Lectures on Quasiconformal Mappings に関する私注

柳原 宏

目次

第 I 部

準備編

序

Ahlfors [?] によれば擬等角写像の理論が 1 変数の解析函数の理論においてかくも活発な役割を演ずるようになった理由は 7 つあるそうである.

1. 一番表層的な理由は擬等角写像が等角写像の自然な拡張であること. もしこれだけしかなかったら擬等角写像は速やかに忘れ去られたであろう.
2. 理論の初期の段階において, 等角写像のたくさんの定理は単に擬等角性のみを用いていることに分かってきた. 従っていつ等角性が本質的であり, いつそうでないのかを決定することが興味ある問題となる.
3. 擬等角写像は等角写像よりも融通が利くので道具としては使いやすい. これが擬等角写像の理論の最も功利的な局面であろう. 例えば (殆ど忘れ去られているものの) 擬等角写像は単連結 RIemann 面の等角タイプに関する定理の証明に使われた.
4. 擬等角写像はある種の楕円型偏微分方程式の研究に重要な役目を演ずる.
5. 擬等角写像に関する極値問題の解が, 問題となっている領域または Riemann 面上の解析函数とつながること. これは Techmüller による深くまた思いがけない発見であった.
6. モデュライの問題が擬等角写像の助けにより解決されたこと. これは Fuchs 群や Klein 群に光を当てた.
7. 多変数に拡張する時等角写像は退化してしまうが, 擬等角写像はそうでないこと. この理論はまだ揺籃期にある.

第 1 章

向きを保つ写像

この章では複素平面 $\mathbb{C}$ 内の 2 つの領域 D から D' への homeomorphism f が sense preserving (向きを保つ) とはどういう意味であるかを理解する為に, 必要な事項をまとめる.

1.1 基本群

Homotopy S を位相空間とする. 閉区間 $[0,1]$ から S への連続写像のことを arc または path と呼び, 以下では文字 α, β, γ などを用いて表す.

path α について $a=\alpha(0)$ を始点, $b=\alpha(1)$ を終点と言い, α を a と b を結ぶ path と言ったりする.

path $\alpha:[0,1]\to S$ について写像 $\alpha^{-1}:[0,1]\to S$ を

$$\alpha^{-1}(t)=\alpha(1-t),\quad t\in[0,1]$$

と置けば, 連続であるから α^{-1} も path である. また 2 つの path α, β について α の終点と, β の始点が一致するとき, つまり $\alpha(1)=\beta(0)$ が成り立つのとき写像 $\alpha\cdot\beta:[0,1]\to S$ を

$$\alpha\cdot\beta(t)=\begin{cases}\alpha(2t), & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ \beta(2t-1), & \frac{1}{2}<t\le 1\end{cases}$$

とおけば, 連続であるから $\alpha\cdot\beta$ も path である.

さて始点同士と終点同士が一致する, つまり $\alpha(0)=\beta(0)$, $\alpha(1)=\beta(1)$ を満たす 2 つの paths α, β が homotop であるとは, α から β への変形 (deformation) と呼ばれる連続写像 $f:[0,1]\times[0,1]\to S$ で

$$\begin{cases}f(0,s)=\alpha(0)(=\beta(0)), & 0\le s\le 1\\ f(1,s)=\alpha(1)(=\beta(1)), & 0\le s\le 1\end{cases}$$

かつ

$$\begin{cases}f(t,0)=\alpha(t), & 0\le t\le 1\\ f(t,1)=\beta(t), & 0\le t\le 1\end{cases}$$

を満たすものが存在する時を云う．path α と β が homotop のとき $\alpha \sim \beta$ と表す．

念の為に $\alpha \sim \beta$ と書き表すときはつねに $\alpha(0) = \beta(0)$, $\alpha(1) = \beta(1)$ を仮定していることに注意しておこう．

Theorem 1.1.1. 関係 $\sim$ は同値関係である．つまり

(i) $\alpha \sim \alpha$.
(ii) $\alpha \sim \beta \Longrightarrow \beta \sim \alpha$.
(iii) $\alpha \sim \beta,\ \beta \sim \gamma \Longrightarrow \alpha \sim \gamma$.

が成り立つ．

Proof. (i) $f(t,s) = \alpha(t)$ と置けば, α から α への変形である．(ii) α から β への変形を $f(t,s)$ とすれば $f(t,1-s)$ が β から α への変形を与える．(iii) α から β への変形を $f(t,s)$ とし, β から γ への変形を $g(t,s)$ とすれば

$$F(t,s) = \begin{cases} f(t,2s), & (t,s) \in [0,1] \times [0,1/2] \\ g(t,2s-1), & (t,s) \in [0,1] \times (1/2,1] \end{cases}$$

が α から γ への変形を与える． □

path $\tilde{\alpha}$ が path α の parameter の取り替えであるとは, ある連続で狭義増加な写像 $\sigma : [0,1] \to [0,1]$ で $\sigma(0) = 0$, $\sigma(1) = 1$ を満たし, $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(\sigma(t))$, $t \in [0,1]$ を満たすものが存在するときを云う．

Theorem 1.1.2. $\tilde{\alpha}$ が α の *parameter* の取り替えならば $\alpha \sim \tilde{\alpha}$.

Proof. $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(\sigma(t))$, $t \in [0,1]$ を満たす連続な全単射 $\sigma : [0,1] \to [0,1]$ を取り

$$f(t,s) = \alpha((1-s)t + s\sigma(t)), \quad (t,s) \in [0,1] \times [0,1]$$

と置けば, α から $\tilde{\alpha}$ への変形である． □

$a \in S$ について path 1_a を $1_a(t) = a$, $t \in [0,1]$ と置く．

Theorem 1.1.3. 任意の *path* α について $a = \alpha(0)$, $b = \alpha(1)$ と置けば

(i) $\alpha\alpha^{-1} \sim 1_a,\ \alpha^{-1} \cdot \alpha \sim 1_b$.
(ii) $1_a \cdot \alpha \sim \alpha,\ \alpha \cdot 1_b \sim \alpha$.

が成り立つ．

Proof. (i)

$$\alpha \cdot \alpha^{-1}(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \alpha(2(1-t)), & \frac{1}{2} < t \le 1 \end{cases}$$

であるから

$$f(t,s)=\begin{cases}\alpha(2t(1-s)), & (t,s)\in[0,1/2]\times[0,1]\\ \alpha(2(1-t)(1-s)), & (t,s)\in(1/2,1]\times(0,1]\end{cases}$$

と置けば $\alpha\cdot\alpha^{-1}$ から 1_a への変形を与えるので $\alpha\alpha^{-1}\sim 1_a$ が成り立つ．また α の代わりに α^{-1} に適用すれば $(\alpha^{-1})^{-1}=\alpha$ より $\alpha^{-1}\cdot\alpha=\alpha^{-1}\cdot(\alpha^{-1})^{-1}\sim 1_b$ が従う．

(ii)

$$f(t,s)=\begin{cases}\alpha(0), & (t,s)\in[0,1]\times[0,1]\text{ with }t\le s/2\\ \alpha\left(\frac{t-s/2}{1-s/2}\right), & (t,s)\in[0,1]\times[0,1]\text{ with }t> s/2\end{cases}$$

とおけば, α から $1_a\cdot\alpha$ への変形を与えるので $\alpha\sim 1_a\cdot\alpha$ である．これより $1_a\cdot\alpha\sim\alpha$ が従う．次に

$$g(t,s)=\begin{cases}\alpha\left(\frac{t}{1-s/2}\right), & (t,s)\in[0,1]\times[0,1]\text{ with }t\le 1-s/2\\ \alpha(1), & (t,s)\in[0,1]\times[0,1]\text{ with }t> 1-s/2\end{cases}$$

と置けば, α から $\alpha\cdot 1_b$ への変形を与える．よって $\alpha\sim\alpha\cdot 1_b$ であり, 関係 $\sim$ の対称性より $\alpha\cdot 1_b\sim\alpha$ が従う． □

Theorem 1.1.4. 以下が成り立つ．

(i) $\alpha_1\sim\beta_1$, $\alpha_2\sim\beta_2$ ならば $\alpha_1\cdot\alpha_2\sim\beta_1\cdot\beta_2$ が成り立つ．
(ii) $\alpha\sim\beta$ ならば $\alpha^{-1}\sim\beta^{-1}$.
(iii) $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)\sim(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$, が成り立つ．

Proof. (i) α_1 から β_1 への変形を f_1, α_2 から β_2 への変形を $_2$ とする．このとき

$$f(t,s)=\begin{cases}f_1(2t,s) & (t,s)\in[0,1/2]\times[0,1]\\ f_2(2t-1,s), & (t,s)\in(1/2,1]\times[0,1]\end{cases}$$

と置けば, $\alpha_1\cdot\alpha_2$ から $\beta_1\cdot\beta_2$ への変形を与える．

(ii) α から β への変形を f とすれば $f(1-t,s)$ が α^{-1} から β^{-1} への変形を与える．

(iii)

$$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)(t)=\begin{cases}\alpha(2t), & 0\le t\le\frac12\\ \beta(4t-2), & \frac12<t\le\frac34\\ \gamma(4t-3), & \frac34<t\le 1\end{cases}$$

$$(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma(t)=\begin{cases}\alpha(4t), & 0\le t\le\frac14\\ \beta(4t-1), & \frac14<t\le\frac12\\ \gamma(2t-1), & \frac12<t\le 1\end{cases}$$

であるから

$$f(t,s)=\begin{cases}\alpha\left(\frac{4t}{2-s}\right), & 0\le t\le\frac12-\frac14 s\\ \beta(4t+s-2), & \frac12-\frac14 s<t\le\frac34-\frac14 s\\ \gamma\left(\frac{4t+s-3}{1+s}\right), & \frac34-\frac14 s<t\le 1\end{cases}$$

と置けば, $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$ から $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$ への変形を与える． □

基本群　さて $a \in S$ を固定して, a を端点とする closed path つまり $\alpha(0) = \alpha(1) = a$ を満たす path の全体を $P_a(S)$ と置く. α, $\beta \in P_a(S)$ にはつねに積 $\alpha \cdot \beta$ が定義できるが, 残念ながら $P_a(S)$ は群になるとは限らない. 例えば γ が単位元であれば, 任意の $\alpha \in P_a(S)$ について $\alpha \cdot \gamma = \alpha$ を満たすはずであるが, これより $\alpha(t) = \alpha(2t)$ が $0 \leq t \leq 1/2$ で成り立つことになる. これはよほど特殊な α でないと成り立たないであろう.

しかしながら $P_a(S)$ を関係 $\sim$ で割った商集合 $\pi_a(S) = P_a(S)/\sim$ は群になることが証明できる. 以下ではこれを順を追って示していこう.

まず $\alpha \in P_a(S)$ について α を含む同値類を $[\alpha]$ と表そう. つまり

$$[\alpha] = \{\gamma \in P_a(S) : \alpha \sim \gamma\}$$

である.

Theorem 1.1.4 (i) より同値類 $[\alpha]$, $[\beta]$ について $\alpha \cdot \beta$ の同値類は代表元のとり方に依らず定まるので, 積 $[\alpha] \cdot [\beta]$ を

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \cdot \beta]$$

と定義できる.

次に $[1_a]$ は Theorem 1.1.3 (ii) より $[1_a] \cdot [\alpha] = [1_a \cdot \alpha] = [\alpha]$, $[\alpha] \cdot [1_a] = [\alpha \cdot 1_a] = [\alpha]$ を満たすので $\pi_a(S)$ の単位元である. さらに Theorem 1.1.3 (i) より $[\alpha] \cdot [\alpha^{=1}] = [\alpha \cdot \alpha^{-1}] = [1_a]$ $[\alpha^{=1}] \cdot [\alpha] = [\alpha^{=1} \cdot \alpha] = [1_a]$ が成り立つので, 同値類 $[\alpha]$ の逆元が $[\alpha^{-1}]$ で与えられることが分かる. さらに Theorem 1.1.3 (iii) より

$$[\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma]) = [\alpha] \cdot [\beta \cdot \gamma] = [\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)] = [(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma] = [\alpha \cdot \beta] \cdot [\gamma] = ([\alpha] \cdot [\beta]) \cdot [\gamma]$$

となり結合法則も成り立つ.

以上より $\pi_a(S) = P_a(S)/\sim$ は群である. これを位相空間 S の a を基点とする基本群 (fundamental group) と言う.

基点の取り替え　さて $a, b \in S$ とし η を a, b を結ぶ path とする. $\alpha \in P_b(S)$ について $(\eta \cdot \alpha) \cdot \eta^{-1} \in P_a(S)$ を対応させる写像を $\eta_* : P_b(S) \to P_a(s)$ と表そう. このとき

$$\alpha \sim \beta \Longrightarrow \eta \cdot \alpha \sim \eta \cdot \beta \Longrightarrow (\eta \cdot \alpha) \cdot \eta^{-1} \sim (\eta \cdot \beta) \cdot \eta^{-1}$$

であるからこの写像が $\pi_b(S)$ から $\pi_a(S)$ への写像を誘導する. 記号を節約する為に, この誘導された写像も $\eta_* : \pi_b(S) \to \pi_a(s)$ と表そう.

Theorem 1.1.5. 写像 η_* は $\pi_b(S)$ から $\pi_a(s)$ への群の同型写像である

Proof. 煩雑さを避けるために以後の計算では括弧 () や $\cdot$ を省略して書く. まず準同型であることは

$$\eta_*([\alpha][\beta]) = \eta_*([\alpha\beta]) = [\eta\alpha\beta\eta^{-1}] = [\eta\alpha\eta^{-1}\eta\beta\eta^{-1}] = [\eta\alpha\eta^{-1}][\eta\beta\eta^{-1}] = \eta_*([\alpha])\eta_*([\beta])$$

より従う.

さて η^{-1} は b と a を結ぶ path であるから準同型 $(\eta^{-1})_*:\pi_a(S)\to\pi_b(S)$ を誘導するが

$$(\eta^{-1})_*(\eta_*([\alpha]))=(\eta^{-1})_*([\eta\alpha\eta^{-1}])=[\eta^{-1}\eta\alpha\eta^{-1}\eta]=[\alpha]$$
$$\eta_*((\eta^{-1})_*([\beta]))=\eta_*([\eta^{-1}\beta\eta])=[\eta\eta^{-1}\beta\eta\eta^{-1}]=[\beta]$$

より η_* は全単射であり $(\eta_*)^{-1}=(\eta^{-1})_*$ である．特に η_* は $\pi_b(S)$ から $\pi_a(s)$ への群の同型写像である □

位相空間が弧状連結であれば S の任意の 2 点 a,b は path で結べるので $\pi_a(S)$, $\pi_b(S)$ は群として同型である．そこでこの群は基点の取り方に依らず定まる群と考えて $\pi(S)$ で表し, S の基本群という．そして弧状連結空間 S の基本群が単位元のみからなる時 S は単連結 (simply connected) であると言う．

連続写像により誘導される基本群の準同型 S,T を位相空間とし, 写像 $f:S\to T$ は連続とする．$a\in S$ を任意に取り固定し, $b=f(a)$ と置く．このとき各 $\alpha\in P_a(S)$ について $fcirc\alpha\in P_b(T)$ を対応させる写像を $f_*:P_a(S)\to P_b(T)$ で表そう．$\alpha\sim\beta$ のとき $f\circ\alpha\sim f\circ\beta$ が成り立つので $\alpha\sim\beta$ ならば $f_*(\alpha)\sim f_*(\beta)$ である．よって f_* は $\pi_a(S)$ から $\pi_b(T)$ への写像を誘導する．この写像も同じ記号 f_* で表そう．このとき $f_*:\pi_a(S)\to\pi_b(T)$ は

$$f_*([\alpha][\beta])=f_*([\alpha\beta])=[f\circ(\alpha\beta)]=[f\circ\alpha f\circ\beta]=[f\circ\alpha][f\circ\beta]=f_*([\alpha])f_*([\beta])$$

より準同型である．また $g:T-\to U$ も連続写像ならば

$$g_*\circ f_*=(g\circ f)_*$$

が成り立つことも容易に分かる．

1.2 Winding Number

複素平面内の閉曲線 $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ が与えられたとして点 $z_0\in\mathbb{C}\backslash\gamma$ に関する, γ の回転数 (winding number) を定義しよう．まず複素平面から負の実軸を取り除いた領域 $\mathbb{C}\backslash[0,-\infty)$ における偏角の主枝を $\operatorname{Arg} z$ と表す．勿論 $|\operatorname{Arg} z|<\pi$ である．

さて

$$\rho=\min_{0\le t\le 1}|\gamma(t)-z_0|>0$$

と置くと, γ の一様連続性より $[0,1]$ の分割: $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ を $|f(s)-f(t)|<\rho$ が $s,t\in[t_{k-1},t_k]$ について成り立つように取れる．このとき

$$w_k=\frac{\gamma(t_k)-z_0}{\gamma(t_{k-1})-z_0}=1+\frac{\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})}{\gamma(t_{k-1})-z_0},\quad k=1,\ldots,n$$

は

$$\left|\frac{\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})}{\gamma(t_{k-1})-z_0}\right|<\frac{|\gamma(t_k-\gamma(t_{k-1})|}{\rho}\le 1$$

より $\mathrm{Re}\, w_k > 0$ である．そこで

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Arg}\, w_i$$

と置けば, 整数値である.

$n(z_0, \gamma)$ が分割の取り方に依存しないことを示す必要がある．これは 2 つの分割について分点を合わせた共通細分を取ることにより, 分割とその細分による $\sum \mathrm{Arg}\, w_k$ が変わらないことを示せば良い．これには結局 $[t_k, t_{k+1}]$ が 2 つの区間 $[t_k, \tau]$, $[\tau, t_{k+1}]$ に細分される時

$$\mathrm{Arg}\, \frac{\gamma(t_k) - z_0}{\gamma(t_{k-1}) - z_0} = \mathrm{Arg}\, \frac{\gamma(\tau) - z_0}{\gamma(t_{k-1}) - z_0} + \mathrm{Arg}\, \frac{\gamma(t_k) - z_0}{\gamma(\tau) - z_0} \tag{1.2.1}$$

が成り立つことを示せば十分である．これは

$$\mathrm{Arg}\, \frac{\gamma(t_k) - z_0}{\gamma(t_{k-1}) - z_0} = \mathrm{Arg}\, \frac{\gamma(\tau) - z_0}{\gamma(t_{k-1}) - z_0} + \mathrm{Arg}\, \frac{\gamma(t_k) - z_0}{\gamma(\tau) - z_0} + 2\pi k, \quad \exists k \in \mathbb{Z}$$

が成り立つことと, 上式における偏角の項は全て, 絶対値が $\frac{\pi}{2}$ 以下であるから

$$|k| \le \frac{1}{2\pi} \left| \mathrm{Arg}\, \frac{\gamma(t_k) - z_0}{\gamma(t_{k-1}) - z_0} - \mathrm{Arg}\, \frac{\gamma(\tau) - z_0}{\gamma(t_{k-1}) - z_0} - \mathrm{Arg}\, \frac{\gamma(t_k) - z_0}{\gamma(\tau) - z_0} \right| \le \frac{1}{2\pi} 3 \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}$$

となることより $k = 0$ が従い, (1.2.1) が成り立つ.

さて $n(z, \gamma)$ は z の函数として $\mathbb{C} \backslash \gamma$ 上で連続である．実際

$$|\gamma(t) - z| \ge |\gamma(t) - z_0| - |z - z_0| \ge \rho - |z - z_0|$$

より $\mathbb{D}(z_0, \rho/2)$ に於いて

$$\min_{0 \le t \le 1} |\gamma(t) - z| \ge \rho - \frac{\rho}{2} = \frac{\rho}{2}$$

であるから, あらかじめ $[0, 1]$ の分割: $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ を $|f(s) - f(t)| < \rho/2$ が $s, t \in [t_{k-1}, t_k]$ について成り立つように取っておけば

$$v_k := \frac{\gamma(t_k) - z_0}{\gamma(t_k) - z} = 1 + \frac{z - z_0}{\gamma(t_k) - z}$$

は $\mathrm{Re}\, v_k > 0$ を満たすので

$$\begin{aligned} n(z_0, \gamma) - n(z, \gamma) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \mathrm{Arg}\, \frac{\gamma(t_k) - z_0}{\gamma(t_{k-1}) - z_0} - \mathrm{Arg}\, \frac{\gamma(t_k) - z}{\gamma(t_{k-1}) - z} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \mathrm{Arg}\, \frac{\gamma(t_k) - z_0}{\gamma(t_k) - z} - \mathrm{Arg}\, \frac{\gamma(t_{k-1}) - z_0}{\gamma(t_{k-1}) - z} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \mathrm{Arg}\, \frac{\gamma(1) - z_0}{\gamma(1) - z} - \mathrm{Arg}\, \frac{\gamma(0) - z_0}{\gamma(0) - z} \right\} = 0 \end{aligned}$$

となるので, は $n(z, \gamma)$ は $\mathbb{D}(z_0, \rho/2)$ で定数である．従って特に $\mathbb{C} \backslash \gamma$ の各成分で連続で整数値であるから, 各成分上で (整数) 定数値になる.

次に $n(z,\gamma)$ は $\mathbb{C}\backslash\gamma$ の非有界成分上で 0 となることを示そう．これは十分大きな全ての z について

$$\sup_{0\le s,t\le 1}|\gamma(s)-\gamma(t)| < \min_{0\le t\le 1}|\gamma(t)-z|$$

が成り立つので, この場合は　$[0,1]$ の分割として $t_0=0<t_1=1$ が取れるので,

$$n(z,\gamma)=\frac{1}{2\pi}\operatorname{Arg}\frac{\gamma(1)-z}{\gamma(0)-z}=0$$

となるからである．

それでは最後に, $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ に於いて $\alpha_0\sim\alpha_1$ の時に $n(z_0,\alpha_0)=n(z_0,\alpha_1)$ となることを示そう．これには $f(t,s)$ を　α から　β への変形とし, $f(t,s)\ne z_0$, $t,s\in[0,1]$ の時に $\alpha_s(t)=f(t,s)$ と置いて α_s を定義するとき $n(z_0,\alpha_s)$ が $s\in[0,1]$ について連続であることを示せば良い．

$$\rho=\min_{0\le s,t\le 1}|f(t,s)-z_0|>0$$

と置くとき $\delta>0$ と $[0,1]$ の分割 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ を $|f(t,s)-f(t',s)|<\rho$, $t_{k-1}\le t,t'\le t_k$, $s,s'\in[0,1]$ with $|s-s'|\le\delta$ が成り立つように取れば

$$\begin{aligned}
n(z_0,\alpha_s)-n(z_0,\alpha_{s'}) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\left\{\operatorname{Arg}\frac{\alpha_s(t_k)-z_0}{\alpha_s(t_{k-1})-z_0}-\operatorname{Arg}\frac{\alpha_{s'}(t_k)-z_0}{\alpha_{s'}(t_{k-1})-z_0}\right\}\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\left\{\operatorname{Arg}\frac{\alpha_s(t_k)-z_0}{\alpha_{s'}(t_k)-z_0}-\operatorname{Arg}\frac{\alpha_s(t_{k-1})-z_0}{\alpha_{s'}(t_{k-1})-z_0}\right\}\\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\operatorname{Arg}\frac{\alpha_s(1)-z_0}{\alpha_{s'}(1)-z_0}-\operatorname{Arg}\frac{\alpha_s(0)-z_0}{\alpha_{s'}(0)-z_0}\right\}=0
\end{aligned}$$

となるからである．

以上は閉曲線の回転数について述べたが, 閉曲線とは限らない無い path γ についても回転数 $n(z_0,\gamma)$ は定義できるが, 整数値とは限らない．しかしながら

$$\alpha\sim\beta\Longrightarrow n(z_0,\alpha)=n(z_0,\beta)$$

や

$$n(z_0,\alpha\cdot\beta)=n(z_0,\alpha)+n(z_0,\beta), \tag{1.2.2}$$

$$n(z_0,\alpha^{-1})=-n(z_0,\alpha) \tag{1.2.3}$$

などが成り立つ．

1.3　穴あき平面の基本群

平面から 1 点を取り除いた領域を穴あき平面 (punctured plane) と呼ぶ．この節では穴あき平面の基本群が $\mathbb{Z}$ と同型になることを示そう．まず一般性を失うこと無く穴は原点で $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 閉曲線の基点は 1 であるとして良い．

はじめに γ が 1 を基点とする $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 内の閉曲線であるとき

$$f(t,s)=(1-s)\gamma(t)+s\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|},\quad (t,s)\in[0,1]\times[0,1]$$

は $\gamma(t)$ から $\partial\mathbb{D}$ 内の閉曲線 $\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$ への変形を与える. 従って $\partial\mathbb{D}$ 内の閉曲線を考えれば十分である.

$$\varepsilon(t)=e^{2\pi it},\quad 0\le t\le 1$$

と置く. また少々紛らわしいが 1 で点 1 に留まったままの閉曲線を表す.

γ が 1 を基点とする $\partial\mathbb{D}$ 内の閉曲線であるとき, 一様連続性より γ を偏角の変化が π より小さな path の積 $\gamma=\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n$ に分解できる. 1 または -1 を通らない path は, 同じ始点と終点を持ち偏角の変化が π より小さな円弧と homotop である. 従ってはじめから γ_k はこのような円弧であるとして良い. σ_k, $k=1,2,\ldots,n$ を 1 から γ_k の始点 ($=\gamma_{k-1}$ の終点) までの円弧の短い方とする. γ_k の始点が -1 のとき, このような円弧は 2 つあるがどちらでも良い. また γ_k の始点が 1 の時は, σ_k は 1 のみよりなる (退化した) 円弧である. そして σ_{n+1} も, 1 のみよりなる円弧とする. このとき

$$\gamma=\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n\sim(\sigma_1\gamma_1\sigma_2^{-1})(\sigma_2\gamma_2\sigma_3^{-1})\cdots(\sigma_n\gamma_n\sigma_{n+1}^{-1})$$

が成り立つが, 各 $\sigma_k\gamma_k\sigma_{k+1}^{-1})$, $k=1,\ldots,n$ は 3 つの円弧よりなり, 作り方から 1, ε, ε^{-1} のどれかに homotop である. 以上より $\gamma\sim\varepsilon^m$, $m\in\mathbb{Z}$. となり $\pi(1,\mathbb{C}\backslash\{0\})=\{[\varepsilon^m]:m\in\mathbb{Z}\}$ が分かる.

最後に $m\neq 0$ のとき ε^m が $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 内で 1 に homotop でないことを示せば $\{[\varepsilon^m]:m\in\mathbb{Z}\}$ が $\mathbb{Z}$ に同型であることが分かる. しかしながら $n(0,\varepsilon^m)=m$ であり, $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 内で homotop な 2 つの閉曲線は同じ回転数を持つことより $\varepsilon^m\not\sim 1$ が分かる.

1.4 向きを保つ写像

φ を複素平面内の開集合 D 上で定義された複素数値函数とする. この節のみで使う用語として, 点 $z_0\in D$ に於いて φ で regular であるとはある $r>0$ について

$$\varphi(z)\neq\varphi(z_0)\quad \forall z\in\mathbb{D}(z_0,r)\backslash\{z_0\}$$

が成り立つ時を言うことにする. このとき φ は $\mathbb{D}^*(0,r):=\mathbb{D}(z_0,r)\backslash\{z_0\}$ から $\mathbb{C}\backslash\{\varphi(z_0)\}$ の中への写像であり, $\mathbb{D}^*(z_0,r)$ の基本群から $\mathbb{C}\backslash\{\varphi(z_0)\}$ の基本群への準同型を誘導する. ここでは $a\in\mathbb{D}^*(z_0,r)$ を取り $b=\varphi(a)$ と置いて, α, β でそれぞれ

$$z_0+(a-z_0)e^{2\pi it},\quad \varphi(z_0)+(b-\varphi(z_0))e^{2\pi it}\quad 0\le t\le 1$$

を表す閉曲線を表せば, $\mathbb{D}^*(z_0,r)$ と $\mathbb{C}\backslash\{\varphi(z_0)\}$ の, それぞれ a, b を基点とする基本群は $[\alpha]$, $[\beta]$ により生成される. ここで φ より誘導される, 準同型を Φ で表し $\Phi([\alpha])=[\beta]^d$ となる $d\in\mathbb{Z}$ を取る. この d により Φ は完全に決定され $\Phi(\alpha^m)=\beta^{md}$ となる. $d=0$ のときは Φ により a を基点とする $\mathbb{D}^*(z_0,r)$ の基本群の像は, b を基点とする $\mathbb{C}\backslash\{\varphi(z_0)\}$ の単位元よりのみなる部分群となり, $d\neq 0$ の時は β^d より生成される部分群になる.

この d のことを φ の z_0 に於ける degree と呼ぶ．実際には $d = n(\varphi(z_0), \varphi \circ \alpha)$ である．d が基点 a の取り方に依らず定まることを示しておこう．それには $a' \in \mathbb{D}(z_0, r) \backslash \{z_0\}$ とし，α' で

$$z_0 + (a' - z_0)e^{2\pi i t}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

で表される閉曲線を表すとして

$$n(\varphi(z_0), \varphi \circ \alpha') = n(\varphi(z_0), \varphi \circ \alpha)$$

を示せば良い．γ を a' と a を結ぶ path とするとき $\gamma\alpha\gamma^{-1}$ は

$$n(z_0, \gamma\alpha\gamma^{-1}) = n(z_0, \gamma) + n(z_0, \alpha) + n(z_0, \gamma^{-1}) = n(z_0, \gamma) + n(z_0, \alpha) - n(z_0, \gamma) = n(z_0, \alpha) = 1 = n(z_0, \alpha')$$

であるから，$\gamma\alpha\gamma^{-1} \sim \alpha'$ が γ の取り方に依らず成り立つ．これより

$$\begin{aligned}
n(\varphi(z_0), \varphi \circ \alpha') &= n(\varphi(z_0), \varphi \circ (\gamma \cdot \alpha \cdot \gamma^{-1})) \\
&= n(\varphi(z_0), (\varphi \circ \gamma) \cdot (\varphi \circ \alpha) \cdot (\varphi \circ \gamma^{-1}))) \\
&= n(\varphi(z_0), \varphi \circ \gamma) + n(\varphi(z_0), \varphi \circ \alpha) + n(\varphi(z_0), \varphi \circ \gamma^{-1})) \\
&= n(\varphi(z_0), \varphi \circ \gamma) + n(\varphi(z_0), \varphi \circ \alpha) + n(\varphi(z_0), (\varphi \circ \gamma)^{-1}) \\
&= n(\varphi(z_0), \varphi \circ \gamma) + n(\varphi(z_0), \varphi \circ \alpha) - n(\varphi(z_0), \varphi \circ \gamma) \\
&= n(\varphi(z_0), \varphi \circ \alpha)
\end{aligned}$$

が成り立つ．従って d は a の取り方に依存しないことになり，これよりさらに $r > 0$ の取り方にも依存しないことになる．そこで d を $d_{z_0}(\varphi)$ と表すことにする．

次に ψ が $\varphi(z_0)$ で regular の時に

$$d_{z_0}(\psi \circ \varphi) = d_{\varphi(z_0)}(\psi) d_{z_0}(\varphi)$$

が成り立つことを示そう．これは

$$\begin{aligned}
d_{z_0}(\psi \circ \varphi) &= n(\psi \circ \varphi(z_0), \psi \circ \varphi \circ \alpha) \\
&= n(\psi \circ \varphi(z_0), \psi \circ \beta^{d_{z_0}(\varphi)}) \\
&= n(\psi \circ \varphi(z_0), (\psi \circ \beta)^{d_{z_0}(\varphi)}) = n(\psi \circ \varphi(z_0), (\psi \circ \beta)) d_{z_0}(\varphi) = d_{\varphi(z_0)}(\psi) d_{z_0}(\varphi).
\end{aligned}$$

より従う．

さて φ が複素平面内の領域 D から D' への homeomorphism としよう．このとき φ は任意の点 $z_0 \in D$ で regular であり，φ^{-1} は $\varphi(z_0)$ で regular であるから D から自身への恒等写像 $\varphi^{-1} \circ \varphi$ に上で示した乗法的性質を用いて $d_{\varphi(z_0)}(\varphi^{-1}) d_{z_0}(\varphi) = 1$ を得るので，$d_{\varphi(z_0)}(\varphi^{-1}) = d_{z_0}(\varphi) = 1$ or -1 が成り立つ．

ここで $\mathbb{D}(z, r) \subset D$ となる $r > 0$ と基点 $a \in \mathbb{D}^*(z, r)$ を任意に取り α を $z_0 + (a - z_0)e^{2\pi i t}$, $0 \leq t \leq 1$ で決まる閉曲線とするとき $d_z(\varphi) = n(\varphi(z), \varphi \circ \alpha)$ が成り立ち，右辺は r, a に依存せず一定であった．そこで $z_0 \in D$ について $\mathbb{D}(z_0, 2r) \subset D$ となる $r > 0$ と $a \in \mathbb{D}(z_0, 2r) \backslash \mathbb{D}(0, r)$ を取る．任意の $z_1 \in \mathbb{D}(z_0, r)$ について $z_s = (1 - s)z_0 + s z_1$ と置き，

$$f(t, s) = z_s + (a - z_s)e^{2\pi i t}, \quad (t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

と置くと．そして α_s を $[0,1] \ni t \mapsto f(t,s)$ で定まる閉曲線とする．このとき $f(t,s)$ は α_0 から α_1 への連続変形であり, $z_s \notin f([0,1] \times [0,1])$ であるから $\varphi(z_s) \notin \varphi(f([0,1] \times [0,1]))$ となるので

$$n(\varphi(z_s), \varphi \circ \alpha_s)$$

は s に依らず一定値である．特に

$$d_{z_0}(\varphi) = n(\varphi(z_0), \varphi \circ \alpha_0) = n(\varphi(z_1), \varphi \circ \alpha_1) = d_{z_1}(\varphi)$$

となる．以上より $d_z(\varphi)$ は z について連続で $d_z(\varphi) = 1$ or $d_z(\varphi) = -1$ であるから結局 $d_z(\varphi)$ は D 上で一定で 1 または -1 に等しい.

Theorem 1.4.1. *φ が複素平面内の領域 D から D' への homeomorphism のとき D 上*

$$d_z(\varphi) \equiv 1 \ \text{or} \ -1.$$

Definition **1.4.1.** φ が複素平面内の領域 D から D' への *homeomorphism* とする．$d_z(\varphi) \equiv 1$ の時, φ を向きを保つ写像と呼び，向きを逆にする写像と呼ぶ.

第 2 章

極値的長さ

第Ⅱ部

私注

第 I 章

Differentialble Quasiconformal Mappings

A 擬等角写像

$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ を $\mathbb{R}^2$ 内の領域 D 上の C^1-級の写像とする．D の各点 において全微分

$$\begin{cases} du = u_x dx + u_y dy \\ dv = v_x dx + v_y dy \end{cases} \iff \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

は (dx, dy) 平面から (du, dv) 平面への線形写像である．この線形写像は原点を中心とする円 $dx^2 + dy^2 = r^2$, $r > 0$ を楕円に写像し, 異なる r の値に対応する楕円は互いに相似である．(dx^2, dy^2 は $(dx)^2)$, $(dy)^2$ と表すべきだが煩雑になるので, このように表すことにする.) そこでこれらの楕円の短軸と長軸の比を求めよう．それには compact 集合である単位円周

$$\{(dx, dy) \in \mathbb{R}^2 : dx^2 + dy^2 = 1\}$$

上での

$$\begin{aligned} du^2 + dv^2 &= (du, dv) \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \\ &= (dx, dy)^t JJ \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \\ &= (dx, dy) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \\ &= E dx^2 + 2F dxdy + G dy^2 \end{aligned}$$

の最大値と最小値を求めればよい．ただし

$$E = u_x^2 + v_x^2, \quad F = u_x u_y + v_x v_y, \quad G = u_y^2 + v_y^2 \tag{A.2}$$

である．dx, dy を変数として Lagrange の未定乗数法を用いると最大値または最小値を取る点において

$$\begin{pmatrix} Edx^2 + Fdxdy + Gdy^2 \text{ の } dx \text{ 偏微分} \\ Edx^2 + Fdxdy + Gdy^2 \text{ の } dy \text{ 偏微分} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2Edx + 2Fdy \\ 2Fdx + 2Gdy \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2dx \\ 2dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + dy^2 - 1 \text{ の } dx \text{ 偏微分} \\ x^2 + dy^2 - 1 \text{ の } dx \text{ 偏微分} \end{pmatrix}$$

を満たす実数 λ が存在する．上式を書き直すと

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

となる．ここで $dx^2+dy^2=1$ ゆえ $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから λ は結局行列 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ の固有値である．そこで固有方程式

$$\begin{vmatrix} E-\lambda & F \\ F & G-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2-(E+G)\lambda+EG-F^2=0$$

を解いて

$$\lambda_1 = \frac{E+G+\sqrt{(E-G)^2+4F^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{E+G-\sqrt{(E-G)^2+4F^2}}{2}$$

となる．勿論, $\lambda_1 \geq \lambda_2$ であるが, $\lambda_2 \geq 0$ も成り立つ筈である．これは

$$\begin{aligned} & \lambda_2 \geq 0 \\ \iff & (E+G)^2 \geq (E-G)^2+4F^2 \\ \iff & EG \geq F^2 \\ \iff & \{u_x^2+v_x^2\}\{u_y^2+v_y^2\} \geq \{u_xu_y+v_xv_y\}^2 \\ \iff & (\det J)^2 = \{u_xv_y-u_yv_x\}^2 \geq 0 \end{aligned}$$

より分かる．

ここで (A.3) より

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \\ \iff & du^2+dv^2 = Edx^2+2Fdxdy+Gdy^2 = \lambda(dx^2+dy^2) \end{aligned}$$

であることに注意すれば, λ_1 が du^2+dv^2 の最大値を与え, λ_2 が du^2+dv^2 の最小値を与える．

以下では $\lambda_2>0$ を保証するために $\det J \neq 0$ を仮定する．楕円の長軸半径は $\sqrt{\lambda_1}$, 短軸半径は $\sqrt{\lambda_2}$ であるから $\frac{\text{長軸半径}}{\text{短軸半径}}$ は

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{E+G+\sqrt{(E-G)^2+4F^2}}{E+G-\sqrt{(E-G)^2+4F^2}}} = \frac{E+G+\sqrt{(E-G)^2+4F^2}}{2\sqrt{EG-F^2}} \tag{A.4}$$

である．

今までの議論を $w=u+iv$, $z=x+iy$ とおいて複素化を行って見よう．このとき微分についても $dw=du+idv$, $dz=dx+idy$ という複素化を行うことになり, 問題は線形写像

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \tag{A.5}$$

をどのように複素化するかを考える必要がある．

ここでは実軸に関する z の対称点である $\overline{z}=x-iy$ を用いることにして写像

$$z\mapsto(\alpha+i\beta)z+(\gamma+i\delta)\overline{z}$$

を考える．これは

$$\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\gamma & -\delta\\ \delta & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ -y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+\gamma & -\beta+\delta\\ \beta+\delta & \alpha-\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{cases}\alpha+\gamma=a\\ -\beta+\delta=b\\ \beta+\delta=c\\ \alpha-\gamma=d\end{cases}\quad\text{つまり}\quad\begin{cases}\alpha=\frac{a+d}{2}\\ \beta=\frac{-b+c}{2}\\ \gamma=\frac{a-d}{2}\\ \delta=\frac{b+c}{2}\end{cases}$$

と置けば良い．このとき (A.5) は $(\alpha+i\beta)z+(\gamma+i\delta)\overline{z}$ 表現される．

さてこの表現を (A.1) に適用すれば $df=du+idv=(\alpha+i\beta)dz+(\gamma+i\delta)d\overline{z}$ において

$$\begin{aligned}\alpha+i\beta=&\frac{a+d}{2}+\frac{i(-b+c)}{2}=\frac{1}{2}(u_x+v_y)+\frac{i}{2}(-u_y+v_x)=\frac{1}{2}(u_x+iv_x)-\frac{1}{2}(u_y+iv_y)\\ \gamma+i\delta=&\frac{a-d}{2}+\frac{i(b+c)}{2}=\frac{1}{2}(u_x-v_y)+\frac{i}{2}(u_y+v_x)=\frac{1}{2}(u_x+iv_x)+\frac{1}{2}(u_y+iv_y)\end{aligned}$$

となる．そこで

(A.6)
$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

(A.7)
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

と置けば

(A.8)
$$df=\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}$$

が成り立つ．逆に複素数 A, B により

(A.9)
$$df=Adz+Bd\overline{z}\ \text{と表されれば}\ \Longrightarrow A=\frac{\partial f}{\partial z},\ B=\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$$

また $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ をそれぞれ f_z, $f_{\overline{z}}$ のように略記する．

さて $\overline{f}=u-iv$ について

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}=&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u-iv)=\overline{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)}=\overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}}\\ \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}=&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u-iv)=\overline{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)}=\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}\end{aligned}$$

より

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}}, \qquad \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}} \tag{A.10}$$

が成り立つ．これは後ほど合成函数の偏微分の公式を複素形で表す時に必要になる．

次に

$$f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(u_x + iv_x) + \frac{i}{2}(u_y + iv_y) = 0 \iff u_x - v_y = 0, \quad v_x + u_y = 0 \text{ (Cauchy-Riemann の関係式)}$$

であるから, C^1-級の写像 f が解析的であるための必要十分条件は $f_{\overline{z}} = 0$ であり, このとき f' で f の複素微分を表せば

$$f_z = \frac{1}{2}(u_x + iv_x) - \frac{i}{2}(u_y + iv_y) = u_x + iv_x = f' \tag{A.11}$$

が成り立つ．

また函数行列式 $J_f = u_x v_y - u_y v_x = ad - bc$ については

$$ad - bc = (\alpha + \gamma)(\alpha - \gamma) - (-\beta + \delta)(\beta + \delta) = \alpha^2 + \beta^2 - (\gamma^2 + \delta^2) = |\alpha + i\beta|^2 - |\gamma + i\delta|^2 = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2$$

より

$$J_f = u_x v_y - u_y v_x = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \tag{A.12}$$

と表現される．従って

$$J_f > 0 \quad \iff \quad |f_z| > |f_{\overline{z}}|$$

が成り立つ．

それでは上で導入した記号を用いて円 $\{dz = dx + idy : |dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2} = 1\}$ の線形写像 $dz \mapsto df = f_z dz + f_{\overline{z}} d\overline{z}$ による像である楕円の短軸半径と長軸半径の比を求めて見よう．長軸半径に関しては $|df|$ の最大値を求めれば良いが, $|d\overline{z}| = \sqrt{dx^2 + dy^2} = |dz|$ に注意すると三角不等式より

$$|df| = |f_z dz + f_{\overline{z}} d\overline{z}| \leq |f_z dz| + |f_{\overline{z}} d\overline{z}| = (|f_z||dz| + |f_{\overline{z}})|d\overline{z}| = (|f_z| + |f_{\overline{z}})||dz| = |f_z| + |f_{\overline{z}})|$$

となり, 上式において等号が起こるような dz が存在するので, 最大値は $|f_z| + |f_{\overline{z}}|$ であることが分かる．$f_z \neq 0$ の時に等号が起こるための必要十分条件は

$$\frac{f_{\overline{z}} d\overline{z}}{f_z dz} \geq 0 \tag{A.13}$$

である．

短軸に関しては $|df|$ の最小値を求めれば良いが, これには $|f_z| \geq |f_{\overline{z}})|$ の場合と $|f_z| < |f_{\overline{z}})|$ の場合に分けて考える必要がある．前者の場合は三角不等式より

$$|df| = |f_z dz + f_{\overline{z}} d\overline{z}| \geq |f_z dz| - |f_{\overline{z}} d\overline{z}| = (|f_z||dz| - |f_{\overline{z}})|d\overline{z}| = (|f_z| - |f_{\overline{z}})||dz| = |f_z| - |f_{\overline{z}})|$$

となり, 上式において等号が起こるような dz が存在するので, 最小値は $|f_z| - |f_{\overline{z}}|$ であることが分かる. $f_z \neq 0$ の時に等号が起こるための必要十分条件は

$$\frac{f_{\overline{z}} d\overline{z}}{f_z dz} \leq 0 \tag{A.14}$$

である.

後者の場合もほぼ同様にして最小値は $|f_{\overline{z}}| - |f_z|$ となり, 最小値を与える dz についても調べることができるが, 以下では話を簡単にするために, f が向きを保つ場合のみを考えよう. つまり写像 f は

$$|f_{\overline{z}}(z)| < |f_z(z)|, \quad z \in D$$

を満たすとする. このとき "長軸半径 / 短軸半径" は

$$D_f(z) := \frac{|f_z(z)| + |f_{\overline{z}}(z)|}{|f_z(z)| - |f_{\overline{z}}(z)|}$$

である. この $D_f(z)$ を f の z における dilatation と呼ぶ. また

$$\mu_f(z) = \frac{f_{\overline{z}}(z)}{f_z(z)}, \tag{A.15}$$

$$d_f(z) = \left| \frac{f_{\overline{z}}(z)}{f_z(z)} \right| = |\mu_f(z)| \tag{A.16}$$

と置いて, $\mu_f(z)$ を f の z における複素 dilation (complex dilatation) または Beltrami 微分 (Beltrami differential) と言う. このとき

$$D_f(z) = \frac{1 + d_f(z)}{1 - d_f(z)}, \quad d_f(z) = \frac{D_f(z) - 1}{D_f(z) + 1} \tag{A.17}$$

が成り立つことに注意しよう.

さて長軸半径を与える dz の偏角は (A.13) と (A.15) より $\arg \mu_f - 2 \arg dz = 0 \mod. 2\pi$ となるので

$$\alpha = \frac{1}{2} \arg \mu_f(z)$$

と置けば $\arg dz = \alpha$ または $\arg dz = \alpha + \pi$ である. また長軸の方向は

$$df = f_z dz + f_{\overline{z}} d\overline{z} = f_z dz \left(1 + \frac{f_{\overline{z}}(z)}{f_z(z)} \frac{d\overline{z}}{dz} \right)$$

において

$$\left(1 + \frac{f_{\overline{z}}(z)}{f_z(z)} \frac{d\overline{z}}{dz} \right) > 0$$

であるから $\arg dz = \alpha$ のときの $f_z dz$ の方向であるから

$$\beta = \arg(f_z dz) = \arg f_z + \frac{1}{2} \arg \mu_f(z) = \frac{1}{2} (\arg f_z + \arg f_{\overline{z}}) = \frac{1}{2} \arg(f_z f_{\overline{z}})$$

これは

$$\nu_f(z) = \frac{f_{\overline{z}}(z)}{\overline{f_{\overline{z}}(z)}} = \frac{f_{\overline{z}}(z)}{\overline{f_z(z)}} \tag{A.18}$$

と置けば $\beta = \frac{1}{2}\nu_f(z)$ と表すことが出来る．$\nu_f(z)$ を f の z における第 2 複素 dilatation (second complex dilatation) と言う．$\beta - \alpha = \arg f_z$ が成り立つことに注意しておこう．

Definition **A.1.** 複素平面内の領域 D から *(*他の*)* ある領域への C^1-級の *homeomorphism* f が向きを保ち *(*つまり $J_f(z) = |f_z(z)|^2 - |f_{\overline{z}}(z)|^2 > 0$*)* かつ, 定数 $K \geq 1$ について

$$D_f(z) \leq K, \quad z \in D$$

が成り立つ時 K-擬等角 *(*K*-quasiconformal)* であると言う．　またある $K \in [0, \infty)$ について K-擬等角写像であるとき単に擬等角写像であると言う．

f が向きを保つ時条件 $D_f \leq K$ は $|mu_f(z)| = d_f(z) \leq k := \frac{K-1}{K+1}$ と同値である．また $K = 1$ のときは $k = 0$ に対応し, このとき $f_{\overline{z}}(z) \equiv 0$ であるから, f は解析的であり, 全単射ゆえ等角である．従って 1-擬等角であることと等角であることは同値である．

第 3 章で, 擬等角写像の概念を C^1-級とは限らない, 向きを保つ homeomorphism に拡張するが, この章においては C^1-級という仮定をしたままで先に進もう．

Problem A.1. $J_f > 0$ つまり $|f_{\overline{z}}| < |f_z|$ の時に

$$\frac{|f_z| + |f_{\overline{z}}|}{|f_z| - |f_{\overline{z}}|} = \frac{E + G + \sqrt{(E-G)^2 + 4F^2}}{2\sqrt{EG - F^2}} \tag{A.19}$$

が成り立つことを直接計算して確かめよ．

B　Grötzsch の問題

擬等角写像の概念は 1928 年に H. Grötzsch により導入された．Q を正方形 (の内部) で R を正方形でない長方形 (の内部) とする．このとき Q から R への等角写像は, Jordan 領域から Jordan 領域への等角写像であるから, 境界まで連続かつ全単射として拡張できる．このとき Q の 4 頂点が R の 4 頂点に写像されるような等角写像は存在しない．

Problem B.1. Q の 4 頂点が R の 4 頂点に写像されるような等角写像が存在しないことを示せ．

それでは等角性を諦めて $\overline{Q}$ から $\overline{R}$ への同相写像であり Q の 4 頂点が R の 4 頂点に写像されるようなものの中で最も等角写像に近いものは何であろうか？ これが Grötzsch の考えた問題である．もちろん, このような 4 頂点を 4 頂点に写像するような同相写像の全体はこの問題を考える写像の族としては, いささか大き過ぎるし, 等角写像への近さ

をどう測るかという問題もある．そこで以下のように族を設定し, 等角写像への近さは dilatation が 1 に近いという意味に取る．

長さが a の 2 辺, b の 2 辺よりなる長方形を R とし, 同様に辺の長さが a', b' の長方形を R' とし $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a'}{b'}$ とする．このとき $\overline{R}$ から $\overline{R'}$ への同相写像 f で

(i) R の横の各辺は R' の横の 1 辺に全単射に写像され, R の縦の各辺も R' の縦の 1 辺に全単射に写像される

(ii) $f = u + iv$ は R で C^1-級であり, その 1 階偏導関数 u_x, u_y, v_x, v_y は $\overline{R}$ まで連続に拡張される．

(iii) f は向きを保つ．つまり $J_f = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}| = u_x v_y - u_y v_x > 0$ が R 上で成り立つ．

が成り立つものの全体を $\mathcal{F}$ とする．この族 $\mathcal{F}$ について Grötzsch の問題を考えよう．

話を簡単にするために必要ならばあらかじめ $z \mapsto \alpha z + \gamma$ の形の変換を行うことにより R, R' の各辺は実軸または虚軸に平行で

$$R = \{z = x + iy : 0 \le x \le a, 0 \le y \le b\}, \quad R' = \{w = u + iv : 0 \le u \le a', 0 \le v \le b'\}$$

と仮定する．このとき任意の $y \in [0, b]$ について

(B.1)
$$\begin{aligned}
a' =& |u(a+iy) - u(0+iy)| \\
\le& \int_0^a |u_x(x+iy)|\, dx \\
\le& \int_0^a |u_x(x+iy) + iv_x(x+iy)|\, dx \\
=& \int_0^a |f_z(x+iy) + f_{\overline{z}}(x+iy)|\, dx \\
\le& \int_0^a (|f_z(x+iy)| + |f_{\overline{z}}(x+iy)|)\, dx
\end{aligned}$$

が成り立つ．これの両辺を y について 0 から b まで積分し Cauchy-Schwarz の不等式と函数行列式が $J_f = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2$ と表されること, 及び $\iint_R J_f\, dxdy = \text{area of } R' = a'b'$ より

$$\begin{aligned}
a'b &\le \int_0^b \left\{ \int_0^a (|f_z(x+iy)| + |f_{\overline{z}}(x+iy)|)\, dx \right\} dy \\
&= \iint_R \sqrt{\frac{|f_z| + |f_{\overline{z}}|}{|f_z| - |f_{\overline{z}}|}} \sqrt{|f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2}\, dxdy \\
&\le \sqrt{\iint_R \frac{|f_z| + |f_{\overline{z}}|}{|f_z| - |f_{\overline{z}}|}\, dxdy} \sqrt{\iint_R (|f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2)\, dxdy} \\
&= \sqrt{\iint_R \frac{|f_z| + |f_{\overline{z}}|}{|f_z| - |f_{\overline{z}}|}\, dxdy} \cdot \sqrt{\text{area of } R'} \\
&= \sqrt{a'b'} \sqrt{\iint_R D_f(z)\, dxdy}
\end{aligned}$$

となるので

$$\frac{a'/b'}{a/b} \le \frac{1}{ab}\iint_R D_f(z)\,dxdy \le \sup_{z\in R} D_f(z) \tag{B.2}$$

を得る．特に f が $0,\ a,\ a+ib,\ ib$ をそれぞれ $0,\ a',\ a'+ib',\ ib'$ に写像する affine map のときは $f(z)=\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma$ と置くと $f(0)=0,\ f(a)=a',\ f(ib)=ib'$ より $\gamma=0,\ a(\alpha+\beta)=a',\ b(\alpha-\beta)=b'$ より

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}\right)z+\frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a}-\frac{b'}{b}\right)\overline{z} \tag{B.3}$$

となる．このとき

$$f_z(z)\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}\right),\quad f_{\overline{z}}(z)\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a}-\frac{b'}{b}\right)$$

であり

$$D_f(z)\equiv\frac{\left(\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}\right)+\left(\frac{a'}{a}-\frac{b'}{b}\right)}{\left(\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}\right)-\left(\frac{a'}{a}-\frac{b'}{b}\right)}=\frac{a'/b'}{a/b}$$

となるので (B.2) の 2 つの不等号は, この場合等号になる．

Theorem B.2.

$$\frac{a'/b'}{a/b}=\min_{f\in\mathcal{F}}\frac{1}{ab}\iint_R D_f(z)\,dxdy=\min_{f\in\mathcal{F}}\sup_{z\in R}D_f(z)$$

が成り立ち, f が $0,\ a,\ a+ib,\ ib$ をそれぞれ $0,\ a',\ a'+ib',\ ib'$ に写像する affine map の時に最小値を取る.

Problem B.3. $R=\{z=x+iy: 0\le x\le a, 0\le y\le b\}$, $R'=\{w=u+iv: 0\le u\le a', 0\le v\le b'\}$ とし, $f\in\mathcal{F}$ で $0,\ a,\ a+ib,\ ib$ をそれぞれ $0,\ a',\ a'+ib',\ ib'$ に写像するのの全体を $\tilde{\mathcal{F}}$ と置く時

$$\min_{f\in\tilde{\mathcal{F}}}\frac{1}{ab}\iint_R D_f(z)\,dxdy,\quad \min_{f\in\tilde{\mathcal{F}}}\sup_{z\in R}D_f(z)$$

の, それぞれの最小値を取る f が *(B.3)* で定義される *affine map* に限るかどうかを考えよ.
先走って答えを書くと, $\min_{f\in\mathcal{F}}\sup_{z\in R}D_f(z)$ を取る f は, この *affine map* に限るが, $\min_{f\in\tilde{\mathcal{F}}}\frac{1}{ab}\iint_R D_f(z)\,dxdy$ を取る f は, この *affine map* に限らない.

C 合成写像の dilatation

$\zeta=f(z)$ を領域 D 上の函数で, 点 $z_0\in D$ で全微分可能とする．また $w=g(\zeta)$ を $f(D)$ を含むある領域上の函数で, 点 $\zeta_0=f(z_0)$ で全微分可能とする．このとき合成函数 $w=g(f(z))$ の z_0 における z 及び $\overline{z}$ に関する偏微分の公式を導こう．まず $dw=g_\zeta(\zeta_0)d\zeta+g_{\overline{\zeta}}(\zeta_0)d\overline{\zeta}$, $d\zeta=f_z(z_0)dz+f_{\overline{z}}(z_0)d\overline{z}$ とは

$$\begin{aligned}g(\zeta)-g(\zeta_0)=&g_\zeta(\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)+g_{\overline{\zeta}}(\zeta_0)\overline{(\zeta-\zeta_0)}++\mathrm{o}(z-z_0),\quad \zeta\to\zeta_0\\ f(z)-g(z_0)=&f_z(z_0)(z-z_0)+f_{\overline{z}}(z_0)\overline{(z-z_0)}+\varepsilon(z-z_0)|z-z_0|,\quad z\to z_0\end{aligned}$$

が成り立つことを意味する．この第 1 式に $\zeta = f(z)$ を代入すれば $\eta(f(z) - f(z_0)) \to 0$, $z \to z_0$ と z_0 の適当な近傍上で 定数 $M > 0$ が存在し $|f(z) - f(z_0)| \le M|z - z_0|$ が成り立つこと, 及び (A.10) を用れば $z \to z_0$ の時

$$
\begin{aligned}
&g(f(z)) - g(f(z_0)) \\
=&g_\zeta(f(z_0))\{f_z(z_0)(z-z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)\overline{(z-z_0)}\} + g_{\overline{\zeta}}(f(z_0))\overline{\{f_z(z_0)(z-z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)\overline{(z-z_0)}\}} + \mathrm{o}(z-z_0) \\
=&\{g_\zeta(f(z_0))f_z(z_0) + g_{\overline{\zeta}}(f(z_0))\overline{f_{\overline{z}}(z_0)}\}(z-z_0) + \{g_\zeta(f(z_0))f_{\overline{z}}(z_0) + g_{\overline{\zeta}}(f(z_0))\overline{f_z(z_0)}\}\overline{(z-z_0)} + \mathrm{o}(z-z_0) \\
=&\{g_\zeta(f(z_0))f_z(z_0) + g_{\overline{\zeta}}(f(z_0))\overline{f}_z(z_0)\}(z-z_0) + \{g_\zeta(f(z_0))f_{\overline{z}}(z_0) + g_{\overline{\zeta}}(f(z_0))\overline{f}_{\overline{z}}(z_0)\}\overline{(z-z_0)} + \mathrm{o}(z-z_0)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．これと複素偏微分係数の一意性 (A.9) より

(C.1)
$$
\begin{aligned}
(g\circ f)_z =&(g_\zeta \circ f)f_z + (g_{\overline{\zeta}} \circ f)\overline{f}_z, \\
(g\circ f)_{\overline{z}} =&(g_\zeta \circ f)f_{\overline{z}} + (g_{\overline{\zeta}} \circ f)\overline{f}_{\overline{z}}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．これより直ちに

$$
\begin{aligned}
\mu_{g\circ f} =&\frac{(g\circ f)_{\overline{z}}}{(g\circ f)_z} \\
=&\frac{(g_\zeta \circ f)f_{\overline{z}} + (g_{\overline{\zeta}} \circ f)\overline{f}_{\overline{z}}}{(g_\zeta \circ f)f_z + (g_{\overline{\zeta}} \circ f)\overline{f}_z} \\
=&\frac{\overline{f_z}}{f_z}\frac{\frac{f_{\overline{z}}}{f_z} + \frac{g_{\overline{\zeta}}\circ f}{g_\zeta\circ f}}{1 + \frac{g_{\overline{\zeta}}\circ f}{g_\zeta\circ f}\frac{f_{\overline{z}}}{f_z}} \qquad \left(\nu_f = \frac{f_{\overline{z}}}{f_z} \text{ に注意}\right) \\
=&\frac{\overline{f_z}}{f_z}\frac{\mu_g\circ f + \nu_f}{1 + \overline{\nu_f}\mu_g\circ f}
\end{aligned}
$$

より

(C.2)
$$
\mu_{g\circ f} = \frac{\overline{f_z}}{f_z}\frac{\mu_g\circ f + \nu_f}{1 + \overline{\nu_f}\mu_g\circ f}
$$

を得る．さて g が等角の場合 $\mu_g = 0$ であるから $\mu_{g\circ f} = \frac{\overline{f_z}}{f_z}\nu_f = \mu_f$ となるので

(C.3)
$$
g \text{ が等角} \quad \Longrightarrow \quad \mu_{g\circ f} = \mu_f
$$

また f が等角ならば $\nu_f = 0$ より

(C.4)
$$
f \text{ が等角} \quad \Longrightarrow \quad \mu_{g\circ f} = \frac{\overline{f'}}{f'}\mu_g\circ f
$$

が成り立つ．もっと直接的に f の等角性より $df = f'dz$ なので $d(g\circ f) = g_\zeta\circ f f'dz + g_{\overline{\zeta}}\circ f\overline{f'}d\overline{z}$ であるから $(g\circ f)_z = g_\zeta\circ f f'$, $(g\circ f)_{\overline{z}} = g_{\overline{\zeta}}\circ f\overline{f'}$ であるから

$$
\nu_{g\circ f} = \frac{(g\circ f)_{\overline{z}}}{(g\circ f)_z} = \frac{g_{\overline{\zeta}}\circ f}{g_\zeta\circ f} = \nu_g\circ f
$$

となるので

$$f \text{ が等角} \quad \Longrightarrow \quad \nu_{g\circ f} = \nu_g \circ f \tag{C.5}$$

式 (C.2) より, K_1-擬等角写像と K_2-擬等角写像の合成が K_1K_2-擬等角写像であることを示すことができる. それには次の不等式を用いるが, 念の為にその証明を行うことを演習問題としておこう.

Problem C.1. $z, a \in \mathbb{D}$ について

$$\left|\frac{z+a}{1+\overline{a}z}\right| \le \frac{|z|+|a|}{1+|a||z|} \tag{C.6}$$

が成り立つことを示せ.

Theorem C.2. $\zeta = f(z)$ を領域 D 上の C^1-級の K_1-擬等角写像とし $w = g(\zeta)$ を $f(D)$ を含むある領域上の C^1-級の K_2-擬等角写像とする. このとき合成写像 $w = g(f(z))$ は C^1-級の K_1K_2-擬等角写像である.

Proof. まず $k_j = \frac{K_j-1}{K_j+1}$ と置くと, $|\nu_f| = |\mu_f| \le k_1$, $|\mu_g| \le k_2$ が成り立つ. そして $\alpha \in [0,1)$ について函数

$$[0,1] \ni x \mapsto \frac{x+\alpha}{1+\alpha x}$$

が増加である. 従って (C.2) と (C.6) より

$$|\mu_{g\circ f}| = \left|\frac{\mu_g\circ f + \nu_f}{1+\overline{\nu_f}\mu_g\circ f}\right| \le \frac{|\mu_g\circ f| + |\nu_f|}{1+|\overline{\nu_f}||\mu_g\circ f|} \le \frac{|\mu_g\circ f| + k_1}{1+k_1|\mu_g\circ f|} \le \frac{k_2+k_1}{1+k_1k_2}$$

が成り立つ. ここで

$$\frac{1+\frac{k_2+k_1}{1+k_1k_2}}{1-\frac{k_2+k_1}{1+k_1k_2}} = \frac{1+k_2}{1-k_2}\frac{1+k_1}{1-k_1} = K_2K_1$$

であるから $g\circ f$ は K_2K_1-擬等角写像である. □

残念なことに, (C.2) には $\mu_{\circ f}$ は現れるが μ_f は現れず, 代わりに ν_f が出現している. そこで second complex dilatation $\nu = \frac{f_{\overline{z}}}{f_z}$ についてもう少し考えてみよう. 前節で見たように $\alpha = 2^{-1}\arg\mu_f$ と $\beta = 2^{-1}\arg\nu_f$ はそれぞれ円 $\{|dz| = 1\}$ の微分 df による線形写像 (A.8) (または (A.1)) を考えたときの長軸を与える dz の偏角と, 長軸の方向の偏角である. これは逆写像 f^{-1} の微分 df^{-1} による線形写像の立場から見ると β, α はそれぞれ円 $\{|dw = 1\}$ の像であるだ円の短軸を与える方向の偏角と, 短軸の方向の偏角である. 従って $\beta \pm \frac{\pi}{2}$ と $\alpha \pm \frac{\pi}{2}$ がそれぞ長軸を与える dw の方向の偏角と, 長軸の方向の偏角である. 従って ν_f は $\mu_{f^{-1}}$ と関係があるのではと予想できる.

(C.1) を

$$\begin{pmatrix}(g\circ f)_z\\(g\circ f)_{\overline{z}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f_z & \overline{f}_z\\ f_{\overline{z}} & \overline{f}_{\overline{z}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(g_\zeta\circ f)\\(g_{\overline{\zeta}}\circ f)\end{pmatrix}$$

と書きなおすと, 行列式が $J_f = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2$ であることに注意すると

$$\begin{pmatrix}g_\zeta\circ f\\ g_{\overline{\zeta}}\circ f\end{pmatrix} = \frac{1}{J_f}\begin{pmatrix}\overline{f}_{\overline{z}} & -\overline{f}_z\\ -f_{\overline{z}} & f_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(g\circ f)_z\\(g\circ f)_{\overline{z}}\end{pmatrix} \tag{C.7}$$

となる. 特に $g=f^{-1}$ の時は $(g\circ f)_z=1$ $(g\circ f)_{\overline{z}}=0$ であるから

$$(f^{-1})_\zeta\circ f=\frac{\overline{f}_{\overline{z}}}{J_f},\qquad (f^{-1})_{\overline{\zeta}}\circ f=-\frac{f_{\overline{z}}}{J_f} \tag{C.8}$$

従って

$$\mu_{f^{-1}}\circ f=-\frac{f_{\overline{z}}}{\overline{f}_{\overline{z}}}=-\nu_f \tag{C.9}$$

が従う. 両辺の絶対値を取ると

$$d_{f^{-1}}=d_f\circ f^{-1} \tag{C.10}$$

となり, f の z_0 における dilatation と f^{-1} の $f(z_0)$ における dilatation が一致することが分かる.

次に (C.2) を $\mu_g\circ f$ について解くか, または (C.7) より

$$\begin{aligned}\mu_g\circ f=&\frac{g_{\overline{\zeta}}\circ f}{g_\zeta\circ f}\\ =&\frac{-(g\circ f)_z f_{\overline{z}}+(g\circ f)_{\overline{z}}f_z}{(g\circ f)_z\overline{f}_{\overline{z}}-(g\circ f)_{\overline{z}}\overline{f}_z}=\frac{f_z}{\overline{f_z}}\frac{\mu_{g\circ f}-\mu_f}{1-\overline{\mu_f}\mu_{g\circ f}}\end{aligned}$$

より

$$\mu_g\circ f=\frac{f_z}{\overline{f_z}}\frac{\mu_{g\circ f}-\mu_f}{1-\overline{\mu_f}\mu_{g\circ f}} \tag{C.11}$$

さて (C.11) において $g=h\circ f^{-1}$ と置けば

$$\mu_{h\circ f^{-1}}\circ f=\frac{f_z}{\overline{f_z}}\frac{\mu_h-\mu_f}{1-\overline{\mu_f}\mu_h} \tag{C.12}$$

となるが, 両辺の絶対値を取り

$$d_{h\circ f^{-1}}\circ f=\left|\frac{\mu_h-\mu_f}{1-\overline{\mu_f}\mu_h}\right| \tag{C.13}$$

となり

$$\log D_{h\circ f^{-1}}\circ f=\log\frac{1+\left|\frac{\mu_h-\mu_f}{1-\overline{\mu_f}\mu_h}\right|}{1-\left|\frac{\mu_h-\mu_f}{1-\overline{\mu_f}\mu_h}\right|}=[\mu_h,\mu_f] \tag{C.14}$$

を得る. ただし $[z,w]$ は

$$[z,w]=\log\frac{1+\left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right|}{1-\left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right|}$$

で定義される, $z,w\in\mathbb{D}$ 間の non-euclidean の距離である.

第 II 章

The General Definition

A The Geometric Approach

Jordan 領域 Q と, ∂Q 上の正の向きの 4 点, z_1, z_2, z_3, z_4 の組を曲線四辺形と呼ぶ. ∂Q は z_j から z_{j+1}, $j = 1, 2, 3, 4$ (ただし $z_5 = z_1$ と置く) までの 4 本の部分単純弧よりなる. 以下では曲線を省略し, 曲線四辺形のことを単に四辺形と呼ぶことにする.

Definition **A**(擬等角写像の幾何学的定義). Ω, Ω' を $\mathbb{C}$ 内の領域とする. このとき写像 $\varphi : \Omega \to \Omega'$ が Ω から Ω' への K-擬等角写像であるとは φ が向きを保つ位相写像であり, Ω 内の任意の 4 辺形 (正しくは曲線 4 辺形であるが, 以後, 単に 4 辺形) Q で $\overline{Q} \subset \Omega$ を満たすものについて

$$m(\varphi(Q)) \leq K m(Q) \tag{A.1}$$

が成り立つことである. ただし $m(Q)$ は 4 辺形 Q の module を表す.

4 辺形 Q の module を考えるときの対辺の組を (左右から上下, または上下から左右へ) 取り替えた 4 辺形 を Q^* と表すと, $m(Q)m(Q^*) = 1$ であるから (A.1) より $\frac{1}{K} m(Q^*) \leq m(\varphi(Q^*))$ を得る. 従って (A.1) は

$$\frac{1}{K} m(Q) \leq m(\varphi(Q)) \leq K m(Q) \tag{A.2}$$

と同値である.

Lectures on Quasiconformal Mappings では $\varphi : \Omega \to \Omega'$ が Ω で C^1-級であるとき, この幾何学的定義が前章の定義と同値になることを, 次のように主張している.

Trivial Properties:

1. If φ is of class C^1, the definition agrees with the earlier.

同相写像 φ が C^1-級であるとしよう．このとき φ が, Chapter I の意味で K-q.c. ならば, まず Jacobian $|\varphi_z(z)|^2 - |\varphi_{\overline{z}}(z)|^2$ が各点で正であるから, 位相的な意味でも向きを保つ (詳しくは準備編を参照)．また加えて各点で

$$D\varphi(z) = \frac{|\varphi_z(z)| + |\varphi_{\overline{z}}(z)|}{|\varphi_z(z)| - |\varphi_{\overline{z}}(z)|} \le K$$

を満たすが, このとき (A.1) が成り立つことも Chapter 1 において既に示されている．従って C^1-級の同相写像 φ が Chpter I の意味で K-q.c. ならば Definition A の意味で K-q.c. である．しかしながら逆の証明は与えられていない．C^1-級の同相写像 φ が位相的な意味で向きを保てば Jacobian $|\varphi_z(z)|^2 - |\varphi_{\overline{z}}(z)|^2$ が各点で正になることは準備編で示した．従って Jacobian が正で (A.1) が成り立つとき $D\varphi(z) \le K$ を示せば, Trivial Properties の 1. が成り立つことが分かる．

幾何学的定義より $D\varphi \le K$ を導く． $\varphi : \Omega \to \Omega'$ を C^1-級の写像とし, 幾何学的な K-擬等角の定義を満たすとする．このとき各点 $z_0 \in \Omega$ において $D\varphi_{\overline{z}}(z_0) \le K$ を示す．まず議論を simple にする為に, 以下のような場合を考えれば十分であることを示そう．

(a) $z_0 = 0$ かつ $\varphi(z_0) = 0$.

(b) 拡大率が最大になる z_0 からみた方向と, その像の $\varphi(z_0)$ からみた方向がともに実軸方向であり, 同様に拡大率が最小になる方向がともに虚軸方向である

次に述べる議論は Lectures on Quasiconformal Mappings の第 1 章を読めば分かることであるが冗長を厭わず述べておく．

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\{\arg\varphi_z(z_0) + \arg\varphi_{\overline{z}}(z_0)\}, \quad \theta_2 = \frac{1}{2}\{\arg\varphi_z(z_0) - \arg\varphi_{\overline{z}}(z_0)\},$$

と置く．ただし $\varphi_{\overline{z}}(z_0) = 0$ の場合 $\arg\varphi_{\overline{z}}(z_0)$ のところは 0 で置き換える．($\varphi_z(z_0)$ は函数行列式 $|\varphi_z|^2 - |\varphi_{\overline{z}}|^2 > 0$ より $= 0$ となることはない.) そして

$$\tilde{\varphi}(z) = e^{-i\theta_1}\left\{\varphi\left(z_0 + e^{-i\theta_2}z\right) - \varphi(z_0)\right\}$$

と置く．このとき $\tilde{\varphi}$ も C^1-級の幾何学的な K-擬等角写像であり, $\tilde{\varphi}(0) = 0$ を満たす．さらに $\tilde{\varphi}(z) = u(z) + iv(z)$ と分解するとき

$$u_x(0) = |\varphi_z(z_0)| + |\varphi_{\overline{z}}(z_0)|, \quad u_y(0) = 0, \quad v_x(0) = 0 \quad \text{and} \quad v_y(0) = |\varphi_z(z_0)| - |\varphi_{\overline{z}}(z_0)|$$

が成り立つことが次のようにして分かる．

$$\begin{aligned}
d\tilde{\varphi}(0) &= e^{-i\theta_1}\left\{\varphi_z(z_0)d(e^{-i\theta_2}z) + \varphi_{\overline{z}}(z_0)d\overline{(e^{-i\theta_2}z)}\right\} \\
&= e^{-i(\theta_1+\theta_2)}\varphi_z(z_0)dz + e^{-i(\theta_1-\theta_2)}\varphi_z(z_0)d\overline{z} \\
&= e^{-i\arg\varphi_z(z_0)}\varphi_z(z_0)dz + e^{-i\arg\varphi_{\overline{z}}(z_0)}\varphi_z(z_0)d\overline{z} \\
&= |\varphi_z(z_0)|dz + |\varphi_{\overline{z}}(z_0)|d\overline{z} \\
&= \tilde{\varphi}_z(0)dz + \tilde{\varphi}_{\overline{z}}(0)d\overline{z}
\end{aligned}$$

よって $\tilde{\varphi}_z(0)=|\varphi_z(z_0)|$, $\tilde{\varphi}_{\overline{z}}(0)=|\varphi_{\overline{z}}(z_0)|$ であるから

$$\begin{aligned} u_x(0)+iv_x(0)=&\tilde{\varphi}_z(0)+\tilde{\varphi}_{\overline{z}}(0)=|\varphi_z(z_0)|+|\varphi_{\overline{z}}(z_0)| \\ u_y(0)+iv_y(0)=&\frac{1}{i}\{-\tilde{\varphi}_z(0)+\tilde{\varphi}_{\overline{z}}(0)\}=i\{|\varphi_z(z_0)|-|\varphi_{\overline{z}}(z_0)|\} \end{aligned}$$

が成り立つ.

記号を節約するために, $\tilde{\varphi}$ を φ と書くことにしよう. そうすると最初から $z_0=0$, $\varphi(0)=0$ そして $\varphi(z)=u(z)+iv(z)$

$$A:=u_x(0)>B:=v_y(0)>0, \quad u_y(0)=v_x(0)=0 \tag{A.3}$$

のもとで, C^1-級の幾何学的な K-擬等角写像 φ について

$$D\varphi(0)=\frac{A}{B}\le K$$

を示せばよいことになる.

それでは証明の細部に入る前に, 直観的なあらすじを述べておこう. $r>0$ について Q_r を 0. r, $r+ir$, ir を頂点とする正方形とし, 下のの辺と上の辺を正方形内で結ぶ長さ有限な曲線族に関する極値的長さは 1 であるから $m(Q)=1$ である. また十分小さな全ての $r>0$ について $\varphi(Q_r)$ は (A.3) より漸近的に 0, Ar, $(A+iB)r$, iBr を頂点とする長方形であり対応する極値的長さは漸近的に $\frac{B}{A}$ であるから $m(\varphi(Q_r))$ は漸近的に $\frac{A}{B}$ である. よって極限 $r\searrow 0$ としたとき

$$D_\varphi(0)=\frac{A}{B}=\lim_{r\searrow 0}\frac{m(\varphi(Q_r))}{m(Q_r)}\le K$$

を得る.

それでは証明に取り掛かろう. 十分小さな $r>0$ について写像 $\frac{1}{r}\varphi(rz)$ を考える. まず $z\in Q_1$ に対し一様に $r\to 0$ のとき

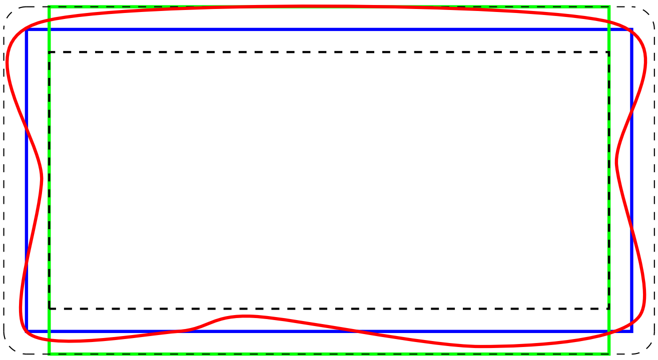
$$\begin{aligned} \frac{1}{r}u(rz)=\frac{1}{r}\{u(rz)-u(0)\}=&\int_0^1\{u_x(rzt)x+u_y(rz)y\}dt \\ =&u_x(0)x+x\int_0^1\{u_x(zt)-u_x(0)\}dt+y\int_0^1\{u_y(zt)-u_y(0)\}dt \\ =&(A+\mathrm{o}(1))x+\mathrm{o}(1)y, \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}v(rz)=\frac{1}{r}\{v(rz)-v(0)\}=&\int_0^1\{v_x(zt)x+v_y(z)y\}dt \\ =&x\int_0^1\{v_x(zt)-v_x(0)\}dt+v_y(0)y+y\int_0^1\{v_y(zt)-v_y(0)\}dt \\ =&(B+\mathrm{o}(1))y+\mathrm{o}(1)x \end{aligned}$$

が漸近的に成り立つ. 従って任意の $\varepsilon>0$ についてある $\delta>0$ を $0<r\le\delta$ ならば以下が成り立つように取れる.

(i) $\left|\frac{1}{r}(\varphi(rz)) - (Ax + iBy)\right| \leq \varepsilon,\ z \in Q_1$.
(ii) $v(0 + iry)$ 及び $v(r + iry)$ は $0 \leq y \leq 1$ において狭義単調増加.



このとき性質 (i) より ∂Q_1 を半時計回りの閉曲線とみなしたとき, この閉曲線の各点の $\frac{1}{r}\varphi(rz)$ による像 (赤線) は線形写像 $Ax + iBy$ による各点の像 (青線) の ε-近傍内にある. よって $t \in [0, 1$ について

$$(1-t)\frac{1}{r}\varphi(rz) + t(Ax + iBy), \quad z = x + iy \in \partial Q_1$$

と置けば連続変形を与える. 従って特に $R = \{(u + iv) : 0 \leq u \leq A,\ 0 \leq v \leq B\}$ 内の各点の $\frac{1}{r}\varphi(r\partial Q_1)$ に関する回転数は ∂R に関する回転数と等しく 1 である. よって R は閉曲線 $\frac{1}{r}\varphi(rQ_1)$ の囲む領域に含まれる.

次に長方形 $R'_\varepsilon == \{(u + iv) : \varepsilon \leq u \leq A - \varepsilon,\ -\varepsilon \leq v \leq B + \varepsilon\}$ (境界を緑線で表している) を考えよう. 性質 (ii) より Q_1 の下の辺の像と R' の左の辺との交点は 1 つだけであり, R' の右の辺との交点も 1 つだけである. そこで Q_1 の下の辺の像の部分弧で R' に含まれるものを ℓ_1 と置く. 同様に Q_1 の上の辺の像の部分弧で R' に含まれるものを ℓ_2 と置く. 記号 Γ で R' の下の辺の 1 点を始点とし, R' の上の辺の 1 点を終点とする R' 内の長さ有限な曲線の全てがなす族とする. このとき $\gamma \in \Gamma$ と ℓ_1 及び γ と ℓ_2 は交点を持つ. 従って γ の部分弧で ℓ_1 内に始点を, ℓ_2 内に終点を持ち, $\frac{1}{r}\varphi(rQ_1)$ に含まれるものが存在する. この事実より 4 辺形 $\frac{1}{r}\varphi(rQ_1)$ 内の長さ有限な曲線で下の辺内の 1 点に始点を持ち, 上の辺内の 1 点に終点を持つもの全てがなす曲線族を Γ_r と置けば, $\Gamma_r < \Gamma$ の関係が成り立つ. よって極値的長さに関する不等式 $\lambda(\Gamma_r) \leq \lambda(\Gamma)$ を得る.

$$m(\varphi(Q_r)) = m\left(\frac{1}{r}\varphi(rQ_1)\right) = m(\Gamma_r) = \frac{1}{\lambda(\Gamma_r} \geq \frac{1}{\lambda(\Gamma)} = \frac{A + 2\varepsilon}{B - 2\varepsilon}$$

が成り立つ. ここで $r \searrow 0$ とし, 左辺の $\liminf$ を取り, しかる後に $\varepsilon \searrow 0$ とすれば

$$\liminf_{r \searrow 0} m(\varphi(Q_r)) \geq \frac{A}{B}$$

が成り立つ. ($m(\varphi(Q_r)) \leq Km(Q_r) = K$ より, この段階で既に証明は完了しているのだが, もう少し先に進むことにする)

今までは $\varphi(Q_r)$ について上下の辺を結んだが, 今度は左右の辺を結ぶように変更した 4 辺形を Q_r^* とすれば, 同様に

$$\liminf_{r \searrow 0} m(\varphi(Q_r^*)) \geq \frac{B}{A}$$

を得る．ここで $m(\varphi(Q_r^*)) = \frac{1}{m(\varphi(Q_r))}$ に注意すれば

$$\limsup_{r \searrow 0} m(\varphi(Q_r)) = \frac{1}{\liminf_{r \searrow 0} m(\varphi(Q_r^*))} \leq \frac{A}{B}$$

が成り立つ．これで $\lim_{r \searrow 0} m(\varphi(Q_r)) = \frac{A}{B}$ が成り立つことが分かった．これと $m(Q_r) = 1$ を合わせると

$$\frac{A}{B} = \lim_{r \searrow 0} m(\varphi(Q_r)) = \lim_{r \searrow 0} \frac{m(\varphi(Q_r))}{m(Q_r)} \leq K$$

が成り立つ． □

Property 1 に引き続き

Theorem 1. *If φ is K-q.c. in a neighbourhood of every point, then it is K-q.c. in Ω.*
の Ahlfors による証明も，一筋縄ではいかない問題を孕んでいる．念の為に定理の主張をもう少し明確に述べれば，次のようになる．

Theorem 1 Ω, Ω' を複素平面内の領域とし $\varphi : \Omega \to \Omega'$ を向きを保つ同相写像とする． このとき φ が局所的に K-q.c. つまり，各 $z_0 \in \Omega$ について，z_0 のある近傍 V で $\overline{Q} \subset V$ を満たす任意の四辺形 Q について $\frac{1}{K}m(Q) \leq m(\varphi(Q)) \leq Km(Q)$ が成り立つようなものが存在すれば，φ は Ω から Ω' への K-q.c. 写像である．

この定理を証明するには $\overline{Q} \subset \Omega$ を満たす四辺形 Q について $m(\varphi(Q)) \geq \frac{1}{K}m(Q)$ を示せばよい．Q を軸平行な長方形に等角に写像してから垂直線で縦に細長い長方形に分割し，これらの長方形に対応する四辺形を Q_j, $j = 1, \ldots, m$ と置くと

$$m(Q) = \sum_{j=1}^{m} m(Q_j), \qquad m(\varphi(Q)) \geq \sum_{j=1}^{m} m(\varphi(Q_j))$$

が成り立つ．今度は像 $\varphi(Q_j)$ を軸平行な長方形に等角に写像し，これらを水平線で分割した小長方形に対応する Q_{jk}, $k = 1, \ldots, n_j$ を考えると

$$\frac{1}{m(Q_j)} \geq \sum_{k=1}^{n_j} \frac{1}{m(Q_{jk})}, \qquad \frac{1}{m(\varphi(Q_j))} = \sum_{k=1}^{n_j} \frac{1}{m(\varphi(Q_{jk}))}$$

が成り立つ．ここで Q の Q_{jk} への分割が十分に細かく，各 Q_{jk} が "φ が K-q.c. であるような近傍" に含まれていれ

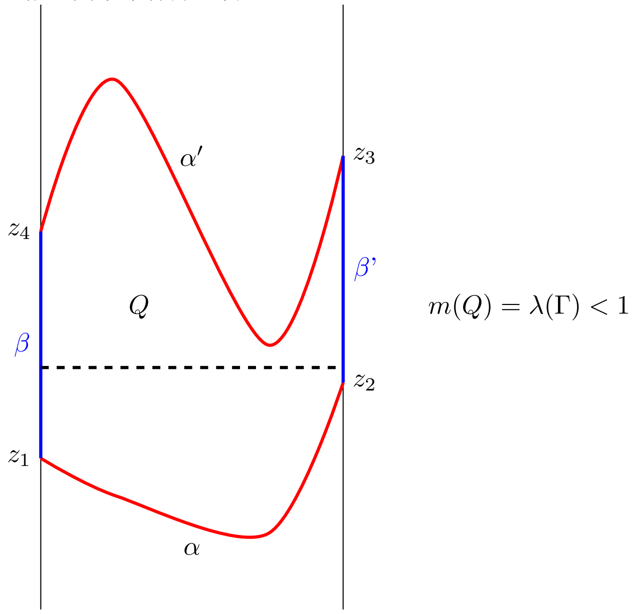
ば $\frac{1}{K}m(Q_{jk}) \leq m(\varphi(Q_{jk}))$ が成り立つので

$$\begin{aligned} m(\varphi(Q)) &\geq \sum_{j=1}^{m} m(\varphi(Q_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n_j} \frac{1}{m(\varphi(Q_{jk}))}} \\ &\geq \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n_j} \frac{K}{m(Q_{jk})}} \geq \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\dfrac{K}{m(Q_j)}} = \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{m} m(Q_j) = \frac{m(Q)}{K} \end{aligned}$$

を得る.

Lectures on Q.C.M. の第 2 版で追加された **編者注 (1)** では宍倉氏によるとして, 上のような $m(\varphi(Q_{jk})) \geq \frac{1}{K}m(Q_{jk})$ が成り立つような近傍に各 Q_{jk} が含まれるように分割を取ることが可能かどうかは自明ではなく証明が必要であると書かれている. うっかりするとこの論理的な gap に気がつかずに読み飛ばしてしまいそうであるが, 確かにここには gap がある. **編者注 (1)** では続いてこのような分割が可能であることを示すには, Chapter III A のタイヒミュラーの極値問題を使用して証明が出来る, 次の事実を利用すればよいとある.

Lemma. Q を z_1, z_2, z_3, z_4 を頂点とする四辺形で z_4 と z_1 を結ぶ弧は直線 $\operatorname{Re} z = 0$ 内の線分 β であり, $\operatorname{Im} z_1 < \operatorname{Im} z_4$ を満たす, また z_2 と z_3 を結ぶ弧は直線 $\operatorname{Re} z = 1$ 内の線分 β' であり $\operatorname{Im} z_2 < \operatorname{Im} z_3$ を満たすとする. また z_1 と z_2 を結ぶ弧 α 及び z_3 と z_4 を結ぶ弧 α' は帯状閉領域 $S = \{0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ に含まれるとする. そして Γ を β, β' 内に始点と終点を持ち $\overline{Q}$ 内の長さ有限な曲線の全てがなす族とする. このとき $\lambda(\Gamma) < 1$ ならば Q は長さ 1 で S の左右を結ぶ開水平線分を含む.



谷口氏による Lectures on Q.C.M. の日本語訳には, **訳者による補足説明 (II-2)** として **Lemma** の仮定を少し強め "$\lambda(\Gamma) < \frac{1}{2}$ が成り立つときに所与の水平線が取れる" に変更すれば, こちらについてはタイヒミュラーの極値問題を使用せず, module の定義のみから簡明な証明ができ, 分割の存在を示すにはこの変更された **Lemma** で十分であると解説されている.

Theorem 1 の証明. $\overline{Q} \subset \Omega$ を満たす四辺形 Q を任意に取り固定する. 各 $z \in \overline{Q}$ について, その近傍 V_z を V_z に φ を制限したとき K-q.c. になるように取る. このとき

$$\overline{Q} \subset \bigcup_{z \in \overline{Q}} V_z$$

は距離空間内の compact 集合 $\overline{Q}$ の開被覆であるから, ある $\varepsilon > 0$ で次の性質を持つものが存在する,

$$E \subset \overline{Q} \text{ and } \operatorname{diam} E < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \exists z \in \overline{Q} \text{ with } E \subset V_z.$$

$\varepsilon > 0$ は開被覆の Lebesgue 数と呼ばれ, 大抵の位相空間論の教科書に解説を見つけることが出来る. (しかしながら教科書を探すまでもなく, その存在を示すことは, 背理法を用いれば容易である.)

Q を座標軸に平行な辺を持つ長方形 R に等角写像し, R の上下の辺を m 等分, 左右の辺を n 等分し, 小長方形 R_{ij}, $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$ に分割する. ただし R_{ij} に対応する Q の小四辺形を Q_{jk} とするとき分割は十分細かく, 全ての j, k について $\operatorname{diam} Q_{jk} < 2^{-1}\varepsilon$ が成り立つようにする. また $m(Q_{jk})$ とは R_{jk} の左右の辺に対応する Q_{jk} の 2 辺を $\overline{Q_{jk}}$ 内で結ぶ長さ有限な曲線に関する極値的長さであるから, 必要ならば m を増やすことにより $m(Q_{jk}) < \frac{1}{K}$ が成り立つとしてよい. このとき $\operatorname{diam} Q_{jk} < \varepsilon$ と合わせると $m(\varphi(Q_{jk})) < 1$ が成り立つことが従う.

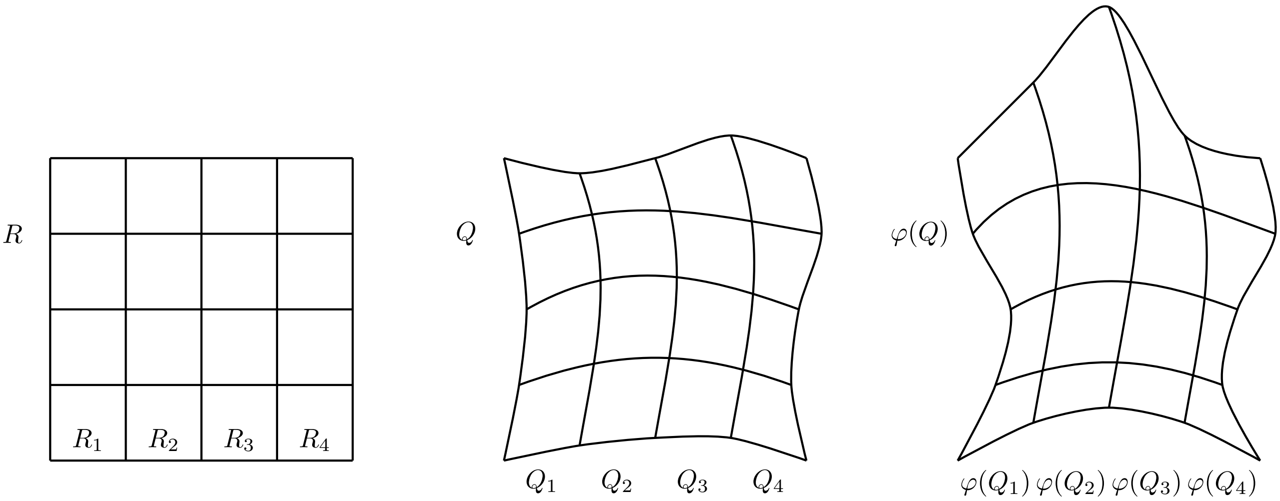
R_j, $j = 1, \ldots, m$ を R の上下の辺を m 等分して出来る上下に細長い長方形とし, Q_j を対応する小四辺形とすると $m(Q)$, $m(Q_j)$ とは, 対応する R, R_j の比 $\frac{\text{横の辺の長さ}}{\text{縦の辺の長さ}}$ であるから

$$(i) \qquad m(Q) = \textstyle\sum_{j=1}^{m} m(Q_j)$$

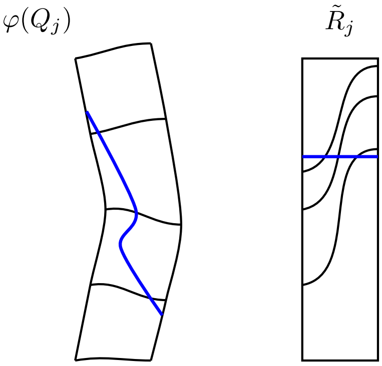
が成り立つ. また Theorem I-D-4 (a) より

$$(ii) \qquad m(\varphi(Q)) \geq \textstyle\sum_{j=1}^{m} m(\varphi(Q_j))$$

が成り立つ.



次に各 $\varphi(Q_j)$ を等角写像により, 座標軸に辺が平行な長方形 $\tilde{R}_j$ に写像し, $\varphi(Q_{jk})$ は $\tilde{R}_{jk}$ に写像されるとする. このとき長方形 $\tilde{R}_j$ は $\tilde{R}_{jk}$, $k=1,\dots,n$ に分割されるが分割線が水平線であることは保証されない. しかしながら $m(\tilde{R}_{jk}) = m(\varphi(Q_{jk})) < 1$ であるから **Lemma** より $\tilde{R}_{jk}$ 内に水平線を ℓ_{jk} を引くことが出来る. そこで, 長方形 $\tilde{R}_j$ をこれらの ℓ_{jk}, $k=1,\dots,n$ により $n+1$ 個の小長方形に分割し, $\tilde{R}'_{jk}$, $k=1,\dots,n+1$ を得たとし, これらに対応する $\varphi(Q_j)$ 内の小四辺形をさらに φ^{-1} で写像した四辺形を $\tilde{Q}_{jk}$, $k=1,\dots,n+1$ とする.



備考) 左図のように $\tilde{R}_j$ を水平線で分割するときに (下の (iii) の等式を成り立たせるためには水平線で分割する必要があることに注意), 水平線の原像 γ が 3 つ以上の $\varphi(Q_{jk})$ と交わる可能性がある. このとき $\varphi^{-1}(\gamma)$ も 3 つ以上の Q_{jk} と交わることになり, $\varphi^{-1}(\gamma)$ は K-q.c. であることが保証された 1 つの近傍に含まれない可能性がある.
実際にはこのようなことが起こらず, R_{jk} 内に水平線が引くことが出来ることを保証するのが $m(\varphi(Q_{jk})) < 1$ と **Lemma** である.

このとき $\varphi(Q_j)$ の分割 $\varphi(\tilde{Q}_j k)$ は水平線によるものであるから

(*iii*)
$$\frac{1}{m(\varphi(Q_j))} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{m(\varphi(\tilde{Q}_{jk}))}$$

が成り立つ. また Theorem I-D-4 (b) より

(*iv*)
$$\frac{1}{m(Q_j)} \geq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{m(\tilde{Q}_{jk})}$$

が成り立つ. 最後に作り方から $\overline{\tilde{Q}_{jk}} \subset \overline{Q_{jk}} \cup \overline{Q_{jk+1}}$ であるから $\operatorname{diam} \overline{\tilde{Q}_{jk}} \leq \operatorname{diam} \overline{Q_{jk}} + \operatorname{diam} \overline{Q_{jk+1}} < \varepsilon$ が従うので

$\frac{1}{K}m(\tilde{Q}_{jk}) \leq m(\varphi(\tilde{Q}_{jk}))$ が成り立つ．よって (iii) と (iv) より

$$\frac{K}{m(Q_j)} \geq K\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{m(\tilde{Q}_{jk})} \geq \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{m(\varphi(\tilde{Q}_{jk}))} = \frac{1}{m(\varphi(Q_j))}$$

となり, 上式の最左辺と最右辺の逆数について $j = 1, \ldots, m$ に関する和を取れば (i), (ii) より

$$\frac{1}{K}m(Q) = \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{m+1} m(Q_j) \leq \sum_{j=1}^{m+1} m(\varphi(Q_j)) \leq m(\varphi(Q))$$

を得る． □

B (解析的定義) $\Longrightarrow$ **A (幾何学的定義)** の証明. $\Omega, \tilde{\Omega}$ を $\mathbb{C}$ 内の領域とし $\varphi : \Omega \to \tilde{\Omega}$ を **B** の意味での K-擬等角写像とする．このとき $\overline{Q} \subset \Omega$ を満たす四辺形 Q について $m(\varphi(Q)) \leq Km(Q)$ を示せばよい．そこで $m(Q) = \frac{b}{a}$ を満たす $a, b > 0$ について軸平行な長方形を $R = \{x + iy : 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b\}$ と置き, R の 4 頂点を Q の 4 頂点に写像する等角写像 $f : R \to Q$ を取る．以下では 1, 2 時限の Lebesgue 測度をそれぞれ $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ と表す．

定義 **B** と **B'** の同値性より φ は局所可積分な超函数の意味での偏導函数を持ち Ω 内のほとんど全ての点で $|\varphi_{\overline{\zeta}}(\zeta)| \leq k|\varphi_\zeta(\zeta)|$ を満たす．ここに $k = \frac{K-1}{K+1})$ である．Lemma 3 より $\tilde{\varphi} := \varphi \circ f$ も $\mathrm{Int}\, R$ 内で局所可積分な超函数の意味での偏導函数を持ち (7) 式が成り立つので

$$\tilde{\varphi}_z = (\varphi_\zeta \circ f)f_z + (\varphi_{\overline{\zeta}} \circ f)\overline{f}_z = (\varphi_\zeta \circ f)f' \quad \tilde{\varphi}_{\overline{z}} = (\varphi_\zeta \circ f)f_{\overline{z}} + (\varphi_{\overline{\zeta}} \circ f)\overline{f}_{\overline{z}} = (\varphi_{\overline{\zeta}} \circ f)\overline{f'}$$

が成り立つ．そして

$$|\tilde{\varphi}_{\overline{z}}(z)| = |\varphi_{\overline{\zeta}} \circ f(z)\overline{f'(z)}| \leq k|\varphi_\zeta \circ f(z)f'(z)| = k|\tilde{\varphi}_z(z)|$$

が $\mathrm{Int}\, R$ 内のほとんど全ての点で成り立つ．再び定義 **B** と **B'** の同値性を用いると $\tilde{\varphi}$ は定義 **B** の意味で $\mathrm{Int}\, R$ 上の K-擬等角写像である．従って $\mathrm{Int}\, R$ において ACL 条件を満たす．そこで R_0 を $\tilde{\varphi}$ が偏微分可能である $\mathrm{Int}\, R$ の点全体とする．R_0 は Borel 可測集合であり $\mathcal{L}_2(\mathrm{Int}\, R \backslash R_0) = 0$ が成り立つ．また Gehring と Lehto の定理により R_0 は $\tilde{\varphi}$ が全微分可能である $\mathrm{Int}\, R$ の点全体と一致する．

ここで各 $y \in (0, b)$ について水平な開弧を $\gamma_y : z = x + iy,\ 0 < x < a$ と置く．また Y を γ_y が局所絶対連続であり R_0 の切り口 $R_0^y := \{x \in (0, a) : x + iy \in R_0\}$ が $\mathcal{L}_1((0, a)\backslash R_0^y) = 0$ を満たす $y \in (0, b)$ の全体とする．そして $\Gamma = \{\gamma_y\}_{y \in Y}$ と置き, $\tilde{\Gamma}$ を四辺形 $\tilde{\varphi}(R) = \varphi(Q)$ の垂直辺のある 2 点を結ぶ局所的に長さ有限な $\tilde{\varphi}(R)$ 内の開弧の全体とする．このとき $\tilde{\varphi}(\Gamma) \subset \tilde{\Gamma}$ が成り立つので $\lambda(\tilde{\Gamma}) \leq \lambda(\tilde{\varphi}(\Gamma))$ が成り立つ．

$\tilde{\rho}$ を $\varphi(\mathrm{Int}\, R)$ 上の非負 Borel 可測函数とし

$$\rho(z) = \begin{cases} \tilde{\rho}(\tilde{\varphi}(z))\{|\tilde{\varphi}_z(z)| + |\tilde{\varphi}_{\overline{z}}(z)|\}, & z \in R_0 \\ 0, & z \in \mathrm{Int}\, R \backslash R_0 \end{cases}$$

と置く．このとき各 $y \in Y$ について

$$\begin{aligned}
L(\tilde{\varphi}\circ\gamma_y, \tilde{\rho}) &= \int_{\varphi\circ\gamma_y} \tilde{\rho}|dw| \\
&= \int_{(0,a)} \tilde{\rho}(\tilde{\varphi}(x+iy))\,|\tilde{\varphi}_x(x+iy)|\;dx \\
&= \int_{(0,a)} \tilde{\rho}(\tilde{\varphi}(x+iy))\,|\tilde{\varphi}_z(x+iy)+\tilde{\varphi}_{\overline{z}}(x+iy)|\;dx \\
&\le \int_{(0,a)} \tilde{\rho}(\tilde{\varphi}(x+iy))\,\{|\tilde{\varphi}_z(x+iy)|+|\tilde{\varphi}_{\overline{z}}(x+iy)|\}\;dx = \int_{(0,a)} \rho(x+iy) = L(\gamma_y, \rho)
\end{aligned}$$

が成り立つ．これより

$$L(\tilde{\varphi}(\Gamma), \tilde{\rho}) = \inf_{y\in Y} L(\tilde{\varphi}\circ\gamma_y, \tilde{\rho}) \le \inf_{y\in Y} L(\gamma_y, \rho) = L(\Gamma, \tilde{\rho})$$

が成り立つ．

次に $A(\tilde{\rho})$ の評価を行うために

$$\nu(B) := \mathcal{L}_2(\tilde{\varphi}(B)) = \int_{\tilde{\varphi}(B)} d\mathcal{L}_2(w), \quad B \in \mathcal{B}(\mathrm{Int}\,R)$$

と置く．このとき ν は可測空間 $(\mathrm{Int}\,R, \mathcal{B}(\mathrm{Int}\,R))$ 上の有限測度である．ν を $\mathcal{L}_2$ に関し絶対連続測度と特異な測度に分解し, 絶対連続な方の測度の $\mathcal{L}_2$ に関する Radon-Nikodim 微分を D_ν と置くと, D_ν は $\mathcal{L}_2$ に関し可積分であり

$$\int_B D_\nu(z)d\mathcal{L}_2(z) \le \nu(B) = \int_{\tilde{\varphi}(B)} d\mathcal{L}_2(w), \quad B \in \mathcal{B}(\mathrm{Int}\,R)$$

が成り立つ．この不等式より $\mathrm{Int}\,\tilde{\varphi}(R)$ の任意の非負 Borel 可測函数について

$$\int_{\mathrm{Int}\,R} h\circ\tilde{\varphi}(z)D_\nu(z)d\mathcal{L}_2(z) \le \int_{\mathrm{Int}\,\tilde{\varphi}(R)} h(w)\,d\mathcal{L}_2(w),$$

が成り立つことが分かる．証明は Borel 可測な単函数について不等式を示してから単調収束定理を用いればよい．

さて $\tilde{\varphi}$ が全微分可能な点 $z \in IntR$ において D_ν は $\tilde{\varphi}$ の Jacobian に一致し, $D_\nu(z) = |\tilde{\varphi}_z(z)|^2 - |\tilde{\varphi}_{\overline{z}}(z)|^2$ であるから

$$\begin{aligned}
A(\tilde{\rho}) &= \int_{\mathrm{Int}\,\tilde{\varphi}(R)} \tilde{\rho}(w)\,d\mathcal{L}_2(w) \\
&\ge \int_{\mathrm{Int}\,R} (\tilde{\rho}\circ\tilde{\varphi}(z))^2\,D_\nu(z)\,d\mathcal{L}_2(z) \\
&= \int_{\mathrm{Int}\,R} (\tilde{\rho}\circ\tilde{\varphi}(z))^2\left\{|\tilde{\varphi}_z(z)|^2 - |\tilde{\varphi}_{\overline{z}}(z)|^2\right\}\,d\mathcal{L}_2(z)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $|\tilde{\varphi}_z(z)| + |\tilde{\varphi}_{\overline{z}}(z)| > 0$ または $|\tilde{\varphi}_z(z)| + |\tilde{\varphi}_{\overline{z}}(z)| = 0$ のどちらの場合でも

$$|\tilde{\varphi}_z(z)|^2 - |\tilde{\varphi}_{\overline{z}}(z)|^2 \left(= \{|\tilde{\varphi}_z(z)| + |\tilde{\varphi}_{\overline{z}}(z)|\}^2 \frac{|\tilde{\varphi}_z(z)| - |\tilde{\varphi}_{\overline{z}}(z)|}{|\tilde{\varphi}_z(z)| + |\tilde{\varphi}_{\overline{z}}(z)|} \right) \ge \frac{1}{K}\{|\tilde{\varphi}_z(z)| + |\tilde{\varphi}_{\overline{z}}(z)|\}^2$$

が成り立つことより

$$A(\tilde{\rho}) \geq \frac{1}{K}\int_{\mathrm{Int}\,R} (\tilde{\rho}\circ\tilde{\varphi}(z))^2 \left\{|\tilde{\varphi}_z(z)| + |\tilde{\varphi}_{\overline{z}}(z)|\right\}^2 \, d\mathcal{L}_2(z) = \frac{1}{K}\int_{\mathrm{Int}\,R} \rho(z)^2 \, d\mathcal{L}_2(z) = \frac{1}{K}A(\rho)$$

が成り立つ．以上より

$$\begin{aligned} m(\varphi(Q)) = m(\tilde{\varphi}(R)) = \lambda(\tilde{\Gamma}) &\leq \lambda(\tilde{\varphi}(\Gamma)) \\ &= \sup_{0<A(\tilde{\rho})<\infty} \frac{L(\tilde{\varphi}(\Gamma),\tilde{\rho})^2}{A(\tilde{\rho})} \\ &\leq K \sup_{0<A(\rho))<\infty} \frac{L(\Gamma,\rho)^2}{A(\rho)} \leq Km(R) = Km(Q) \end{aligned}$$

を得る． □

付録 A

問題の解答

Problem A.1

$$E = u_x^2 + v_x^2, \quad F = u_x u_y + v_x v_y, \quad G = u_y^2 + v_y^2$$

に注意する．

$$D_f = \frac{|f_z| + |f_{\overline{z}}|}{|f_z| - |f_{\overline{z}}|} = \frac{|f_z|^2 + |f_{\overline{z}}|^2 + 2|f_z||f_{\overline{z}}|}{|f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2}$$

と変形できる．ここで

$$\begin{aligned} 4\{|f_z|^2 \pm |f_{\overline{z}}|^2\} =& |f_x - if_y|^2 \pm |f_x + if_y|^2 \\ =& |u_x + iv_x - i(u_y + iv_y)|^2 \pm |u_x + iv_x + i(u_y + iv_y)|^2 \\ =& |(u_x + v_y) + i(v_x - u_y)|^2 \pm |(u_x - v_y) + i(v_x + u_y)|^2 \\ =& (u_x + v_y)^2 + (v_x - u_y)^2 \pm (u_x - v_y)^2 + (v_x + u_y)^2 \\ =& u_x^2 + v_y^2 + 2u_x v_y + v_x^2 + u_y^2 - 2v_x u_y \\ & \pm (u_x^2 + v_y^2 - 2u_x v_y + v_x^2 + u_y^2 + 2v_x u_y) \end{aligned}$$

よって

$$|f_z|^2 + |f_{\overline{z}}|^2 = \frac{1}{2}\{u_x^2 + v_y^2 + v_x^2 + u_y^2\} = \frac{1}{2}(E + G)$$

であり

$$|f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 = u_x v_y - v_x u_y = J_f$$

である．ここで

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= (u_x^2 + v_x)^2 (u_y^2 + v_y^2) - (u_x u_y + v_x v_y)^2 \\ &= u_x^2 u_y^2 + u_x^2 v_y^2 + v_x^2 u_y^2 + v_x^2 v_y^2 - \{u_x^2 u_y^2 + 2u_x u_y v_x v_y + v_x^2 v_y^2\} \\ &= (u_x v_y - v_x u_y)^2 = J_f^2 \end{aligned}$$

であるから

$$\sqrt{EG - F^2} = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2$$

以上より等式 (A.19) を示すには

$$4|f_z||f_{\overline{z}}| = \sqrt{(E-G)^2+4F^2}$$

を示せば良い．これは

$$\begin{aligned}
&(4|f_z||f_{\overline{z}}|)^2\\
=&|(f_x - if_y)(f_x + if_y)|^2\\
=&|f_x^2 + f_y^2|^2\\
=&|(u_x+iv_x)^2+(u_y+iv_y)^2|^2\\
=&|u_x^2 - v_x^2 + u_y^2 - v_y^2 + 2i(u_xv_x + u_yv_y)|^2\\
=&(u_x^2-v_x^2)^2 + (u_y^2-v_y^2)^2 + 2(u_x^2-v_x^2)(u_y^2-v_y^2) + 4(u_xv_x+u_yv_y)^2\\
=&(u_x^2+v_x^2)^2 + (u_y^2+v_y^2)^2 - 2(u_x^2+v_x^2)(u_y^2+v_y^2) + 2(u_x^2+v_x^2)(u_y^2+v_y^2) + 2(u_x^2-v_x^2)(u_y^2-v_y^2) + 8u_xv_xu_yv_y\\
=&\{u_x^2+v_x^2-(u_y^2+v_y^2)\}^2 + 4(u_x^2u_y^2 + 2u_xv_xu_yv_y + v_x^2v_y^2)\\
=&\{u_x^2+v_x^2-(u_y^2+v_y^2)\}^2 + 4(u_xu_y+v_xv_y)^2 = (E-G)^2+4F^2
\end{aligned}$$

より従う．

Problem B.1

もしそのような等角写像 f が存在するとすれば, 鏡像の原理より各辺に沿っての解析接続を行なっていけば, 最終的に f は $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への等角写像に拡張され, 適当な正の数 A, B について $|f(z)| \le A|z| + B$, $z \in \mathbb{C}$ を満たす．従って $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ と展開すれば $n \ge 2$ について

$$|a_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right| \le \frac{Ar+B}{r^n} \to 0, \quad r \to \infty$$

である．よって f は $f(z) = a_0 + a_1 z$ と表されることになり, 拡大・縮小, 回転, 平行移動の合成である．従って正方形の Q の像 R は正方形となるが, これは矛盾である．

Problem B.3

はじめに Cauchy-Schwarz の不等式を用いた

$$= \iint_R \sqrt{\frac{|f_z|+|f_{\overline{z}}|}{|f_z|-|f_{\overline{z}}|}}\sqrt{|f_z|^2-|f_{\overline{z}}|^2}\,dxdy \le \sqrt{\iint_R \frac{|f_z|+|f_{\overline{z}}|}{|f_z|-|f_{\overline{z}}|}\,dxdy}\sqrt{\iint_R (|f_z|^2-|f_{\overline{z}}|^2)\,dxdy}$$

の部分で等号が起こるのはある定数 $c > 0$ により

$$\sqrt{\frac{|f_z|+|f_{\overline{z}}|}{|f_z|-|f_{\overline{z}}|}} = c\sqrt{|f_z|^2-|f_{\overline{z}}|^2}$$

となる場合のみであり, これより

$$(|f_z|-|f_{\overline{z}}|)(z) = \text{const.} \tag{.1}$$

が分かる．次に

$$a'b \le \int_0^b \left\{ \int_0^a (|f_z(x+iy)| + |f_{\overline{z}}(x+iy)|)\,dx \right\} dy$$

において等号が起こるのは $\int_0^a (|f_z(x+iy)| + |f_{\overline{z}}(x+iy)|)\,dx$ の y に関する連続性より，全ての $y \in [0,a]$ について

$$a' = \int_0^a (|f_z(x+iy)| + |f_{\overline{z}}(x+iy)|)\,dx$$

が起こるときのみ．これより (B.1) において等号が起こる条件を求めていけば

$$\begin{aligned}
a' =& u(a+iy) - u(0+iy) \\
=& \int_0^a u_x(x+iy)\,dx \\
\le& \int_0^a |u_x(x+iy)|\,dx \quad (\text{等号は } u_x(x+iy) \ge 0 \text{ の時のみ}) \\
\le& \int_0^a |u_x(x+iy) + iv_x(x+iy)|\,dx \quad (\text{等号は } v_x(x+iy) = 0 \text{ の時のみ}) \\
=& \int_0^a |f_z(x+iy) + f_{\overline{z}}(x+iy)|\,dx \\
\le& \int_0^a (|f_z(x+iy)| + |f_{\overline{z}}(x+iy)|)\,dx \quad \left(\text{等号は } \frac{f_{\overline{z}}(x+iy)}{f_z(x+iy)} \ge 0 \text{ の時のみ}\right)
\end{aligned}$$

となる．以上より

(.2) $$u_x(x+iy) \ge 0$$

(.3) $$v_x(x+iy) = 0$$

(.4) $$\frac{f_{\overline{z}}(x+iy)}{f_z(x+iy)} \ge 0$$

が成り立つ．

さて $v_x = 0$ より

$$\begin{aligned}
f_z =& \frac{1}{2}(f_x - if_y) = \frac{u_x + v_y}{2} + i\frac{v_x - u_y}{2} == \frac{u_x + v_y}{2} - i\frac{u_y}{2} \\
f_{\overline{z}} =& \frac{1}{2}(f_x + if_y) = \frac{u_x - v_y}{2} + i\frac{v_x + u_y}{2} = \frac{u_x - v_y}{2} + i\frac{u_y}{2}
\end{aligned}$$

となる．もし $u_y \neq 0$ ならば両者の虚部は符号が異なることになり，$\frac{f_{\overline{z}}(x+iy)}{f_z(x+iy)} \ge 0$ となることはないので，従って

(.5) $$u_y(x+iy) = 0$$

が分かる．また $J_f = u_x v_y - u_y v_x = u_x v_y > 0$ と $u_x \ge 0$ より

(.6) $$u_x > 0, \quad v_y > 0$$

が分かる．従って

$$f_z = \frac{u_x + v_y}{2} > 0,$$

であり $\frac{f_{\overline{z}}(x+iy)}{f_z(x+iy)} \geq 0$ より

$$f_{\overline{z}} = \frac{u_x - v_y}{2} \geq 0$$

である．さらに

$$|f_z| - |f_{\overline{z}}| = \frac{u_x + v_y}{2} - \frac{u_x - v_y}{2} = v_y = \mathrm{const.}$$

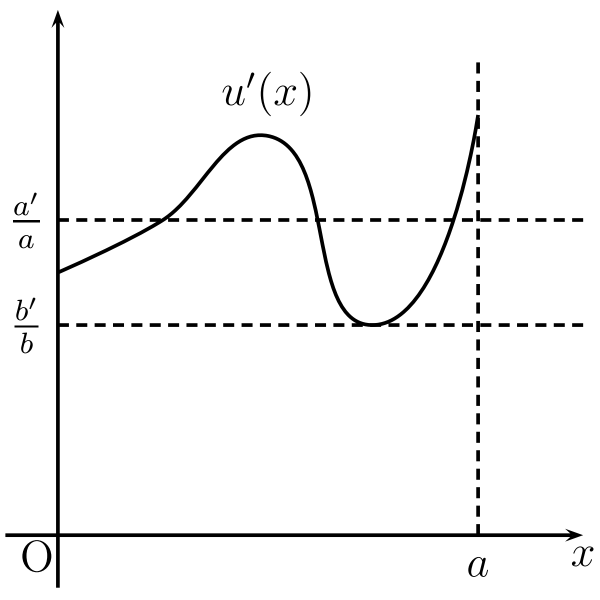
であるから, $v_x = 0$ と合わせて, ある定数 $c > 0$ について $v = cy$ と表せるが, $v(ib) = b'$ より $c = \frac{b'}{b}$ である．また u についても $u_y = 0$ より $u(x+iy) = u(x)$ と x のみの函数である．以上より

$$f(x+iy) = u(x) + i\frac{b'}{b}y \tag{.7}$$

と表せる．ただし $u(x)$ については $u(0) = 0$, $u(a) = a'$, $u_x - v_y = u'(x) - \frac{b'}{b} \geq 0$ を満たす必要がある．これらを u' についての条件に書きなおせば

$$u'(x) \geq \frac{b'}{b}, \quad \int_0^a u'(x)\,dx = a'$$

であるが, このような u が存在することは $\frac{a'/b'}{a/b} > 1$ より $\frac{a'}{a} < \frac{b'}{b}$ となることより分かる．



逆に $f(x+iy)=u(x)+i\frac{b}{b'}y$ と表せる時, $f\in\tilde{\mathcal{F}}$ であり,

$$f_z=\frac{1}{2}(f_x-if_y)=\frac{1}{2}\left(u'(x)+\frac{b'}{b}\right), f_{\overline{z}}=\frac{1}{2}(f_x+if_y)=\frac{1}{2}\left(u'(x)-\frac{b'}{b}\right)$$

となるので

$$|f_z|+|f_{\overline{z}}|=u'(x),\quad |f_z|-|f_{\overline{z}}|=\frac{b'}{b}$$

となり

$$D_f(z)=\frac{b}{b'}u'(x)$$

さらには

$$\frac{1}{ab}\iint_R D_f(z)\,dxdy=\frac{1}{ab}\frac{b}{b'}\int_0^b\left\{\int_0^a u'(x)\,dy\right\}dx=\frac{1}{ab'}\int_0^b(u(a)-u(0))dx=\frac{a'b}{ab'}=\frac{a'/b'}{b/a}$$

が成り立つ.

最後に

$$\frac{a'/b'}{b/a}=\sup_{z\in R}D_f(z)$$

が成り立つための条件は,

$$\frac{a'/b'}{b/a}\le\frac{1}{ab}\iint_R D_f(z)\,dxdy\le\sup_{z\in R}D_f(z)\frac{a'/b'}{b/a}$$

より, 上で求めた $\frac{a'/b'}{b/a}=\frac{1}{ab}\iint_R D_f(z)\,dxdy$ が成り立つ条件に $D_f(z)$ が正の定数という条件を加えたものである. これより $u'(x)$ は定数となり, $u(a)=a'$, $u(0)=0$ より $u(x)=\frac{a'}{a}x$ が分かり,

$$f(z)=\frac{a'}{a}x+i\frac{b'}{b}y=\frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}\right)z+\frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a}-\frac{b'}{b}\right)z\overline{z}$$

となる.

Problem C.1
$a=0$ または $z_0=0$ の時は明らかであるから, $a\neq 0\neq z_0$ とする. 1 次 (分数) 変換 τ を

$$\tau(z)=\frac{z+a}{1+\overline{a}z}$$

で定義し, $r=|z_0|$ と置く. また直線 ℓ を $\ell: z=\frac{a}{|a|}t$, $-\infty<t<\infty$ と置き, ℓ' を τ による ℓ の像とする. このとき $\tau(-a)=0$, $\tau(-\overline{a}^{-1})=\infty$ より ℓ' は原点を通る直線である. また ℓ と直交する円 $\partial\mathbb{D}(0,r)$ の像は ℓ' と直交する円である. 従って $\max_{|z|=r}|\tau(z)|$, $\min_{|z|=r}|\tau(z)|$ を attain する点は ℓ と $\partial\mathbb{D}(0,r)$ の交点, つまり $\pm\frac{a}{|a|}r$ である.

$$\tau\left(\frac{a}{|a|}r\right)=\frac{a}{|a|}\frac{r+|a|}{1+|a|r},\quad \tau\left(-\frac{a}{|a|}r\right)=-\frac{a}{|a|}\frac{r-|a|}{1-|a|r}$$

より $|z|=r(=|z_0|)$ の時に

$$\frac{|r-|a||}{1-|a|r}\le\left|\frac{z+a}{1+\overline{a}z}\right|\le\frac{r+|a|}{1+|a|r}=\frac{|z_0|+|a|}{1+|a||z_0|}$$

となり, これより特に

$$\frac{||z_0|-|a||}{1-|a||z_0|} \le \left|\frac{z_0+a}{1+\bar{a}z_0}\right| \le \frac{|z_0|+|a|}{1+|a||z_0|}$$

が従う.

References

[1] L. V. Ahlfors, Conformal Invariants, McGraw-Hill, New York, 1973.

[2] L. V. Ahlfors, Lectures on Quasiconformal Mappings, Wadsworth, Monterey, 1987.

[3]

[4]

[5] S. Lojasiewicz, An Intorduction to the Theory of Real Functions, Jhon Wiley & Sons, New York, 1988.

[6] M. Ohtsuka, Dirichlet Problem, Extremal Length and Prime Ends, Van Nostland, New Yorkm 1970.

[7] 吹田信之, 近代函数論 II, 森北出版, 1977.