ^{-1} の存在より $h_*(\pi_1(A, a_0)) \supset k_*(\pi_1(B, b_0))$ が成り立つので両者は一致する。

逆に $h_*(\pi_1(A, a_0)) = k_*(\pi_1(B, b_0))$ と仮定しよう。このときの φ の構成の仕方を思い出そう。 $a \in A$ について a_0 から a へ向かう道 α を取りこれを射影した $h \circ \alpha$ を k により b_0 始点の道 β へ持ち上げる。 β の終点が α の取り方に依存しないことは $h_*(\pi_1(A, a_0)) \subset k_*(\pi_1(B, b_0))$ により保証され、 $\varphi(a)$ とは β の終点と定義された。同様に $b \in B$ について b_0 から b へ向かう道 β を取りこれを射影した $k \circ \beta$ を h により a_0 始点の道 α へ持ち上げる。 α の終点が β の取り方に依存しないことは $h_*(\pi_1(A, a_0)) \supset k_*(\pi_1(B, b_0))$ により保証され、 $\psi(b)$ を α の終点と定義すれば道の持ち上げの一意性より任意の $a \in A$ について $\psi(\varphi(a)) = a$ が、そして任意の $b \in B$ について $\varphi(\psi(b)) = b$ が成り立つので $\psi = \varphi^{-1}$ であり、 φ は同相写像であることが分かる。よって φ は被覆同型である。

(iii) は (ii) の直接の帰結である。□

Theorem 6.39 (ii) は共通の底空間を持つ被覆空間 (A, h, X) と (B, k, X) が基点 a_0, b_0 を固定して同値になる条件を与えていると考えることが出来る. それでは基点を固定しない場合はどうなるであろうか? 些か中途半端であるが, 次の定理が答えの 1 つになる

Theorem 6.40. 底空間を共有する 2 つの被覆空間 $(A, h, X), (B, k, X)$ について, 次の 3 条件は互いに同値である.

- (i) $(A, h, X), (B, k, X)$ は被覆空間として同値. つまり同相写像 $f: A \rightarrow B$ で $h = k \circ f$ を満たすものが存在する.
- (ii) $h(a_0) = k(b_0)$ を満たす任意の $(a_0, b_0) \in A \times B$ について $h_*(\pi_1(A, a_0))$ と $k_*(\pi_1(B, b_0))$ は $\pi_1(X, h(a_0))$ の部分群として共役.
- (iii) $h(a_0) = k(b_0)$ を満たすある $(a_0, b_0) \in A \times B$ について $h_*(\pi_1(A, a_0))$ と $k_*(\pi_1(B, b_0))$ は $\pi_1(X, h(a_0))$ の部分群として共役.

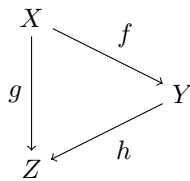
Proof. (i) \implies (ii) について. $f: A \rightarrow B$ が同相写像で $h = k \circ f$ を満たすとする. $x_0 = h(a_0) = k(b_0)$, $f(a_0) = b_1$ と置けば $k(b_1) = k(f(a_0)) = h(a_0) = k(b_0)$ であるから $b_0, b_1 \in k^{-1}(x_0)$ であり, Theorem 6.29(i) より $k_*(\pi_1(A, b_1))$ と $k_*(\pi_1(A, b_0))$ は共役である. また f は同相であるから $f_*(\pi_1(A, a_0)) = \pi_1(B, b_1)$ ゆえ

$$h_*(\pi_1(A, a_0)) = k_*(f_*(\pi_1(A, a_0))) = k_*(\pi_1(A, b_1))$$

となるので, $k_*(\pi_1(A, b_0))$ と $h_*(\pi_1(A, a_0))$ は共役である.

(ii) \implies (iii) は明らかであるから (iii) \implies (i) を示そう. $x_0 = h(a_0) = k(b_0)$ と置く Theorem 6.29 (ii) より $h_*(\pi_1(A, a_0)) = k_*(\pi_1(A, b_1))$ を満たす $b_1 \in k^{-1}(x_0)$ が存在する. よって Theorem 6.39 より $f(a_0) = b_1$, $k \circ f = h$ を満たす同相写像 $f: A \rightarrow B$ が存在する. \square

Theorem 6.41. X, Y, Z を局所道連結な道連結 Hausdorff 空間とする. また図式



において f, g は被覆写像であり, h は連続で $g = h \circ f$ が成り立つとする. このとき h も被覆写像である.

Proof. $g = h \circ f$ において g は全射であるから h も全射である. 任意の $z_0 \in Z$ について g に関する z_0 の均一被覆近傍 W を取り, $g^{-1}(W) = \bigcup_{i \in I} U_i$ を道連結成分への分解とすると, 各 $i \in I$ について $g|_{U_i}: U_i \rightarrow W$ は同相写像である. 次に $h^{-1}(W) = \bigcup_{j \in J} V_j$ を道連結成分への分解とする. このとき $h^{-1}(W)$ は開集合であり Y の局所道連結性より各成分 V_j も開集合である.

任意の $i \in I$ について $f(U_i) \cap V_j \neq \emptyset$ を満たす $j \in J$ がただ一つ存在すること, 及びこのとき $f(U_i) \subset V_j$ が成り立つことを示そう. 実際 U_i は道連結であるから $f(U_i)$ もそうであり, $h(f(U_i)) = g(U_i) = W$ であるから $f(U_i) \subset h^{-1}(W) = \bigcup_{j \in J} V_j$ が成り立ち, $f(U_i) \neq \emptyset$ であるから $f(U_i) \cap V_j \neq \emptyset$ を満たす $j \in J$ が存在する. $y \in f(U_i) \cap V_j$ を取ると V_j とは y と $h^{-1}(W)$ 内の道で結ばれる曲線の終点を全て集めたものである

から $f(U_j) \subset V_j$ が成り立つ. $j' \neq j$ について $V_j \cap V_{j'} = \emptyset$ であるから $f(U_i) \cap V_{j'} = \emptyset$ が成り立つので, このような j はただ一つである.

$j_0 \in J$ を任意に取り

$$I_0 = \{i \in I : f(U_i) \cap V_{j_0} \neq \emptyset\}$$

と置けば, 上で述べた事柄より

$$I_0 = \{i \in I : f(U_i) \subset V_{j_0}\}$$

及び

$$f^{-1}(V_{j_0}) = \bigcup_{i \in I_0} U_i$$

が成り立つ. Lemma 6.16 より右辺が $f^{-1}(V_{j_0})$ の道連結成分への分解を与えていることに注意しよう. そこで最後に

Claim: $i \in I_0$ について $f|_{U_i} : U_i \rightarrow V_{j_0}$ は同相写像である.

を示そう. これが示されれば $h|_{V_{j_0}} \circ f|_{U_i} = g|_{U_i} : U_i \rightarrow W$ より $h|_{V_{j_0}} = g|_{U_i} \circ (f|_{U_i})^{-1} : V_{j_0} \rightarrow W$ も同相写像となり, 証明が完了する.

$\therefore x_0 \in U_i$ を取り $y_0 = f(x_0) (\in f(U_i) \subset V_{j_0})$, $z_0 = g(x_0) (= h(y_0))$ と置く. 任意の $y \in V_{j_0}$ について β を y_0 から y へ向かう V_{j_0} 内の道とし, α を被覆写像 f に関する x_0 始点の β の持ち上げとし, α' を被覆写像 g に関する x_0 始点の $h \circ \beta$ の持ち上げとする. このとき $g \circ \alpha = h \circ f \circ \alpha = h \circ \beta$ であるから α も x_0 を始点とし g に関する $h \circ \beta$ の持ち上げである. 従って持ち上げの一意性より $\alpha = \alpha'$ である. そこで共通の終点を x と置けば x は α' の終点であるから U_i に属し, α の終点であるから $f(x) = y$ である. よって $f|_{U_i} : U_i \rightarrow V_{j_0}$ は全射である. 単射性については $h|_{V_{j_0}} \circ f|_{U_i} = g|_{U_i} : U_i \rightarrow W$ が単射であることから直ちに従う. 従って $f|_{U_i}$ は連続な全単射である. さらに被覆写像であるから開写像であり, $(f|_{U_i})^{-1}$ の連続性が従い. よって $f|_{U_i}$ は同相写像である. \square

残念であるが Theorem 6.34, 6.41 の可換図式

$$\begin{array}{ccc} X & & Y \\ g \downarrow & \searrow f & \\ Z & & \swarrow h \end{array}$$

において f, h が被覆写像であってもその合成 $g = h \circ f$ は一般に被覆写像であるとは限らない. 反例については Munkres [22] を見よ. しかしながら Z に適当な仮定を追加すれば g が被覆写像になる. 次節の Theorem 6.47 を見よ.

6.6 被覆空間の存在定理

(A, h) を X の被覆空間とし $a_0 \in A$ とするとき $h_*(\pi_1(A, a_0))$ は $\pi_1(X, h(a_0))$ の部分群であった. 逆に道連結かつ局所道連結な位相空間 X と $x_0 \in X$ が与えられたとき $\pi_1(X, x_0)$ の任意の部分群 H について X の被覆空間 (A, h) と点 $a_0 \in A$ を $h(a_0) = x_0$ かつ $h_*(\pi_1(A, a_0)) = H$ を満たすように構成することが出来る.

これを示すために準備として基本近傍系の定義と、与えられた基本希望系から位相を構成する方法について復習しておこう。

Definition 6.42. 集合 X の各点 $x \in X$ に次の 3 条件を満たす X の部分集合の空でない族 $\mathcal{U}(x)$ が与えられているとき、 $\{\mathcal{U}(x) : x \in X\}$ を基本近傍系と言い、 $\mathcal{U}(x)$ に属する集合を x の基本近傍と言う。

- (a) $U \in \mathcal{U}(x)$ ならば $x \in U$.
- (b) $U, V \in \mathcal{U}(x)$ ならば $W \subset U \cap V$ を満たす $W \in \mathcal{U}(x)$ が存在する.
- (c) $U \in \mathcal{U}(x), y \in U$ ならば $V \subset U$ を満たす $V \in \mathcal{U}(y)$ が存在する.

基本近傍系 $\{\mathcal{U}(x) : x \in X\}$ が与えられたとき X の部分集合 O について、条件

$$\forall x \in O : \exists U \in \mathcal{U}(x) : U \subset O$$

を考えよう。この条件が成り立つ集合 O の全体を \mathcal{O} と置く。このとき \mathcal{O} について (a), (b) を用いて

- (1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$.
- (2) $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ ならば $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.
- (3) $O_\lambda \in \mathcal{O}, \lambda \in \Lambda$ ならば $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

が成り立つことが容易に分かる。つまり \mathcal{O} は開集合族であり X に位相を定める。また (c) より基本近傍が開集合であることが従う。

Theorem 6.43. X は道連結かつ局所単連結な Hausdorff 位相空間であるとし、 $x_0 \in X$ とする。このとき $\pi_1(X, x_0)$ の任意の部分群 H について、 X の被覆空間 (A, h) と $a_0 \in A$ で $h(a_0) = x_0, H = h_*(\pi_1(A, a_0))$ を満たすものが存在する。

Proof. $\mathcal{P}(X, x_0)$ で x_0 を始点とする X の道の全体を

$$\mathcal{P}(X, x_0) = \{\alpha : \alpha \text{ は区間 } [0, 1] \text{ から } X \text{ への連続写像で } \alpha(0) = x_0 \text{ を満たす}\}.$$

と置く。以下では X において path-homotopic (始点と終点を留めたまま homotopic) であるという関係を \sim で表し、 $[\gamma]$ で道 γ の属する同値類を表そう。つまり $\alpha, \beta \in \mathcal{P}(X, x_0)$ について

$$\alpha \sim \beta \stackrel{\text{def}}{\iff} \alpha(1) = \beta(1) \text{ であり、さらに } \alpha \text{ と } \beta \text{ は path-homotopic}$$

とする。また $\alpha, \beta \in \mathcal{P}(X, x_0)$ について “ \sim ” と別な同値関係 $\alpha \approx \beta$ を

$$\alpha(1) = \beta(1) \text{ and } [\alpha \cdot \beta^{-1}] \in H$$

が成り立つことと定義する。但しこれは $\alpha(1) = \beta(1)$ のとき $\alpha \cdot \beta^{-1}$ を定義することが出来て x_0 を基点とする閉道になるので、同値類 $[\alpha \cdot \beta^{-1}]$ は $\pi_1(X, x_0)$ の元に他ならずこれが部分群 H に属するという意味である。

ここで α, β がともに始点を x_0 とする道で、終点をも共有し、始点を終点を留めたままホモトピック $\alpha \sim \beta$ ならば $\alpha \cdot \beta^{-1} \sim 1_{x_0}$ であるから $[\alpha \cdot \beta^{-1}] = [1_{x_0}] \in H$ が成り立つ。つまり 2 つの道 $\alpha, \beta \in \mathcal{P}(X, x_0)$ について

$$\alpha \sim \beta \implies \alpha \approx \beta$$

が成り立つことに注意しよう。

さて $[\alpha]$ と区別するために記号 $\{\alpha\}$ で関係 \approx に関する α の属する同値類を表すことにして, 商集合を

$$(6.12) \quad A = \mathcal{P}(X, x_0) / \approx$$

と置く. また $h: A \rightarrow X$ を

$$(6.13) \quad h(\{\alpha\}) = \alpha(1) (= \alpha \text{ の終点})$$

と置く. このとき $h(\{1_{x_0}\}) = 1_{x_0}(1) = x_0$ であり, X の任意の点 x は x_0 と道で結ぶことが出来るので h は全射である. また

$$(6.14) \quad a_0 = \{1_{x_0}\} \in A$$

と置く. これで (A, h) の定義が完了した, これから A に基本近傍系を導入し位相を定義する. そして (A, h) が X の被覆であることを証明するが, 証明はかなり長いので, ステップに分けて行う.

(i) 点 $a = \{\alpha\} \in A$ について $x = h(a) = \alpha(1)$ と置き $x \in U$ を満たす開集合 U で単連結なものを取り,

$$(6.15) \quad U(a) = \{\{\alpha \cdot \sigma\} : \sigma \text{ は } x \text{ を始点とする } U \text{ 内の道}\}$$

置く. 右辺が代表元 α の選び方に依存しないことを見ておこう. この為に β も x_0 を始点, x を終点とする X の道で $[\alpha \cdot \beta^{-1}] \in H$ を満たすとし, δ を x を始点とし, σ と同じ終点を持つ U 内の道とする. U は単連結であるから $\sigma \cdot \delta^{-1} \sim 1_x$ が成り立つので

$$[(\alpha \cdot \sigma) \cdot (\beta \cdot \delta)^{-1}] = [(\alpha \cdot (\sigma \cdot \delta^{-1}))\beta^{-1}] = [(\alpha \cdot 1_x)\beta^{-1}] = [\alpha \cdot \beta^{-1}] \in H$$

であるから $\{\alpha \cdot \sigma\} = \{\beta \cdot \delta\}$ が成り立つ.

(ii) 各点 $a \in A$ について $x = h(a)$ を含む単連結な開集合 U により $U(a)$ の形で表せる A の部分集合の全体を $\mathcal{U}(a)$ と置く. このとき $\{\mathcal{U}(a) : a \in A\}$ が基本近傍系になることを示そう.

(a) については $a \in \mathcal{U}(a)$ を確かめれば良い. これは $a = \{\alpha\}$ のとき $x = h(a) = \alpha(1) \in U$ であり $\alpha \sim \alpha \cdot 1_x$ と 1_x が U 内の道であることより $a = \{\alpha\} = \{\alpha \cdot 1_x\} \in \mathcal{U}(a)$ が従う.

(b) $U(a), V(a) \in \mathcal{U}(a)$ とする. X の局所単連結性より $x = h(a) \in W \subset U \cap V$ を満たす単連結な開集合 W が存在する. このとき $W(a) \subset U(a) \cap V(a)$ が成り立つことことは明らかであろう.

(c) $b \in U(a)$ ならば x を始点とし $h(b)$ を終点とする U 内の, ある道 σ により $b = \{\gamma \cdot \sigma\}$ と表わせる. ここで $\sigma(1)$ を始点とする U 内の任意の道 δ について $(\gamma \cdot \sigma)\delta \sim \gamma \cdot (\sigma \cdot \delta)$ となり $\sigma \cdot \delta$ は x を始点とする U 内の道であるから $\{(\gamma \cdot \sigma)\delta\} = \{\gamma \cdot (\sigma \cdot \delta)\} \in U(a)$ となる. これより $U(b) \subset U(a)$ が分かる.

以上で A に基本近傍系が定義され, A に位相が導入されたことになる. これ以降 A はこの位相のもとで位相空間と考える.

(iii) h が開写像で $h|_{U(a)} : U(a) \rightarrow U$ が同相写像であることを示そう. これが示されれば A が局所単連結で, 特に局所道連結であることも従う.

さて $U(a) \in \mathcal{U}(a)$ について $h(U(a)) \subset U$ が明らかに成り立つが, U の道連結性 (U は単連結なので当然道連結である) より逆の包含関係が成り立つことも分かるので $h(U(a)) = U$ が成り立つ. これより特に $h : A \rightarrow X$ は連続な全射開写像であることが分かる. 実際, 任意の $x \in X$ について x_0 と x を結ぶ $\alpha \in \mathcal{P}(X, x_0)$ を取る. このとき $x \in U$ を満たす任意の単連結開集合 U について $h(U(a)) = U$ より $U \subset h(A)$ が成り立つ.

次に $h|_{U(a)} : U(a) \rightarrow U$ は同相写像である. 実際, 連続な開写像を開集合上に制限しても連続な開写像であるから, $h|_{U(a)} : U(a) \rightarrow U$ は連続な開写像で全射である. よって単射であることが分かれば, 逆写像が存在

し、開写像であることから逆写像の連続性も従う。そこで $b = \{\alpha \cdot \delta\}$, $c = \{\alpha \cdot \sigma\} \in U(a)$ で $h(b) = h(c)$ としよう。このとき δ と σ の終点は $h(b) = h(c)$ であるから一致し U の単連結性より $\delta \cdot \delta^{-1} \sim 1_x$ が成り立つので

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot \delta)(\alpha \cdot \sigma)^{-1} &\sim (\alpha \cdot \delta)(\sigma^{-1} \cdot \alpha^{-1}) \\ &\sim (\alpha \cdot (\delta \cdot \sigma^{-1})) \cdot \alpha^{-1} \\ &\sim (\alpha \cdot 1_x) \cdot \alpha^{-1} \\ &\sim \alpha \cdot \alpha^{-1} \\ &\sim 1_{x_0} \end{aligned}$$

であるから $[(\alpha \cdot \delta)(\alpha \cdot \sigma)^{-1}] = [1_{x_0}] \in H$ が成り立つ。従って $b = \{\alpha \cdot \delta\} = \{\alpha \cdot \sigma\} = c$ となり、 $h|_{U(a)} : U(a) \rightarrow U$ は単射である。

(iv) $a_1 = \{\gamma_1\}$, $a_2 = \{\gamma_2\}$ が $h(a_1) = h(a_2) = x$ かつ $a_1 \neq a_2$ を満たせば $U(a_1) \cap U(a_2) = \emptyset$ であることを示そう。これは $b \in U(a_1) \cap U(a_2)$ が存在すれば $b = \{\gamma_1 \cdot \delta\} = \{\gamma_2 \cdot \sigma\}$ と表せるが $\gamma_1 \cdot \delta \approx \gamma_2 \cdot \sigma$ より

$$\begin{aligned} H \ni [(\gamma_1 \cdot \delta)(\gamma_2 \cdot \sigma)^{-1}] &= [(\gamma_1 \cdot \delta)(\sigma^{-1} \cdot \gamma_2^{-1})] \\ &= [((\gamma_1 \cdot \delta)\sigma^{-1}) \cdot \gamma_2^{-1}] \\ &= [(\gamma_1 \cdot (\delta \cdot \sigma^{-1})) \cdot \gamma_2^{-1}] \\ &= [(\gamma_1 \cdot 1_x) \cdot \gamma_2^{-1}] \quad (U \text{ は単連結ゆえ閉道 } \delta \cdot \sigma^{-1} \text{ は零ホモトピック}) \\ &= [\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}] \end{aligned}$$

であるから $a_1 = \{\gamma_1\} = \{\gamma_2\} = a_2$ となり矛盾である。

(v) A の Hausdorff 性を示そう。 $a_1, a_2 \in A$ で $a_1 \neq a_2$ を満たすものを任意に取る。 $h(a_1) \neq h(a_2)$ の場合は X の Hausdorff 性より $h(a_1) \in V_1$, $h(a_2) \in V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ を満たす X の開集合 V_1, V_2 を取れば $a_1 \in h^{-1}(V_1)$, $a_2 \in h^{-1}(V_2)$ で $h^{-1}(V_1) \cap h^{-1}(V_2) = \emptyset$ が成り立つ。次に $h(a_1) = h(a_2)$ の場合は、単連結な開集合 U で $h(a_1) = h(a_2) \in U$ を満たすものを取れば (iv) で示したように $a_1 \in U(a_1)$, $a_2 \in U(a_2)$ で $U(a_1) \cap U(a_2) = \emptyset$ が成り立つ。

(vi) $x \in X$ と $x \in U$ を満たす単連結な開集合 U について

$$h^{-1}(U) = \bigcup_{a \in h^{-1}(x)} U(a)$$

を示そう。これが示されれば $U(a)$ は U と同相ゆえ A の道連結な開集合であり、(iv) より右辺は互いに交わらない集合同士の和であるから Lemma 6.16 より $h^{-1}(U)$ の連結成分への分解を与えている。

まず $h(U(a)) = U$ であったから

$$h^{-1}(U) \supset \bigcup_{a \in h^{-1}(x)} U(a)$$

が成り立つ。逆に $b \in h^{-1}(U)$ ならば $b = \{\beta\}$, $h(b) = \beta(1) \in U$ を満たす道 β で x_0 を始点とし $h(b)$ を終点とするものが存在する。また $h(b)$ を始点とし x を終点とする U 内の道を δ とすれば $\alpha = \beta \cdot \delta$ は x_0 を始点とし x を終点とする道であるから $a = \{\alpha\}$ と置けば $h(a) = x$ ゆえ $a \in h^{-1}(U)$ である。また $\alpha \cdot \delta^{-1} \sim \beta$ より $b = \{\beta\} = \{\alpha \cdot \delta^{-1}\} \in U(a)$ である。よって

$$h^{-1}(U) \subset \bigcup_{a \in h^{-1}(x)} U(a)$$

が成り立つ.

(vii) 以上で (A, h) が X の被覆空間であることを示す為に残された条件は A の道連結性のみである. これについては任意の $a = \{\alpha\} \in A$ について $a_0 = \{1_{x_0}\}$ を始点とし, a を終点とする道の存在を示せばよい. そこで $s \in [0, 1]$ について

$$(6.16) \quad \alpha_s(t) = \alpha(ts), \quad 0 \leq t \leq 1$$

と置いて X の道 α_s を定義し写像 $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow A$ を

$$\tilde{\alpha}(s) = \{\alpha_s\} \in A$$

と置く. このとき $\tilde{\alpha}(0) = \{\alpha_0\} = \{1_{x_0}\}$, $\tilde{\alpha}(1) = \{\alpha_1\} = \{\alpha\} = a$ が成り立つ. 従って $\tilde{\alpha}$ が連続であることを示せば求める道であることが分かる. そこで $s_0 \in [0, 1]$ を任意に取り $\alpha(s_0) \in U$ を満たす単連結な開集合 U を取る. $|s - s_0| < \eta$, $s \in [0, 1]$ ならば $\alpha(s) \in U$ が成り立つように $\eta > 0$ を取る. $s_0 < s < s_0 + \eta$ ならば $\alpha_s \sim \alpha_{s_0} \cdot \alpha_{s_0 s}$ が成り立つ. 但し

$$\alpha_{s_0 s}(t) = \alpha((1-t)s_0 + ts), \quad 0 \leq t \leq 1$$

は α の区間 $[s_0, s]$ に対応する部分を表す道であり $\alpha(s_0)$ を始点, $\alpha(s)$ を終点に持つ U 内の道である. よって

$$\{\alpha_s\} = \{\alpha_{s_0} \cdot \alpha_{s_0 s}\} \in U(\alpha(s_0))$$

が成り立つ. 同様に $s_0 - \eta < s < s_0$ ならば

$$\{\alpha_s\} = \{\alpha_{s_0} \cdot \alpha_{s s_0}^{-1}\} \in U(\alpha(s_0))$$

である. よって $|s - s_0| < \eta$ ならば $\{\alpha_s\} \in U(\{\alpha_{s_0}\})$ が成り立つことになる. これは $\tilde{\alpha}$ が s_0 で連続であることを示す.

(viii) 最後に $h_*(\pi_1(A, a_0)) = H$ を示そう. $\tilde{\alpha}$ を $a_0 = \{1_{x_0}\}$ を基点とする A 内の閉道とする. このとき $\alpha = h \circ \tilde{\alpha}$ は x_0 を基点とする X 内の閉道である. (vi) と同様に (6.16) を用いて α_s を定義すれば写像 $[0, 1] \ni s \mapsto \{\alpha_s\}$ は

$$h(\{\alpha_s\}) = \alpha_s(1) = \alpha(s), \quad 0 \leq s \leq 1$$

を満たし, (vii) で示したように連続であるから α の持ち上げである. また始点は $\{\alpha_0\} = \{1_{x_0}\} = a_0$ であるから持ち上げの一意性より $\tilde{\alpha}$ と一致する. つまり $\tilde{\alpha}(s) = \{\alpha_s\}$, $0 \leq s \leq 1$ である. $\tilde{\alpha}$ は閉道であるから

$$\{\alpha\} = \{\alpha_1\} = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}(0) = \{\alpha_0\} = \{1_{x_0}\}$$

である. よって $\alpha \approx 1_{x_0}$ であり $[h(\tilde{\alpha})] = [\alpha] = [\alpha \cdot 1_{x_0}^{-1}] \in H$ が成り立つ. 従って $h_*(\pi_1(A, a_0)) \subset H$ が成り立つ.

逆に α を x_0 を基点とする閉道で $[\alpha] \in H$ とする. a_0 を始点とする α の A の道への持ち上げを $\tilde{\alpha}$ としたとき, 前と同様に $\tilde{\alpha}(s) = \{\alpha_s\}$, $0 \leq s \leq 1$ が成り立つので $\tilde{\alpha}(1) = \{\alpha_1\} = \{\alpha\}$ であるが, $[\alpha] \in H$ より $\{\alpha\} = \{1_{x_0}\}$ であるから $\tilde{\alpha}(1) = \{\alpha\} = \{1_{x_0}\} = a_0$ となり $\tilde{\alpha}$ は閉道である. よって $[\alpha] = [h(\tilde{\alpha})] \in h_*(\pi_1(A, a_0))$ となり, α の任意性より $H \subset h_*(\pi_1(A, a_0))$ が成り立つ. \square

Definition 6.44. X の被覆空間 (A, h) において A が単連結のとき (A, h) を X の普遍被覆空間 (*universal covering space*) であると言う.

Theorem 6.45. X が道連結かつ局所単連結な Hausdorff 位相空間で (\tilde{X}, p) が X の普遍被覆空間, (A, h) が X の被覆空間ならば被覆写像 $\varphi: \tilde{X} \rightarrow A$ で $p = h \circ \varphi$ を満たすものが存在する.

Proof. $p(\tilde{x}_0) = h(a_0)$ を満たす任意の $(\tilde{x}_0, a_0) \in \tilde{X} \times A$ について $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = [1_{x_0}] \subset h_*(\pi_1(A, a_0))$ であるから, p の持ち上げである連続写像 $\varphi: \tilde{X} \rightarrow A$ が存在する. φ は Theorem 6.34 より被覆写像になる.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\varphi} & A \\ & \searrow p & \downarrow h \\ & & X \end{array}$$

□

普遍被覆空間 \tilde{X} は X の任意の被覆空間を被覆する空間であり, 言わば X の被覆空間の中で一番上位にある空間である. この事実が”普遍”という言葉を使う理由である. また普遍被覆空間について $h_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ はつねに自明群であるから, Theorem 6.39 (ii) より X の 2 つの普遍被覆空間はつねに同型であり普遍被覆空間は同型を除いて一意に定まる. つまり次が成り立つ.

Corollary 6.46. X が道連結かつ局所単連結な Hausdorff 位相空間で $(A, h), (B, k)$ がともに X の普遍被覆空間ならば同相写像 $f: A \rightarrow B$ で $h = k \circ f$ を満たすものが存在する.

前節の終わりに 2 つの被覆写像の合成は必ずしも被覆写像とは限らないという注意をした. しかしながら次の定理が成り立つ.

Theorem 6.47. (A, h) が B の被覆空間, (B, k) が X の被覆空間であり, X が普遍被覆空間を持てば $(A, k \circ h)$ は X の被覆空間である.

Proof. (\tilde{X}, p) を X の普遍被覆空間とする.

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & \nearrow \psi & \downarrow h \\ \tilde{X} & \xrightarrow{\varphi} & B \\ & \searrow p & \downarrow k \\ & & X \end{array}$$

写像 p の被覆写像 k に関する持ち上げ φ は $p = k \circ \varphi$ を満たし Theorem 6.34 より被覆写像である. さらに φ の被覆写像 h に関する持ち上げ $\psi: \tilde{X} \rightarrow A$ は再び Theorem 6.34 より被覆写像である. このとき ψ と p が被覆写像であり連続写像 $k \circ h$ が $p = (k \circ h)\psi$ を満たすことから Theorem 6.41 より $k \circ h$ も被覆写像である.

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \\ \psi \swarrow & & \searrow p \\ A & \xrightarrow{k \circ h} & X \end{array}$$

□

6.7 被覆変換と正規被覆空間

始めに基本群 $\pi_1(X, x_0)$ のファイバー $h^{-1}(x_0)$ への作用を見ておこう. (A, h) を X の被覆空間とし $x_0 \in X$ とする. このとき $a \in h^{-1}(x_0)$ と $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ について γ の始点を a とする持ち上げを γ として

$$(6.17) \quad a \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma}(1)$$

と置いて, ファイバー $h^{-1}(x_0)$ への群 $\pi_1(X, x_0)$ の右からの作用を定義する. ホモトピーの持ち上げ定理から $\gamma \sim \gamma'$ ならば $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1)$ に注意すれば, 上式の右辺が代表元の取り方に依らず定まることが分かる.

Theorem 6.48. 単位元 $[1_{x_0}] \in \pi_1(X, x_0)$ の作用, 及び群の積と作用の関係について次が成り立つ.

- (i) 任意の $a \in h^{-1}(x_0)$ について $a \cdot [1_{x_0}] = a$
- (ii) $(a \cdot [\gamma_1]) \cdot [\gamma_2] = a \cdot ([\gamma_1] \cdot [\gamma_2])$
- (iii) 任意の $a, b \in h^{-1}(x_0)$ について $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ で $a \cdot [\gamma] = b$ を満たすものが存在する.

Proof. (i) 1_{x_0} の a を始点とする持ち上げは 1_a に他ならないので $a \cdot [1_{x_0}] = 1_a(1) = a$ である.

(ii) a を始点とする γ_1 の持ち上げを $\tilde{\gamma}_1$ とし, $b = \tilde{\gamma}_1(1)$ を始点とする γ_2 の持ち上げを $\tilde{\gamma}_2$ とすれば $\tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\gamma}_2$ は $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ の a を始点とする持ち上げ $\widetilde{\gamma_1 \cdot \gamma_2}$ と一致する. よって

$$(a \cdot [\gamma_1]) \cdot [\gamma_2] = \tilde{\gamma}_1(1) \cdot [\gamma_2] = b \cdot [\gamma_2] = \tilde{\gamma}_2(1) = \widetilde{\gamma_1 \cdot \gamma_2}(1) = a \cdot (\gamma_1 \cdot \gamma_2)$$

である.

(iii) については a を始点とし b を終点とする道 $\tilde{\gamma}$ を取り $\gamma = h \circ \tilde{\gamma}$ と置けば γ の a を始点とする持ち上げは $\tilde{\gamma}$ に他ならないので $a \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma}(1) = b$ が成り立つ. \square

さて $a_0 \in h^{-1}(x_0)$ を固定し

$$f([\gamma]) = a_0 \cdot [\gamma], \quad \gamma \in \pi_1(X, x_0)$$

で写像 $f: \pi_1(X, x_0) \rightarrow h^{-1}(x_0)$ を定義しよう. f の性質を調べるため, 以下の議論で必要になる群の剰余類について復習をしておこう.

群 G の部分群 H が与えられたとき 2 元の間

$$g_1 \sim g_2 \iff g_1 g_2^{-1} \in H$$

として関係 \sim を定義すれば同値関係である. そして $g \in G$ の属す同値類とは

$$g^* \sim g \iff g^* g^{-1} \in H \iff g^* \in Hg$$

より g の同値類は

$$Hg = \{hg_1 : h \in H\}$$

と表すことが出来る. また

$$g_1 \sim g_2 \iff Hg_1 = Hg_2$$

が成り立つ. これらの同値類を G の H による左剰余類と呼ぶ.

この左剰余類の議論を $G = \pi_1(X, x_0)$, $H = h_*(\pi_1(A, a_0))$ について適用すれば

$$\begin{aligned} f([\gamma_1]) &= f([\gamma_2]) \\ \iff a_0 \cdot [\gamma_1] &= a_0 \cdot [\gamma_2] \\ \iff a_0 \cdot ([\gamma_1] \cdot [\gamma_2]^{-1}) &= a_0 \\ \iff [\gamma_1] \cdot [\gamma_2]^{-1} &\in h_*(\pi_1(A, a_0)) \quad (\because \text{Lemma 6.30 より}) \\ \iff h_*(\pi_1(A, a_0))[\gamma_1] &= h_*(\pi_1(A, a_0))[\gamma_2] \end{aligned}$$

が成り立つ。また $f: \pi_1(X, x_0) \rightarrow h^{-1}(x_0)$ が全射であることは Theorem 6.48 (iii) より直ちに従う。従って次が示されたことになる。

Proposition 6.49. $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ について $a_0 \cdot [\alpha] = a_0 \cdot [\beta]$ となる為の必要十分条件は $[\alpha] \cdot [\beta^{-1}] \in h_*(\pi_1(A, a_0))$ であり, 群 $\pi_1(X, x_0)$ の部分群 $h_*(\pi_1(A, a_0))$ に関する各左剰余類 $h_*(\pi_1(A, a_0))[\gamma]$ に $a_0 \cdot [\gamma_1] \in h^{-1}(x_0)$ を対応させる写像が定義可能となり, この写像は全単射である. これより特に $h^{-1}(\{x_0\})$ と $\pi_1(X, x_0)$ の $h_*(\pi_1(A, a_0))$ に関する左剰余類の全体は等しい濃度を持つ, つまり全単射が存在する.

さて被覆変換 $\varphi \in \text{Aut}(A, h)$ を $h^{-1}(x_0)$ に制限すると $h^{-1}(x_0)$ から $h^{-1}(x_0)$ への全単射を与える. 被覆変換群の $h^{-1}(x_0)$ への作用については Theorem 6.48 の (i) と対応する $\text{id}_A(a) = a$ は自明に成り立つし (ii) に対応するのは $\psi(\varphi(a)) = \psi \circ \varphi(a)$ であるが, これも自明に成り立つ. 重要なのは次が成り立つことである.

Theorem 6.50. $a \in h^{-1}(x_0)$, $\varphi \in \text{Aut}(A, h)$, $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ について

$$(6.18) \quad \varphi(a \cdot [\gamma]) = \varphi(a) \cdot [\gamma]$$

が成り立つ.

Proof. a を始点とする γ の持ち上げを $\tilde{\gamma}$ とし, $\tilde{\gamma}$ の終点を b とすれば, $a \cdot [\gamma] = b$ であるから $\varphi(a \cdot [\gamma]) = \varphi(b)$ である. また $\varphi \circ \tilde{\gamma}$ は $h \circ (\varphi \circ \tilde{\gamma}) = h \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ より γ の持ち上げであり $\varphi(a)$ を始点, $\varphi(b)$ を始点を持つ. よって $\varphi(a) \cdot [\gamma] = \varphi(b)$ となり $\varphi(a \cdot [\gamma]) = \varphi(b) = \varphi(a) \cdot [\gamma]$ が成り立つ. \square

残念ながら $h^{-1}(x_0)$ の全単射が与えられても, これの拡張である被覆変換がいつでも存在する訳ではない. 以下では被覆変換が存在する為の条件を求めよう. まずは正規化群の復習をしておこう.

Definition 6.51. 群 G の部分群 H について

$$(6.19) \quad N_G(H) = \{g \in G : gH = Hg\} = \{g \in G : g^{-1}Hg = H\}$$

と置けば $N_G(H)$ は H を正規部分群として含むような最大の G の部分群である. $N_G(H)$ を H の正規化部分群 (*normalizer*) と言う

さて $a_0 \in h^{-1}(x_0)$ を固定して

$$F_{a_0} = \{a \in h^{-1}(x_0) : \exists \varphi \in \text{Aut}(A, h) \text{ with } \varphi(a_0) = a\}$$

と置く. 被覆変換は 1 点での像が定まれば定まる (Theorem 6.37 を参照). よって各点 $a \in F_{a_0}$ について $\varphi(a_0) = a$ を満たす $\varphi \in \text{Aut}(A, h)$ は一意的に存在する. 従って $\text{Aut}(A, h)$ を調べるには F_{a_0} を調べればよい. とは言うものの必要な準備は既に終わっている.

まず Theorem 6.39 (iii) より $a \in h^{-1}(x_0)$ について

$$a \in F_{a_0} \iff h_*(\pi_1(A, a)) = h_*(\pi_1(A, a_0))$$

が成り立つ. $\tilde{\alpha}$ を a_0 を始点 a を終点とする A 内の道とし $\alpha = h \circ \tilde{\alpha}$ と置けば $\pi_1(A, a) = [\tilde{\alpha}^{-1}] \pi_1(A, a_0) [\tilde{\alpha}]$ より

$$h_*(\pi_1(A, a)) = [\alpha^{-1}] h_*(\pi_1(A, a_0)) [\alpha]$$

である. 従って $a \in F_{a_0}$ ならば

$$(6.20) \quad [\alpha^{-1}] h_*(\pi_1(A, a_0)) [\alpha] = h_*(\pi_1(A, a_0))$$

を満たす $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ により $a = a_0 \cdot [\alpha]$ と表せる. つまり群 $\pi_1(X, x_0)$ の部分群 $h_*(\pi_1(A, a_0))$ の正規化部分群を $N_{\pi_1(X, x_0)}(h_*(\pi_1(A, a_0)))$ と表すことにすれば

$$a \in F_{a_0} \implies \exists [\alpha] \in N_{\pi_1(X, x_0)}(h_*(\pi_1(A, a_0))) : a = a_0 \cdot [\alpha]$$

が成り立つ.

逆に $[\alpha] \in N_{\pi_1(X, x_0)}(h_*(\pi_1(A, a_0)))$ について a_0 を始点とする α の持ち上げを $\tilde{\alpha}$ とし $\tilde{\alpha}$ の終点を a とすれば $a \in h^{-1}(x_0)$ で $h_*(\pi_1(A, a)) = h_*(\pi_1(A, a_0))$ が成り立つので $\varphi(a_0) = a$ を満たす $\varphi \in \text{Aut}(A, h)$ が存在し $a \in F_{a_0}$ である.

以上より $a \in h^{-1}(x_0)$ について

$$\exists \varphi \in \text{Aut}(A, h) : \varphi(a_0) = a \iff \exists [\alpha] \in N_{\pi_1(X, x_0)}(h_*(\pi_1(A, a_0))) : a = a_0 \cdot [\alpha]$$

が成り立つ. しかしながら写像 $\pi_1(X, x_0) \ni [\alpha] \mapsto a_0 \cdot [\alpha]$ は $h_*(\pi_1(A, a_0))$ に関する左剰余類で決まるので, F_{a_0} は $N_{\pi_1(X, x_0)}(h_*(\pi_1(A, a_0)))$ の正規部分群 $h_*(\pi_1(A, a_0))$ に関する剰余群

$$N_{\pi_1(X, x_0)}(h_*(\pi_1(A, a_0))) / h_*(\pi_1(A, a_0))$$

と全単射で対応がつくことになる.

Theorem 6.52. 群 $N_{\pi_1(X, x_0)}(h_*(\pi_1(A, a_0))) / h_*(\pi_1(A, a_0))$ の各元 $h_*(\pi_1(A, a_0))[\alpha]$ について $a = a_0 \cdot [\alpha]$ と置いて $\varphi(a_0) = a$ を満たすただ 1 つの $\varphi \in \text{Aut}(A, h)$ を対応させる写像は群同型である.

Proof. 既にこの写像が全単射であることは示したので, 準同型であることを示せば十分である. これは剰余類 $h_*(\pi_1(A, a_0))[\alpha], h_*(\pi_1(A, a_0))[\beta]$ のそれぞれに $\varphi, \psi \in \text{Aut}(A, h)$ が対応しているとする. つまり a_0 を始点とする α の持ち上げを $\tilde{\alpha}$ とし終点を $a = \tilde{\alpha}$ と置いて $\varphi(a_0) = a$ を満たす $\varphi \in \text{Aut}(A, h)$ が対応しているということであり, 同様に a_0 を始点とする β の持ち上げを $\tilde{\beta}$ とし終点を $b = \tilde{\beta}$ と置いて $\psi(a_0) = b$ を満たす $\psi \in \text{Aut}(A, h)$ が対応している. このとき $\varphi \circ \tilde{\beta}$ の始点は $\varphi(a_0) = a$ であり, 終点は $\varphi(b)$ である. $\varphi \circ \tilde{\beta}$ は β の持ち上げであるから道 $\tilde{\alpha} \cdot \varphi \circ \tilde{\beta}$ が定義でき $\alpha \cdot \beta$ の持ち上げである. よって

$$a_0 \cdot ([\alpha] \cdot [\beta]) = \varphi(\tilde{\beta}(1)) = \varphi(b) = \varphi \circ \psi(a_0)$$

となる. 従って剰余類 $h_*(\pi_1(A, a_0))[\alpha], h_*(\pi_1(A, a_0))[\beta]$ の積の剰余類 $h_*(\pi_1(A, a_0))[\alpha] \cdot [\beta]$ に $\varphi \circ \psi \in \text{Aut}(A, h)$ が対応する. よってこの対応は群準同型である. \square

Proposition 6.53. (A, h, X) を被覆空間とする. このとき, ある $a_0 \in A$ において $h_*(\pi_1(A, a_0))$ が $\pi_1(X, h(a_0))$ の正規部分群であれば全ての $a \in A$ において $h_*(\pi_1(A, a))$ は $\pi_1(X, h(a))$ の正規部分群である.

Proof. $\tilde{\alpha}$ を a_0 を始点とし, a を終点とする A 内の道とする. そして $\alpha = h \circ \tilde{\alpha}$ と置くとこれは $h(a_0)$ を始点とし, $h(a)$ を終点とする X 内の道である. このとき

$$\pi_1(A, a) = [\tilde{\alpha}]^{-1}\pi_1(A, a_0)[\tilde{\alpha}], \quad \pi_1(X, h(a)) = [\alpha]^{-1}\pi_1(X, h(a_0))[\alpha]$$

が成り立つ. $[\gamma] \in \pi_1(X, h(a))$ を任意に取り $\gamma_0 = \alpha \cdot \gamma \cdot \alpha^{-1}$ と置けば γ_0 は $h(a_0)$ を基点とする閉道であり $[\gamma] = [\alpha]^{-1}[\gamma_0][\alpha]$ と表せるので

$$\begin{aligned} [\gamma]^{-1}h_*(\pi_1(A, a))[\gamma] &= ([\alpha]^{-1}[\gamma_0][\alpha])^{-1}h_*([\tilde{\alpha}]^{-1}\pi_1(A, a_0)[\tilde{\alpha}])[\alpha]^{-1}[\gamma_0][\alpha] \\ &= [\alpha]^{-1}[\gamma_0]^{-1}[\alpha][\alpha]^{-1}h_*(\pi_1(A, a_0))[\alpha][\alpha]^{-1}[\gamma_0][\alpha] \\ &= [\alpha]^{-1}([\gamma_0]^{-1}h_*(\pi_1(A, a_0))[\gamma_0])[\alpha] \\ &= [\alpha]^{-1}h_*(\pi_1(A, a_0))[\alpha] \quad (\because \text{正規性を用いた}) \\ &= h_*([\tilde{\alpha}]^{-1}\pi_1(A, a_0)[\tilde{\alpha}]) \\ &= h_*(\pi_1(A, a)) \end{aligned}$$

となる. □

Definition 6.54. (A, h) を X の被覆空間とする. ある $a_0 \in A$ において $h_*(\pi_1(A, a_0))$ が $\pi_1(X, h(a_0))$ の正規部分群であれば *Proposition 6.53* より任意の $a \in A$ において $h_*(\pi_1(A, a))$ は $\pi_1(X, h(a))$ の正規部分群である. このとき (A, h) は X の正則被覆空間 (*regular covering space*), 正規被覆空間 (*normal covering space*), または *Galois* 被覆空間 (*Galois covering space*), であると言う. 本書では正則という用語を複素解析的の意味に多用する. そこで混乱を避けるため, 以下では正規被覆空間という用語を採用することにする.

さて群 G の部分群 H が正規部分群ならば正規化部分群 $N_G(H)$ は G となる. 従って *Theorem 6.52* より直ちに次の定理が成り立つことが分かる.

Theorem 6.55. (A, h) が X の正規被覆空間ならば任意の $a_0 \in A$ について被覆変換群 $\text{Aut}(A, h)$ は剰余群 $\pi_1(X, h(a_0))/h_*(\pi_1(A, a_0))$ に同型である.

上の *Theorem* の同型対応とは $h(a_0)$ を基点とする閉道 γ について $a = a_0 \cdot [\gamma]$ と置くととき $\varphi \in \text{Aut}(A, h)$ で $\varphi(a_0) = a$ となるものが存在し, $h_*(\pi_1(A, a_0))$ に関する同値類の代表元 $[\gamma]$ の取り方に依らないという意味である.

正規被覆空間の重要性は次の定理より分かるであろう.

Theorem 6.56. 被覆空間 (A, h, X) について次の 4 条件は互いに同値.

- (i) (A, h, X) は正規被覆空間.
- (ii) ある点 (任意の点としても同値な条件が得られる) $x \in X$ において $h_*(\pi_1(A, a))$ は $a \in h^{-1}(x)$ に依らず一定である.
- (iii) ある点 (任意の点としても同値な条件が得られる) $x \in X$ において x を基点とする X 内の任意の閉道 γ を各 $a \in h^{-1}(x)$ を始点として持ち上げるとき, 全ての a について一斉に閉道になるか, 一斉にそうでないか, のどちらかが成り立つこと.
- (iv) ある点 (任意の点としても同値な条件が得られる) $x \in X$ において任意の $a, b \in h^{-1}(x)$ について $\varphi(a) = b$ を満たす $\varphi \in \text{Aut}(A, h)$ が存在する.

Proof. (i) と (ii) が同値であることを示そう. (A, h, X) を正則被覆空間とする. $x \in X$ を任意に取る. $a, b \in h^{-1}(x)$ について $\tilde{\gamma}$ を a, b をそれぞれ始点, 終点とする A 内の道とすると, $\gamma = h \circ \tilde{\gamma}$ は x を基点とする X の閉道であるから

$$\begin{aligned} h_*(\pi_1(A, b)) &= h_*([\tilde{\gamma}]^{-1}\pi_1(A, a)[\tilde{\gamma}]) \\ &= [\gamma]^{-1}h_*(\pi_1(A, a))[\gamma] \\ &= h_*(\pi_1(A, a)) \quad (\because h_*(\pi_1(A, a)) \text{ の正規性を用いた}) \end{aligned}$$

となり, $h_*(\pi_1(A, a))$ は $a \in h^{-1}(x)$ に依らず一定である.

今度はある $x \in X$ において $h_*(\pi_1(A, a))$ が $a \in h^{-1}(x)$ に依らず一定であるとする. γ を x を基点とする閉道とし, $\tilde{\gamma}$ を (任意に取った) $a \in h^{-1}(x)$ を始点とする γ の持ち上げとし, b を $\tilde{\gamma}$ の終点とする. このとき

$$\begin{aligned} [\gamma]^{-1}h_*(\pi_1(A, a))[\gamma] &= h_*([\tilde{\gamma}]^{-1}\pi_1(A, a)[\tilde{\gamma}]) \\ &= h_*(\pi_1(A, b)) = h_*(\pi_1(A, a)) \end{aligned}$$

が成り立つので $h_*(\pi_1(A, a))$ は $\pi_1(X, x)$ の正規部分群である. よって (A, h, X) は正則である.

(ii) と (iii) の同値性を示そう. $h_*(\pi_1(A, a))$ が $a \in h^{-1}(x)$ に依らず一定であれば, 各 $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$ について

$$\begin{aligned} \forall a \in h^{-1}(x) : [\gamma] \in h_*(\pi_1(A, a)) \\ \forall a \in h^{-1}(x) : [\gamma] \notin h_*(\pi_1(A, a)) \end{aligned}$$

のどちらかが成り立つ. これは Lemma 6.30 より γ を a を始点として持ち上げたときに一斉に閉道になるか, またはそうでないかが起こることを意味する.

逆にある点 $x \in X$ において, x を基点とする閉道 γ を $a \in h^{-1}(x)$ を始点として持ち上げたときに a に関わりなく一斉に閉道になるか, または一斉にそうでないかが起こるならば上の論理式のどちらかが成り立つということであり, これは $[\gamma] \in h_*(\pi_1(A, a))$ ならば他の $b \in h^{-1}(x)$ についても $[\gamma] \in h_*(\pi_1(A, b))$ となることを意味する. これは $h_*(\pi_1(A, b)) = h_*(\pi_1(A, a))$ を意味するので, $h_*(\pi_1(A, a))$ は $a \in h^{-1}(x)$ に依らず一定である.

最後に Theorem 6.39 (iii) より $a, b \in h^{-1}(x)$ について $\varphi(a) = b$ を満たす $\varphi \in \text{Aut}(A, h)$ が存在する為の必要十分条件は $h_*(\pi_1(A, a)) = h_*(\pi_1(A, b))$ である. これより (ii) と (iv) の同値性は直ちに従う. \square

6.8 不連続群と被覆空間

さて §6.6 において道連結かつ局所道連結な Hausdorff 空間 X が局所単連結ならば $\pi_1(X, x)$ の任意の部分群 H について $h_*(\pi_1(A, a)) = H, h(a) = x$ を満たす被覆空間 (A, h) が存在することを示した. この節では, 逆に A を与えて X を構成することを目標とする.

Definition 6.57. A を位相空間とし G を A から自身への自己同相写像よりなる群とする. このとき $a, b \in A$ について同値関係を

$$a \sim b \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \varphi \in G : \varphi(a) = b$$

で定義する. また $a \in A$ の属す同値類を a の軌道 (*orbit*) と呼び, A をこの同値関係で割った商集合を A/G と表し, 軌道空間 (*orbit space*) と呼ぶ. A/G の位相は $p^{-1}(U)$ が A の開集合のときに $U \subset A/G$ は開集合であるとして定義される.

Theorem 6.58. $p : A \rightarrow A/G$ は全射, 連続, 開写像である.

Proof. $p : A \rightarrow A/G$ は明らかに全射である. また商空間 A/G の部分集合 H が開集合であるとは $p^{-1}(H)$ が開集合であることと定義されることを思い出しておこう. 従って p は連続である. これより特に A/G の道連結性が従う.

$p : A \rightarrow A/G$ が開写像であることを示そう. さて A の部分集合 U について

$$\begin{aligned} a \in p^{-1}(p(U)) &\iff p(a) \in p(U) \\ &\iff \exists b \in U : p(a) = p(b) \\ &\iff \exists b \in U : \exists \varphi \in G : a = \varphi(b) \\ &\iff \exists \varphi \in G : a \in \varphi(U) \end{aligned}$$

成り立つ. よって

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{\varphi \in G} \varphi(U)$$

が成り立つ. 特に U が A の開集合ならば $\varphi(U)$ も開集合であるから $p^{-1}(p(U))$ も開集合である. これは商位相の定義より $p(U)$ が A/G の開集合であることを意味する. 従って $p : A \rightarrow A/G$ は開写像である. \square

Definition 6.59. A を位相空間とし G を A から自身への自己同相写像よりなる群とする. このとき G の A への作用が真性不連続 (または) 固有に不連続 (*properly discontinuous*) であるとは, 各 $a \in A$ について開近傍 U で, 任意の $\varphi \in G, \varphi \neq \text{id}_A$ について $\varphi(U) \cap U = \emptyset$ が成り立つものが存在する時を言う. このとき $\varphi, \psi \in G$ が $\varphi \neq \psi$ ならば $\varphi(U) \cap \psi(U) = \emptyset$ が成り立つことに注意しよう.

Theorem 6.60. A を道連結かつ局所道連結な Hausdorff 位相空間とする. G を X の自己同相写像よりなる群とし $p : A \rightarrow X = A/G$ を自然な射影とする. このとき $(A, p, A/G)$ が被覆空間であるための必要十分条件は G の A への作用が真性不連続であることである. またこの場合, 被覆空間 $(A, p, A/G)$ は正規. であり, G がこの被覆空間の被覆変換群である.

Proof. Step 1. G の A への作用が固有に不連続であるとする. このとき $x \in A/G$ について $p(a) = x$ となる $a \in X$ を取り a の道連結な開近傍 U を $\varphi, \psi \in G$ が $\varphi \neq \psi$ ならば $\varphi(U) \cap \psi(U) = \emptyset$ が成り立つように取る. このとき p は開写像であるから $V = p(U)$ は A/G の開集合であり $x \in V$ ゆえ V の近傍である. また Theorem 6.58 の証明中で見たように

$$p^{-1}(V) = p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{\varphi \in G} \varphi(U)$$

であるが, 最右辺の和において $\{\varphi(U)\}_{\varphi \in G}$ は互いに素であり, 各 $\varphi(U)$ は道連結であるから, これは道連結成分への分解を与えている.

次に $p|_U : U \rightarrow V = p(U)$ は全射であり, U の取り方より単射である. また連続な開写像であるから同相写像である. また $p|_{\varphi(U)} : \varphi(U) \rightarrow V$ は $p|_{\varphi(U)} = p|_U \circ (\varphi|_U)^{-1}$ と表せるので, やはり同相写像である. これで V が x の均一被覆近傍であることが分かったことになる. これから A/G が局所道連結であること, 及び A/G が Hausdorff 空間であることも従う. 以上で $(A, p, A/G)$ が被覆空間であることが示された.

Step 2. 今度は $(A, p, A/G)$ が被覆空間であると仮定し G の A への作用が固有に不連続であることを示そう. $a \in A$ について $x = p(a)$ の均一被覆近傍 V を取る.

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

を $p^{-1}(V)$ の連結成分への分解とすれば, 各 $\lambda \in \Lambda$ について $p|_{U_\lambda} : U_\lambda \rightarrow V$ は同相である. $a \in U_{\lambda_0}$ を満たす $\lambda_0 \in \Lambda$ を取る. このとき $\varphi \in G, \varphi \neq \text{id}_X$ について $\varphi(U_{\lambda_0}) \cap U_{\lambda_0} = \emptyset$ である. 実際, もし $b \in \varphi(U_{\lambda_0}) \cap U_{\lambda_0}$ が存在したとして $b = \varphi(b_0)$ を満たす $b_0 \in U_{\lambda_0}$ を取る. このとき φ は被覆変換であり, $\varphi \neq \text{id}_A$ であるから固定点を持たないので $b_0 \neq b$ である. 一方 $p(b_0) = p(\varphi^{-1}(b)) = p(b)$ であるが, これは $p|_{U_{\lambda_0}}$ の単射性に矛盾する.

Step 3. 最後に $(A, p, A/G)$ が被覆空間であると仮定し, 正規性や G が被覆変換群を与えることを示そう. まず各 $\varphi \in G$ は $p \circ \varphi = p$ を満たすので被覆変換である. よって $G \subset \text{Aut}(A, p)$ である. 逆に $f \in \text{Aut}(A, p)$ として $a_1 \in A$ を任意に取り $a_2 = f(a_1)$ とおく. このとき $p(a_2) = p(f(a_1)) = p(a_1)$ であるから, ある $\varphi \in G$ で $\varphi(a_1) = a_2$ を満たすものが存在する. φ は既に見たように被覆変換であるが f と同様に a_1 を a_2 に写像する. 従って $\varphi = f$ が成り立つ. \square

第 7 章

Riemann 面上の双曲計量

7.1 Riemann 面と等角構造

はじめに Riemann 面と等角構造の定義を述べておこう。尚、この節の内容は適当に用語を変更すれば n 次元の可微分多様体や、その上の可微分構造の定義や性質についても全く同様に成り立つ一般論ばかりである。

Definition 7.1. 集合 $S(\neq \emptyset)$ が $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 次元位相多様体であるとは

- (a) S は Hausdorff 空間である。
- (b) S は第 2 可算公理を満たす。つまり高々可算な開基が存在する。
- (c) 各 $p \in S$ について p の近傍 V , \mathbb{R}^n の開集合 W 及び同相写像 $\varphi: V \rightarrow W$ の 3 つの組 (V, W, φ) が存在する。

$n = 0$ のときは $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ であるから 0 次元位相多様体とは高々可算個の点よりなる離散空間に他ならない。

上の定義の 3 つの組 (V, W, φ) において $W = \varphi(V)$ であるから W は省略可能である。そこで組 (V, φ) のことを M の chart と呼ぶ。つまり S の開集合 V と V から \mathbb{R}^n のある開集合への連続写像で $\varphi: V \rightarrow \varphi(V)$ が同相写像になっているものの組 (V, φ) を M の chart と言う。第 2 可算公理を満たす Hausdorff 位相空間が n 次元位相多様体であるとは S の各点 $p \in S$ と p の近傍 U について $V \subset U$ を満たす chart (V, φ) が存在するときを言う。

Riemann 面を定義する為に $n = 2$ とし、2 次元位相多様体 S において chart (V, φ) の定義を少し変え、 $W = \varphi(V)$ を \mathbb{R}^2 ではなく \mathbb{C} の開集合に変更する。このとき S を複素 1 次元位相多様体と言う。また S 上の chart の族 $\mathcal{A} = \{(V_j, \varphi_j) : j \in J\}$ が次の 2 条件を満たす時、等角なアトラス (conformal atlas) であると言う。

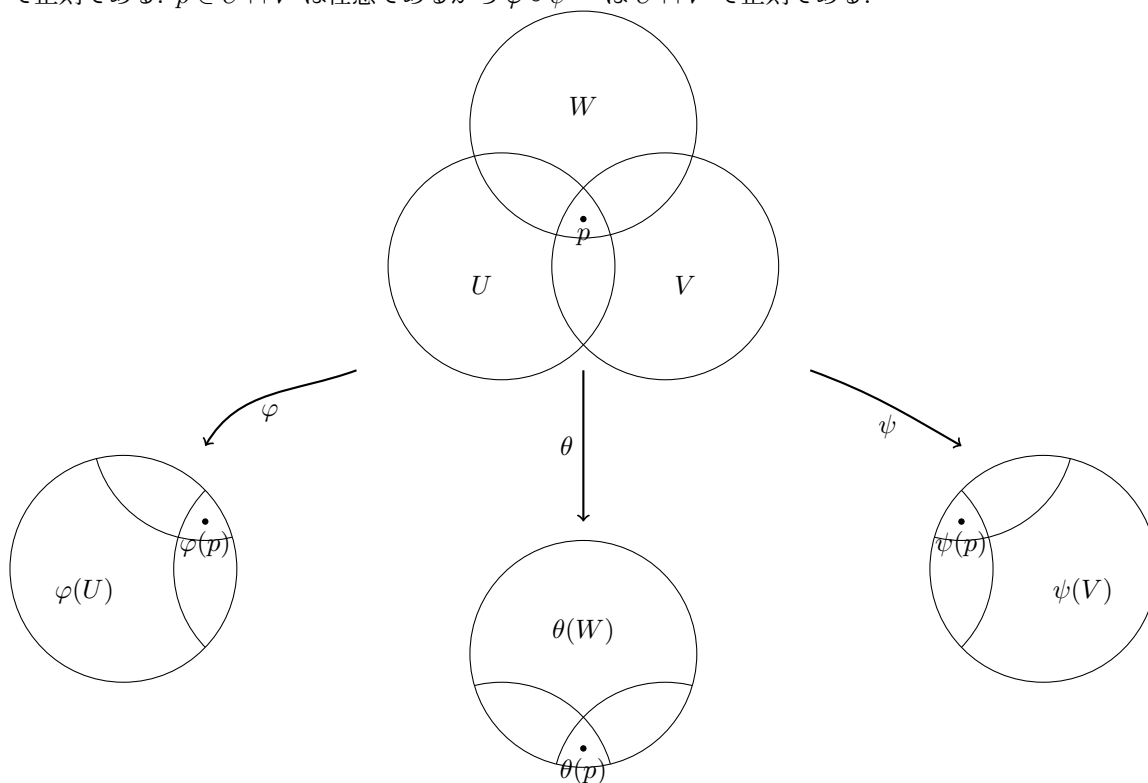
- (a) $\{V_j\}_{j \in J}$ は S の開被覆である。
- (b) $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ を満たす任意の $i, j \in J$ について $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(V_i \cap V_j) \rightarrow \varphi_i(V_i \cap V_j)$ は等角写像、つまり全単射で双正則である。

複素 1 次元位相多様体 (S, \mathcal{A}) の chart $(U, \varphi), (V, \psi)$ が等角に適合的 (conformally compatible) であるとは $U \cap V = \emptyset$ であるか、または $U \cap V \neq \emptyset$ ならば $\varphi \circ \psi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$ が等角、つまり全単射で双正則写像である時を言う。また chart (U, φ) が等角アトラス \mathcal{A} と等角に適合的であるとは任意の $(V_j, \varphi_j) \in \mathcal{A}$ について $(U, \varphi), (V_j, \varphi_j)$ が等角に適合的であるときを言う。等角なアトラス \mathcal{A} について $\bar{\mathcal{A}}$ で

\mathcal{A} と等角に適合的な S の chart の全体を表す. 容易にわかるように $\mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}}$ が成り立つ.

Theorem 7.2. S 上の等角アトラス \mathcal{A} について $\bar{\mathcal{A}}$ も S 上の等角アトラスであり等角なアトラスの中で極大, つまり等角アトラス \mathcal{B} が $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathcal{B}$ を満たせば $\mathcal{B} = \bar{\mathcal{A}}$ が成り立つ. (つまり $\bar{\mathcal{A}}$ を真に含む等角アトラスは存在しない.)

Proof. $\bar{\mathcal{A}}$ も等角アトラスであることを示そう. それには $(U, \varphi), (V, \psi) \in \bar{\mathcal{A}}$ が $U \cap V \neq \emptyset$ のとき $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$ が正則であることを示せば十分である. そこで $p \in U \cap V$ を任意に取る. このとき $(W, \theta) \in \mathcal{A}$ で $p \in W$ を満たすものが存在する. $(U, \varphi), (V, \psi)$ は \mathcal{A} と等角に適合的であるから $\varphi \circ \theta^{-1} : \theta(U \cap W) \rightarrow \varphi(U \cap W)$, $\psi \circ \theta^{-1} : \theta(U \cap W) \rightarrow \psi(U \cap W)$ は等角である. 従って $\varphi \circ \psi^{-1} = (\varphi \circ \theta^{-1}) \circ (\psi \circ \theta^{-1})^{-1}$ は $\psi(U \cap V \cap W)$ から $\varphi(U \cap V \cap W)$ への等角写像であるから, p において正則である. $p \in U \cap V$ は任意であるから $\varphi \circ \psi^{-1}$ は $U \cap V$ で正則である.



次に $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathcal{B}$ を満たす S 上の等角アトラス \mathcal{B} について $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ ならば $\mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}} \subset \mathcal{B}$ より

$$\begin{aligned} & (V, \psi) \text{ は任意の } (U, \varphi) \in \mathcal{B} \text{ と等角に適合的である.} \\ \implies & (V, \psi) \text{ は任意の } (U, \varphi) \in \mathcal{A} \text{ と等角に適合的である.} \\ \implies & (V, \psi) \in \bar{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

よって $\mathcal{B} \subset \bar{\mathcal{A}}$ が成り立つ. □

Theorem 7.3. 複素 1 次元位相多様体 S 上の 2 つの等角アトラス \mathcal{A}, \mathcal{B} について $\bar{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{B}}$ であるための必要十分条件は $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ が等角アトラスであること.

Proof. $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ が等角アトラスであるとする. このとき (V, φ) が $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ と等角に適合的な chart ならば \mathcal{A} と

も等角に適合的であるから $\overline{A \cup B} \subset \bar{A}$ が成り立つ. また上の定理より $\overline{A \cup B}$ を真に含む等角アトラスは存在しない. よって $\overline{A \cup B} = \bar{A}$ が成り立つ. 全く同様に $\overline{A \cup B} = \bar{B}$ も成り立つので $\bar{A} = \bar{B}$ である.

次に $\bar{A} = \bar{B}$ と仮定する. このとき $A \cup B$ が等角アトラスであることを示すには任意の $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ と $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ が等角に適合的であることを示せばよい. まず $(U, \varphi) \in \mathcal{A} \subset \bar{A} = \bar{B}$ より (U, φ) は \mathcal{B} に属す全ての chart と等角に適合的である. 従って特に (V, ψ) とも適合的である. \square

上の Theorem より次が成り立つ.

Proposition 7.4. 複素 1 次元多様体 S 上の 2 つの等角アトラス \mathcal{A}, \mathcal{B} について $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ ならば $\bar{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{B}}$ が成り立つ.

S 上のアトラスとしては条件 (c) を満たしさえすれば出来るだけ chart が少ない方が効率的であるが, 実用上は使い勝手の良い性質を持つ chart を入れておくほうが便利なことも多い. (例えば Theorem 7.8 を見よ.)

(U, φ) を S 上の等角アトラスに適合的な chart とする. このとき U 内の各点について U はその点の座標近傍 (coordinate neighborhood) であると言い, $p_0 \in U$ が $\varphi(p_0) = 0$ を満たすとき (U, φ) を p_0 を中心とする chart であると言う. また φ を (局所) 座標写像, $z = \varphi(p)$, $p \in U$ と表したとき z を局所座標と言う. 特に $\varphi(U)$ が \mathbb{C} 内の開円板であるとき U を座標円板 (coordinate disk) であると言う.

Definition 7.5. 連結な複素 1 次元位相多様体 S と, その上の極大等角アトラス \mathcal{C} の組 (S, \mathcal{C}) のことを Riemann 面と言う. 省略しても混乱の怖れがないときは単に S を Riemann 面と言ったりもする. 伝統的に compact な Riemann 面のことを閉 Riemann 面と呼び, noncompact な場合は開 Riemann 面と呼ぶ.

連結な複素 1 次元位相多様体と, その上の等角アトラス \mathcal{A} の組 (S, \mathcal{A}) のことを Riemann 面と呼ぶこともあるが, これは \mathcal{A} の定める等角構造である $\bar{\mathcal{A}}$ との組 $(S, \bar{\mathcal{A}})$ のことを考えているとする. この場合異なる等角アトラス \mathcal{A} と \mathcal{B} であっても $\bar{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{B}}$ ならば (S, \mathcal{A}) と (S, \mathcal{B}) は同一の Riemann 面である.

Riemann 面の簡単な例として複素平面 \mathbb{C} を考えよう. \mathbb{C} には標準的な chart $(\mathbb{C}, \text{id}_{\mathbb{C}})$ のみからなる等角アトラスが取れるので, 以後 \mathbb{C} はこのアトラスで定まる等角構造を持つ Riemann 面とする. 次に Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の場合を考えよう. まず $(\mathbb{C}, \text{id}_{\mathbb{C}})$ が $\hat{\mathbb{C}}$ の 1 つの chart を与える. また $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ 上の関数を $\varphi(w) = \frac{1}{w}$ と置く時 $(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, \varphi)$ も chart である. これら 2 つの chart は等角に適合的であるから, 2 つの chart からなるアトラスは等角アトラスである. 以後 $\hat{\mathbb{C}}$ はこのアトラスが定める等角構造を持つとする.

D を Riemann 面 S の部分領域とすれば, D も次のように Riemann 面とみなすことが出来る. S の chart (U, φ) で $U \cap D \neq \emptyset$ であるものについて $(U \cap D, \varphi|_{U \cap D})$ は U の chart であり, このような chart の全てがなす族は D の等角アトラスを与える. D をこの等角アトラスのもとで考える時 S の部分 Riemann 面であると言う. 特に重要なのは $S = \hat{\mathbb{C}}$ の場合であり, $\hat{\mathbb{C}}$ の部分領域は, $\hat{\mathbb{C}}$ の部分 Riemann 面とみなすことにする.

Definition 7.6. Riemann 面 (S, \mathcal{A}) 上の関数 $f: S \rightarrow \mathcal{C}$ が正則であるとは 任意の chart (U, φ) について $f \circ \varphi^{-1}$ が $\varphi(U)$ 上で正則であることと定義する. 調和関数や有理型関数についても同様に定義を行う. また 2 つの Riemann 面 $(S, \mathcal{A}), (S', \mathcal{A}')$ 間の写像 $f: S \rightarrow S'$ が正則であるとは $f(U) \cap V \neq \emptyset$ を満たす \mathcal{A} の chart (U, φ) と \mathcal{A}' の chart (V, ψ) について $\psi \circ f \circ \varphi|_{U \cap f^{-1}(V)}$ が正則であることと定義する.

Lemma 7.7. X を第 2 可算公理を満たす位相空間とし \mathcal{U} を X の開被覆, つまり \mathcal{U} は X の開部分集合よりなる族で $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ を満たすとする. このとき \mathcal{U} の高々可算な部分族で X の開被覆となっているものが存在する.

Proof. \mathcal{B} を X の可算な開基とする. つまり

任意の開集合 G と $p \in G$ について $p \in V \subset G$ を満たす $V \in \mathcal{B}$ が存在する.

を満たす開集合の可算な族であるとする. このとき \mathcal{B}' で $B \in \mathcal{B}$ で $B \subset U$ を満たす U が存在するものの全体とする. そして各 $B \in \mathcal{B}'$ について $B \subset U_B$ を満たす $U_B \in \mathcal{U}$ を選んでおく. このとき \mathcal{B}' は \mathcal{B} の部分族であるから高々可算であり, 対応する U の部分族 $U' := \{U_B : B \in \mathcal{B}'\}$ も高々可算である. 証明を完了するには U' が X の被覆であることを示せば十分である. そこで任意の $x \in X$ について $x \in V$ を満たす $V \in \mathcal{U}$ を取る. このとき $x \in B \subset V$ を満たす $B \in \mathcal{B}$ が存在する. \mathcal{B}' の定義より $B \in \mathcal{B}'$ であり $x \in B \subset U_B \in U'$ が成り立つ. よって X は U' により被覆される. \square

Theorem 7.8. S が等角アトラス \mathcal{A} を持つ Riemann 面ならば, \mathcal{A} と等角に適合的な可算アトラス $\mathcal{B} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{\infty}$ で, 各 U_i は precompact な座標円板であり, さらに $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ 開基であるものが存在する.

Proof. 等角アトラス \mathcal{A} が 1 つの chart (U, φ) のみよりなる場合は $W = \varphi(U) \subset \mathbb{C}$ と置いて \mathcal{B} を円板 $\mathbb{D}(z, r)$ で $\overline{\mathbb{D}(z, r)} \subset W$ を満たし r は正の有理数, z は実部, 虚部ともに有理数であるものの全体とする. このとき \mathcal{B} は W の可算開基であるから族 $\varphi^{-1}(\mathcal{B}) = \{\varphi^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ は $U = S$ の可算開基である. また各 $\mathbb{D}(z, r) \in \mathcal{B}$ は W で precompact であるから $\varphi^{-1}(\mathbb{D}(z, r))$ は S で precompact である. また座標函数としては $\varphi|_{\varphi^{-1}(\mathbb{D}(z, r))}$ を考えれば $\varphi^{-1}(\mathbb{D}(z, r))$ から $\mathbb{D}(z, r)$ への同相写像であり, (U, φ) と等角に適合的である.

\mathcal{A} の開被覆であるから, Lemma 7.7 より高々可算な開部分被覆であるアトラス $\{(U_i, \varphi_i)\}$ が存在する. 各 (U_i, φ_i) について上の段落の議論を適用すれば U_i は可算個の U_i 内で precompact な座標円板よりなる開基を持つ. これらの開基の i に関する和は S の可算開基をなす. B がこのような U_i 内の座標円板であるとき B が S で precompact であることを示せば証明は完了する.

B について U_i 内での閉包を \hat{B} とする. $\varphi_i(B) = \mathbb{D}(z, r)$ は開集合 $W = \varphi(U_i)$ 内の円板であり $\overline{\mathbb{D}(z, r)} \subset W$ を満たす. そして $\hat{B} = \varphi^{-1}(\overline{\mathbb{D}(z, r)})$ である. よって \hat{B} は compact (in S) であり S は Hausdorff 空間であるから閉集合である. B の S 内の閉包 \bar{B} とは B を含む最小の閉集合であるから $\bar{B} \subset \hat{B}$ が成り立つ. 従って \bar{B} は compact 集合 \hat{B} に含まれる閉集合であるから compact である. よって B は precompact である. \square

Theorem 7.9. S を等角アトラス \mathcal{A} を持つ Riemann 面とすれば, S の基本群は高々可算である.

Proof. Theorem 7.8 より S は座標円板よりなる可算開基 \mathcal{B} を持つ. \mathcal{B} は S の被覆をなしていることに注意しよう. 各 $B, B' \in \mathcal{B}$ について $B \cap B'$ は開集合であり, 高々可算個の成道連結成分に分解される. \mathcal{X} で全ての $B, B' \in \mathcal{B}$ の組について $B \cap B'$ の各成分から 1 点を取り出して集めたものとする. $B = B'$ の場合もあり得るので, 各 $B \in \mathcal{B}$ について \mathcal{X} に含まれる点は少なくとも 1 つはあることになる. $B \in \mathcal{B}$ と $x, x' \in \mathcal{X} \cap B$ について x から x' への B 内の道を取り $\alpha_{x, x'}^B$ と置く.

$x_0 \in \mathcal{X}$ を任意に取る. x_0 を基点とする任意の閉道は, 有限個の $\alpha_{x, x'}^B$ の形の道をつなぎ合わせて出来る閉道に homotopic であることを示そう. これが示されれば $\pi_1(S, x_0)$ が高々可算であることが分かる.

$\alpha : [0, 1] \rightarrow S$ を x_0 を基点とする閉道とする. $[0, 1] \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \alpha^{-1}(B)$ は開被覆であるから $[0, 1]$ の分割 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ を十分細かく取れば各 i について $[t_{i-1}, t_i] \subset \alpha^{-1}(B_i)$ を満たす $B_i \in \mathcal{B}$ が存在するように出来る. (compact 距離空間における開被覆の Lebesgue 数の存在定理である. Lemma 6.22 を参照.) さて $\alpha_i : [0, 1] \rightarrow B_i$ を α の区間 $[t_{i-1}, t_i]$ への制限のパラメータを取り直し $[0, 1]$ からの写像にしたものとする. (例えば $\alpha_i(t) = \alpha((1-t)t_{i-1} + tt_i)$ と置けばよい.) 各 i について $\alpha(t_i) \in B_i \cap B_{i+1}$ であるから点 $x_i \in \mathcal{X} \cap (B_i \cap B_{i+1})$ で $\alpha(t_i)$ と同じ $B_i \cap B_{i+1}$ の成分に属するものが存在する. β_i を $\alpha(t_i)$ と x_i をこ

の成分内で結ぶ道とする. このとき α_i と $\beta_{i-1}^{-1} \cdot \alpha_{x_{i-1}, x_i}^B \cdot \beta_i$ は単連結な開集合 B_i 内の始点と終点を共有する道であるから (path) homotopic である. β_0, β_n を基点 x_0 に留まったままの道とすると

$$\begin{aligned} \alpha &\sim \alpha_1 \cdots \alpha_n \\ &\sim \beta_0^{-1} \cdot \alpha_{x_0, x_1}^{B_1} \cdot \beta_1 \cdot \beta_1^{-1} \cdot \alpha_{x_1, x_2}^{B_2} \cdot \beta_2 \cdots \beta_n^{-1} \cdot \alpha_{x_{n-1}, x_n}^{B_n} \cdot \beta_n \\ &\sim \alpha_{x_0, x_1}^{B_1} \cdot \alpha_{x_1, x_2}^{B_2} \cdots \alpha_{x_{n-1}, x_n}^{B_n} \end{aligned}$$

である. □

7.2 被覆 Riemann 面

それでは被覆空間と Riemann 面を組み合わせた概念である被覆 Riemann 面について説明しよう.

Theorem 7.10. S を等角アトラス \mathcal{A} を持つ Riemann 面とし $h: \tilde{S} \rightarrow S$ を被覆写像とするこのとき \tilde{S} は第 2 可算公理を満たす Hausdorff 空間である. さらに \tilde{S} には h が正則となるような等角構造が一意的に存在し, この構造のもとで Riemann 面である.

Proof. はじめに \mathcal{A} と等角に適合的な高々可算なアトラス $\mathcal{C} = \{(V_j, \psi_j)\}_{j=1}^J, J \in \mathbb{B} \cup \{\infty\}$ で, 各 V_i は h に関し均一被覆近傍であり $\{V_j\}_{j=1}^J$ が開基となっているものが存在することを示そう.

まず Theorem 7.8 より \mathcal{A} と等角に適合的な可算アトラス $\mathcal{B} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ で, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^\infty$ が開基となっているものが存在する. このとき U_i が均一被覆近傍となっている chart (U_i, φ_i) の全てがなす \mathcal{B} の部分族を $\mathcal{C} = \{(V_j, \psi_j)\}_{j=1}^J, J \in \mathbb{B} \cup \{\infty\}$ と置く. \mathcal{C} が S を被覆することを示せば, \mathcal{C} は S の chart であり \mathcal{B} の部分族であるから \mathcal{A} と等角に適合的である. そこで $x \in S$ を任意に取る. $x \in U_i$ を満たす $U_i \in \mathcal{U}$ と x の均一被覆近傍 W を取ると $x \in U_i \cap W$ も均一被覆近傍である. このとき \mathcal{U} は開基であるから $x \in U_k \cap W$ を満たす $U_k \in \mathcal{U}$ が存在する. この U_k も均一被覆近傍であるから $(U_k, \varphi_k) \in \mathcal{C}$ が成り立つ. $x \in S$ は任意であるから S は \mathcal{C} により被覆される.

Propositon 6.15 より \tilde{S} は Hausdorff 空間である. 各 V_j について $x_j \in V_j$ を満たす x_j を取ると

$$h^{-1}(V_j) = \bigcup_{\tilde{x} \in h^{-1}(\{x_j\})} h^{-1}(V_j) \text{ の } \tilde{x} \text{ を含む成分}$$

と分解される. x_j の fibre $h^{-1}(\{x_j\})$ は Proposition 6.49 より $\pi_1(S, x_j)$ の $h_*(\pi_1(\tilde{S}, \tilde{x}))$ に関する左剰余類の全体と等しい濃度を持つ. $\pi_1(S, x_j)$ は Theorem 7.9 より高々可算であるから fibre $h^{-1}(\{x_j\})$ も高々可算である. 従って

$$h^{-1}(V_j) = \bigcup_{k=1}^{K_j} \tilde{U}_{j,k}, \quad K_j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

と表すことが出来る. このとき $\{\tilde{U}_{j,k}\}$ の全体は \tilde{S} の可算開基であり $\tilde{\varphi}_{j,k} = \psi_j \circ h|_{\tilde{U}_{j,k}}$ が座標函数を与え $\tilde{\mathcal{C}} = \{(\tilde{U}_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j,k})\}$ が等角に適合的であることは容易に確かめられ. よって $\tilde{\mathcal{C}}$ は等角アトラスである. $\tilde{\mathcal{C}}$ と S の等角アトラス $\mathcal{C} = \{(V_j, \psi_j)\}_{j=1}^J$ のもとで h は

$$\psi_j \circ h|_{\tilde{U}_{j,k}} \circ (\tilde{\varphi}_{j,k})^{-1} = \text{id}_{\psi_j(V_j)}$$

と表されるので正則である.

最後に上で定義した等角構造の一意性を示そう。そこで $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ を \tilde{S} の chart とし, この chart のもとで h が正則とする。つまり $h(\tilde{U}) \cap V_j \neq \emptyset$ を満たす任意の j について $\psi_j \circ h|_{\tilde{U}} \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ が $\tilde{\varphi}(\tilde{U})(\subset \mathbb{C})$ 上で正則であるとする。このとき各 $z_0 \in \tilde{\varphi}(\tilde{U})$ について $\tilde{\varphi}^{-1}(z_0) \in \tilde{U}_{j,k}$ となる j, k を取れば $\tilde{U}_{j,k}$ 上で $\psi_j \circ h|_{\tilde{U}} = \tilde{\varphi}_{j,k}$ が成り立つので, z_0 のある近傍上で

$$\tilde{\varphi}_{j,k} \circ \tilde{\varphi}^{-1} = \psi_j \circ h|_{\tilde{U}} \circ \tilde{\varphi}^{-1}$$

は正則である。従って chart $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ は \tilde{C} と等角に適合的であるから \tilde{C} に含まれる。よって \tilde{C}' が \tilde{S} の等角アトラスで, このもとで h が正則ならば $\tilde{C}' \subset \tilde{C}$ が成り立つ。よって Proposition 7.4 より $\tilde{C}' = \tilde{C}$ が成り立つ。□

Riemann 面 S は道連結かつ局所単連結な Hausdorff 位相空間であるから普遍被覆空間 (\tilde{S}, h) が存在する。 \tilde{S} には h が正則となる等角アトラスが一意的に存在する。 \tilde{S} をこの等角アトラスにより定まる Riemann 面とみなすとき S の普遍被覆 Riemann 面と呼ぶ。普遍被覆 Riemann 面は定義より単連結である。実のところ単連結 Riemann 面は本質的に $\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$ の 3 種類しかない。詳しくは次節で述べよう。

7.3 単連結 Riemann 面の分類

Theorem 7.11 (Koebe の一意化定理). S が単連結な Riemann 面ならば S は $\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$ のどれかに等角同値, つまり S から $\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$ のどれかへの等角写像 (全単射正則写像) が存在する。

単連結 Riemann 面 S に等角同値なのは $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$ のどれか 1 つのみであることは Corollary 6.46 より従う。実際 S が $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$ の中の 2 つと等角同値ならば Corollary 6.46 より, この 2 つは等角同値である。 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ は compact であるから他の \mathbb{C}, \mathbb{D} のどれとも等角同値ではない。また \mathbb{C} と \mathbb{D} が等角同値でないことは, Liouville の定理 (\mathbb{C} 上に定数以外の有界正則関数は存在しない) より分かる。

Koebe の一意化定理は大抵の Riemann 面の教科書に記載があるが, 後半部に書かれていることが多いので, そこに進むまでに息切れする。この本の底本である Ahlfors [2] の 9, 10 章には非常にコンパクトな記述があるが, コンパクト過ぎて読破にはかなりの労力が必要である。そこでより丁寧な解説がなされた戸田先生の [34] をお勧めする。

Definition 7.12. Riemann 面 Ω が \mathbb{D} を普遍被覆面として持つとき Ω は双曲的 (hyperbolic) であると言う。

Theorem 7.13. Riemann 面 Ω が双曲的ならば, 任意の $a_0 \in \Omega$ と a_0 のまわりの chart (U, φ) で $\varphi(a_0) = 0$ を満たすものについて次の正規化条件を満たす正則な被覆写像 $f: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ が一意に存在する。

$$(7.1) \quad f(0) = a \text{ and } (\varphi \circ f)'(0) > 0.$$

Proof. 仮定により正則な被覆写像 $g: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ が存在する。 g は全射であるから $g(z_0) = a$ を満たす z_0 が取れる。 g は局所的に単射であるから $(\varphi \circ g)'(z_0) \neq 0$ であり, このとき

$$f_0(z) = g\left(\frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0}z}\right), \quad z \in \mathbb{D}$$

と置けば

$$(\varphi \circ f_0)'(z) = \frac{1 - |z_0|^2}{(1 + \overline{z_0}z)^2} (\varphi \circ g)' \left(\frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0}z} \right)$$

であるから $(\varphi \circ f_0)'(0) = (1 - |z_0|^2)(\varphi \circ g)'(z_0)$ である。そこで $f(z) = f_0(\eta z)$, $\eta = \frac{(\varphi \circ g)'(z_0)}{(\varphi \circ f_0)'(z_0)}$ と置けば, f は要求された正規化条件を満たす。

f の一意性を示すために \tilde{f} も f と同一の正規化条件を満たす正則な被覆写像とする. このとき Corollary 6.46 より $\tilde{f} = f \circ \omega$ を満たす正則写像 $\omega: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ で $\omega(0) = 0$ を満たすものが存在する. このとき Schwarz の補題より $(\varphi \circ \tilde{f})'(0) = (\varphi \circ f)'(\omega(0))\omega'(0) = (\varphi \circ f)'(0)\omega'(0) \leq (\varphi \circ f)'(0)$ が成り立つ. 同様にして $(\varphi \circ f)'(0) \leq (\varphi \circ \tilde{f})'(0)$ も成り立つので $(\varphi \circ f)'(0) = (\varphi \circ \tilde{f})'(0) > 0$ を得る. これより特に $\omega'(0) = 1$ を得る. Schwarz の補題より $\omega = \text{id}_{\mathbb{D}}$ が従うので $\tilde{f} = f$ である. \square

Corollary 7.14. Ω が $\hat{\mathbb{C}}$ 内の領域で双曲的ならば, 任意の $a \in \Omega$ について次の正規化条件を満たす正則被覆写像 $f: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ が一意的に存在する.

- (i) $a \in \mathbb{C}$ の場合は $f(0) = a, f'(0) > 0$,
- (ii) $a = \infty$ の場合は $f(0) = \infty, f(z) = \frac{c}{z} + \dots, c > 0$.

Proof. (i) $a \in \mathbb{C}$ の場合は $U = \Omega \setminus \{\infty\}$ において $\varphi(w) = w - a$ と置き, この chart (U, φ) に Theorem を適用すればよい.

(ii) $a = \infty$ の場合は $U = \Omega \setminus \{0\}$ において $\varphi(w) = \frac{1}{w}$ と置き, この chart (U, φ) に Theorem を適用すれば $\frac{1}{f(z)} = \varphi \circ f(z)$ について $\varphi \circ f(0) = \varphi(\infty) = 0, c_0 := (\varphi \circ f)'(0) > 0$ であるから $z = 0$ のまわりで $\frac{1}{f(z)} = \varphi \circ f(z) = c_0 z + \dots$ と表せる. よって $c = \frac{1}{c_0} > 0$ と置けば $f(z) = \frac{c}{z} + \dots$ と表される. \square

Theorem 7.15. Ω を複素平面内の双曲的領域とし, $\pi: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ を正則被覆写像とする. このとき \mathbb{D} 上の関数について f が \mathbb{D} から Ω の上への正則被覆写像であるための必要十分条件は, ある $\tau \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ により $f = \pi \circ \tau$ と表せることである.

Proof. $\tau \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ により $f = \pi \circ \tau$ 表わされたとしよう. このとき τ が \mathbb{D} から自身への位相同型であることより f も正則被覆写像であることは明らかであろう.

次に f が \mathbb{D} から Ω への普遍被覆写像ならば Corollary 6.46 により $f = \pi \circ \tau$ を満たす位相自己同型 $\tau: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ が存在する. f, π ともに局所同相な正則写像であるから τ は正則である. 従って $\tau \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ である. \square

Theorem 7.16. Ω を複素平面内の双曲的領域とし, $\pi: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ を正則被覆写像とする. このとき \mathbb{D} 上の正則関数について $f(\mathbb{D}) \subset \Omega$ ならば $f(a_0) = \pi(\zeta_0)$ を満たす任意の $a_0, \zeta_0 \in \mathbb{D}$ についてある正則写像 $\omega: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ で $\omega(a_0) = \zeta_0$ と $f = \pi \circ \omega$ を満たすものが存在する.

Proof. Theorem 6.33 を用いると $\omega(a_0) = \zeta_0$ と $f = \pi \circ \omega$ を満たす連続写像 ω 存在が分かる. Theorem 6.33 の証明中で ω が局所的に $\pi^{-1} \circ f$ の形で表されることを示した. 従って正則である. \square

7.4 双曲計量

S を等角アトラス $\mathcal{A} = \{(U, \varphi)\}$ を持つ Riemann 面とする. 各 chart (U, φ) と局所座標 $z = \varphi(p), p \in U$ について

$$(7.2) \quad \rho_\varphi(z)|dz|, \quad z \in \varphi(U) \subset \mathbb{C}$$

で表される形式 ρ とする. つまり別の chart (V, ψ) で $U \cap V \neq \emptyset$ を満たすものについて局所座標を $\tilde{z} = \psi(p)$, $p \in V$ とすれば ψ に関する ρ の表現

$$\rho_\psi(\tilde{z})|d\tilde{z}|, \quad \tilde{z} \in \psi(V) (\subset \mathbb{C})$$

について

$$(7.3) \quad \rho_\psi(\tilde{z}) = \rho_\varphi(\varphi \circ \psi^{-1}(\tilde{z})) |(\varphi \circ \psi^{-1})'(\tilde{z})|$$

が成り立つような形式である.

さて $a \in \Omega$ について 1 つの局所座標による表現 $\rho(z) > 0$

$$\rho_\varphi(z) > 0$$

Riemann 面 Ω が双曲的であるとき, Ω に計量 λ_Ω で普遍被覆写像 $\pi: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ による引き戻しが \mathbb{D} の双曲計量 $\lambda_{\mathbb{D}}$ と一致するものが一意的存在することを示そう. この λ_Ω のことを Ω の双曲計量と言う. λ_Ω は $\lambda_{\mathbb{D}}$ の引き戻しであるからその曲率は一定で -1 である.

Theorem 7.17. Ω を平面内の領域とする. Ω が双曲的ならば Ω 上の正値 C^2 計量 λ_Ω で任意の正則被覆写像 $\pi: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ について等式 $\pi^*(\lambda_\Omega) = \lambda_{\mathbb{D}}$ が成り立つものが一意的存在する. さらに Ω 上の任意の *ultrahyperbolic metric* ρ について $\rho(z) \leq \lambda_\Omega(z)$, $z \in \Omega$ が成り立つ.

Proof. Theorem 7.13 より, 各 $a \in \Omega$ について普遍被覆写像 $f_a: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ で $f_a(0) = a$, $f_a'(0) > 0$ を満たすものが一意的存在する. このとき

$$(7.4) \quad \lambda_\Omega(a) = \frac{2}{|f_a'(0)|}, \quad a \in \Omega$$

と置く. $\alpha \in \pi^{-1}(a)$ を取り $\eta = \frac{\overline{\pi'(\alpha)}}{|\pi'(\alpha)|} \in \partial\mathbb{D}$ と置き

$$\pi_\alpha(\zeta) = \pi \left(\frac{\eta\zeta + \alpha}{1 + \overline{\alpha}\eta\zeta} \right), \quad \zeta \in \mathbb{D}$$

と定義すれば $\pi_\alpha(0) = \pi(\alpha) = a$ であり, $\pi_\alpha'(0) = (1 - |\alpha|^2)\eta\pi'(a) = (1 - |\alpha|^2)|\pi'(\alpha)| > 0$. また $\pi_\alpha: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ は被覆写像である. 従って Theorem 7.13 の一意性の部分から $f_a = \pi_\alpha$ であり

$$\lambda_\Omega(a) = \frac{2}{\pi'(a)} = \frac{2}{(1 - |\alpha|^2)|\pi'(\alpha)|}, \quad \alpha \in \pi^{-1}(a)$$

が成り立つ. そこで $a \in \Omega$ と $\alpha \in \pi^{-1}(a)$ を固定し, π に関する a の均一被覆近傍 V 及び $\pi^{-1}(V)$ の α を含む連結成分を U と置けば, 制限写像 $\pi|_U: U \rightarrow V$ は等角である. 上式の a に $z \in V$ を, α に $\zeta = (\pi|_U)^{-1}(z)$ を代入すれば

$$(7.5) \quad \lambda_\Omega(z) = \frac{2}{(1 - |(\pi|_U)^{-1}(z)|^2)|\pi'((\pi|_U)^{-1}(z))|}, \quad z \in V$$

$$(7.6) \quad \lambda_\Omega(\pi(\zeta)) = \frac{2}{(1 - |\zeta|^2)|\pi'(\zeta)|}, \quad \zeta \in U$$

が成り立つ. 特に (7.6) は λ_Ω の π による引き戻しが $\lambda_{\mathbb{D}}$ であることを示す. また π による Ω の計量 λ の引き戻しは $\lambda(\pi(\zeta))|\pi'(\zeta)|$ の形に表されるのでこれが $\lambda_{\mathbb{D}}(\zeta)$ と一致すれば $\lambda_\Omega(\pi(\zeta)) = \lambda(\pi(\zeta))$ が \mathbb{D} 上で成り立つ. π は全射であるから, これより $\lambda_\Omega = \lambda$ が従う. つまり λ_Ω は一意である.

最後に λ_Ω の最大性を示そう. 非負計量 ρ が Ω 上で ultrahyperbolic とすると $\pi^*(\rho) = \rho \circ |\pi'|$ は \mathbb{D} 上で ultrahyperbolic であるから

$$\rho(\pi(\zeta))|\pi'(\zeta)| \leq \lambda_{\mathbb{D}}(\zeta) = \lambda_\Omega(\pi(\zeta))|\pi'(\zeta)|$$

が成り立つ. 上式に π は局所単葉であるので $\pi'(\zeta) \neq 0$ であること及び π の全射性を合わせれば $\rho(z) \leq \lambda_\Omega(z)$ が Ω で成り立つ. \square

Corollary 7.18. D を領域, Ω を双曲的領域とし函数 $g : D \rightarrow \Omega$ は正則とする. このとき D も双曲的であり

$$(7.7) \quad g^*(\lambda_\Omega)(\zeta) = \lambda_\Omega(g(\zeta))|g'(\zeta)| \leq \lambda_D(\zeta), \quad \zeta \in D$$

が成り立つ. またある点 $a \in D$ において等号が成り立つ為の必要十分条件は被覆写像 $f : \mathbb{D} \rightarrow D$ について $g \circ f$ が \mathbb{D} から Ω への被覆写像であること.

Proof. $g^*(\lambda_\Omega)$ は明らかに至る所, 正值の C^2 な計量であり, $Kg^*(\lambda_\Omega) = K\lambda_\Omega \circ g = -1$ であるから ultrahyperbolic である. よって D は双曲的であり, $g^*(\lambda_\Omega) \leq \lambda_D$ が成り立つ.

$a \in D$ について $b = g(a)$ と置き, a において等号

$$\lambda_D(a) = g^*(\lambda_\Omega)(a) = \lambda_\Omega(g(a))|g'(a)| = \lambda_\Omega(b)|g'(a)|$$

が成り立ったとする. $f_1 : \mathbb{D} \rightarrow D$ を $f_1(0) = a, f_1'(0) > 0$ を満たす被覆写像, $f_2 : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ を $f_2(0) = b, f_2'(0) > 0$ を満たす被覆写像とする. このとき $f_1^*(\lambda_D)(0) = \lambda_D(a)|f_1'(0)| = \lambda_{\mathbb{D}}(0) = 2, f_2^*(\lambda_\Omega)(0) = \lambda_\Omega(b)|f_2'(0)| = \lambda_{\mathbb{D}}(0) = 2$ より $\lambda_D(a) = \frac{\lambda_{\mathbb{D}}(0)}{f_1'(0)} = \frac{2}{f_1'(0)}, \lambda_\Omega(b) = \frac{\lambda_{\mathbb{D}}(0)}{f_2'(0)} = \frac{2}{f_2'(0)}$ であるから

$$\frac{2}{f_1'(0)} = \lambda_D(a) = \lambda_\Omega(b)|g'(a)| = \frac{2|g'(a)|}{f_2'(0)}$$

となり

$$f_1'(0)|g'(a)| = f_2'(0)$$

を得る. 写像 $g_2 \circ f_1$ を被覆 $f_2 : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ に関し持ち上げて $g \circ f_1 = f_2 \circ \varphi$ を満たす正則写像 $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ で $\varphi(0) = 0$ を満たすものを取る. このとき $g'(a)f_1'(0) = f_2'(0)\varphi'(0)$ が成り立つが上式より, 両辺の $|\varphi'(0)| = 1$ が従うので, Schwarz の補題より φ は原点のまわりの回転であり $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ である. よって $g_2 \circ f_1 = f_2 \circ \varphi : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ も被覆写像である. 最後に $f : \mathbb{D} \rightarrow D$ が被覆写像ならば, ある $\psi \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ により $f = f_1 \circ \psi$ と表せるので $g \circ f = (g \circ f_1) \circ \psi$ が成り立つ. よって $g \circ f$ は被覆写像に $\text{Aut}(\mathbb{D})$ を合成したものであるからやはり被覆写像である. \square

Corollary 7.19. Ω_0, Ω_1 を Riemann 面とし写像 $g : \Omega_0 \rightarrow \Omega_1$ は等角, つまり正則な全単射とする. このとき Ω_0, Ω_1 の一方が双曲的ならばもう一方もそうであり $g^*(\lambda_{\Omega_1}) = \lambda_{\Omega_0}$ が成り立つ.

証明は明らかであろう.

それでは複素平面内の領域 Ω について普遍被覆面が $\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$ のどれになるかを考えてみよう. と言っても普遍被覆面が $\hat{\mathbb{C}}$ になることはない. 何故ならば $\hat{\mathbb{C}}$ が普遍被覆面ならば Ω はその (連続な) 被覆写像による像であるから compact になってしまい矛盾を生ずるからである.

準備として Ω が単連結の場合を考えよう. $\mathbb{C} \setminus \Omega$ が 1 点以上よりなるときは Riemann 球面で考えた補集合 $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ は $\hat{\mathbb{C}}$ 内の compact 集合であり ∞ ともう 1 点を含むので, 連続体である. (従って非可算無限個の点を

含む。) この場合 Riemann の写像定理より等角写像 $f: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ が存在する. 被覆写像の定義を確認すれば等角写像が被覆写像であることは, 容易に分かる. 従って Ω は双曲的であり $f^*(\lambda_\Omega) = \lambda_{\mathbb{D}}$ を満たす双曲計量 λ_Ω が存在する. $g = f^{-1}$ と置けば $\lambda_\Omega = g^*(\lambda_{\mathbb{D}})$ であるから λ_Ω は等式

$$\lambda_\Omega(z) = \frac{2|g'(z)|}{(1-|g(z)|^2)}$$

により求めることが可能である. 例えば円板 $\mathbb{D}(0, R)$, $R > 0$ について双曲計量 λ_R と置けば写像 $z \mapsto \frac{z}{R}$ による \mathbb{D} の Poincaré 計量の引き戻しを求めると

$$(7.8) \quad \lambda_R(z) = \frac{2R}{R^2 - |z|^2}$$

与えられる.

Ω の普遍被覆面が \mathbb{C} , \mathbb{D} のどちらになるかは補集合 $\mathbb{C} \setminus \Omega$ の元の個数により決定することが出来る. それには ultrahyperbolic metric が重要な役割を果たす.

まず $\mathbb{C} \setminus \Omega = \emptyset$, つまり $\Omega = \mathbb{C}$ の場合を考えよう. この場合アプリアリに Ω の普遍被覆面は $\Omega = \mathbb{C}$ であるが, もう少し詳しく \mathbb{C} で ultrahyperbolic な計量を考えてみよう. ρ が複素平面 \mathbb{C} 上で ultrahyperbolic ならば任意の $R > 0$ について $\mathbb{D}(0, R)$ 上で ultrahyperbolic でもある. よって任意の $z \in \mathbb{C}$ について $R > |z|$ を満たす R を取れば

$$0 \leq \rho(z) \leq \frac{2R}{R^2 - |z|^2}$$

が成り立つ. ここで $R \rightarrow \infty$ とすれば $\rho(z) = 0$ を得る. 以上より複素平面 \mathbb{C} 上の ultrahyperbolic metric は 0 のみである.

次に $\mathbb{C} \setminus \Omega$ が 1 点よりなるときを考えよう. つまり Ω が穴開き平面 $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ の場合である. この場合 \exp を指数関数とし正則写像 $\exp + a: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a\}$ が被覆写像を与えるので Ω の普遍被覆面は \mathbb{C} である. さらに ρ が $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a\}$ 上の ultrahyperbolic metric ならば $\rho = 0$ となることが次のように示される. $\exp + a$ による ρ の引き戻し $\rho(e^z + a)|e^z|$ は \mathbb{C} で ultrahyperbolic であるから, やはり $\rho(e^z)|e^z| = 0$ が成り立つ. これより $\rho = 0$ が従う.

実は \mathbb{C} を普遍被覆面とする平面領域 Ω は \mathbb{C} 自身または穴開き平面のみである. そして補集合 $\mathbb{C} \setminus \{\Omega\}$ が 2 点以上含む平面領域 Ω の普遍被覆面は \mathbb{D} である. これを示すには Ω 上に $\rho \neq 0$ である ultrahyperbolic metric が存在することを言えばよい. 何故ならばこのとき Ω の普遍被覆面が \mathbb{C} と仮定すると ρ を引き戻すことにより \mathbb{C} 上に 0 以外の ultrahyperbolic metric が存在することになり不合理である.

相異なる 2 点 $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{\Omega\}$ を取る. 写像 $z \mapsto \frac{z-a}{b-a}$ により $\Omega_{a,b} := \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ は $\Omega_{0,1} = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ に等角に写像される. 従って $\Omega_{0,1} = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 上にでない至る所で正な ultrahyperbolic metric ρ が存在することが分かれば $\Omega_{a,b} := \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ 上にも至る所で正な ultrahyperbolic metric が存在することになり, これを $\Omega_{a,b}$ の部分領域 Ω に制限しても至る所で正な ultrahyperbolic metric である. 以上により問題は $\Omega_{0,1}$ 上に至る所で正な ultrahyperbolic metric が存在することを示すことに還元された. ここで思い出すべきはモジュラー関数である. モジュラー関数は上半平面 \mathbb{H} から $\Omega_{0,1} = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ への正則被覆写像であるから, 上半平面は $\Omega_{0,1}$ の普遍被覆面であり, \mathbb{H} と等角同値な \mathbb{D} も $\Omega_{0,1}$ の普遍被覆面である. 従って Theorem 7.17 より $\Omega_{0,1}$ には Poincaré 計量が存在する. 同様に $\Omega_{a,b}$ も \mathbb{D} を普遍被覆面に持ち Poincaré 計量が存在する. そこで $\Omega_{a,b}$ の Poincaré 計量を $\lambda_{a,b}$ と表すことにすれば

$$\lambda_{a,b}(z) = \frac{1}{|b-a|} \lambda_{0,1} \left(\frac{z-a}{b-a} \right), \quad z \in \Omega_{a,b}$$

が成り立つことが分かる. ここで $\Omega \subset \Omega_{a,b}$ であるから $\lambda_{a,b}$ の Ω への制限は C^2 級で至る所で正值であり, 曲率が一定値 -1 の計量であるから, ultrahyperbolic である. 以上で Ω 上に 0 でない ultrahyperbolic な計量の存在が示されたので Ω は \mathbb{D} を普遍被覆面に持つ.

以上の議論をまとめておこう.

Theorem 7.20. Ω を複素平面内の領域とする. このとき補集合 $\mathbb{C} \setminus \Omega$ が 2 点以上を含めば Ω は双曲的, つまり \mathbb{D} を普遍被覆 Riemann 面として持つ. また $\mathbb{C} \setminus \Omega$ が空または 1 点よりなるときは Ω は \mathbb{C} を普遍被覆 Riemann 面として持つ.

まず穴開き円板 $\mathbb{D}_R^* := \mathbb{D}(0, R) \setminus \{0\}$ の Poincaré 計量を求めておこう. まず \mathbb{D} から穴開き単位円板 $\mathbb{D}_R^* := \mathbb{D}(0, R) \setminus \{0\}$ への普遍被覆写像は

$$(7.9) \quad f(\zeta) = e^{\log R - \frac{1+\zeta}{1-\zeta}}, \quad \zeta \in \mathbb{D}$$

で与えられるので $\lambda_{\mathbb{D}_R^*}(f(\zeta))|f'(\zeta)| = \frac{2}{1-|\zeta|^2}$ である. これに $z = f(\zeta) = e^{\log R - \frac{1+\zeta}{1-\zeta}}$ と $|f'(\zeta)| = \frac{2}{1-|\zeta|^2}|f(\zeta)| = \frac{2|z|}{1-|\zeta|^2}$ を代入すれば

$$\lambda_{\mathbb{D}_R^*}(z) \frac{2|z|}{1-|\zeta|^2} = \frac{2}{1-|\zeta|^2}$$

より

$$\lambda_{\mathbb{D}_R^*}(z) = \frac{|1-\zeta|^2}{|z|(1-|\zeta|^2)}$$

となるが, $|z| = e^{\log R - \operatorname{Re} \frac{1+\zeta}{1-\zeta}} = e^{\log R - \frac{1-|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2}}$ より $\log \frac{R}{|z|} = \frac{1-|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2}$ であるから \mathbb{D}_R^* の Poincaré 計量は

$$(7.10) \quad \lambda_{\mathbb{D}_R^*}(z) = \frac{1}{|z| \log \frac{R}{|z|}}, \quad z \in \mathbb{D}_R^*$$

である. 同様に函数 $z = e^{\log R + \frac{1+\zeta}{1-\zeta}}$ が \mathbb{D} から $A(R) := \{z \in \mathbb{C} : R < |z|\}$ への普遍被覆写像を与えることから

$$(7.11) \quad \lambda_{A(R)}(z) = \frac{1}{|z| \log \frac{|z|}{R}}, \quad R < |z|$$

が $A(R)$ の Poincaré 計量である.

それでは Poincaré 計量に関する基本的な不等式を挙げておこう.

Theorem 7.21. Ω_1, Ω_2 を双曲的領域とし $\Omega_1 \subset \Omega_2$ ならば

$$(7.12) \quad \lambda_{\Omega_2}(z) \leq \lambda_{\Omega_1}(z), \quad z \in \Omega_1$$

が成り立つ. 特にある点 $z_0 \in \Omega_1$ において等号が成り立つ必要十分条件は $\Omega_1 = \Omega_2$ である.

Proof. λ_{Ω_2} の Ω_1 への制限は Ω_1 で ultrahyperbolic である. そして λ_{Ω_1} は Ω_1 で最大の ultrahyperbolic な計量であるから (7.12) が成り立つ.

$\Omega_1 = \Omega_2$ のとき, 明らかに全ての $z_0 \in \Omega_1$ において等号が成り立つ. 今度はある z_0 において等号が成り立ったと仮定する. $j = 1, 2$ について正則被覆写像 $f_j : \mathbb{D} \rightarrow \Omega_j$ を $f_j(0) = z_j, f_j'(0) > 0$ を満たすように

取る. このとき $f_1(\mathbb{D}) = \Omega_1 \subset \Omega_2$ であるから Theorem 7.16 より $f_1 = f_2 \circ \omega$, $\omega(0) = 0$ を満たす正則写像 $\omega : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ が存在する.

$$\frac{2}{|f_1'(0)|} = \lambda_{\Omega_1}(z_0) = \lambda_{\Omega_2}(z_0) = \frac{2}{|f_2'(0)|}$$

であるから $f_1'(0) = f_2'(0)$ が成り立つ. よって $\omega'(0) = f_1'(0)/f_2'(0) = 1$ を得る. よって Schwarz の補題の一意性より $\omega = \text{id}_{\mathbb{D}}$ となり $f_1 = f_2$ ひいては $\Omega_1 = \Omega_2$ を得る. \square

Theorem 7.22. Ω を双曲的領域とし, $\delta_{\Omega}(z) = \inf\{|w - z| : w \in \mathbb{C} \setminus \Omega\}$, $z \in \Omega$ と置くと

$$(7.13) \quad \lambda_{\Omega}(z) \leq \frac{2}{\delta_{\Omega}(z)}$$

が成り立つ.

Proof. $z_0 \in \Omega$ について $r = \delta_{\Omega}(z_0)$ と置くと $\mathbb{D}(z_0, r) \subset \Omega$ であるから $\mathbb{D}(z_0, r)$ において $\lambda_{\Omega}(z) \leq \lambda_{\mathbb{D}(z_0, r)}(z)$ が成り立つ. 特に

$$\lambda_{\Omega}(z_0) \leq \lambda_{\mathbb{D}(z_0, r)}(z_0) = \frac{2r}{r^2 - |z - z_0|^2} \Big|_{z=z_0} = \frac{2}{r} = \frac{2}{\delta_{\Omega}(z_0)}$$

である. \square

第 8 章

Ultrahyperbolic Metric

Ahlfors [1] によって導入された ultrahyperbolic metric の解説を行うのがこの章の目的である.

8.1 Ultrahyperbolic metrics

Ω を複素平面内の領域とし Ω で C^2 級の函数 $\rho(z) > 0$ により $ds = \rho(z)|dz|$ (または $ds^2 = \rho(z)^2(dx^2 + dy^2)$) と表される計量について, その Gauss 曲率は

$$K(\rho) = -\frac{1}{\rho(z)^2}(\Delta \log \rho)(z)$$

と表される.

ここでは単位円板における計量 $ds = \rho(z)|dz| = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}$, $z \in \mathbb{D}$ について Gauss 曲率を求めると

$$\frac{d}{dx} \log \rho = \frac{d}{dx} \{\log 2 - \log(1 - |z|^2)\} = \frac{2x}{1 - |z|^2}$$

より

$$\frac{d^2}{dx^2} \log \rho = 2 \frac{1 - |z|^2 - x(-2x)}{(1 - |z|^2)^2} = 2 \frac{1 + x^2 - y^2}{(1 - |z|^2)^2}$$

であるから

$$\begin{aligned} \Delta \log \rho &= \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) \log \rho \\ &= \frac{4}{(1 - |z|^2)^2} = \rho(z)^2 \end{aligned}$$

であるから

$$K(\rho)(z) \equiv -\frac{\Delta \log \rho}{\rho(z)^2} = -1$$

を得る.

次に上半平面における計量 $\rho(z)|dz| = \frac{|dz|}{y}$ については $\rho(z) = y$ より $\frac{d}{dx} \log \rho = \frac{d^2}{dx^2} \log \rho = 0$ であり $\frac{d}{dy} \log \rho = -\frac{1}{y}$, $\frac{d^2}{dy^2} \log \rho = \frac{1}{y^2}$ より $\Delta \log \rho = \rho^2$ が成り立つのでやはり $K(\rho)(z) \equiv -1$ である.

さて $\Omega, \tilde{\Omega}$ を複素平面内の領域とし $f: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ を正則写像とする. このとき $\tilde{\Omega}$ 上の計量 $\tilde{\rho}(w)|dw|$ について $\rho(z)|dz| = \tilde{\rho}(f(z))|f'(z)||dz|$ と定義することにより Ω 上の計量 $\rho(z)|dz|$ が導入される. ただし $f'(z_0) = 0$ となる点 z_0 が存在すれば, そこで $\rho(z_0) = 0$ となってしまうので f' は零点を持たないと仮定する.

このように定義された $\rho(z)|dz|$ を $\tilde{\rho}(w)|dw|$ の f による引き戻し (pull-back) と呼ぶ. この局所単葉な正則写像による引き戻しについて

$$(8.1) \quad K(\rho)(z) = K(\tilde{\rho})(f(z)), \quad z \in \Omega$$

が成り立つ. 実際 Δ_z, Δ_w で $z \in \Omega, w \in \tilde{\Omega}$ に関する Laplace-Beltrami 作用素を表すことにすれば

$$K(\rho)(z) = -\frac{(\Delta_z \{\log \tilde{\rho}\}(f(z)) + \log |f'(z)|)}{\tilde{\rho}(f(z))^2 |f'(z)|^2} = -\frac{\Delta_w \{\log \tilde{\rho}\}(f(z)) |f'(z)|^2}{\tilde{\rho}(f(z))^2 |f'(z)|^2} = K(\tilde{\rho})(f(z))$$

となるからである. ここで $\log |f'(z)|$ は調和函数ゆえ $\Delta_z \log |f'(z)| = 0$ と等式 $\Delta_z (h \circ f(z)) = (\Delta_w h) \circ f |f'|^2$ を利用した.

さて $\lambda(z) = \frac{2}{1-|z|^2}, z \in \mathbb{D}$ と置き, \mathbb{D} 上の計量 $\lambda(z)|dz|$ を考えよう. これを \mathbb{D} 上の双曲計量 (hyperbolic metric) と呼ぶ.

Lemma 8.1. $\rho \in C^2(\mathbb{D})$ は \mathbb{D} 上で $\rho > 0$ を満たすとす. このとき \mathbb{D} 上で $K(\rho)(z) \leq -1$ ならば

$$\rho(z) \leq \lambda(z), \quad z \in \mathbb{D}$$

が成り立つ.

Proof. $r \in (0, 1)$ について $\rho_r(z) = r\rho(rz), z \in \mathbb{D}$ と置く. これは写像 $\mathbb{D} \ni z \mapsto rz \in \mathbb{D}$ による $\rho(z)|dz|$ の引き戻しであり, 従って $K(\rho_r)(z) = K(\rho)(rz) \leq -1$ を満たす. これを書き直すと

$$\rho_r(z)^2 \leq \Delta \log \rho_r(z), \quad z \in \mathbb{D}$$

が成り立つことになる. λ については $K(\lambda)(z) = -1$ であるから

$$\lambda(z)^2 = \Delta \log \lambda(z), \quad z \in \mathbb{D}$$

が成り立つ. よって

$$(8.2) \quad \Delta (\log \lambda - \log \rho_r)(z) \leq \lambda(z)^2 - \rho_r(z)^2, \quad z \in \mathbb{D}$$

が成り立つ. ここで函数 $(\log \lambda - \log \rho_r)(z)$ は ρ_r が有界であるから $|z| \nearrow 1$ のとき $\rightarrow +\infty$ である. また \mathbb{D} で連続であるから最小値を取る点 $z_0 \in \mathbb{D}$ が存在する. つまり

$$(8.3) \quad (\log \lambda - \log \rho_r)(z_0) \leq (\log \lambda - \log \rho_r)(z), \quad z \in \mathbb{D}$$

である. ここで最小値を取る点において Laplace-Beltrami 作用素は非負の値を取るから (8.2) と合わせ

$$0 \leq \Delta (\log \lambda - \log \rho_r)(z_0) \leq \lambda(z_0)^2 - \rho_r(z_0)^2$$

となり $\rho(z_0) \leq \lambda(z_0)$ を得る. よって (8.3) と合わせ

$$0 \leq (\log \lambda - \log \rho_r)(z_0) \leq (\log \lambda - \log \rho_r)(z), \quad z \in \mathbb{D}$$

が成り立つ. よって $\rho_r(z) \leq \lambda(z)$ が成り立つ. ここで $r \nearrow 1$ とすれば直ちに $\rho(z) \leq \lambda(z)$ を得る. \square

曲率の定義 $K(\rho) = -\frac{\Delta(\log \rho)}{\rho^2}$ は $\rho > 0$ と $\rho \in C^2$ であることを要請し, 応用上の難点をもたらす. しかしながら劣調和函数の定義を思い起こさせるある方法によりこのような制限を取り除くことが出来る.

Definition 8.2. 領域 Ω 上の $\rho(z)|dz|$ が *ultrahyperbolic metric* であるとは次の 2 条件を ρ が満たすときを言う.

- (i) ρ は Ω で $0 \leq \rho(z) < \infty$ を満たし, 上半連続 (*upper semicontinuous*) である.
- (ii) $\rho(z_0) > 0$ となる全ての点 $z_0 \in \Omega$ において z_0 の開近傍 V と函数 $\rho_0 \in C^2(V)$ で

$$\rho_0(z) > 0 \quad \text{and} \quad (\Delta \log \rho_0)(z) \geq \rho_0(z)^2, \quad z \in V$$

と

$$\rho(z) \geq \rho_0(z) \quad \text{in } V \quad \text{and} \quad \rho(z_0) = \rho_0(z_0)$$

を満たすものが存在する.

ρ_0 は V における ρ の *supporting metric* と呼ばれる.

$[-\infty, \infty)$ に値を取る函数 $h(z)$ が z_0 で上半連続であることの定義は $\limsup_{\Omega \ni z \rightarrow z_0} h(z) \leq h(z_0)$ が成り立つことであり, ε - δ を用いて表現すれば次のようになる. $h(z_0) \in \mathbb{R}$ の場合は

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall z \in \Omega \text{ with } 0 < |z - z_0| < \delta : h(z) < h(z_0) + \varepsilon,$$

が成り立ち, $h(z_0) = -\infty$ の場合は

$$\forall A > 0 : \exists \delta > 0 : \forall z \in \Omega \text{ with } 0 < |z - z_0| < \delta : h(z) < -A$$

が成り立つこと. また任意の Ω の点で上半連続ならば Ω で上半連続と言う. このとき h が領域 Ω で上半連続であることと任意の $L \in \mathbb{R}$ について $\{z \in \Omega : h(z) < L\}$ が開集合であることは同値である.

Theorem 8.3. $\Omega, \tilde{\Omega}$ は \mathbb{C} 内の領域で $f : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ を正則写像とする. このとき $\tilde{\rho}(\tilde{z})|d\tilde{z}|$ が $\tilde{\Omega}$ 上の *ultrahyperbolic metric* ならば, f による引き戻し $\rho(z)|dz| := \tilde{\rho}(f(z))|f'(z)||dz|$ は Ω 上の *ultrahyperbolic metric* である.

Proof. $\tilde{\rho}(\tilde{z})$ の $\tilde{z} \in \tilde{\Omega}$ に関する上半連続性より $\rho(z) = \tilde{\rho}(f(z))|f'(z)|$ の $z \in \Omega$ に関する上半連続性が従う. 直接的に示すのは煩雑であるが基本的なので読者の演習問題とする.

(ii) については $\rho(z_0) = 0$ つまり $\tilde{\rho}(f(z_0)) = 0$ または $f'(z_0) = 0$ の場合は自明であるから $\tilde{\rho}(f(z_0)) > 0$ かつ $f'(z_0) \neq 0$ と仮定する. $\tilde{z}_0 := f(z_0)$ の近傍 \tilde{V} と $\tilde{\rho}$ の \tilde{V} における *supporting metric* $\tilde{\rho}_0$ を取る. このとき

$$\tilde{\rho}_0(\tilde{z}) > 0 \quad \text{and} \quad (\Delta_{\tilde{z}} \log \tilde{\rho}_0)(\tilde{z}) \geq \tilde{\rho}_0(\tilde{z})^2 \quad (\text{つまり } K(\tilde{\rho}_0)(\tilde{z}) \leq -1), \quad \tilde{z} \in \tilde{V}$$

と

$$\tilde{\rho}(\tilde{z}) \geq \tilde{\rho}_0(\tilde{z}) \quad \text{in } \tilde{V} \quad \text{and} \quad \tilde{\rho}(\tilde{z}_0) = \tilde{\rho}_0(\tilde{z}_0)$$

が成り立つ. このとき z_0 の近傍 V を $f(V) \subset \tilde{V}$ かつ V 上で $f' \neq 0$ となるように取れば引き戻し $\rho_0(z) := \tilde{\rho}_0(f(z))|f'(z)|$ は正值で $K(\rho_0)(z) = K(\tilde{\rho}_0)(f(z)) \leq -1$, つまり V 上で $\Delta_z(\log \rho_0)(z) \geq \rho_0(z)^2$ を満たし, V 上で

$$\rho(z) = \tilde{\rho}(f(z))|f'(z)| \geq \tilde{\rho}_0(f(z))|f'(z)| = \rho_0(z)$$

と

$$\rho(z_0) = \tilde{\rho}(f(z_0))|f'(z_0)| = \tilde{\rho}_0(f(z_0))|f'(z_0)| = \rho_0(z_0)$$

が成り立つ. 従って ρ_0 は V における ρ の *supporting metric* である. □

Theorem 8.4. $\rho(z)|dz|$ が \mathbb{D} 上の *ultrahyperbolic metric* ならば

$$\rho(z) \leq \lambda(z) = \frac{2}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}$$

が成り立つ.

Proof. 殆ど Lemma の証明と同じであるが, 一応述べておこう. まず $\rho_r(z) = r\rho(rz)$, $z \in \overline{\mathbb{D}}$ と置くと, $\overline{\mathbb{D}}$ で上半連続であるから, ここで有界である. また ρ_r は正則写像 $\mathbb{D} \ni z \mapsto rz \in \mathbb{D}$ による ρ の引き戻しであるから, やはり \mathbb{D} で ultrahyperbolic である. よって

$$(8.4) \quad \Delta(\log \lambda - \log \rho_r)(z) \leq \lambda(z)^2 - \rho_r(z)^2, \quad z \in \mathbb{D}$$

が成り立つ. ここで函数 $(\log \lambda - \log \rho_r)(z)$ は ρ_r が有界であるから $|z| \nearrow 1$ のとき $\rightarrow +\infty$ である. また \mathbb{D} で下半連続であるから最小値を取る点 $z_0 \in \mathbb{D}$ が存在する. つまり

$$(8.5) \quad (\log \lambda - \log \rho_r)(z_0) \leq (\log \lambda - \log \rho_r)(z), \quad z \in \mathbb{D}$$

である. もし $\rho_r(z_0) = 0$ ならば上の不等式の左辺は $+\infty$ となるので $\rho_r(z) \equiv 0$ が従い, $\rho_r(z) \leq \lambda(z)$ が明らかに成り立つ. $\rho_r(z_0) > 0$ の場合はここで z_0 の近傍 V と V 上の supporting metric ρ_0 を取ると

$$(8.6) \quad (\log \lambda - \log \rho_0)(z_0) \leq (\log \lambda - \log \rho_0)(z), \quad z \in V$$

が成り立つ. ここで最小値を取る点において Laplace-Beltrami 作用素は非負の値を取るから (8.4) と合わせ

$$0 \leq \Delta(\log \lambda - \log \rho_0)(z_0) \leq \lambda(z_0)^2 - \rho_0(z_0)^2$$

となり $\rho_r(z_0) = \rho_0(z_0) \leq \lambda(z_0)$ を得る. よって (8.5) と合わせ

$$0 \leq (\log \lambda - \log \rho_r)(z_0) \leq (\log \lambda - \log \rho_r)(z), \quad z \in \mathbb{D}$$

が成り立つ. よって

$$r\rho(rz) = \rho_r(z) \leq \lambda(z), \quad z \in \mathbb{D}$$

が成り立つ. ここで任意の $\zeta \in \mathbb{D}$ について $|\zeta| < r < 1$ を満たす r を取り $z = \frac{\zeta}{r}$ について上式を適用すれば

$$r\rho(\zeta) \leq \lambda\left(\frac{\zeta}{r}\right), \quad \zeta \in \mathbb{D}$$

が成り立つ. ここで $r \nearrow 1$ とすれば λ の連続性より, 直ちに $\rho(z) \leq \lambda(z)$ を得る. □

Corollary 8.5. Ω を複素平面内の領域とし, $\rho(w)|dw|$ は Ω 上の *ultrahyperbolic metric* とする. また $f: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ を正則写像とすると

$$(8.7) \quad \rho(f(z))|f'(z)| \leq \frac{2}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}$$

が成り立つ.

Proof. \mathbb{D} 上の計量 $\rho(f(z))|f'(z)||dz|$ は Ω 上の ultrahyperbolic metric である ρ の f による引き戻しであるから Theorem 8.3 より \mathbb{D} 上の ultrahyperbolic metric である. よって Theorem 8.4 より $\rho(f(z))|f'(z)| \leq \frac{2}{1-|z|^2}$ が成り立つ. □

8.2 SK-metric と Ahlfors の補題の一意性

領域 Ω 上の実数値関数 u について Ω の各点において

$$(8.8) \quad \underline{\Delta}u(z_0) = \liminf \frac{4}{r^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{u(z_0 + re^{i\theta}) - u(z_0)\} d\theta$$

と定義する. $\underline{\Delta}u(z_0)$ は lower generalized Laplacian of u at z_0 と呼ばれる. このように呼ばれる理由は u が z_0 のある近傍で C^2 級の時 $\underline{\Delta}u(z_0) = \Delta u(z_0)$ が成り立つからである. 実際このとき

$$u(z) = u(z_0) + u_x(z_0)(x-x_0) + u_y(z_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}u_{xx}(z_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}u_{yy}(z_0)(y-y_0)^2 + u_{xy}(z_0)(x-x_0)(y-y_0) + o(|z-z_0|^2)$$

と展開されるので, 極座標 $z = z_0 + re^{i\theta}$ を取ると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{u(z_0 + re^{i\theta}) - u(z_0)\} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{u_x(z_0)r \cos \theta + u_y(z_0)r \sin \theta + \frac{1}{2}u_{xx}(z_0)r^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2}u_{yy}(z_0)r^2 \sin^2 \theta + u_{xy}(z_0)r^2 \cos \theta \sin \theta\} d\theta + o(r^2) \\ &= \frac{r^2}{4} \{u_{xx}(z_0) + u_{yy}(z_0)\} + o(r^2) \end{aligned}$$

が成り立つ.

Definition 8.6. \mathbb{C} 内の領域 Ω 上の計量 $\rho(z)|dz|$ が SK-metric であるとは

- (a) $0 \leq u(z) < \infty$ in Ω
- (b) ρ は Ω で上半連続, つまり任意の $a \in \Omega$ において $\limsup_{z \rightarrow a} \rho(z) \leq \rho(a)$ を満たす.
- (c) 各点 a において以下のどちらかが成り立つ.
 - (i) $\rho(a) = 0$
 - (ii) $\rho(a) > 0$ であり $\underline{\Delta} \log \rho(a) \geq \rho(a)^2$

SK-metric は M. Heins [14] により ultrahyperbolic metric の拡張として導入された. ただし [14] では S-K metric と名付けられているが, ここでは SK-metric と呼ぶことにする. 念のために拡張であることを示しておこう. それは ρ が点 a において supporting metric ρ_a を持つとき

$$\begin{aligned} \underline{\Delta} \log \rho(a) &= \liminf \frac{4}{r^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{\log \rho(a + re^{i\theta}) - \log \rho(a)\} d\theta \\ &\geq \liminf \frac{4}{r^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{\log \rho_a(a + re^{i\theta}) - \log \rho_a(a)\} d\theta \\ &= \underline{\Delta} \log \rho_a(a) = \Delta \log \rho_a(a) \geq \rho_a(a)^2 = \rho(a)^2 \end{aligned}$$

が成り立つからである.

SK-metric についても $\tilde{\rho}$ が領域 $\tilde{\Omega}$ 上の SK-metric であり, $f: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ が正則ならば引き戻し $f^*(\tilde{\rho})(z) = \tilde{\rho}(f(z))|f'(z)|$ が Ω 上の SK-metric になることは容易に確かめることが出来る. 重要なのは SK-metric についても Ahlfors の補題が成り立つことであるが, その証明は Ahlfors の補題の証明を単に焼き直すだけで簡単に得られる. またさらに SK-metric に拡張した為に, 見通しがよくなり Ahlfors が [1] の中で触れなかった各点における一意性が Heins [14] により証明された. ここでは若干の補足を加えながら Minda [?] の結果を参考にしつつ解説する.

Proposition 8.7. Ω を \mathbb{C} 内の有界領域とし $\rho(z)|dz|$ を Ω 上の *SK-metric* とする. ある $M \geq 0$ について

$$\limsup_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta} \rho(z) \leq M \quad \forall \zeta \in \partial\Omega$$

ならば

$$(8.9) \quad \rho(z) \leq M \quad \forall z \in \Omega$$

が成り立つ. 特に *SK-metric* ρ は領域 Ω の内点で正の極大値をとることはない.

Ω 上で $\rho > 0$ ならば $\Delta \log \rho \geq \rho^2 > 0$ であるから ρ は Ω 上で劣調和である. 従ってこの Proposition は最大値の原理の直接的な帰結である. 一般の場合は次のように示される.

Proof. $M_0 = \sup_{z \in \Omega} \rho(z)$ と置くと Ω 内の点列 $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ を $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \in \bar{\Omega}$, $M_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(z_n)$ が成り立つように取ることが出来る. $z_0 \in \partial\Omega$ の場合は

$$M_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(z_n) \leq \limsup_{\Omega \ni z \rightarrow z_0} \rho(z) \leq M$$

であるから, 任意の $z \in \Omega$ について $\rho(z) \leq M_0 \leq M$ が成り立つ.

$z_0 \in \Omega$ の場合を考えよう. $\rho(z_0) = 0$ のときは $M_0 = 0$ より $\rho = 0$ を得るので, この場合も (8.9) が成り立つ. $\rho(z_0) > 0$ のとき (つまり Ω の内点で極大となる場合である)

$$0 \geq \Delta \log \rho(z_0) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{4}{r^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{\log \rho(z_0 + re^{i\theta}) - \log \rho(z_0)\} d\theta \geq \rho(z_0)^2 > 0$$

となり不合理である. □

Theorem 8.8 (*SK-metric* に関する Ahlfors の補題). $\rho(z)|dz|$ が双曲領域 Ω 上の *SK-metric* ならば

$$(8.10) \quad \rho(z) \leq \lambda_\Omega(z), \quad z \in \mathbb{D}$$

が成り立つ. また各点 $a \in \Omega$ において等号が成り立つ為の必要十分条件は $\rho = \lambda_\Omega$ が成り立つことである.

不等式部分の証明. $\Omega = \mathbb{D}$ の場合を考えよう. これには各 $R \in (0, 1)$ について $\rho \leq \lambda_{\mathbb{D}(0,R)}$ を示せば十分である. 実際これが示されれば $R \nearrow 1$ とすることにより $\rho(z) \leq \lim_{R \nearrow 1} \lambda_{\mathbb{D}(0,R)}(z) = \lambda_{\mathbb{D}}(z)$ を得る.

さて $\mathbb{D}(0, R)$ において $u(z) = \log \rho(z) - \log \lambda_{\mathbb{D}(0,R)}$ と置けば, u は $[-\infty, +\infty)$ に値を取り, 上半連続であり $\limsup_{|z| \nearrow R} u(z) = -\infty$ が成り立つ. 従って最大値を取る点 $a \in \mathbb{D}(0, R)$ が存在する. $\rho(a) = 0$ ならば $u(a) = -\infty$ であるから $u = -\infty$ が成り立つ. よって特に $\mathbb{D}(0, R)$ において $\rho(z) = 0 < \lambda_{\mathbb{D}(0,R)}(z)$ が成り立つ. $\rho(a) > 0$ の場合は極大値を取る点において lower generalized Laplacian が 0 以下であるから

$$0 \geq \Delta u(a) = \Delta \log \rho(a) - \Delta \log \lambda_{\mathbb{D}(0,R)}(a) \geq \rho(a)^2 - \lambda_{\mathbb{D}(0,R)}(a)^2$$

を得る. よって $\rho(a) \leq \lambda_{\mathbb{D}(0,R)}(a)$ が成り立ち, 従って $u(a) \leq 0$ である. $u(a)$ は u の最大値であるから $\mathbb{D}(0, R)$ 上で $u(z) \leq 0$ が成り立つ. つまり $\rho(z) \leq \lambda_{\mathbb{D}(0,R)}(z)$ が成り立つ.

一般の双曲領域 Ω については $f: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ を正則被覆写像とすれば $f^*(rho)$ は \mathbb{D} 上の *SK-metric* であり $f^*(\lambda_\Omega) = \lambda_{\mathbb{D}}$ であるから

$$\rho(f(\zeta))|f'(\zeta)| = f^*(\rho)(\zeta) \leq \lambda_{\mathbb{D}}(\zeta) = f^*(\lambda_\Omega)(\zeta) = \lambda_\Omega(f(\zeta))|f'(\zeta)|$$

を得る. 正則被覆写像は単葉であるから各点 $f'(\zeta) \neq 0$ であることと, f が全射であることより $\rho(z) \leq \lambda_\Omega(z)$ が Ω 上で成り立つ. □

等号条件の証明には補題を要する.

Lemma 8.9. $a \in \mathbb{C}$, $\alpha, R > 0$ とする. このとき

$$v_{\alpha,R}(z) = e^{-\alpha|z-a|^2} - e^{-\alpha R^2}, \quad z \in \overline{\mathbb{D}}(a, R)$$

と置くと, $\mathbb{D}(a, R)$ 上で $v_{\alpha,R}(z) > 0$, $\partial\mathbb{D}(a, R)$ 上で $v_{\alpha,R} = 0$ であり定数 $K > 0$ が $\alpha^2 R^2 - 4\alpha > K$ を満たせば

$$(8.11) \quad \Delta v_{\alpha,R}(z) \geq K v_{\alpha,R}(z), \quad \frac{R}{2} \leq |z-a| < R$$

が成り立つ. また $\mathbb{D}(a, R)$ 上で

$$v_{\alpha,R}(z) \geq \alpha R e^{-\alpha R^2} (R - |z-a|)$$

Proof. 極座標 $z = a + r e^{i\theta}$ を用いると

$$\Delta v_{\alpha,R}(z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) v_{\alpha,R}(z) = (4\alpha^2 r^2 - 4\alpha) e^{-\alpha r^2}$$

であるから $\frac{R}{2} \leq |z-z_0| < R$ において

$$\Delta v_{\alpha,R}(z) - K v_{\alpha,R}(z) = (4\alpha^2 r^2 - 4\alpha - K) e^{-\alpha r^2} + K e^{-\alpha R^2} > (\alpha^2 R^2 - 4\alpha - K) e^{-\alpha r^2} > 0$$

が成り立つ. また最後の不等式は

$$\begin{aligned} v_{\alpha,R}(z) &= e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha R^2} \\ &= e^{-\alpha R^2} \left\{ e^{\alpha(R^2-r^2)} - 1 \right\} \\ &\geq e^{-\alpha R^2} \alpha (R^2 - r^2) \\ &= e^{-\alpha R^2} \alpha (R+r)(R-r) \geq \alpha R e^{-\alpha R^2} (R-r) \end{aligned}$$

より成り立つ. □

Proposition 8.10. Ω を \mathbb{C} 内の有界領域とし $K > 0$ とする. 函数 $u : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty)$ は Ω で上半連続であり, $u(z) > -\infty$ を満たす全ての $z \in \Omega$ について

$$\underline{\Delta} u(z) \geq K u(z)$$

であり

$$\limsup_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta} u(z) \leq 0 \quad \forall \zeta \in \partial\Omega$$

とする. このとき Ω 上で $u = 0$ であるか, または Ω 上で $u(z) < 0$ である.

Proof. Ω 上で $u(z) \leq 0$ が成り立つことを示そう. これには $M = \sup_{z \in \Omega} u(z)$ と置き, $M \leq 0$ を示せばよい. Ω 内の点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \in \overline{\Omega}$, $M = \lim_{n \rightarrow \infty} u(z_n)$ が成り立つように取る. $a \in \partial\Omega$ の場合は

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} u(z_n) \leq \limsup_{\Omega \ni z \rightarrow z_0} u(z) \leq 0.$$

$a \in \Omega$ の場合を考えよう. $u(a) = -\infty$ のときも $M = u(a) = -\infty < 0$ である. $u(a) > -\infty$ のとき a で u は最大値を取るの

$$0 \geq \liminf \frac{4}{r^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{u(a + re^{i\theta}) - u(a)\} d\theta = \underline{\Delta}u(z_0) \geq Ku(z_0)$$

を得るが, $K > 0$ であるから $M = u(z_0) \leq 0$ である. 以上で Ω 上で $u \leq 0$ が示された.

さてこの Proposition を証明するには $A = \{z \in \Omega : u(z) < 0\}$ と置き, $A \neq \emptyset$ のとき $A = \Omega$ を示せばよい. そしてこれを示すには $a \in A$ のときに

$$\mathbb{D}(a, \delta) \subset A \quad \forall \delta \in (0, \text{dist}(a, \partial\Omega))$$

を示せば十分である. そこで $0 < \delta < \text{dist}(a, \partial\Omega)$ を満たす δ を任意に取る. $\mathbb{D}(a, \delta)$ 内に $u(z) = 0$ となる点が存在しないときは, 明らかに $\mathbb{D}(a, \delta) \subset A$ であるから, そうでないと仮定する. このとき $0 < R < \delta$ と z_0 を $\mathbb{D}(a, R)$ 上で $u(z) < 0$ であり $|z_0 - a| = R$ かつ $u(z_0) = 0$ を満たすように取ることが出来る. この R と定理の K について α を $\alpha^2 R^2 - 4\alpha > K$ を満たすように取り, Lemma 8.9 における函数 $v_{\alpha, R}$ を取る. また $\varepsilon > 0$ を

$$\sup_{|z-a|=\frac{R}{2}} u(z) + \varepsilon \max_{|z-a|=\frac{R}{2}} v_{\alpha, R}(z) < 0$$

を満たすように取る. このとき $w(z) := u(z) + \varepsilon v_{\alpha, R}(z)$ は $|z - a| = \frac{R}{2}$ 上で $w(z) < 0$ であり任意の $\zeta \in \partial\mathbb{D}(a, R)$ について $\limsup_{z \rightarrow \zeta} w(z) \leq 0$ を満たす. また $\frac{R}{2} < |z - a| < R$ において

$$\underline{\Delta}w(z) = \underline{\Delta}u(z) + \varepsilon \underline{\Delta}v_{\alpha, R}(z) \geq Ku(z) + \varepsilon K v_{\alpha, R}(z) = Kw(z)$$

を満たす. 従って前半で示したことから $w(z) \leq 0$ が成り立つ. これより特に $\frac{R}{2} \leq |z - a| \leq R$ において $u(z) \leq -\varepsilon v_{\alpha, R}(z)$ が成り立つことが分かる.

さて円弧 $\partial\mathbb{D}(z_0, r)$ の $\mathbb{D}(a, R)$ 内にある部分は $z_0 - a = Re^{i\theta_0}$ と置くと $z = z_0 - e^{i\theta_0} r e^{i\theta}$, $|\theta| < \cos^{-1} \frac{\delta}{2R}$ とパラメータ表示されこのとき

$$|z - a| = |z_0 - a + z - z_0| = |Re^{i\theta_0} - e^{i\theta_0} r e^{i\theta}| = |R - r e^{i\theta}| = \sqrt{R^2 - 2Rr \cos \theta + r^2}$$

である. よって Lemma より

$$v_{\alpha, R}(z) \geq \alpha R e^{-\alpha R^2} (R - |z - a|) = \alpha R e^{-\alpha R^2} \left\{ R - \sqrt{R^2 - 2Rr \cos \theta + r^2} \right\}$$

ここで $u(z_0) = 0$, $u(z) \leq 0$ に注意して

$$\begin{aligned} \frac{4}{r^2} \int_{-\pi}^{\pi} \{u(z_0 - e^{i\theta_0} r e^{i\theta})\} d\theta &\leq -\frac{4}{r^2} \int_{-\cos^{-1} \frac{r}{2R}}^{\cos^{-1} \frac{r}{2R}} \left\{ R - \sqrt{R^2 - 2Rr \cos \theta + r^2} \right\} d\theta \\ &\leq -\int_{-\cos^{-1} \frac{r}{2R}}^{\cos^{-1} \frac{r}{2R}} \frac{R}{r^2} \left\{ 1 - \sqrt{1 - 2\frac{r}{R} \cos \theta + \frac{r^2}{R^2}} \right\} d\theta \\ &\leq -\frac{R}{r} \int_{-\cos^{-1} \frac{r}{2R}}^{\cos^{-1} \frac{r}{2R}} \frac{\frac{2}{R} - \frac{r}{R^2}}{1 + \sqrt{1 - 2\frac{r}{R} \cos \theta + \frac{r^2}{R^2}}} d\theta \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

を得るので $\underline{\Delta}u(z_0) = -\infty$ である. これは $\underline{\Delta}u(z_0) \geq Ku(z_0) = 0$ と矛盾する. □

Ahlfors の補題の等号条件の証明. Ω 上で $[-\infty, \infty)$ に値を持つ函数 $u(z) = \log \rho(z) - \log \lambda_\Omega(z)$ を考えよう. 既に Ω 上で $\rho(z) \leq \lambda_\Omega(z)$ が成り立つことを示しているから $u(z) \leq 0$ である.

$\overline{\mathbb{D}}(a, r) \subset \Omega$ を満たす閉円板において $\rho(z) \leq \lambda_\Omega(z) \leq M$ を満たす $M > 0$ を取る. このとき

$$\underline{\Delta}u(z) = \underline{\Delta} \log \rho(z) - \underline{\Delta} \log \lambda_\Omega(z) \geq \rho^2(z) - \lambda_\Omega(z) = (\rho(z) + \lambda_\Omega(z))(\rho(z) - \lambda_\Omega(z)) \geq 2M(\rho(z) - \lambda_\Omega(z))$$

が成り立つ. ここで $0 \leq x \leq x_1$ について不等式 $e^x - 1 \leq \frac{e^{x_1}-1}{x_1}x$ が成り立つことより

$$\begin{aligned} \lambda_\Omega(z) - \rho(z) &= e^{\log \lambda_\Omega(z)} - e^{\log \rho(z)} \\ &= e^{\log \rho(z)} \{e^{\log \lambda_\Omega(z) - \log \rho(z)} - 1\} \\ &\leq e^{\log \rho(z)} \frac{e^{\log M - \log \rho(z)} - 1}{\log M - \log \rho(z)} (\log \lambda_\Omega(z) - \log \rho(z)) \\ &= e^{\log \rho(z)} e^{\theta(\log M - \log \rho(z))} (\log \lambda_\Omega(z) - \log \rho(z)) \quad (\because \text{平均値の定理より } \exists \theta \in (0, 1)) \\ &\leq M (\log \lambda_\Omega(z) - \log \rho(z)) = -Mu(z) \end{aligned}$$

より $\overline{\mathbb{D}}(a, r)$ において

$$\underline{\Delta}u(z) \geq 2M^2u(z)$$

が成り立つ.

以上の議論より $a \in \Omega$ について $\delta = \text{dist}(a, \partial\Omega)$ と置くと $u(a) = 0$ ならば $\mathbb{D}(a, \delta)$ 上で $u = 0$ が成り立ち, $u(a) < 0$ ならば $\mathbb{D}(a, \delta)$ 上で $u < 0$ が成り立つ. よって $A = \{z \in \Omega : u(z) < 0\}$, $Z = \{z \in \Omega : u(z) = 0\}$ と置けば, $A \cup Z = \Omega$, $A \cap Z = \emptyset$ であり, A, Z はともに開集合である. 従って $\Omega = A$ または $\Omega = Z$ のどちらか一方が成り立つ. \square

8.3 $\lambda_{0,1}$ の評価

$\mathbb{D}^* \subset \Omega_{0,1}$ より $\lambda_{0,1}(z) \leq \lambda_{\mathbb{D}^*}(z)$ が成り立つので

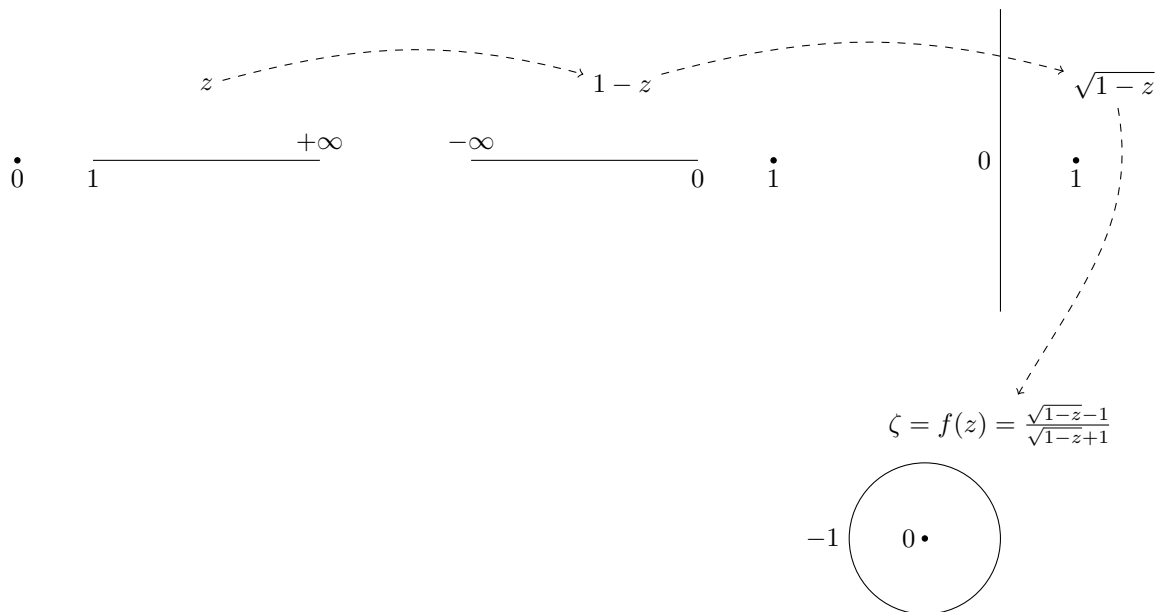
$$(8.12) \quad \lambda_{0,1}(z) \leq \frac{1}{|z| \log \frac{1}{|z|}}, \quad z \in \mathbb{D}^*$$

という評価を得る.

f を $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$ から \mathbb{D} への等角写像で $f(0) = 0$, $f'(0) < 0$ を満たすとする. 具体的には下図のように写像を合成することによって

$$(8.13) \quad \zeta = f(z) = \frac{\sqrt{1-z}-1}{\sqrt{1-z}+1}$$

が得られる.

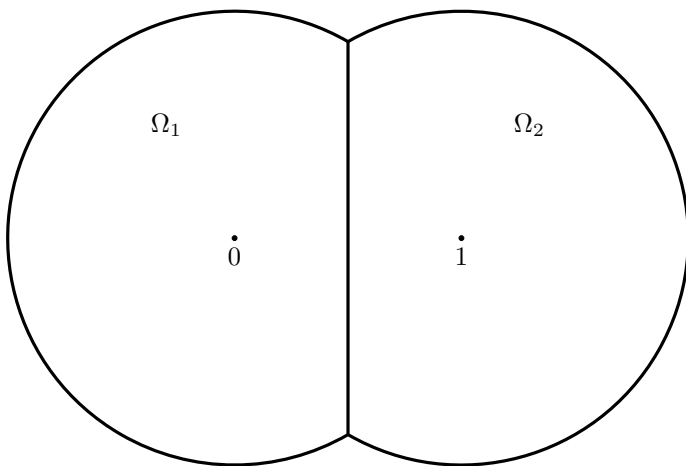


このとき $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ が成り立つことに注意する. f は $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty) \cup \{0\}$ から $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ への等角写像と見ることが出来る. そこで $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ を含む $\mathbb{D}(0, e^4) \setminus \{0\}$ の双曲計量である $\frac{|d\zeta|}{|\zeta|(4 - \log|\zeta|)}$ の引き戻しを $\rho_0(z)|dz|$ と置けば

$$(8.14) \quad \rho_0(z) = \frac{|f'(z)|}{|f(z)|\{4 - \log|f(z)|\}} = \frac{1}{|z\sqrt{1-z}|\left\{4 - \log\frac{|\sqrt{1-z}-1|}{|\sqrt{1-z}+1|}\right\}}$$

を得る. $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ であるから $\rho_0(\bar{z}) = \rho_0(z)$ が成り立つ.

$\Omega_1 = \mathbb{D} \cap \{\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\}$, $\Omega_2 = \mathbb{D}(1, 2) \cap \{\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}\}$, $\Omega_3 = \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$ と置く.



ρ_0 の $\overline{\Omega_1}$ への制限を ρ_1 と置く. このとき ρ_0 と同様に $\rho_1(\bar{z}) = \rho_1(z)$ が成り立つ. 次に ρ_1 を $\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$ に次のように拡張する.

$$(8.15) \quad \rho_2(z) = \begin{cases} \rho_1(z), & z \in \overline{\Omega_1} \\ \rho_1(1-z), & z \in \overline{\Omega_2} \setminus \overline{\Omega_1} \end{cases}$$

このとき ρ_2 が $\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$ で連続であることを確認しておこう. それには $\alpha_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ と置く時 $z_0 \in [\alpha_-, \alpha_+]$ について $\lim_{\overline{\Omega_1} \ni z \rightarrow z_0} \rho_2(z) = \lim_{\overline{\Omega_2} \setminus \overline{\Omega_1} \ni z \rightarrow z_0} \rho_2(z)$ となることを確かめればよい. 定義の仕方より $\lim_{\overline{\Omega_1} \ni z \rightarrow z_0} \rho_2(z) = \rho_0(z_0)$

第 9 章

領域の幾何的性質の双曲計量への反映 –Minda の理論–

Riemann 面での計量について
領域の幾何の双曲計量への反映

Landau の不等式

前章で示したように双曲領域において ultrahyperbolic metric は各点で双曲計量により上から押さえられる。これを Schwarz の補題をもじり Ahlfors の補題と呼ぶことがある。この章では D. Minda による Ahlfors の補題の拡張とその応用について解説する。対象とする領域が何らかの非対称性を持つときに双曲計量を持つ単調性を極めて明快に導く面白い結果である。最後に Picard の定理の証明に用いられる Landau の不等式の sharp な形を導く。

9.1 Riemann 面における等角計量

Definition 9.1. R が chart $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ を持つ Riemann 面であるとは R が連結な Hausdorff 空間であり

- (a) $\{U_\alpha\}$ は R の開被覆である。
- (b) 各 φ_α は U_α から \mathbb{C} 内のある領域 V_α への位相写像である。
- (c) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ならば $f_{\alpha\beta} := \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ は $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ から $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ の上への等角 (= 単射正則) 写像である。

R を Riemann 面とする。 R 上の非負不変形式 $\rho(z)|dz|$ のことを等角計量と呼ぶ。つまり (U, φ)

9.2 Ahlfors の補題の拡張

前節での議論において $\Omega_{0,1} = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 上に Poincaré 計量 $\lambda_{0,1}$ が存在することが重要な役割を果たした。 $\lambda_{0,1}$ はモジュラー関数による \mathbb{D} の Poincaré 計量の誘導計量であるから、モジュラー関数を調べれば $\lambda_{0,1}$ の挙動を理解することが出来る。とは言うもののモジュラー関数の議論、特に関数の表示や、函数値、微分の計算などを行うのは非常に厄介なのでここではもう少し簡明な評価について考えてみよう。それでは Minda によ

る Ahlfors の補題の拡張を述べよう.

Theorem 9.2. Ω を双曲的領域とし函数 $\rho : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ は Ω で上半連続とし, 各点 $a \in \Omega$ において次の少なくとも一方が成り立つとする.

- (i) $\rho(a) \leq \lambda_\Omega(a)$
- (ii) a のある近傍 U と函数 $\rho_a \in C^2(U)$ で U 上 $K\rho_a(z) \leq -1$, $\rho(z) \geq \rho_a(z)$ でありかつ $\rho_a(a) = \rho(a)$ を満たすものが存在する.

このとき Ω 上で $\rho(z) \leq \lambda_\Omega(z)$ が成り立つ.

Minda による拡張は ultrahyperbolic metric の定義の (i) $\rho(a) = 0$ を, 上の (i') に緩めるだけなのであるが, これが後で面白い結果を導く. 尚, 上の (i'), (ii) を満たし ultrahyperbolic でない計量は存在する. (定理 9.7 の下の注意を参照). 従って Minda による拡張は, 真の拡張になっている.

Proof. はじめに $\Omega = \mathbb{D}$ の場合を考えよう. 任意の $r \in (0, 1)$ について $\rho \leq \lambda_{\mathbb{D}(0,r)}$ を示せばよい. 何故ならば, これが示された後に $z \in \mathbb{D}$ について $|z| < r < 1$ を満たす r を取り $r \nearrow 1$ とすれば

$$\rho(z) \leq \lambda_{\mathbb{D}(0,r)}(z) = \frac{2r}{r^2 - |z|^2} \searrow \frac{2}{1 - |z|^2} = \lambda_{\mathbb{D}}(z)$$

を得るからである.

さて

$$v(z) = \log \frac{\rho(z)}{\lambda_{\mathbb{D}(0,r)}(z)} = \log \rho(z) - \log \lambda_{\mathbb{D}(0,r)}(z)$$

と置く. このとき v は $[-\infty, \infty)$ に値を持ち下半連続である. $\mathbb{D}(0, r)$ 上で $\rho = 0$ の場合, $\rho \leq \lambda_{\mathbb{D}(0,r)}$ は自明に成り立つので, ここではそうでないと仮定する. ここで $v(z_n) \rightarrow \sup_{z \in \mathbb{D}} v(z)$, $z_n \rightarrow a \in \overline{\mathbb{D}(0, r)}$ となる $\mathbb{D}(0, r)$ の収束点列 $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ と点 a を取る. $|z| \nearrow r$ のとき $v(z) \rightarrow -\infty$ であるから, $a \in \mathbb{D}(0, r)$ でなければならない. $\sup_{z \in \mathbb{D}} v(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(z_n) \leq v(a)$ であるから v は a で $\mathbb{D}(0, r)$ 上の最大値を取ることが分かる. $a \in \mathbb{D}(0, r)$ が存在する.

点 a において (i) が成り立つならば, 任意の $z \in \mathbb{D}(0, r)$ について

$$\log \frac{\rho(z)}{\lambda_{\mathbb{D}(0,r)}(z)} \leq \log \frac{\rho(a)}{\lambda_{\mathbb{D}(0,r)}(a)} \leq \log \frac{\lambda_{\mathbb{D}}(a)}{\lambda_{\mathbb{D}(0,r)}(a)} \leq \log \frac{\lambda_{\mathbb{D}(0,r)}(a)}{\lambda_{\mathbb{D}(0,r)}(a)} \leq 0$$

より $\rho(z) \leq \lambda_{\mathbb{D}(0,r)}(z)$ が成り立つ. また点 a において (ii) が成り立つならば a の近傍 V と支持計量 $\rho_a \in C^2(V)$ を取る. このとき $z \in V$ について

$$\log \frac{\rho_a(z)}{\lambda_{\mathbb{D}(0,r)}(z)} \leq \log \frac{\rho(z)}{\lambda_{\mathbb{D}(0,r)}(z)} \leq \log \frac{\rho(a)}{\lambda_{\mathbb{D}(0,r)}(a)} = \log \frac{\rho_a(a)}{\lambda_{\mathbb{D}(0,r)}(a)}$$

であるから V 上の函数 $v_a(z) := \log \frac{\rho_a(z)}{\lambda_{\mathbb{D}(0,r)}(z)}$ も a で最大値を取る. よって $\frac{\partial^2 v_a}{\partial x^2}(a) \leq 0$, $\frac{\partial^2 v_a}{\partial y^2}(a) \leq 0$ が成り立つので

$$0 \geq \Delta v_a(a) = \Delta(\log \rho_a - \log \lambda_{\mathbb{D}(0,r)})(a) \geq \rho_a(a)^2 - \lambda_{\mathbb{D}(0,r)}(a)^2 = \rho(a)^2 - \lambda_{\mathbb{D}(0,r)}(a)^2$$

より $\rho(a) \leq \lambda_{\mathbb{D}(0,r)}(a)$ が成り立ち, $v(z) \leq \max_{\mathbb{D}(0,r)} v = v(a) \leq 0$ を得るので, $\rho \leq \lambda_{\mathbb{D}(0,r)}$ が成り立つ.

一般の Ω の場合, 正則被覆写像 $f : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ を取り, $\tilde{\rho} = f^*(\rho)$ と置く. このとき各点 $a \in \mathbb{D}$ において $\tilde{\rho}$ が (i) または (ii) の少なくとも一方を満たすことを容易に確かめることが出来る. よって前半で示したことから

$\rho(f)|f'|^2 = f^*(\rho) \leq \lambda_{\mathbb{D}} = f^*(\lambda_{\Omega}) = \lambda_{\Omega}(f)|f'|$ が成り立つことになる. f は局所単葉ゆえ f' は零点を持たないので, これより直ちに $\rho \leq \lambda_{\mathbb{D}}$ を得る. \square

9.3 円, 直線に関する反転と等角計量

今まで ultrahyperbolic metric や 双曲計量の正則写像による引き戻しを考えてきたが, 反正則写像による引き戻しを考えることも可能である.

ここに反正則写像とは次のように定義される. はじめに反正則関数 f とは, 正則関数 $h(z)$ の共役の形 $f(z) = \overline{h(z)}$ に表される函数のことである. 従って局所的に $\overline{z - z_0}$ のべき級数で表される函数と定義しても同じである. また $g(z) = \overline{h(\bar{z})}$ と置けば正則であるから $f(z) = g(\bar{z})$ と表せるので正則関数に \bar{z} を合成したものと定義してもよい. 以上のもつて 2 つの Riemann 面 Ω_1, Ω_2 の間の写像 $k: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ が反正則であるとは次のように定義される. 各 $a_0 \in \Omega_1$ について $(U, \varphi), (V, \psi)$ を $a_0, b_0 := g(a_0)$ のまわりの chart とし $z = \varphi(a), w = \psi(b)$ をそれぞれの局所座標とすると $\psi \circ k \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ が反正則関数という性質は chart の取り方に依存しない. この性質が成り立つとき g は反正則写像であると定義する.

さて $w = \rho(w)|dw|$ の反正則写像 $w = f(z)$ による引き戻しは $f_z = 0$ であるから $dw = f_{\bar{z}}d\bar{z}$ が成り立つことに注意すれば

$$\rho(w)^2|dw|^2 = \rho(w)^2d\bar{w}dw = \rho(f(z))^2f_{\bar{z}}d\bar{z}\overline{f_{\bar{z}}dz} = \rho(f(z))^2|f_{\bar{z}}||dz|^2$$

である. よって反正則写像による等角計量の引き戻しは

$$(9.1) \quad f^*(\rho(w)|dw|) = \rho(f(z))|f_{\bar{z}}(z)||dz|$$

で与えられる. 次に合成函数の微分の公式

$$\begin{aligned} & (h \circ f)_{xx} + (h \circ f)_{yy} \\ &= h_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + 2h_{uv}(u_xv_x + u_yv_y) + h_{vv}(v_x^2 + v_y^2) + h_u(u_{xx} + u_{yy}) + h_v(v_{xx} + v_{yy}) \end{aligned}$$

において f が反正則写像ならば $u_x = -v_y, v_x = u_y$ であり, これよりさらに $u_{xx} + u_{yy} = 0 = v_{xx} + v_{yy}$ が従うので

$$\Delta(h \circ f) = \Delta h \circ f \{u_x^2 + v_x^2\}$$

である. ここで

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = \frac{1}{2} \{u_x - v_y + i(v_x + u_y)\} = u_x + iv_x$$

であるから C^2 級の函数 h に反正則写像 f を合成したときの Laplace-Beltrami 作用素 Δ の計算は

$$(9.2) \quad \Delta(h \circ f) = (\Delta h) \circ f |f_{\bar{z}}|^2$$

で与えられる. この公式を用いると $\tilde{\rho}(z) = \rho(f(z))|f_{\bar{z}}(z)|$ について Gauss 曲率 を計算すると $(\log |f_{\bar{z}}(z)|)$ は調和函数であることに注意すれば)

$$\Delta(\log \tilde{\rho})(z) = \Delta(\log \rho \circ f(z) + \log |f_{\bar{z}}(z)|) = \Delta(\log \rho) \circ f |f_{\bar{z}}(z)|^2$$

が成り立つ. よって

$$(9.3) \quad K(\tilde{\rho})(z) = K(\rho)(f(z))$$

が成り立つ. つまり Gauss 曲率は正則写像と同様に反正則写像によっても不変である. この事実を用いると

Theorem 9.3. Ω_1, Ω_2 を 2 つの Riemann 面とし写像 $g : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ を反正則とする. 計量 ρ が Ω_2 で ultrahyperbolic (または SK-metric) ならば $\tilde{\rho} := g^*(\rho)$ は Ω_1 で ultrahyperbolic (または SK-metric) であり $g^*(\rho) \leq \lambda_{\Omega_1}$ が成り立つ.

Proof. 実際 $\tilde{\rho}(z) = \rho(f(z))|f_{\bar{z}}(z)|$ と置いて, $\tilde{\rho}(a) \neq 0$ ならば (ii) を証明すればよいのであるが, これは定理 8.3 の (ii) の証明において f' の部分を $f_{\bar{z}}$ に読み替えればよい. 同様に $\rho|dw|$ が $g(\Omega)$ で (i'), (ii) を満たせば $g^*(\rho|dw|)$ は Ω で (i'), (ii) を満たすことも次のようにして分かる. (i') を示しておこう. 任意の $a \in \Omega$ について $b = f(a)$ において (i') つまり $\rho(b) \leq \lambda_{f(\Omega)}(b)$ が成り立てば

$$\tilde{\rho}(a) = \rho(f(a))|f_{\bar{z}}(a)| = \rho(b)|f_{\bar{z}}(a)| \leq \lambda_{f(\Omega)}(b)|f_{\bar{z}}(a)| = \lambda_{f(\Omega)}(f(a))|f_{\bar{z}}(a)|$$

であるが, 反正則写像による双曲計量の引き戻しは ultrahyperbolic metric であるから $\lambda_{f(\Omega)}(f(a))|f_{\bar{z}}(a)| \leq \lambda_{\Omega}(a)$ が成り立つ. よって a においても (i') が成り立つ. \square

上の定理より次が成り立つことは明らかであろう.

Corollary 9.4. Ω_0, Ω_1 を Riemann 面とし写像 $g : \Omega_0 \rightarrow \Omega_1$ は反等角, つまり反正則な全単射とする. このとき Ω_0, Ω_1 の一方が双曲的ならばもう一方もそうであり $g^*(\lambda_{\Omega_1}) = \lambda_{\Omega_0}$ が成り立つ.

以下では反正則写像の中でも特に Riemann 球面内での円または直線に関する反転を考えよう. そこで Γ を直線または円周とし, Γ に関する反転 (reflection) の定義を復習しておこう. Γ が相異なる 2 点 z_0, z_1 を通る直線の場合, 写像 $\zeta = \varphi(z) = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$ を用いて Γ を 0, 1 を通る直線, つまり実軸に写像し, しかるのちに共役を取り, 逆変換 φ^{-1} を合成すると Γ に関する鏡像が得られる. つまり

$$(9.4) \quad j(z) = \frac{z_1 - z_0}{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}(\bar{z} - \bar{z}_0) + z_0$$

である. Γ が中心 a 半径 r の円の場合, 鏡像は

$$(9.5) \quad j(z) = a + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}}$$

により与えられる.

さて双曲領域 Ω の Γ に関する鏡像を $\Omega^* = j(\Omega)$ と置く. このとき Ω^* も双曲的領域であるから Ω^* の双曲計量 λ_{Ω^*} を考え λ_{Ω} と λ_{Ω^*} の関係を調べておこう. $f : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ が正則被覆写像であるとき $g(\zeta) = j(f(\bar{\zeta}))$ が \mathbb{D} から Ω^* への正則被覆写像を与える. よって

$$\lambda_{\Omega^*}(g(\zeta))|g'(\zeta)| = \lambda_{\mathbb{D}}(\zeta)$$

である. ここで Γ が直線の場合は $g'(\zeta) = \frac{z_1 - z_0}{\bar{z}_1 - \bar{z}_0} \overline{f'(\bar{\zeta})}$ であるから $|g'(\zeta)| = |f'(\bar{\zeta})|$ が成り立つので

$$\lambda_{\mathbb{D}}(\zeta) = \lambda_{\Omega^*}(g(\zeta))|g'(\zeta)| = \lambda_{\Omega^*}(j(f(\bar{\zeta})))|f'(\bar{\zeta})|$$

である. 一方

$$\lambda_{\Omega}(f(\zeta))|f'(\zeta)| = \lambda_{\mathbb{D}}(\zeta)$$

より

$$\lambda_{\Omega}(f(\bar{\zeta}))|f'(\bar{\zeta})| = \lambda_{\mathbb{D}}(\bar{\zeta}) = \lambda_{\mathbb{D}}(\zeta)$$

である。従って直線 Γ に関する鏡像に関し $\lambda_{\Omega}(f(\bar{\zeta})) = \lambda_{\Omega^*}(j(f(\bar{\zeta})))$ が成り立つ。よって

$$(9.6) \quad \lambda_{\Omega^*}(j(z)) = \lambda_{\Omega}(z), \quad z \in \Omega$$

を得る。

Γ が円の場合は

$$g(\zeta) = j(f(\bar{\zeta})) = a + \frac{r^2}{f(\bar{\zeta}) - \bar{a}}$$

より

$$g'(\zeta) = -\frac{r^2 \overline{f'(\bar{\zeta})}}{(f(\bar{\zeta}) - \bar{a})^2}$$

であるから

$$(9.7) \quad \lambda_{\Omega^*}(j(z)) = \lambda_{\Omega}(z) \frac{|z - a|^2}{r^2}$$

を得る。

Γ が直線または円のどちらの場合でも Γ 上で $j(z) = z$ であるから

$$(9.8) \quad \lambda_{\Omega^*}(z) = \lambda_{\Omega}(z), \quad z \in \Gamma$$

が成り立つことに注意する。

Γ が直線の場合 $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ は 2 つの開半平面よりなる。このどちらか一方を R と表す。また Γ が円周の場合は R はその内側の開円板 $\mathbb{D}(a, r)$ とする。

Lemma 9.5. $\Omega \cap \Gamma \neq \emptyset$ のとき集合 $\Omega \cup \Omega^*$ は領域であり, $(\Omega \cap \bar{R}) \cup (\Omega^* \setminus R)$, はその部分開集合である。また

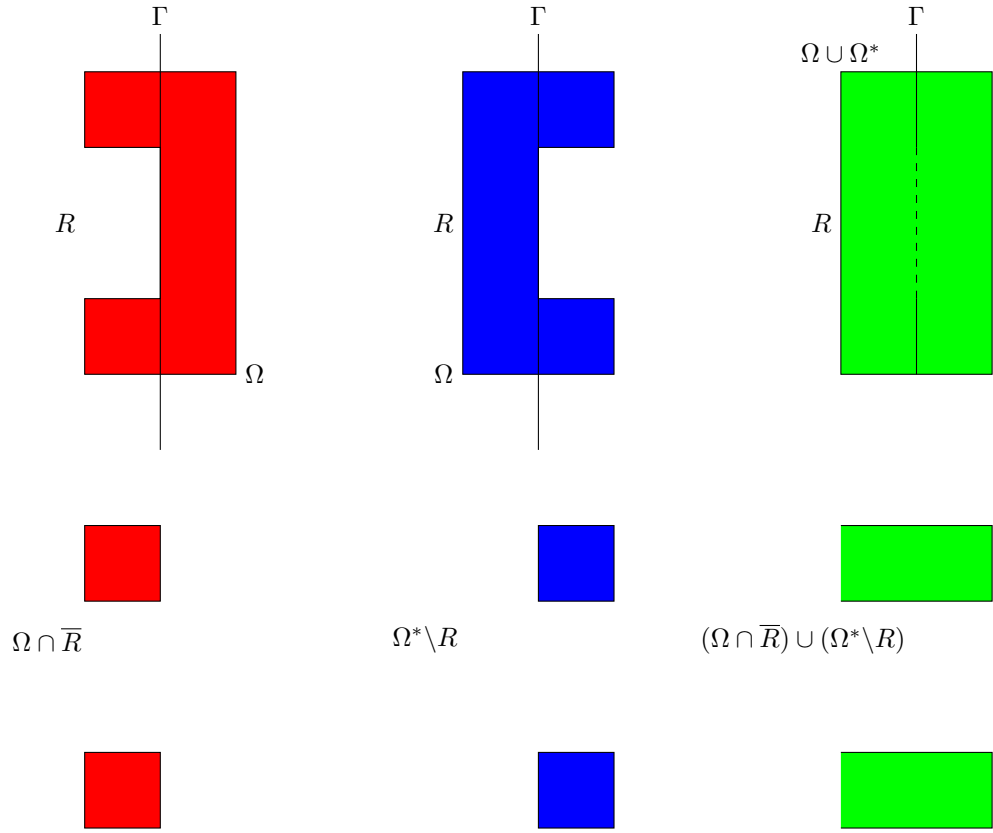
$$(9.9) \quad \rho(z) = \begin{cases} \lambda_{\Omega}(z), & z \in \Omega \cap \bar{R} \\ \lambda_{\Omega^*}(z), & z \in \Omega^* \setminus R \end{cases}$$

は, $(\Omega \cap \bar{R}) \cup (\Omega^* \setminus R)$ において正直, 連続である。

Proof. $\Omega \cup \Omega^*$ は明らかに開集合であるから, 連結性を示せば領域であることが分かる。そこで $a \in \Omega \cap \Gamma (\neq \emptyset)$ を取ると $a = j(a) \in \Omega^* \cap \Gamma$ であるから $a \in \Omega \cap \Omega^*$ が従う。よって 2 つの連結集合 Ω, Ω^* の共通部分は空でないので $\Omega \cap \Omega^*$ は連結である。

次に各 $a \in (\Omega \cap \bar{R}) \cup (\Omega^* \setminus R)$ が $(\Omega \cap \bar{R}) \cup (\Omega^* \setminus R)$ の内点であることを示そう。まず $a \in \Omega \cap \bar{R}$ のときを考える。 $a \in \Omega \cap R$ ならば内点であることは明らかである。 $a \in \Omega \cap \Gamma$ の場合, $\mathbb{D}(a, r) \subset \Omega$

□



Theorem 9.6. Ω を \mathbb{C} 内の双曲的領域とし $\Omega \cap \Gamma \neq \emptyset$ とする.
 $j(\Omega \setminus R) \subset \Omega$ (またはこれと同値な $\Omega \setminus R \subset \Omega^*$) ならば

Theorem 9.7. $K = \frac{1}{\lambda_{0,1}(-1)}$ と置く. このとき

$$(9.10) \quad \lambda_{0,1}(z) \geq \frac{1}{|z|(K + |\log |z||)}, \quad z \in \mathbb{D} \setminus \{0, 1\}$$

が成り立つ. またこの不等式において $z = -1$ のとき等号が成り立つ.

$z = -1$ において等号が成り立つのは K の定義から明らかであるが, このことから右辺の計量は SK-metric でない (従って ultrahyperbolic でもない) ことが分かる. 実際もし SK-metric であるならば Ahlfors の補題の一意性より右辺の計量は $\lambda_{0,1}$ と一致する. しかしながら右辺は $|z| = 1$ 上で一定値 K を取るが, $\lambda_{0,1}(re^{i\theta})$ は θ について狭義単調であったから矛盾を生じる.

第 10 章

Picard の定理

単位円板上で正則で 0 及び 1 という値を取らない函数 f について $|f(z)| \leq M(|f(0)|, |z|)$ の形の評価が出来ることを主張するのが Schottky の定理である. M については様々な式表示が知られていて, Schottky 型の評価式と呼ばれている. §1 では前章で示した双曲計量に関する評価式

$$\frac{1}{|w|(K + |\log |w||)} \leq \lambda_{0,1}(w), \quad w \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$$

から Schottky 型の評価式を 1 つ. ただし $K = \frac{1}{\lambda_{0,1}(-1)}$ である. §2 では Hayman による Schottky 型の評価式を解説する. こちらの証明は \mathbb{D} から $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ の上への正則な普遍被覆写像 (= モジュラー函数) を用いるが, 円弧三角形から円弧三角形への等角写像に関する煩雑な計算を必要としないので, ここで紹介することにした. §3 では Schottky 型の不等式の簡単な応用として Picard の定理を証明する.

10.1 双曲計量の評価から導かれる Schottky 型の評価式

Theorem 10.1. 単位円板 \mathbb{D} 上で正則な函数 f が値として 0, 1 を取らなければ \mathbb{D} 上で

$$(10.1) \quad \log |f(z)| \leq (K + \log^+ |f(0)|) \frac{1 + |z|}{1 - |z|},$$

$$(10.2) \quad |\log |f(z)|| \leq (K + |\log |f(0)||) \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

が成り立つ.

Proof. 正則函数 $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ による $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ の双曲計量 $\lambda_{0,1}$ の引き戻しを考えると

$$\frac{|f'(z)|}{|f(z)|(K + |\log |f(z)||)} \leq \lambda_{0,1}(f(z))|f'(z)| \leq \lambda_{\mathbb{D}}(z) = \frac{2}{1 - |z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}$$

を得る.

$z_0 \in \mathbb{D}$ について $|f(z_0)| \leq 1$ の時, 不等式 (10.1) は自明に成り立つ. そこで以下では $|f(z_0)| > 1$ と仮定し曲線 γ を $\gamma(t) = f(z_0 t)$, $0 \leq t \leq 1$ と置く. そして $t_0 = \sup\{t \in [0, 1] : |\gamma(t)| = |f(z_0 t)| \leq 1\}$ と置こう. ただし $\sup \emptyset = 0$ とする. このとき $|f(0)| \leq 1$ ならば $\{t\} \neq \emptyset$ であり $|\gamma(t_0)| = 1$ である. また $|f(0)| > 1$ のとき $\{t\} = \emptyset$ ならば $t_0 = 0$ であり $|\gamma(t_0)| = |f(0)|$ が成り立つ. そして $\{t\} \neq \emptyset$ ならば $|\gamma(t_0)| = 1$ である. よって

$$(10.3) \quad |\gamma(t_0)| \leq \max\{1, |f(0)|\}$$

が成り立つ。また $|\gamma(t)| \geq 1$, $t_0 \leq t \leq 1$ が成り立つ。ここで $\gamma'(t) = z_0 f'(z_0 t)$ であるから上の不等式より

$$\frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t)|(K + \log |\gamma(t)|)} \leq \frac{2|z_0|}{1 - |z_0 t|^2}$$

を得る。ここで $|\gamma|(t) = |\gamma(t)|$, $t_0 \leq t \leq 1$ と置くと

$$|\gamma'(t)| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)}{\Delta t} \right| \geq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{|\gamma(t + \Delta t)| - |\gamma(t)|}{\Delta t} \right| = |\gamma|'(t)$$

に注意すると

$$\frac{|\gamma|'(t)}{|\gamma|(t)(K + \log |\gamma|(t))} \leq \frac{2|z_0|}{1 - |z_0 t|^2}$$

が成り立つ。この不等式の両辺を t_0 から 1 まで積分し $|\gamma(1) = |f(z_0)|$, $\log |\gamma(t_0)| \leq \log \max\{|f(0)|, 1\} = \log^+ |f(0)|$ に注意すれば

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^1 \frac{|\gamma|'(t) dt}{|\gamma|(t)(K + \log |\gamma|(t))} \leq \int_{t_0}^1 \frac{2|z_0| dt}{1 - |z_0 t|^2} \\ \implies & [\log(K + \log |\gamma|(t))]_{t_0}^1 \leq \int_0^1 \left\{ \frac{|z_0|}{1 - |z_0|t} + \frac{|z_0|}{1 + |z_0|t} \right\} dt \\ \implies & \log \frac{K + \log |\gamma(1)|}{K + \log |\gamma(t_0)|} \leq \log \frac{1 + |z_0|}{1 - |z_0|} - \log \frac{1 + |z_0|t_0}{1 - |z_0|t_0} \leq \log \frac{1 + |z_0|}{1 - |z_0|} \\ \implies & \frac{K + \log |f(z_0)|}{K + \log |\gamma(t_0)|} \leq \frac{1 + |z_0|}{1 - |z_0|} \\ \implies & \log |f(z_0)| \leq K + \log |f(z_0)| \leq (K + \log |\gamma(t_0)|) \frac{1 + |z_0|}{1 - |z_0|} \leq (K + \log^+ |f(0)|) \frac{1 + |z_0|}{1 - |z_0|} \end{aligned}$$

よって (10.1) が成り立つ。また $1/f$ に (10.1) を適用すれば

$$\log \frac{1}{|f(z_0)|} \leq \left(K + \log^+ \frac{1}{|f(0)|} \right) \frac{1 + |z_0|}{1 - |z_0|}$$

が成り立つ。ここで $\log^+ |f(0)| \leq |\log |f(0)||$ 及び $\log^+ \frac{1}{|f(0)|} \leq |\log |f(0)||$ を考慮すれば上の不等式と (10.1) を合わせ

$$|\log |f(z_0)|| = \max \left\{ \log |f(z_0)|, \log \frac{1}{|f(z_0)|} \right\} \leq (K + |\log |f(z_0)||) \frac{1 + |z_0|}{1 - |z_0|}$$

を得る。すなわち (10.2) が成り立つ。 □

上で述べた Schottky 型の評価式の改良版として Hayman [13] による

$$(10.4) \quad \log |f(z)| \leq (\pi + \log^+ |f(0)|) \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

が知られている。これは次節で証明する。

10.2 Hayman による Schottky 型の評価式

本節では 1947 年の Hayman による Schottky 型の評価式

Theorem 10.2 (Hayman [13]). 単位円板 \mathbb{D} 上で正則な函数 f が値として $0, 1$ を取らなければ

$$(10.5) \quad \log |f(z)| \leq (\pi + \log^+ |f(0)|) \frac{1 + |z|}{1 - |z|},$$

が成り立つ.

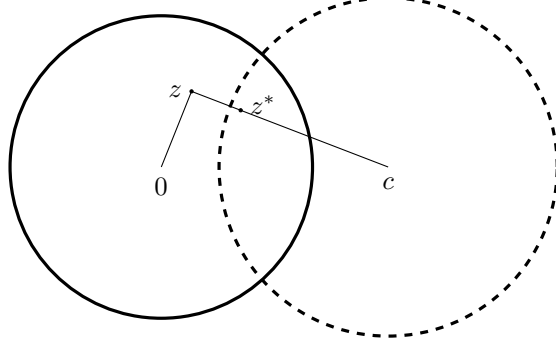
について解説する. ただし Hyaman のオリジナルな証明ではなく, Jenkins [16] による簡単な証明を紹介しよう. まず Robinson [28] による補題を準備する.

Lemma 10.3 (Robinson の注意). D を円板で ∂D と単位円周 $\partial \mathbb{D}$ が直交するものとする. このとき $z \in \mathbb{D} \setminus \bar{D}$ について z^* で ∂D に関し鏡像の位置にある点を表すとすると

$$|z| < |z^*|$$

が成り立つ.

Proof. 必要ならば回転を施すことにより D の中心を $c \in (1, \infty)$ と置いてよい.



∂D と単位円周 $\partial \mathbb{D}$ が直交するので D の半径は $\sqrt{c^2 - 1}$ であり $(z^* - c)(\bar{z} - c) = c^2 - 1$ であるから

$$z^* = c + \frac{c^2 - 1}{\bar{z} - c} = \frac{c\bar{z} - 1}{\bar{z} - c}$$

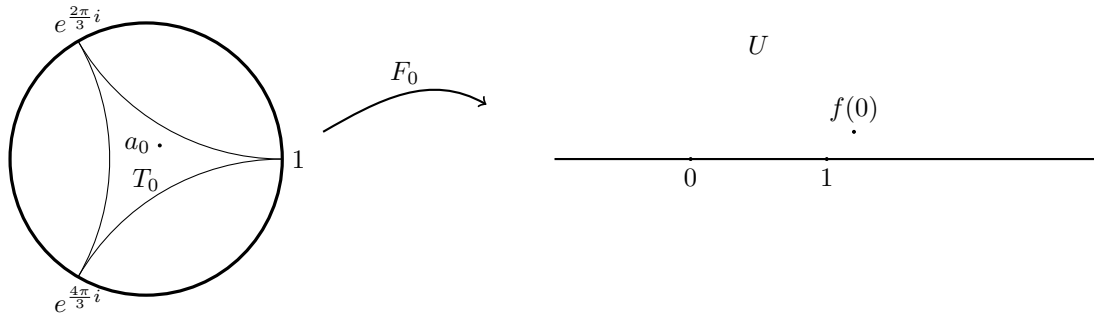
である. よって

$$\begin{aligned} |z^*|^2 - |z|^2 &= \frac{|c\bar{z} - 1|^2 - |z|^2 |\bar{z} - c|^2}{|\bar{z} - c|^2} \\ &= \frac{(1 - |z|^2) \{ |c - z|^2 - (c^2 - 1) \}}{|\bar{z} - c|^2} > 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. □

Proof of 定理 10.2. $\text{Im } f(0) \geq 0$ の場合に導こう. もし $\text{Im } f(0) < 0$ の場合は f の代わりに $\overline{f(\bar{z})}$ を考えればよい.

1. $\partial \mathbb{D}$ と直交する 3 つの円弧により囲まれた円弧三角形 T で, その閉包 \bar{T} が $0 \in \bar{T}$ を満たすもの及び T から上半平面への等角写像 F で T の 3 頂点を $0, 1, \infty$ に写像しかつ $F(0) = f(0)$ を満たすものが存在することを示そう.



$1, e^{\frac{2\pi}{3}}, e^{-\frac{2\pi}{3}}$ を3つの頂点とし、これらの頂点を結び $\partial\mathbb{D}$ と直交する円弧を辺とする円弧三角形を T_0 と置く. Riemann の写像定理より T_0 から上半平面への等角写像 F_0 で $1, e^{\frac{2\pi}{3}}, e^{-\frac{2\pi}{3}}$ をこの順に $0, 1, \infty$ に写像するものが一意的に存在する. この等角写像による $f(0)$ の原像を a_0 とすれば $a_0 \in \overline{T_0}$ である. このとき

$$F(z) = F_0 \circ \tau(z), \quad \text{where } \tau(z) = \frac{z + a_0}{1 + \overline{a_0}z}$$

と置けば, F は $T = \tau^{-1}(T_0)$ から上半平面への等角写像であり T は $\tau^{-1}(1), \tau^{-1}(e^{\frac{2\pi}{3}}), \tau^{-1}(e^{-\frac{2\pi}{3}})$ を3頂点とし、各辺が $\partial\mathbb{D}$ と直交する円弧三角形である. また明らかに $0 = \tau^{-1}(a_0) \in \tau^{-1}(\overline{T_0}) = \overline{T}$ である.

以下では $(0, 1), (1, \infty), (-\infty, 0)$ に写像される円弧をそれぞれ $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty$ と置く. また γ_∞ と γ_0 の共有頂点を z_0, γ_0 と γ_1 の共有頂点を z_1, γ_1 と γ_∞ の共有頂点を z_∞ と置く. (下図参照).

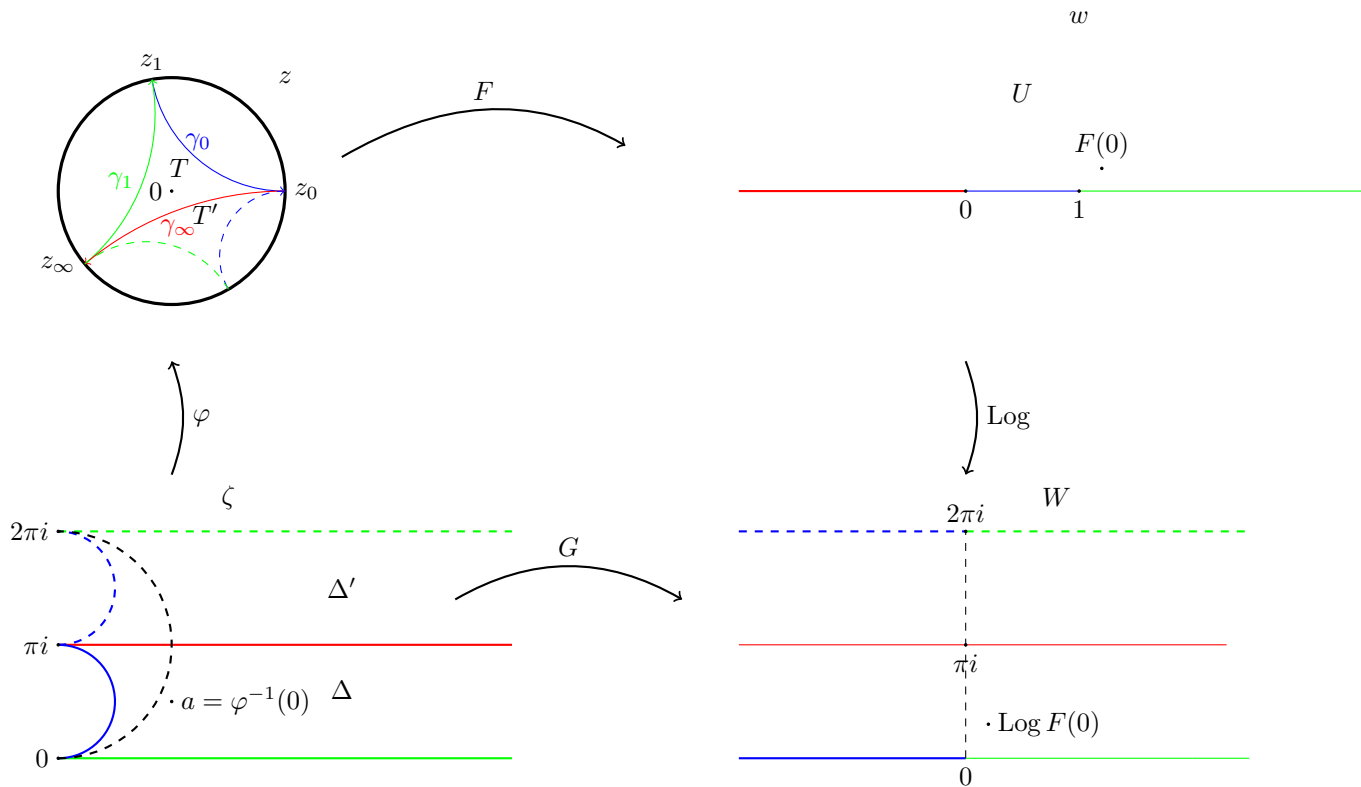
2. 上記の F を鏡像の原理を用いて定義域を拡張していくと \mathbb{D} から $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ への正則な普遍被覆写像が得られる. これを再び F で表すことにする. 作り方から $F(0) = f(0)$ が成り立つ. よって f の被覆 $F: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ に関する正則な持ち上げ $\omega: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ で $\omega(0) = 0$ を満たすものが存在する. Schwarz の補題より、任意の $r \in (0, 1)$ について $\omega(\overline{\mathbb{D}(0, r)}) \subset \overline{\mathbb{D}(0, r)}$ が成り立つので

$$\max_{|z| \leq r} |f(z)| = \max_{z \in \overline{\mathbb{D}(0, r)}} |F(\omega(z))| \leq \max_{z \in \overline{\mathbb{D}(0, r)}} |F(z)| = \max_{z \in \partial\mathbb{D}(0, r)} |F(z)|$$

を得る. 従って $|F(z)|$ の $|z| = r$ における上からの評価を得れば、それが $|f(z)|$ の上からの評価になる. そこで以下では写像 F について調べよう.

3. φ を右半平面 H から \mathbb{D} への等角写像を与える一次変換で $0, \infty, \pi i$ をそれぞれ3頂点 z_1, z_∞, z_0 に写像するものとする. このとき γ_0 は半円 $\{\zeta \in H : |\zeta - \frac{\pi}{2}i| = \frac{\pi}{2}\}$ に、 γ_1 は正の実軸 $(0, +\infty)$ に、 γ_∞ は πi から水平右方向に伸びる半直線 $(\pi i, i\pi + \infty)$ に、に写像され、これらの半直線と半円で囲まれた領域 Δ が T に等角に写像される.

さて Δ の半直線 $(\pi i, i\pi + \infty)$ に関する鏡像 Δ' を取る. このとき Δ' は T の γ_∞ に関する鏡像 T' に写像される. また上半平面 U における偏角を $0 \leq \text{Arg } w \leq \pi$ で定め、 $\text{Log } w = \log |w| + i \text{Arg } w$ と置くと、この対数函数により $(0, 1)$ は $(-\infty, 0)$ に、 $(1, \infty)$ は $(0, \infty)$ に、 $(-\infty, 0)$ は $(-\infty + \pi i, +\infty + \pi i)$ に写像され、 U は帯状領域 $\{W : 0 < \text{Im } W < \pi\}$ に等角に写像される. この帯状領域の $(-\infty + \pi i, +\infty + \pi i)$ に関する鏡像を取れば、結局 $\Delta \cup \Delta' \cup (\pi i, i\pi + \infty)$ から帯状領域 $\{W : 0 < \text{Im } W < 2\pi\}$ への等角写像 $G(\zeta) = \text{Log } F(\varphi(\zeta))$ を得る. ここで G による線分 $(0, 2\pi i)$ の原像は半円 $\{\zeta : |\zeta - \pi i| = \pi, \text{Re } \zeta > 0\}$ であることに注意しよう. これは次のようにして分かる. G_0 を $0, \infty, 2\pi i$ を固定する領域 $\{\zeta : 0 < \text{Im } \zeta < 2\pi, |\zeta - \pi i| > \pi\}$ から領域 $\{W : 0 < \text{Im } W < 2\pi, \text{Re } W > 0\}$ への等角写像とすると G_0 の半円 $\{\zeta : |\zeta - \pi i| = \pi, \text{Re } \zeta > 0\}$ に関する解析接続は $\Delta \cup \Delta' \cup (\pi i, i\pi + \infty)$ からへの $\{W : 0 < \text{Im } W < 2\pi\}$ への等角写像であり、 $0, \pi i, 2\pi i$ を固定するので G に他ならない.



4. ここでは Robinson の注意 (補題 10.3) を用いて

$$\max_{z \in \partial \mathbb{D}(0, r)} |F(z)| = \max_{z \in \partial \mathbb{D}(0, r) \cap (\overline{T \cup \overline{T'}} \cup \gamma_\infty)} |F(z)|$$

が成り立つことを示そう。 $\max_{z \in \partial \mathbb{D}(0, r)} |F(z)| = F(c)$ を満たす点 $c \in \partial \mathbb{D}$ を取る。 $c \notin \overline{T \cup \overline{T'}} \cup \gamma_\infty$ ならば F の作り方より $F(c) = F(c_0)$ を満たす点 $c_0 \in \overline{T \cup \overline{T'}} \cup \gamma_\infty$ を満たす c_0 が存在する。 c は c_0 に $\partial \mathbb{D}$ と直交する円弧に関する鏡像を取る操作を何回か繰り返すことにより得られるので、Robinson の注意より $r = |c| > |c_0|$ である。従って $|F|$ は $\mathbb{D}(0, r)$ の内点 c_0 において $\partial \mathbb{D}(0, r)$ における最大値と等しい値を取る。よって F は定数関数となり矛盾を生じる。

5. G_0 の定義域は境界も含めると $V = (\overline{\Delta \cup \overline{\Delta'}}) \setminus \mathbb{D}(\pi i, \pi)$ であり、ここで

$$(10.6) \quad \operatorname{Re} \zeta - \pi \leq \operatorname{Re} G_0(\zeta) \leq \operatorname{Re} \zeta, \quad \zeta \in V$$

が成り立つことを示そう。 V の指数関数 \exp による像 $\exp(V)$ は $\mathbb{D}(0, e^{-\pi}) \subset \exp V \subset \overline{\mathbb{D}}$ を満たす。また $G_0(V)$ は $\{W : 0 \leq \operatorname{Im} W \leq 2\pi, \operatorname{Re} W \geq 0\}$ であるから、これの \exp による像は $\overline{\mathbb{D}}$ である。また $G_0(x + 2\pi) = G_0(x) + 2\pi i$, $0 < x < \infty$ が成り立つことより、 $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ において一価正則な分枝 $\xi = \psi(z) = \exp(-G_0(\operatorname{Log} z))$ を取ることが出来る。また $z \rightarrow 0$ のとき $\psi(z) \rightarrow 0$ であるから原点は除去可能特異点である。結局 ψ は $\exp(V)$ から $\overline{\mathbb{D}}$ への連続写像であり $\operatorname{Int} \exp(V)$ から \mathbb{D} への等角写像で、 $\psi(0) = 0$ を満たす。 ψ と ψ^{-1} に Schwarz の補題を適用し $|\psi(z)| \leq e^\pi |z|$, $\psi^{-1}(\xi) \leq |\xi|$ を得る。特に後者から $|z| \leq |\psi(z)|$ が従う。 $z = e^{-\zeta}$ と合わせ

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} G_0(\zeta) &= -\log |\psi(z)| \leq \log(e^\pi |z|) = \pi + \log |z| = \pi - \operatorname{Re} \zeta \\ \operatorname{Re} G_0(\zeta) &= -\log |\psi(z)| \geq \log |z| = \operatorname{Re} \zeta \end{aligned}$$

が成り立つ.

6. $\varphi^{-1}(z)$ について成り立つ不等式 $\operatorname{Re} \varphi(z) \leq \operatorname{Re} a \frac{1+|z|}{1-|z|}$ に注意すると $z \in (\overline{T} \cup \overline{T'} \cup \gamma_\infty) \cap \mathbb{D}$ について

$$\log |F(z)| = \operatorname{Re} G_0(\varphi^{-1}(z)) \leq \operatorname{Re} \varphi^{-1}(z) = \operatorname{Re} a \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

が成り立つ.

$|F(0)| (= f(0)) < 1$ の場合 $a = \varphi^{-1}(0)$ は $\operatorname{Re} a < \pi$ を満たすので

$$\log |F(z)| \leq \pi \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

が成り立つ.

$|F(0)| (= f(0)) \geq 1$ の場合 $a = \varphi^{-1}(0)$ は $a \in V$ を満たすので $\operatorname{Re} a - \pi \leq G_0(a) = \operatorname{Log} |F(0)|$ が成り立ち. よって

$$\log |F(z)| \leq (\pi + \log |f(0)|) \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

が成り立つ. □

10.3 Picard の定理

領域 D 上の有理型函数 f について $a \in \hat{\mathbb{C}} \setminus f(D)$ を f の (D における) 除外値と呼ぶ. 単に f により取られることのない値という意味である.

Theorem 10.4 (Picard の小定理). f が \mathbb{C} 上の有理型函数で除外値を 3 つ持てば, f は定数函数である.

Proof. f の相異なる除外値を a, b, c とする. $a, b, c \in \mathbb{C}$ の場合を考えよう. このとき $F = \frac{(c-b)(f-a)}{(c-a)(f-b)}$ は $0, 1, \infty$ を除外値に持つ. 同様に a, b, c の中に ∞ があれば例えば $c = \infty$ として $F = \frac{f-a}{f-b}$ と置けば, やはり F は $0, 1, \infty$ を除外値に持つ.

$R > 0$ とし函数 $F(2Rz)$, $z \in \mathbb{D}$ を考えよう. これに定理 10.1 を $z = \frac{e^{i\theta}}{2}$ において適用すれば

$$\log F |(Re^{i\theta})| \leq 3(K + \log^+ |F(0)|)$$

を得る. $R > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ は任意であるから F は \mathbb{C} で有界正則函数である. 従って Liouville の定理より F は定数函数であり, f もそうである. □

Theorem 10.5 (Picard の大定理 I). $\delta > 0$ とする. 函数 f が $\mathbb{D}(0, \delta) \setminus \{0\}$ 上の有理型函数で除外値を 3 つ持てば, 0 は f の極または除去可能特異点である.

Proof. 一般性を失うことなく $\delta = 1$ と仮定してよい. 小定理の証明と同じ $0, 1, \infty$ を除外値とする函数 F を取る. このとき正則函数 $F: \mathbb{D} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ による $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ の双曲計量の引き戻しは $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ の双曲計量を越えないので

$$\frac{|F'(z)|}{|F(z)|(K + |\log |F(z)||)} \leq \lambda_{0,1}(F(z)) |F'(z)| \leq \frac{1}{|z| \log \frac{1}{|z|}}$$

が成り立つ。それでは上の不等式を利用し、固定した $r_0 \in (0, 1)$ について

$$(10.7) \quad \log |F(re^{i\theta})| \leq \{K + \log^+ |F(r_0e^{i\theta})|\} \frac{\log \frac{1}{r}}{\log \frac{1}{r_0}}, \quad 0 < r < r_0 \text{ and } \theta \in \mathbb{R}$$

が成り立つことを示そう。

$|F(re^{i\theta})| \leq 1$ の場合、不等式は明らかであるから $|F(re^{i\theta})| > 1$ と仮定する。

$$\rho_0 = \inf\{\rho \in [r, r_0] : |F(\rho e^{i\theta})| \leq 1\}$$

と置く。ただし $\{\} = \emptyset$ の場合、つまり $|F(\rho e^{i\theta})| > 1$ が全ての $\rho \in [r, r_0]$ について成り立つとき $\rho_0 = r_0$ と置く。このとき

$$\begin{aligned} |F(\rho e^{i\theta})| &> 1 \text{ for } r \leq \rho < \rho_0 \\ |F(\rho_0 e^{i\theta})| &= \begin{cases} 1, & \{\} \neq \emptyset \text{ のとき} \\ |F(r_0 e^{i\theta})|, & \{\} = \emptyset \text{ のとき} \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ。特に $\log |F(\rho_0 e^{i\theta})| \leq \log^+ |F(r_0 e^{i\theta})|$ が成り立つことに注意する。ここで曲線 $\gamma(t) = f(te^{i\theta_0})$, $r \leq t \leq \rho_0$ を考えよう。

$$\begin{aligned} |\gamma(t)| &> 1 \text{ for } r \leq t < \rho_0 \\ |\gamma(\rho_0)| &\leq \log^+ |F(r_0 e^{i\theta})| \end{aligned}$$

また $|\gamma'(t)| = |\gamma'(t)|$, $r \leq t \leq \rho_0$ と置くと $|\gamma'(t)| \geq -|\gamma'(t)|$ が成り立つ。これと $|\gamma'(t)| = |e^{i\theta_0} F'(te^{i\theta_0})| = |F'(te^{i\theta_0})|$ より

$$\int_r^{\rho_0} \frac{-|\gamma'(t)| dt}{|\gamma(t)|(K + \log |\gamma(t)|)} \leq \int_r^{\rho_0} \frac{|\gamma'(t)| dt}{|\gamma(t)|(K + \log |\gamma(t)|)} = \int_r^{\rho_0} \frac{|F'(te^{i\theta_0})| dt}{|F(te^{i\theta_0})|(K + \log |F(te^{i\theta_0})|)} \leq \int_r^{\rho_0} \frac{dt}{t \log \frac{1}{t}}$$

を得る。最左辺と最右辺を計算すると

$$\log \left(\frac{K + \log |\gamma(r)|}{K + \log |\gamma(\rho_0)|} \right) \leq \log \frac{\log \frac{1}{r}}{\log \frac{1}{\rho_0}}$$

$|\gamma(r)| = |F(re^{i\theta})|$ と $\log |\gamma(\rho_0)| \leq \log^+ |F(r_0 e^{i\theta})|$ と合わせると

$$\log |F(re^{i\theta})| \leq -K + \{K + \log^+ |F(r_0 e^{i\theta})|\} \frac{\log \frac{1}{r}}{\log \frac{1}{r_0}} \leq \{K + \log^+ |F(r_0 e^{i\theta})|\} \frac{\log \frac{1}{r}}{\log \frac{1}{r_0}}$$

が成り立つ。ここまで $|F(re^{i\theta_0})| > 1$ の時を考えてきたが、上の不等式は $|F(re^{i\theta_0})| \leq 1$ の場合は自明に成り立つ。ここで $M(r, F) = \max_{\theta \in \mathbb{R}} |F(re^{i\theta})|$ と置けば上の不等式の θ_0 に関する任意性より

$$\log M(r, F) \leq \{K + \log^+ M(r_0, F)\} \frac{\log \frac{1}{r}}{\log \frac{1}{r_0}}$$

よって原点は F の極または除去可能特異点であり、 f についてもそうである。 \square

Theorem 10.6 (Picard の大定理 II). $\delta > 0$ とする。函数 f が $\mathbb{D}(0, \delta) \setminus \{0\}$ 上の有理型函数で 0 を真性特異点に持てば、 f は高々 2 つの値を除いて全ての値を 0 の近傍で無限回取る。

Proof. 結論を否定すると“ f は 3 つの値について 0 の近傍で取るのは有限回である”となる。そこでこれらの値を a, b, c とする。このとき $\delta_0 > 0$ を十分小さく取れば f は $\mathbb{D}(0, \delta_0) \setminus \{0\}$ において a, b, c を取らない。よって f は $\mathbb{D}(0, \delta_0) \setminus \{0\}$ において除外値を 3 つ持つことになり、定理 10.5 より原点は f の除去可能特異点または極となり、仮定に反する。 \square

第 11 章

Bloch and Landau constants

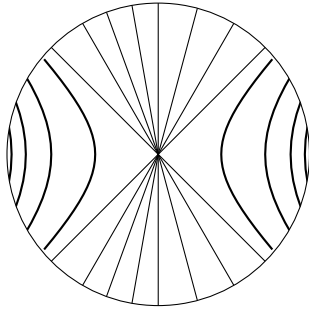
11.1 像 Riemann 面

§1.6 の冒頭で Ahlfors は “ \mathbb{D} 上の非定数正則函数 $w = f(z)$ は \mathbb{D} から w 平面上に広がる, ある Riemann 面 W_f への 1 対 1 かつ上への写像であるとみなすことが出来る.” と述べている. このような表現は古い文献を読むとよくお目にかかるが, ここで正確な意味を述べておこう. まず $W_f = \mathbb{D}$ と置き $\tilde{f} = \text{id}_{\mathbb{D}}$, $\pi : W_f \rightarrow \mathbb{C}$ を $\pi(z) = f(z)$ で定義する. これでは単に \mathbb{D} の代わりに W_f と表しただけで意味があるのかと疑問に思うであろうが, W_f 上の計量として $|dz|$ や $\frac{2|dz|}{1-|z|^2}$ ではなく $|dw| = |f'(z)||dz|$ を用いる. これが唯一の違いである. W_f は f の像 Riemann 面 (image Riemann surface) または逆函数の Riemann 面と言う.

像 Riemann 面の理解を深めるために $w = f(z) = z^2$, $|z| < R$, $R \in (1, \infty]$ について像 Riemann 面がどうなるかを考えてみよう. $z = x + iy$, $w = u + iv$ と表すことにする. この場合は \mathbb{D} を計量 $|f'(z)| = 2|z||dz|$ のもとで考えることになる. $\partial\mathbb{D}$ 上の互いに共役な 2 点 $e^{\pm i\theta}$ を結ぶ最短曲線がどうなるかを考えてみよう. $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ の場合は角領域 $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \frac{\pi}{4}\}$ の像は右半平面 $\{w \in \mathbb{C} : \text{Re } w > 0\}$ であり, 凸領域であるので, 対応する $f(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}$ を結ぶ最短曲線は直線 $u = \cos 2\theta$ である. これの原像である双曲線 $x^2 - y^2 = \cos 2\theta$ 内の $e^{\pm i\theta}$ を結ぶ部分曲線が最短である. $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の場合に最短曲線が $e^{i\theta}$ から原点へ向かう線分と原点から $e^{-i\theta}$ へ向かう線分をつないだ折れ線になることは次のようにして分かる. $e^{i\theta}$ から $e^{-i\theta}$ へ向かう曲線 γ について $e^{i\theta}$ から最初に実軸にぶつかるまでの部分曲線を γ_1 とすれば $f(\gamma_1)$ は上半平面内の点である $e^{2i\theta}$ から $[0, \infty)$ (実軸の非負の部分) のある点に達する曲線である. この曲線 $f(\gamma_1)$ の長さは $e^{2i\theta}$ と原点を結ぶ線分の長さ 1 以上である. 同様に γ が最後に実軸を離れ $e^{-i\theta}$ へ向かう部分を γ_2 とすれば $f(\gamma_2)$ の長さは $e^{-2i\theta}$ と原点を結ぶ線分の長さ 1 以上である. よって

$$\gamma \text{ の長さ} = f(\gamma) \text{ の長さ} \geq 1 + 1 = 2$$

となり, $e^{i\theta}$ から原点へ向かう線分と原点から $e^{-i\theta}$ へ向かう線分をつないだ折れ線が最短である. この状況を図示すると下図のようになる. ただし $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ の場合は対称性より $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の図を虚軸に関し折り返したものになる.



11.2 不分岐円板と Bloch 定数

開円板 $D \subset \mathbb{C}$ が f の unramified disk (不分岐円板) であるとは \mathbb{D} の部分領域 Ω で f の Ω への制限 $f|_{\Omega}$ が Ω から D への等角写像 (= 全単射正則) となっているときを言う. 前節の像 Riemann 面 $\tilde{f}: \mathbb{D} \rightarrow W_f$ の概念を用いると, W_f 内の部分領域 $\tilde{f}(\Omega)$ は D と等角で計量 $|f'(z)||dz|$ のもとで円板であるから D と同一視し, D は像 Riemann 面 W_f 内の 1 枚の葉 (sheet) 内にあると言ったりする. このため不分岐円板と呼ぶ代わりに単葉円板 (schlicht disk) と言ったりもする.

函数 f の unramified disk の半径の上限を B_f で表そう. Bloch は B_f が条件 $|f'(0)| = 1$ により正規化されているとき B_f が無制限に小さくはなれないという発見をした. 換言すれば $|f'(0)| = 1$ という条件のもとで \mathbb{D} 上の正則函数 f を動かしたときの B_f の下限 B は正の数であり, 現在では Bloch 定数と呼ばれている.

ここでは Minda [18] に従ってもう少し丁寧に定義を述べよう. まず非定数函数 $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ について

$$(11.1) \quad r(z, f) = \sup\{r > 0 : \mathbb{D}(f(z), r) \text{ is unramified disk of } f\}, \quad z \in \mathbb{D}$$

と置く. $f'(z_0) \neq 0$ のときは f は z_0 のある近傍で単葉であるから, $f(z_0)$ 中心の unramified disk は存在する. しかしながら $f'(z_0) = 0$ のときは, $f(z_0)$ 中心の unramified disk は存在しないので $\sup \emptyset = 0$ と置き $r(z, f) = 0$ とする. そして

$$(11.2) \quad r(f) = \sup_{z \in \mathbb{D}} r(z, f) (= B_f)$$

と置き

$$(11.3) \quad B = \inf\{r(f) : f \text{ is analytic in } \mathbb{D} \text{ with } |f'(0)| = 1\}$$

と定義する.

B の正確な値は知られていないが, ここでは次の下からの評価を示そう.

Theorem 11.1. $|f'(0)| = 1$ に正規化された \mathbb{D} 上の正則函数 f について $r(f) \geq \frac{\sqrt{3}}{4}$ が成り立つ. これより特に $B \geq \frac{\sqrt{3}}{4}$ が成り立つ.

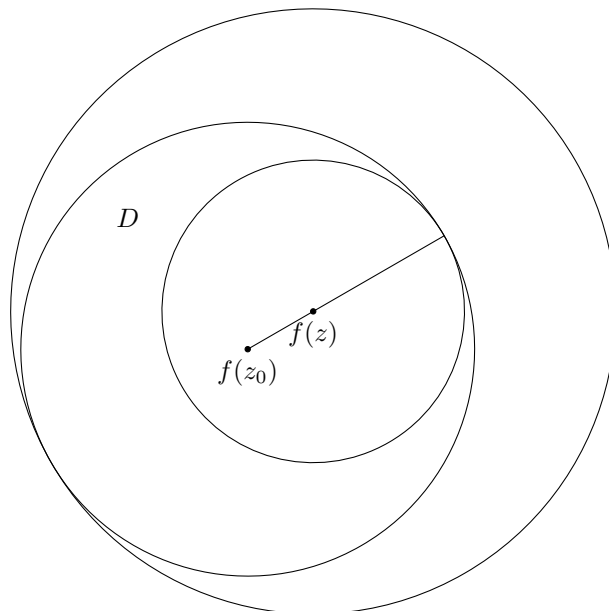
証明の前に $r(z, f)$ の性質を調べておこう.

Proposition 11.2. f を \mathbb{D} 上の非定数正則函数とする. このとき任意の $z_0 \in \mathbb{D}$ について, z_0 のある近傍上で

$$(11.4) \quad |r(z, f) - r(z_0, f)| \leq |f(z) - f(z_0)|$$

が成り立つ. これより特に $r(z, f)$ は $z \in \mathbb{D}$ について連続である.

Proof. $f'(z_0) \neq 0$ のとき $D = \mathbb{D}(f(z_0), r(z_0, f))$ は $f(z_0)$ 中心の極大 unramified disk であり, 対応する \mathbb{D} の部分領域 Ω で $z_0 \in \Omega$ かつ $f|_{\Omega}$ が Ω から D への等角写像となるものが存在する. このとき $z \in \Omega$ ならば $f(z)$ 中心で半径 $r(z_0, f) - |f(z) - f(z_0)|$ の円板は D に含まれるので unramified disk であり, また $f(z)$ 中心で半径 $r(z_0, f) + |f(z) - f(z_0)|$ 以上の円板が unramified disk であると, D よりも大きな $f(z_0)$ 中心の unramified



disk が取れることになり矛盾を生じるから

$$r(z_0, f) - |f(z) - f(z_0)| \leq r(z, f) \leq r(z_0, f) + |f(z) - f(z_0)|$$

が成り立つ. よって (11.4) が成り立つ.

次に $f'(z_0) = 0$ のときを考えよう. このときある $n \geq 2$, $R > 0$, z_0 の近傍 V と V で単葉な正則函数 g を $f(z) = f(z_0) + g(z - z_0)^n$, $g(z_0) = 0$ が成り立ち $g(V) = \mathbb{D}(z_0, R)$ となるように取ることが可能である. $z \in V$ ならば $f(z)$ 中心の unramified disk は $f(z_0)$ を含むことが出来ないので $r(z, f) \leq |f(z) - f(z_0)|$ が成り立つ. $r(z_0, f) = 0$ と合わせると, この場合も (11.4) が成り立つ. \square

Proposition 11.3. f を \mathbb{D} 上の非定数正則函数とする. このとき

$$(11.5) \quad \frac{1}{4}(1 - |z|^2)|f'(z)| \leq r(z, f) \leq (1 - |z|^2)|f'(z)|$$

が成り立つ.

Proof. $z_0 \in \mathbb{D}$ について不等式を示そう. $f'(z_0) = 0$ の場合は自明に成り立つので $f'(z_0) \neq 0$ と仮定する. このとき $w_0 = f(z_0)$, $R = r(z_0, f)$ と置き最大不分岐円板 $D := \mathbb{D}(w_0, R)$ に対応する \mathbb{D} の単連結部分領域 Ω を取れば制限写像 $f|_{\Omega}$ は Ω から D への等角写像である.

$$g(w) = \frac{(f|_{\Omega})^{-1}(w_0 + Rw) - z_0}{1 - \bar{z}_0(f|_{\Omega})^{-1}(w_0 + Rw)}, \quad w \in \mathbb{D}$$

は \mathbb{D} から \mathbb{D} の中への単射正則写像であり $g(0) = 0$ を満たす. まず g に Schwarz の補題を適用すると

$$1 \geq |g'(0)| = \frac{R}{1 - |z_0|^2} \frac{d|(f|_{\Omega})^{-1}|}{dz}(w_0) = \frac{r(z_0, f)}{(1 - |z_0|^2)|f'(z_0)|}$$

を得る. 次に函数 $\frac{g(w)}{g'(0)}$, $w \in \mathbb{D}$ は単葉で $|z| \geq \frac{1}{|g'(0)|}$ を満たす任意の z は omitted value である. つまり z を値として取らない. よって Koebe の $1/4$ 円定理より $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{|g'(0)|}$

□

Proof. $r(f) = \infty$ の場合は自明であるから $r(f) < \infty$ である函数 f について考える. また函数 f が $\overline{\mathbb{D}}$ で正則で $|f'(0)| = 1$ を満たすときに $r(f) \geq \frac{\sqrt{3}}{4}$ を示せば十分である. 実際これが示されれば, 一般の f に対し $t \in (0, 1)$ について $f_t(z) = \frac{1}{t}f(tz)$ と置くと $\frac{r(f)}{t} \geq r(f_t) \geq \frac{\sqrt{3}}{4}$ を得るので, $t \nearrow 1$ とすれば $r(f) \geq \frac{\sqrt{3}}{4}$ が成り立つ.

$A > \sqrt{3r(f)}$ を満たす A を取る. (何故このように取るかは後ほど判明する.) $f'(z) \neq 0$ のときは

$$(11.6) \quad \rho(z) = \frac{A|f'(z)|}{\sqrt{r(z, f)}\{A^2 - r(z, f)\}}$$

と置く. $A^2 > 3r(f) > r(z, f)$ より分母は正であり定義可能であることに注意する. $f'(z_0) = 0$ となる点 $z_0 \in \mathbb{D}$ についても ρ を定義しよう. そこで $f(z) = w_0 + c_n(z - z_0)^n + \dots$, $c_n \neq 0$ と z_0 のある近傍で展開されたとする. 0 のある近傍 D と $R > 0$ で及び D 上の単葉正則函数 $g : D \rightarrow \mathbb{R}(w_0, R)$ で $f(z) = w_0 + g(z - z_0)^n$, を満たすものが存在する. このとき z_0 のある近傍 $D_0 \subset D$ において

$$r(z, f) = |f(z) - w_0| = |g(z - z_0)|^n$$

が成り立つ. 一方 $f'(z) = ng'(z - z_0)g(z - z_0)^{n-1}$ であるから

$$\rho(z) = \frac{nA|g'(z - z_0)||g(z - z_0)|^{n-1}}{|g(z - z_0)|^{\frac{n}{2}}\{A^2 - |g(z - z_0)|^n\}} = \frac{nA|g'(z - z_0)||g(z - z_0)|^{\frac{n}{2}-1}}{A^2 - |g(z - z_0)|^n}$$

である. 従って $n > 2$ ならば $\lim_{z \rightarrow z_0} \rho(z) = 0$ であり $n = 2$ のときは $\lim_{z \rightarrow z_0} \rho(z) = \frac{|g'(0)|}{A}$ である. この極限を用いて ρ を拡張し \mathbb{D} 上の計量 $\rho(z)|dz|$ を考えよう.

Claim: 計量 $\rho(z)|dz|$ は ultrahyperbolic である.

$\therefore f'(z_0) = 0$ とする. このとき $\rho(z_0) = 0$ となるのは重複度 $n > 2$ の場合であり, 上で見たように $\lim_{z \rightarrow z_0} \rho(z) = 0$ が成り立つので連続である. この場合は supporting metric の存在を示す必要はない.

$n = 2$ の場合も $\rho(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \rho(z)$ と定義したから, ここで連続である. また

$$\rho(z) = \frac{2A|g'(z - z_0)|}{A^2 - |g(z - z_0)|^2} = \frac{2 \left| \frac{g'(z - z_0)}{A} \right|}{1 - \left| \frac{g(z - z_0)}{A} \right|^2}$$

と表せる. これは ρ が局所的に正則写像 $\mathbb{D}(z_0, r_0) \ni z \mapsto \frac{g(z - z_0)}{A} \in \mathbb{D}$ による \mathbb{D} の双曲計量の引き戻しであることを示す. 従って ρ はこの近傍上で C^2 で定曲率 -1 を持つ. よって ρ 自身が ρ supporting metric である.

今度は $f'(z_0) \neq 0$ の場合を考えよう. $\mathbb{D}(f(z_0), r(z_0, f))$ は不分岐円板であり, 極大である. つまり $r(z_0, f)$ より半径が大きな同心円板は不分岐円板でない. 従って \mathbb{D} の部分領域 Ω を z_0 を含み $f|_{\Omega}$ が Ω から $\mathbb{D}(f(z_0), r(z_0, f))$ への等角写像になるように取れば, $\partial\Omega$ 上に $f'(a) = 0$ または $a \in \partial\mathbb{D}$ となる点 a が存在する. 前者の場合 $b = f(a)$ と置く. 後者の場合も f が $\overline{\mathbb{D}}$ で正則ゆえ $b = f(a)$ と置くことが可能である. どちらの場合でも $z \in \Omega$ において $r(z_0, f) - |f(z) - z_0| \leq r(z, f) \leq |f(z) - b|$ が成り立つ. そこで z_0 のある近傍で

$$\rho_0(z) = \frac{A|f'(z)|}{|f(z) - b|^{\frac{1}{2}}\{A^2 - |f(z) - b|\}}$$

と置くことを考えよう。これには $A^2 - |f(z) - b| > 0$ が z_0 のある近傍で成り立つ必要があるが、 $|f(z) - b|$ の z に関する連続性と $r(f) \frac{A^2}{3} < A^2$ より従う。よって z_0 のある近傍で $\rho(z)$ は定義可能である。この計量も定曲率 -1 を持つことは $n = 2$ の場合と同様である。また $r(z, f) \leq |f(z) - b|$ より Ω 上で $\rho(z) \geq \rho_0(z)$ が成り立つことが従う。これは $t^{\frac{1}{2}}(A^2 - t)$ が $0 \leq t \leq A^2$ において増加であることを示せばよいが、微分を計算することにより $0 \leq t \leq \frac{A^2}{3}$ で非負である。 $|f(z_0) - b| = r(z_0, f) \leq r(f) < \frac{A^2}{3}$ であるから z_0 のある近傍において $r(z, f) \leq |f(z) - b| < \frac{A^2}{3}$ が成り立ちこれより $\rho(z) \leq \rho_0(z)$ が、この近傍で成り立つ。これで Claim の証明が完了した。

最後に $\rho|dz|$ は ultrahyperbolic であるから $\rho(z) \leq \frac{2}{1-|z|^2}$ が成り立つが、特に $z = 0$ として

$$\rho(0) = \frac{A|f'(0)|}{\sqrt{r(0, f)\{A^2 - r(0, f)\}}} = \frac{A}{\sqrt{r(0, f)\{A^2 - r(0, f)\}}} \leq 2$$

より

$$A \leq 2\sqrt{r(f, 0)\{A^2 - r(f, 0)\}} \leq 2\sqrt{r(f)\{A^2 - r(f)\}}$$

を得る。ここで $A \searrow \sqrt{3r(f)}$ とすれば

$$\sqrt{3r(f)} \leq 2\sqrt{r(f)\{3r(f) - r(f)\}}$$

より

$$r(f) \geq \frac{\sqrt{3}}{4}$$

を得る。 □

11.3 Landau 定数

Bloch 定数 B については不分岐円板という、謂わば f により単葉に被覆される円板の半径を問題にしたが、単葉とは限らず単に f の像領域に含まれる円板の半径を考えると別の定数が得られる。

非定数函数 $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ について

$$(11.7) \quad \tilde{r}(z, f) = \sup\{r > 0 : \mathbb{D}(f(z), r) \subset f(\mathbb{D})\}, z \in \mathbb{D}$$

と置く。 f は非定数であるから、開写像であり、従って各点で $\tilde{r}(z, f) > 0$ である。また $\tilde{r}(z_0, f) = \infty$ となる点 z_0 が 1 点でもあれば、 $f(\mathbb{D}) = \mathbb{C}$ であるから全ての $z \in \mathbb{D}$ について $\tilde{r}(z, f) = \infty$ が成り立つことに注意しよう。ここで

$$(11.8) \quad \tilde{r}(f) = \sup_{z \in \mathbb{D}} \tilde{r}(z, f)$$

とし

$$(11.9) \quad L = \inf\{\tilde{r}(f) : f \text{ is analytic in } \mathbb{D} \text{ with } |f'(0)| = 1\}$$

と置く。 L は Landau 定数と呼ばれている。この節では

Theorem 11.4. $|f'(0)| = 1$ に正規化された \mathbb{D} 上の正則函数 f について $\tilde{r}(f) \geq \frac{1}{2}$ つまり $L \geq \frac{1}{2}$ が成り立つ。

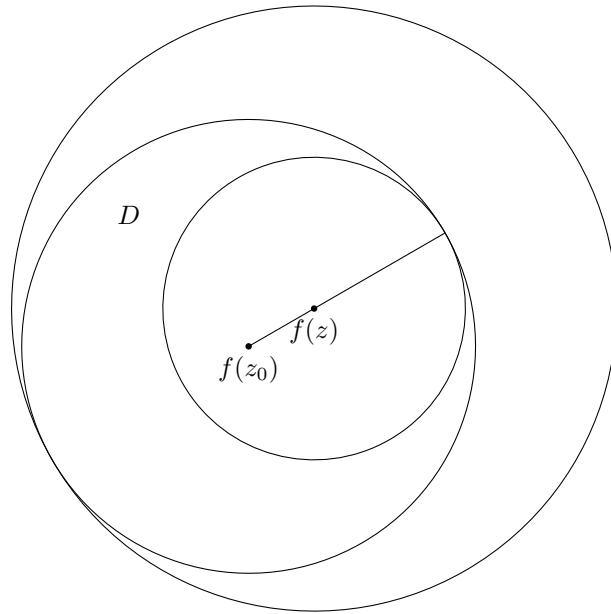
を示すことを目標にする. その為の準備をしておこう.

Proposition 11.5. 非定数関数 $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ について各点で $\tilde{r}(z, f) < \infty$ ならば

$$(11.10) \quad |\tilde{r}(z, f) - \tilde{r}(z_0, f)| \leq |f(z) - f(z_0)|, \quad z, z_0 \in \mathbb{D}$$

が成り立つ.

Proof. $z_0 \in \mathbb{D}$ とし $D = \mathbb{D}(f(z_0), \tilde{r}(z_0, f))$ と置けば D は $f(z_0)$ を中心とし $f(\mathbb{D})$ に含まれる最大の円板である.



従って $f(z) \in D$ ならば $f(z)$ 中心で半径が $\tilde{r}(z_0, f) - |f(z) - f(z_0)|$ の円板は D に含まれ, ひいては $f(\mathbb{D})$ に含まれる. よって

$$\tilde{r}(z, f) \geq \tilde{r}(z_0, f) - |f(z) - f(z_0)|$$

である. また $f(z) \notin D$ のときは $\tilde{r}(z_0, f) \leq |f(z) - f(z_0)|$ であるからやはり上式が成り立つ.

$$-|f(z) - f(z_0)| \leq \tilde{r}(z, f) - \tilde{r}(z_0, f)$$

よって (11.10) が成り立つ.

$f(z) \notin D$ の場合は

□

Proof. Theorem 11.1 と同様に ultrahyperbolic metric ρ を導入して証明を行う. 非定数関数 f について $\tilde{r}(z, f)$ はつねに $\tilde{r}(z, f) > 0$ を満たすので ρ をどう置くかも, これに応じる必要がある. そこでまず $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ の双曲計量を求めておこう. それには $w = g(z) = e^{iz}$ と置くと, 上半平面 \mathbb{H} から $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ への被覆写像であり $\lambda(w)|dw| = \rho(e^{iz})|e^{iz}||dz| = \frac{|dz|}{y}$ より

$$\lambda(w)|dw| = \frac{|dw|}{|w| \log \frac{1}{|w|}}$$

が $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ の双曲計量であり $K(\rho) \equiv -1$ を満たす. この w に $\frac{\tilde{r}(z,w)}{A}$ を代入した

$$(11.11) \quad \rho(z)|dz| = \frac{|f'(z)||dz|}{\tilde{r}(z,w) \log \frac{A}{\tilde{r}(z,w)}}$$

を考えよう. ひとまず分母を正にするために $A > \tilde{r}(f)$ と仮定しておく.

Theorem 11.1 の証明と同様に f は \mathbb{D} で正則と仮定すれば各点 $z_0 \in \mathbb{D}$ において $\mathbb{D}(f(z_0), \tilde{r}(z_0), f)$ は中心が $f(z_0)$ で $f(\mathbb{D})$ に含まれる最大の円板であるからある $b \in \partial\mathbb{D}(f(z_0), \tilde{r}(z_0), f) \cap \partial f(\mathbb{D})$ が存在し $|f(z_0) - b| = \tilde{r}(z_0, f)$ であり $\tilde{r}(z, f) \leq |f(z) - b|$ が z_0 のある近傍で成り立つ. ここで $\frac{d}{dt} \{t \log \frac{A}{t}\} = \log \frac{A}{t} - 1$ より t の関数 $t \log \frac{A}{t}$ は $0 \leq t \leq \frac{A}{e}$ で増加である. 従ってあらかじめ $\tilde{r}(f) < \frac{A}{e}$ つまり A を $A > e\tilde{r}(f)$ となるように取っておけば

$$\rho(z)|dz| = \frac{|f'(z)||dz|}{\tilde{r}(z,w) \log \frac{A}{\tilde{r}(z,w)}} \geq \rho_0(z) := \frac{|f'(z)||dz|}{|f(z) - b| \log \frac{A}{|f(z) - b|}}$$

が z_0 のある近傍で成り立つ. これと $\rho_0(z_0) = \rho(z_0)$ 並びに $K(\rho_0) = -1$ と合わせると ρ_0 が ρ の z_0 における supporting metric であることが分かる.

最後に Theorem 8.4 より

$$\rho(0) = \frac{1}{\tilde{r}(0, f) \log \frac{A}{\tilde{r}(0, f)}} \leq \lambda(0) = 2$$

を得るので

$$\frac{1}{2} \leq \tilde{r}(0, f) \log \frac{A}{\tilde{r}(0, f)} \leq \tilde{r}(f) \log \frac{A}{\tilde{r}(f)} \rightarrow \tilde{r}(f) \quad (A \searrow e\tilde{r}(f))$$

を得る. □

11.4 SK-metric

11.5 Bloch-Landau 定数再訪

この節では $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ で \mathbb{D} 上の正則関数の全体を表し, $\mathcal{A}_0(\mathbb{D})$ で $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ で正規化条件 $f(0) = 0, f'(0) = 1$ を満たすものの全体とする.

Bloch-Landau 定数の研究の始まりは 1925 年の Bloch [3] の結果 $r(f) \geq \frac{1}{72}$ である. 4 年後に Landau は [17] において Bloch 定数 B に加え, Landau 定数 L と schlicht (ドイツ語で単葉という意味) Bloch 定数と呼ばれる \mathfrak{A} という関連する 2 つの定数を導入した.

$$B = \inf_{f \in \mathcal{A}_0(\mathbb{D})} r(f), \quad L = \inf_{f \in \mathcal{A}_0(\mathbb{D})} \tilde{r}(f) \quad \text{and} \quad \mathfrak{A} = \inf_{f \in S} \tilde{r}(f) = \inf_{f \in S} \tilde{r}(f)$$

である. ただし S は $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ で正規化された \mathbb{D} 上の正則単葉関数の全体がなす族であり, \mathfrak{A} はドイツ語の A である. 現在では他にも Bloch-Landau 定数に関連した定数が定義され研究されているが, B, L, \mathfrak{A} が中心的な位置を占めている. 定義より直ちに

$$B \leq L \leq \mathfrak{A}$$

が成り立つ.

[17]において重要なのは、これらの定数を考える際に函数族を

$$\mathfrak{B} = \left\{ f \in \mathcal{A}_0(\mathbb{D}) : |f'(z)| \leq \frac{1}{1-|z|^2} \right\}$$

に制限してよいことを示したことである。つまり

$$B = \inf_{f \in \mathcal{A}_0(\mathbb{D}) \cap \mathfrak{B}} r(f), \quad L = \inf_{f \in \mathcal{A}_0(\mathbb{D}) \cap \mathfrak{B}} \tilde{r}(f) \quad \text{and} \quad \mathfrak{A} = \inf_{f \in S \cap \mathfrak{B}} \tilde{\mathfrak{A}}(f)$$

が成り立つ。函数族 \mathcal{A}_0 のような単位円板状の正則函数の全体である \mathcal{A} に正規化を施しただけの漠然として大きな函数族より、 $|f'(z)| \leq \frac{1}{1-|z|^2}$ のように f' に制限がつく函数族の方が格段に考えやすい。

$f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ で $\sup_{z \in \mathbb{D}} (1-|z|^2)|f'(z)| < \infty$ を満たす函数を Bloch 函数と呼ぶ。Bloch 函数の全体がなす線形空間にノルム $|f(0)| + \sup_{z \in \mathbb{D}} (1-|z|^2)|f'(z)|$ を入れた Banach 空間は Bloch 空間と呼ばれ、函数解析的な研究がなされている。ここでは

$$B = \inf_{f \in \mathcal{A}_0(\mathbb{D}) \cap \mathfrak{B}} r(f)$$

を示しておこう。 L, \mathfrak{A} に関する等式の証明も同様である。 $\mathcal{A}_0(\overline{\mathbb{D}})$ を $\overline{\mathbb{D}}$ を含むある領域上での正則函数を \mathbb{D} に制限した $f \in \mathcal{A}_0(\mathbb{D})$ の全体とする。まず準備として

$$B = \inf_{f \in \mathcal{A}_0(\overline{\mathbb{D}})}$$

を示そう。 $\mathcal{A}_0(\overline{\mathbb{D}}) \subset \mathcal{A}_0(\mathbb{D})$ より $B \leq \inf_{f \in \mathcal{A}_0(\overline{\mathbb{D}})}$ は明らかであるから逆の不等式を示そう。

任意の $\varepsilon > 0$ について $r(f_1) \leq B + \varepsilon$ を満たす $f_1 \in \mathcal{A}_0(\mathbb{D})$ を取る。このとき $f_t(z) = \frac{1}{t}f_1(tz)$ で $f_t \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{D}})$ を定義する。このとき

$$r(z, f_t) \leq \frac{1}{t}r(tz, f_1) \leq \frac{1}{t}r(f_1) \leq \frac{B + \varepsilon}{t}$$

が成り立つので

$$r(f_t) = \sup_{z \in \mathbb{D}} r(z, f_t) \leq \frac{B + \varepsilon}{t}$$

である。よって

$$\inf_{f \in \mathcal{A}_0(\overline{\mathbb{D}})} r(f) \leq r(f_t) \leq \frac{B + \varepsilon}{t}$$

となる。ここで $t \nearrow 1, \varepsilon \searrow 0$ として

$$\inf_{f \in \mathcal{A}_0(\overline{\mathbb{D}})} r(f) \leq B$$

を得る。

今度は $r(f_0) \leq B + \varepsilon$ を満たす $f_0 \in \mathcal{A}_0(\overline{\mathbb{D}})$ を取る。このとき函数 $(1-|z|^2)|f'_0(z)|$ は $\overline{\mathbb{D}}$ で連続であり $z=0$ で値 1, 境界 $\partial\mathbb{D}$ 上で値 0 を取る。従って $\overline{\mathbb{D}}$ 上での最大値を M と置けば

$$1 \leq M = \max_{z \in \overline{\mathbb{D}}} (1-|z|^2)|f'_0(z)| = (1-|z_0|^2)|f'_0(z_0)|$$

を満たす $z_0 \in \mathbb{D}$ が存在する。そこで

$$g(z) = \frac{f_0\left(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}\right) - f_0(z_0)}{(1-|z_0|^2)|f'_0(z_0)|}, z \in \mathbb{D}$$

と置く. このとき $g \in \mathcal{A}_0(\overline{\mathbb{D}})$ である.

$$\tau(z) = \frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0}z}$$

と置けば, $g(z) = \frac{f_0 \circ \tau(z) - f_0(z_0)}{M}$ であり

$$(1 - |z|^2)|g'(z)| = \frac{1}{M}(1 - |z|^2)|\tau'(z)||f'_0(\tau(z))| = \frac{1}{M}(1 - |\tau(z)|^2)|f'_0(\tau(z))| \leq \frac{1}{M}M = 1$$

が成り立つ. よって $g \in \mathfrak{B}$ である. また

$$r(z, g) = \frac{1}{M}r(\tau(z), f_0) \leq \frac{1}{M}r(f_0) \leq \frac{B + \varepsilon}{M} \leq B + \varepsilon$$

より $r(g) \leq B + \varepsilon$ である. よって

$$B \leq \inf_{f \in \mathcal{A}_0(\mathbb{D}) \cap \mathfrak{B}} r(f) \leq \inf_{f \in \mathcal{A}_0(\overline{\mathbb{D}}) \cap \mathfrak{B}} r(f) \leq r(g) \leq B + \varepsilon$$

を得る. $\varepsilon \searrow 0$ として

$$B = \inf_{f \in \mathcal{A}_0(\mathbb{D}) \cap \mathfrak{B}} r(f) = \inf_{f \in \mathcal{A}_0(\overline{\mathbb{D}}) \cap \mathfrak{B}} r(f)$$

を得る.

Landau は以上の等式を用いて $B \geq 0.39$, $L \geq 0.43$ などの評価式を得ているが, 原論文 [17] または小松勇作先生の等角写像論上 [33] に解説がある.

前節の 1938 年の Ahlfors [?] による評価式 $B \geq \frac{\sqrt{3}}{4}$, $L \geq \frac{1}{2}$ は Bloch, Landau 他の結果を踏まえたものであり, この結果の前後から 1961 年の Heins [?] までの結果をまとめると

$$(11.12) \quad \frac{\sqrt{3}}{4} < B \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{3}}} \frac{\Gamma(\frac{1}{3}) \Gamma(\frac{11}{12})}{\Gamma(\frac{1}{4})} = 0.4718616534 \dots$$

である.

参考文献

- [1] L. V Ahlfors, An extension of Schwarz's lemma, Trans, Amer. Math. Soc. **43**, 359-364, 1938.
- [2] L. V. Ahlfors, *Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory*, McGraw-Hill, New York, 1973.
- [3] A. Bloch, Les theoremes M. Valiron sur les fonctions entieres et la theorie del'uniformisation, Annales Faculte Sciences Toulouse **17**, 1-22, 1925.
- [4] R.B. Burckel, *An Introduction to Classical Complex Analysis*, Vol.1 , Academic Press, New York, 1979.
- [5] C. Carathéodory, Untersuchungen über die konformen Abbildungen von feten und veränderlichen Gebieten, Math. Ann. **52**, 107-144, 1912.
- [6] C. Carathéodory, Über die Studysche Rundungsschranke, Math. Ann. **79**, 402, 1919,
- [7] C. Carathéodory, *Theory of Functions of a Complex Variable Vol.2*, Chelsea Publishing Company, 1954.
- [8] P. L. Duren, *Univalent Fucntions*, Springer Verlag, New York, 1983.
- [9] E. de Faria and W. de Melo, *Mathematical Tools for One-Dimensional Dynamics*, Cambridge Stud. Adv. Math., **115**, Cambridge Univ.Press, 2008.
- [10] S. Fisher, *Function Theory on Planar Domains*, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [11] C. Foias and A. E. Frazho, *The Commutant Lifting Approach to Interpolation Problems*, Birkhäuser, Basel, 1990.
- [12] G. M. Goluzin, Geometric Theory of Functions of a Complex Variable (in Russian), 2nded., Izdat. Akad. Nauk SSSR, 1966; Engl. transl. in Amer. Math. Soc. Transl., vol. **26**, 1969.
- [13] W. K. Hayman, Some remarks on Schottky' s theorem, Proc. Cambridge Phil. Soc. **43**, 442-454, (947).
- [14] M. Heins, On class of conformal metrics, Nagoya Math. J. **21**, 1-60, 1962.
- [15] M. Heins, Selected Topics in the Classical Theory of Functions of a Complex Variable, Holt, Rinehart, and Winston, 1962.
- [16] J. A. Jenkins, On explicit bounds in Schottkys theorem, Can. J. Math. **7**, 76-82, 1955.
- [17] E. Landau, Über die Blochsche Konstante und zwei verwandte Weltkonstanten, Math. Z. **30**, 608-634, 1929.
- [18] C. D. Minda, Bloch constants, J. d'Analyse Math. **41**, 54-84, 1982.
- [19] D. Minda, The strong form of Ahlfors' lemma, Rocky Mountain J. of Math. **17**, 457-461, 1987.
- [20] D. Minda, A Reflection Principle for the Hyperbolic Metric and Applications to Geometric Function

- Theory, Complex Variables, **8** 1987, 129-144.
- [21] D. Minda, Inequalities for the hyperbolic metric and applications to geometric function theory, Complex Analysis I: Proceedings of the Special Year held at the University of Maryland, College Park, 1985 – 86, Lecture Notes in Mathematics 1275, Springer Verlag, 1987, 235-252.
- [22] J. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, 2nd edition, 2000.
- [23] R. Neumanlinna, Über beschränkte Funktionen, die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. **13**, 1919.
- [24] G. Pick, Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Functionswerte bewirkt werden, Math. Ann. **77**, 7-23, 1916.
- [25] Ch. Pommerenke, *Univalent functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.
- [26] Ch. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [27] H. Rademacher, On the Bloch-Landau constant, Amer. J. Math. **65**, 387-390, 1943.
- [28] R. M. Robinson, On numerical bounds in Schottky's Theorem, Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 907-910, 1939.
- [29] I. Schur, *Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises Beschränkt Sind*, J. Reine Angew. Math. **147** (1917), 205–232.
- [30] I. Schur, *On power series which are bounded in the interior of the unit circle I*, Translated from the German. Oper. Theory Adv. Appl., 18, I. Schur methods in operator theory and signal processing, 31–59, Birkhäuser, Basel, 1986.
- [31] M. Tsuji, *Potential theory in modern function theory*, Chelsea Publishing Co., New York, 1975.
- [32] L. V. アールフォルス著, 大沢健夫訳, 等角不変量 幾何学的関数論の話題, 現代数学社, 2020.
- [33] 小松勇作, 等角写像論 上, 共立出版社, 昭和 19 年.
- [34] 戸田暢茂, リーマン面, サイエンスライブラリ現代数学への入門=15, サイエンス社, 昭和 51 年.
- [35] 松本幸夫, トポロジー入門, 岩波書店, 1985 年.