Sperner の補題と Poincaré-Miranda の定理

柳原 宏

山口大学工学部
hiroshi@yamaguchi-u.ac.jp

目次

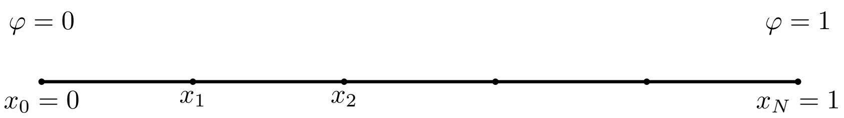
序

第 1 章

Sperner の補題

1.1 Sperner の補題

N を自然数とする．区間 $I=[0,1]$ を N 等分し $x_k=\frac{k}{N}$, $k=0,1,\dots,N$ $I_k=[x_{k-1},x_k]$, $k=1,\dots,N$ と置く．また写像 $\varphi:\{x_0,x_1,\dots,x_N\}\to\{0,1\}$ が与えられているとする．



Theorem 1.1.1 (1 次元 Sperner の補題)**.** $\varphi(x_0)=0$, $\varphi(x_N)=1$ ならば小線分 I_k の中に，両端点の一方で $\varphi=0$, もう一方で $\varphi=1$ となっているものが奇数個存在する．特にこのような小線分は必ず存在する．

Proof. さて各小線分について

$$\text{両端点の一方で } \varphi=0,\ \text{もう一方で } \varphi=1 \iff \text{片方の端点のみで } \varphi=0$$

であるから

$$h:=\text{片方の端点のみで } \varphi=0 \text{ となる小線分の個数},$$
$$b:=\text{両方の端点で } \varphi=0 \text{ となる小線分の個数}$$

と置いて h が奇数であることを示せばよい．ここで

$$t:=\ \varphi=0 \text{ である分点の個数}$$

と置いて以下のように考えよう．各小線分 $I_1,I_2,\dots,I_N$ について $\varphi=0$ となる端点の個数の総和を S_1 と置くと

$$S_1=h+2b \tag{1.1.1}$$

今度は各分点 $x_0,x_1,\dots,x_N$ について $\varphi=0$ となるものが，S_1 において何回カウントされたかを考えよう．

まず左端の x_0 は仮定より $\varphi=0$ であり，I_1 について 1 回カウントされ，右端の x_N においては $\varphi=1$ であるからカウントされない．次に区間 $[0,1]$ の内部にある分点で $\varphi=0$ であるものについては，この分点を介して隣あう 2 つの小線分により計 2 回カウントされている．従って

$$S_1=1+2(t-1) \tag{1.1.2}$$

である．よって (1.1.1) と (1.1.2) を合わせて

$$h=2(t-b)-1$$

となり h は奇数である. □

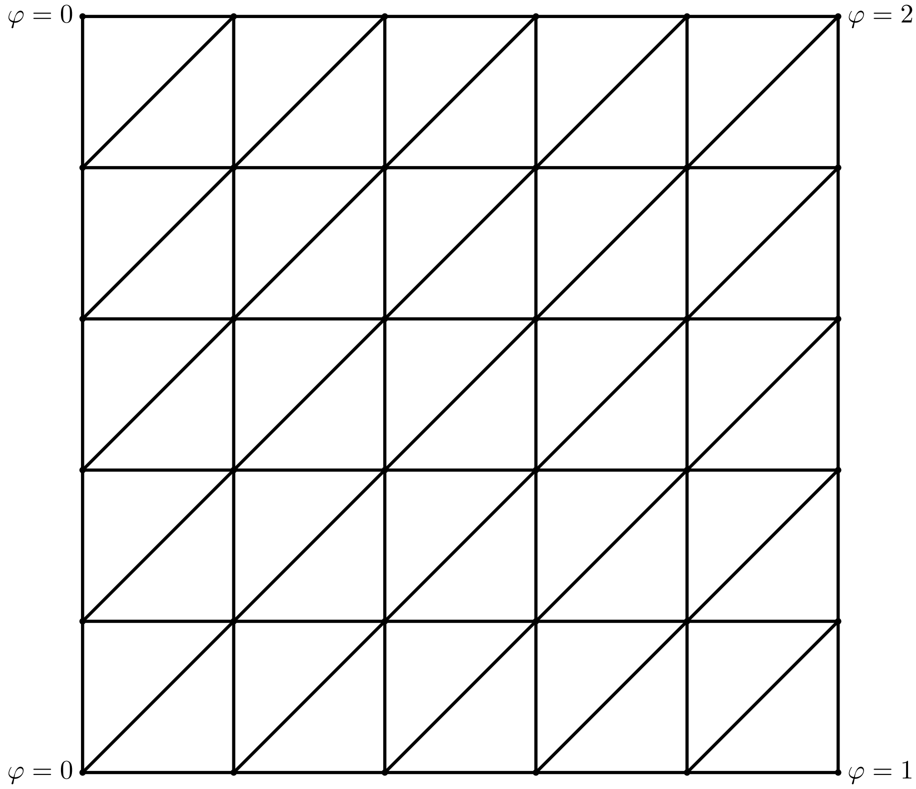
今度は 2 次元版の Sperner の補題を考えよう. 正方形 $[0,1]\times[0,1]$ について, 各辺を $N(\in\mathbb{N})$ 等分して各分点を

$$a_{j,k}=\left(\frac{j}{N},\frac{k}{N}\right)\in[0,1]\times[0,1],\quad j,k=0,1,\dots,N$$

とし, 各少正方形を

$$S_{j,k}=\left[\frac{j-1}{N},\frac{j}{N}\right]\times\left[\frac{k-1}{N},\frac{k}{N}\right]$$

と置く. また $S_{j,k}$ を左下から右上へ向かう対角線で 2 等分し, 左上の三角形を T^+_{jk}, 右下の三角形を T^-_{jk} と置く. 以下では各 T^+_{jk}, T^-_{jk} のことを小三角形, 各 $a_{j,k}$ を頂点と呼ぶ.



Theorem 1.1.2 (2 次元 Sperner の補題)**.** 写像 $\varphi:\{x_{jk}\}_{j,k=0,\dots N}\to\{0,1,2\}$ について, 正方形 $[0,1]\times[0,1]$ の左下と左上の頂点において $\varphi=0$, 右下の頂点で $\varphi=1$, 右上の頂点で $\varphi=2$ であり, 他の外周部にある分点については, その分点が属する辺の両端の頂点での値のどちらかになっているとする. このとき小三角形のなかで, 3 頂点において φ が値 0, 1, 2 を取るものは奇数個存在する. 特にこのような小三角形は必ず存在する.

Proof. 小三角形の辺が性質 ℓ を持つ

辺の両端の 2 頂点の一方で $\varphi=0$, もう一方で $\varphi=1$ を取る.

を満たすことと定義し

$$\begin{aligned}t&:=\text{性質 }\ell\text{ を持つ辺の個数}\\ h&:=\text{性質 }\ell\text{ を持つ辺を 1 つだけ含む小三角形の個数},\\ b&:=\text{性質 }\ell\text{ を持つ辺を 2 つ含む小三角形の個数}\end{aligned}$$

と置く．3 頂点において φ が値 0, 1, 2 を取る小三角形とは, 性質 ℓ を持つ辺を 1 つだけ含む小三角形に他ならないので h が奇数であることを示せばよい．

さて各小三角形について性質 ℓ を持つ辺の個数は 0, 1, 2 のどれかである．(3 つ持つことはない！) それらを総和した個数を S_2 と置けば

$$S_1 = h + 2b \tag{1.1.3}$$

今度は性質 ℓ を持つ各辺について S_2 において何回カウントされたかを考えよう．正方形 I^2 の外周部に含まれる辺の中で性質 ℓ を持つものは仮定より底辺に含まれるもの以外になく, その個数を e と置けば 1 次元 Sperner の補題より e は奇数である．次に I^2 の内部にある辺の中で性質 ℓ を持つものは, この辺を介して隣あう 2 つの三角形により計 2 回カウントされている．従って

$$S_1 = e + 2(t - e) \tag{1.1.4}$$

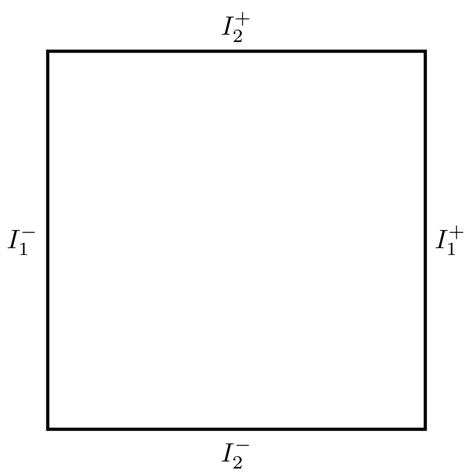
である．よって (1.1.3) と (1.1.4) を合わせて

$$h = 2(t - b) - e$$

となり, e が奇数であるから h も奇数である． □

1.2 2 次元の連結性-Poincare-Miranda の定理と Brouwer の不動点定理-

正方形 $[0,1]\times[0,1]$ において $I_1^- = \{(0,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1\}$, $I_1^+ = \{(1,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1\}$, $I_2^- = \{(x,0)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1\}$, $I_2^+ = \{(x,1)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1\}$ と置く．



Theorem 1.2.1. H_1^- , H_1^+ を $[0,1]\times[0,1]$ の閉部分集合で $I_1^-\subset H_1^-$, $I_1^+\subset H_1^+$ と $H_1^-\cup H_1^+ = I^2$ を満たすとする．同様に H_2^- H_2^+ も $[0,1]\times[0,1]$ の閉部分集合で $I_2^-\subset H_2^-$, $I_2^+\subset H_2^+$ と $H_2^-\cup H_2^+ = I^2$ を満たすとする．このとき

$$H_1^-\cap H_1^+\cap H_2^-\cap H_2^+\neq\emptyset$$

が成り立つ．

Proof. $F_0 = I^2$, $F_1 = H_1^+\backslash I_1^-$, $F_2 = (H_1^+\backslash I_1^-)\cap(H_2^+\backslash I_2^-)$ と置くと $F_2\subset F_1\subset I^2$ が成り立つ．ここで $\varphi : I^2\to\{0,1,2\}$ を

$$\varphi(x) = \max\{j : x\in F_j,\ j = 0,1,2\}$$

と置く．このとき I_1^- 上で $\varphi = 0(< 1)$, I_2^- 上で $\varphi \leq 1(< 2)$, I_1^+ 上で $\varphi \neq 0$, I_2^+ 上で $\varphi \neq 1$ が成り立つ．よって I^2 の各辺を何等分し小正方形を作りさらに三角形に分割しても Sperner の補題より 3 つの頂点のそれぞれで $\varphi = 0, 1, 2$ という値を取る小三角形が存在する．

ここで各 $[0,1] \times [0,1]$ の各辺を 2^k 等分し，$\varphi = 0, 1, 2$ という値を取る小三角形の中心を a_k と置く．$[0,1] \times [0,1]$ はコンパクトであるから収束する部分列 $\{a_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ を取ることが出来るので $a = \lim_{j\to\infty} a_{k_j}$ と置く．このとき a の任意の近傍の中に φ の値がそれぞれ 0, 1, 2 となる 3 点が存在する

さて $\varphi(a) = 0$ ならば $a \notin F_1 = H_1^+ \backslash I_1^-$ より $a \notin H_1^+$ または $a \in I_1^-$ であるが，どちらの場合でも $a \in H_1^-$ が成り立つ．次に $\varphi(a) = 1$ ならば $a \in F_1 = H_1^+ \backslash I_1^-$ より $a \in H_1^+$ が成り立ち，さらに $a \notin F_2 = H_2^+ \backslash I_2^-$ より前と同様にして $a \in H_2^-$ が成り立つ．従って $a \in H_1^+ \cap H_2^-$ である．最後に $\varphi(a) = 2$ ならば $a \in H_2^+$ が成り立つ．従って a の任意の近傍は H_1^-, $H_1^+ \cap H_2^-$, H_2^+ と交わることになり H_1^-, $H_1^+ \cap H_2^-$, H_2^+ は 3 つとも閉集合であるから $a \in H_1^- \cap H_1^+ \cap H_2^- \cap H_2^+$ が成り立つ． □

Theorem 1.2.2 (Poincarś-Miranda の定理)**.** 連続写像 $f = (f_1, f_2) : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ が I_1^- 上で $f_1 \leq 0$ かつ I_1^+ 上で $f_1 \geq 0$, 同様に I_2^- 上で $f_2 \leq 0$ かつ I_2^+ 上で $f_2 \geq 0$ を満たせば $f(x_0, y_0) = (f_1(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0)) = (0, 0)$ を満たす点 $p_0 = (x_0, y_0)$ が存在する．

Proof. $i = 1, 2$ について $H_i^- = \{(x, y) \in I^2 : f_i(x, y) \leq 0\}$, $H_i^+ = \{(x, y) \in I^2 : f_i(x, y) \geq 0\}$ と置けば Theorem 1.2.1 の仮定を満たすので $p_0 \in H_1^- \cap H_1^+ \cap H_2^- \cap H_2^+ (\neq \emptyset)$ を取ることが出来る．この p_0 について $f_1(p_0) = f_2(p_0) = 0$ が成り立つ． □

Corollary 1.2.3. 道 $\alpha : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ と道 $\beta : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ が $\alpha(0) \in I_1^-$, $\alpha(1) \in I_1^+$, $\beta(0) \in I_2^-$, $\beta(1) \in I_2^+$ を満たせば，$[0,1] \times [0,1]$ 内に交点が存在する． つまり $\alpha(s) = \beta(t)$ を満たす $s, t \in [0,1]$ が存在する．

Proof. α, β を成分に分解し $\alpha == (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ と分解し

$$f_1(s, t) = \alpha_1(s) - \beta_1(t), \quad f_2(s, t) = \beta_2(t) - \alpha_2(s)$$

と置く．$\alpha_1(0) = \beta_2(0) = 0$, $\alpha_1(1) = \beta_2(1) = 1$ より $f = (f_1, f_2)$ は Poincaré-Miranda の定理の仮定を満たす．よって $f(s, t) = (f_1(s, t), f_2(s, t)) = (0, 0)$ を満たす $(s, t) \in [0,1] \times [0,1]$ が存在する． □

Corollary 1.2.4 (Brouwer's fixed point theorem)**.** $f : [0,1] \times [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ が連続ならば不動点，つまり $f(p) = p$ を満たす点 $p \in [0,1] \times [0,1]$ が存在する．

Proof. $f = (f_1, f_2)$ と成分に分解し写像 $g : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ を

$$g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y)) = (x - f_1(x, y), y - f_2(x, y)$$

と置けば，I_1^- 上で $g_1 \leq 0$ かつ I_1^+ 上で $g_1 \geq 0$, 同様に I_2^- 上で $g_2 \leq 0$ かつ I_2^+ 上で $g_2 \geq 0$ を満たすので Poincaré-Miranda の定理を適用すれば $g_1(x, y) = 0$, $g_2(x, y) = y$ を満たす $(x, y) \in [0,1] \times [0,1]$ この (x, y) は f の不動点である． □