第1章　Carathéodory の核収束定理

$f_n(n=1,2,\ldots)$ を $\mathbb{D}$ 上の正則単葉函数とし, $f_n(0)=0$, $f_n'(0)>0$ を満たすとする．また $D_n=f(\mathbb{D})$ とおく．このとき函数列 $\{f_n\}_n^\infty$ が広義一様収束する為の必要十分条件を領域の列 $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ に関する条件で記述するのが Carathéodory Kernel Convergence Thoerem である. Pommrenke [18] と Duren [8] 2 つの本を参考にしたが, ここでは単連結に止まらない一般の領域への拡張を考えてみた.

1.1　Kernel Convergence

$\{B_n\}$ を $\mathbb{C}$ 内の集合の列とする. 集合論 (or 測度論) では

$$B_* = \liminf_{n\to\infty} B_n =: \bigcup_{k=1}^\infty \bigcap_{n=k}^\infty B_n, \quad D^* = \limsup_{n\to\infty} B_n =: \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=k}^\infty B_n$$

つまり, ある番号以降全ての n について B_n に属する点の全体を B_* とし, 無数の n について B_n に属する点の全体を B^* とおく．このとき $B_*\subset B^*$ が成り立つが, 特に $B_*=B^*$ が成り立つならば, 集合列 $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ は $B_*=B^*$ に収束するという.

この集合論的な定義を採用すると, 正則函数の列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ の収束と, それらの像 $D_n=f_n(\mathbb{D})$ よりなる領域の列 $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ の収束の関係を調べるには都合が悪い．なぜならば $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ についてたとえ $D_*=D^*$ が成り立っても, $D_*=D^*$ が領域であることも連結であることも保証されないが, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ の広義収束極限 f は正則であるから, その像 $f(\mathbb{D})$ は 1 点よりなるか, または領域 (= 連結開集合) である. そこでもう位相的な性質を加味した収束の定義が必要である.

Definition 1.1.1 *Let $w_0\in\mathbb{C}$ and assume that $w_0\in D_n$ for all n. The kernel D of $\{D_n\}$ with respect to w_0 is defined as the set consisiting of w_0 together with all points $w\in\mathbb{C}$ having the following property:*

(∗)　*there exists a domain H with w_0, $w\in H$ such that*
$H\subset D_n$ for all sufficiently large n.

If there are no such points $D=\{w_0\}$. Otherwise the kernel is a domain $\subset\mathbb{C}$ which contain w_0. In either case, the sequnce $\{D_n\}$ is said to converge its kernel D if every subsequnce of $\{D_n\}$ has the same kernel. We denote the lernel of $\{D_n\}$ with respect to w_0 by $\mathrm{Ker}\,(\{D_n\}, w_0)$.

Example 1.1.2 $\{D_n\}$ の *kernel* を D とする. $D\neq\{0\}$ ならば D は $\mathit{Int}\,D_*$ の w_0 を含む連結成分に含まれる．しかし逆は成り立たない. 例えば $\{p_n\}$ を区間 $(-1,1)$ 内の全ての有理点に番

号をつけたものとし

$$
\begin{aligned}
D_0 &= \{z = x + iy : |x|, |y| < 1\} \\
\ell_n &= \{z = x + iy : x = p_n, -1 < y \leq 1 - 1/n\} \\
D_n &= D_0 - \ell_n
\end{aligned}
$$

とおくと任意の $z = x + iy \in D_0$ について x が無理数ならば $z \in D_n\ \forall n \geq 1$. また x が有理数ならば $p_N = x$ となる N をとれば$n \geq N$ なる n について $z \in D_n$ よって $D_0 \subset D_* \subset D^* \subset D_0$ より $D_0 = D_* = D^*$ である．しかるに $\{D_n\}$ の 0 に関する *kernel* D は $D = \{0\}$ である．これは $w \in D$, $w \neq 0$ が存在すると仮定するとある *domain* H と $N \in \mathbb{N}$ で $0, w \in H$ で $H \subset D_n$ $\forall n \geq N$ となるものが存在するが, $\{\ell_n\}$ の作り方から $\ell_n \cap H \neq \emptyset$ となる n が無数にあることになり矛盾である.

上記の example にもかかわらず $\{D_n\}$ に単調性があれば, $\{D_n\}$ の kernel と D_* とに関係がある.

Proposition 1.1.3 $\{D_n\}$ が増加列ならば任意の $w_0 \in D_1$ について $\mathrm{Ker}\,(\{D_n\}, w_0) = D_* = D^* = \cup_{n=1}^{\infty} D_n$ となり, $D_n \to \mathrm{Ker}\,(\{D_n\}, w_0)$ が *kernel convergence* の意味で成り立つ.

Proof.　明らか

Proposition 1.1.4 $\{D_n\}$ が減少列とし $w_0 \in \cap_{n=1}^{\infty} D_n$ とする．このとき $D_* = D^*$ であり, さらに $w_0 \in \mathit{Int}\, D_*$ ならば $\mathrm{Ker}\,(\{D_n\}, w_0) D$ は w_0 を含む $\mathit{Int}\, D_*$ の連結成分と一致する．また $w_0 \notin \mathit{Int}\, D_*$ ならば $\mathrm{Ker}\,(\{D_n\}, w_0) = \{w_0\}$ である.

Proof.　$D_* = D^*$ は明らか.

$w_0 \notin \mathrm{Int}\, D_*$ とする．このとき 任意の w_0 を含む領域 H と任意の $N \in \mathbb{N}$ について $H - D_n \neq \emptyset$ となる $n \geq N$ が存在する．よって $D = \{w_0\}$.

こんどは $w_0 \in \mathrm{Int}\, D_*$ とする．$w_0 \in H$ で $H \subset D_n$ for all sufficiently large n となる領域 H は明らかに $H \subset \mathrm{Int}\, D_*$ よって G を $\mathrm{Int}\, D_*$ の w_0 を含む連結成分とおけば, G は w_0 を含み $\mathrm{Int}\, D_*$ に含まれる最大の領域ゆえ, $D \subset G$. 逆に G は $\{D_n\}$ の減少性より明らかに $G \subset D_n$ for all $n \in \mathbb{N}$ これより任意の $w \in G$ は D に属すことがわかり $G \subset D$

Example 1.1.5 D_n を $\mathbb{C}$ から実軸上の区間 $[0, +\infty)$ と単位円周上の閉円弧 $\{e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi - 1/n\}$ を除いた領域とすると 0 に関する *kernel* D は $\mathbb{D}$ であるが, 他方 D_* D^* はともに $\mathbb{C} - [1, \infty) \cup \partial\mathbb{D}$ に一致する.

次に $D_n \to D$ の必要十分条件を与える．これは Pommerenke [18] の p.31 Problem 3 から得ている.

Theorem 1.1.6 *Let* $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ *be a sequnce of domains in* $\mathbb{C}$ *with* $w_0 \in D_n$*, and let* D *be a domain in* $\mathbb{C}$ *with* $w_0 \in D$*. Then* $D_n \to D$ *in the sense of kernel convergence with respect to* w_0 *if and only if the following two condtions are satrisfied:*

(i) every compact subset K *of* D *is contained in* D_n *for all sufficiently large* n*;*

(ii) for every $c \in \partial D$ there esists a sequence $\{c\}$ with $c_n \in D_n$ and $c_n \to c (n \to \infty)$.

Proof. **必要性.** $D_n \to D$ とする．各 $w \in K$ について kernel convergence の定義における $(*)$ の性質を持つ, $N(w) \in \mathbb{N}$ と領域 $H(w)$ をとる．K は compact ゆえこのような H の有限個で K を cover できる．つまり $K \subset \bigcup_{j=1}^{J} H(w_j)$ とできる．このとき $N = \max\{w_1, \ldots, w_J\}$ とおけば $K \subset \bigcup_{j=1}^{J} H(w_j) \subset D_n$ for $n \geq N$ つまり (i) が成り立つ.

(ii) を示す為にまず c の任意の近傍 U についてある $N \in \mathbb{N}$ で $U - D_n \neq \emptyset$ for all $n \geq N$ となるものが存在することを背理法により示す．上の性質を持つ N が存在しないとすると $n_j \to \infty$ で $U - D_{n_j} = \emptyset$ となるものがとれる．これより U の各点が $\operatorname{Ker}(\{D_{n_j}\}, w_0)$ に属さないことになる．$c \in \partial D$ より $w_1 \in U \cap D$ が存在するが, 特に $w_1 \notin \operatorname{Ker}(\{D_{n_j}\}, w_0)$. kernel convergence とは $\{D_n\}$ の任意の部分列が同じ kernel を持つことであったから $w_1 \notin \operatorname{Ker}(\{D_{n_j}\}, w_0) = D$ となり矛盾.

次に各 j について $U = \mathbb{D}(c, 1/j)$ としてこの U に対しての N を $N(j)$ とおく．適当に取り直すことにより $N(0) < N(1) < N(2) < \cdots$ としてよい．$n = 1, \ldots, N(1) - 1$ については $c_n \in \partial D_n$ は適当にとる．$n = N(1), \ldots, N(2) - 1$ については $c'_n \in \mathbb{D}(c, 1/j) - D_n$ をとり, $c'_n \in \mathbb{C} - D_n$ と $w_1 \in D_n$ を結ぶ線分をとるとこの中に ∂D_n の点 c_n が少なくとも 1 つ存在する．以下同様に $N(j) \leq nN(j+1) - 1$ についてこのようにして次々に $c_n \in \mathbb{D}(c, 1/j)$ を取っていけばよい.

十分性. こんどは (i), (ii) が成り立つと仮定する．まず $D \subset \operatorname{Ker}(\{D_n\}, w_0)$ を示す．任意の $w_1 \in D$ について領域 H を $w_0, w_1 \in H$ かつ $\bar{H}$ は compact で $\bar{H} \subset D$ となるようにとる．このとき (i) より $\bar{H} \subset D_n$ for all sufficiently large n. これは $w_1 \in \operatorname{Ker}(\{D_n\}, w_0)$ を示す.

次に $w_1 \notin D$ を任意にとる．このとき任意の領域 H with $w_0, w_1 \in H$ $w_0 \in D$ で $w_1 \notin D$ よりについて, H は $c \in \partial D$ を含む. (ii) より $c_n \partial D_n$ を $c_n \to c$ がとれるが, これは kernel convergence の定義における性質 (*) をもつ H が存在しないことを意味する．よって $w_1 \notin \operatorname{Ker}(\{D_n\}, w_0)$. つまり $\operatorname{Ker}(\{D_n\}, w_0) \subset D$ である.

以上より (i), (ii) をみたせば $D = \operatorname{Ker}(\{D_n\}, w_0)$ が示された． ここで $\{D_n\}$ と D が性質 (i), (ii) をみたせば $\{D_n\}$ の任意の部分列 $\{D_{n_\nu}\}$ と D も性質 (i), (ii) をみたす．従って $D = \operatorname{Ker}(\{D_{n_\nu}\}, w_0)$ となり, 任意の部分列は同一の kernel D をもつから $D_n \to D$ が成り立つ.

1.2 Sequence of univalent functions

各 f_n が univalent の場合は $f_n \to f$ 広義一様と $f_n(\Omega) \to f(D)$ in the sense of kernel convergence は同値となる．この結果は Carathéodory Convergence Theorem と呼ばれるがここでは 2 つの Theorem に分けて述べる.

Theorem 1.2.1 *Let $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of univalent analytic functions in $\mathbb{D}$ such that $f_n \to f$ uniformly on each compact subset of $\mathbb{D}$ and $w_0 = f_n(0)$ for all n. Then $\operatorname{Ker}(\{f_n(\mathbb{D})\}, w_0) = f(\mathbb{D}) \neq \mathbb{C}$. and $f_n(\mathbb{D}) \to f(\mathbb{D})$ in the sense of kernel convergence with respect to w_0. Furthermore if f is not constant, then f is univalent in $\mathbb{D}$ and $f_n^{-1} \to f^{-1}$ uniformly on each compact subset of $\operatorname{Ker}(\{f_n(\mathbb{D})\}, w_0)$*

Proof. 　f は univalent or constant ゆえどちらにしても $f(\mathbb{D}) \neq \mathbb{C}$ である.

Step 1 初めに $f(\mathbb{D}) \subset \mathrm{Ker}\,(\{f_n(\mathbb{D})\}, w_0)$ を示す. f が constant ならば $f(\mathbb{D}) = \{w_0\}$ であるが kernel の定義より $w_0 \in \mathrm{Ker}\,(\{f_n(D)\}, 0)$ であるから, $f(\mathbb{D}) \subset \mathrm{Ker}\,(\{f_n(\mathbb{D})\}, w_0)$ が成り立つ.

次に f は univalent とする. 任意の $w_1 \in f(\mathbb{D})$ について $f(z_1) = w_1$, $|z_1| < r < 1$ となる $z_1 \in \mathbb{D}$ と r をとる. このとき $H = \{f(z) : |z| < r\}$ について $H \subset f_n(\mathbb{D})$ for all sufficiently large n が成り立つことを背理法で示せば Step 1 の証明は終わる. これが成り立たないとすると $n_k \to \infty$ と $w_k \in H - f_{n_k}(\mathbb{D})$ がとれる. 必要ならば部分列をとることにより, $w_k \to w^* \in \bar{H}$ と仮定して良い. このとき $\{f_{n_k}(z) - w_k\}$ は零点を持たないから, 極限函数 $f(z) - w^*$ は $\equiv 0$ かやはり零点を持たない. f は univalent ゆえ前者の場合は起こり得ない. 後者の場合は $w^* \in \bar{H} \subset f(\mathbb{D})$ に矛盾する.

Remark 1.2.2 この *Step 1* において f_n が *univalent* である必要は無い. 後節で一般化を考える.

Step 2 $\mathrm{Ker}\,(\{f_n(D)\}, w_0) \subset f(\mathbb{D})$ を示す. $\mathrm{Ker}\,(\{f_n(\mathbb{D})\}, w_0) = \{w_0\}$ ならば $w_0 = \lim f_n(0) = f(0) \in f(\mathbb{D})$ より $\mathrm{Ker}\,(\{f_n(\mathbb{D})\}, w_0) \subset f(\mathbb{D})$.

今度は $\mathrm{Ker}\,(\{f_n(\mathbb{D})\}, w_0) \neq \{w_0\}$ とする. $w_0 \in f(\mathbb{D})$ については前と同様にしてわかる. 任意の compact set $E \subset \mathrm{Ker}\,(\{f_n(\mathbb{D})\}, w_0)$ について domain H と $N \in \mathbb{N}$ を $\{w_0\} \cup E \subset H$ で $H \subset f_n(\mathbb{D})$ for all $n \geq N$ となるようにとれる. $n \geq N$ について $\varphi_n = {f_n}^{-1}|_H$ とおくと φ_n は H で analytic で $|\varphi_n(z)| < 1$ for $z \in H$ より normal family をなす. $\varphi_{n_\nu} \to \varphi$ loc. unif. in H となる $\{\varphi_{n_\nu}\}$, φ をとる. このとき $\varphi_n(w_0) = 0$ より最大値の原理から $|\varphi(w)| < 1$ for all $w \in H$ である. 特に任意の $w_1 \in H$ について $z_1 = \varphi(w_1)$ とおくと $z_1 \in \mathbb{D}$ である. ここで $f(z_1) = w_1$ であることを示そう. これが示されれば $\varphi = f^{-1}|H$ と $H \subset f(\mathbb{D})$ がわかる.

任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を $|f(z) - f(z_1)| \leq \varepsilon$ for $|z - z_1| \leq \delta$ となるようにとり, この δ について n_ν を $|f_{n_\nu}(z) - f(z)| < \varepsilon$ for all $|z - z_1| \leq \delta$ かつ $|\varphi_{n_\nu}(w_1) - \varphi(w_1)| \leq \delta$ となるようにとる. このとき

$$\begin{aligned} |f(z_1) - w_1| &\leq |f(z_1) - f(\varphi_{n_\nu}(w_1))| + |f(\varphi_{n_\nu}(w_1)) - f_{n_\nu}(\varphi_{n_\nu}(w_1))| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

よって $f(z_1) = w_1$ である.

さて上の論法は任意の comapct set E と任意の $\{\varphi_n\}$ の部分列について成り立つから結局 f が nonconstant ならば $\{\varphi_n\}$ は f^{-1} に loc. unif. に収束することがわかる. また $E \subset f(D)$ において E の任意性より $\mathrm{Ker}\,(\{f_n(\mathbb{D})\}, w_0) \subset f(\mathbb{D})$ がわかる. Step 1 と合わせて $\mathrm{Ker}\,(\{f_n(\mathbb{D})\}, w_0) = f(\mathbb{D})$ が成り立つ.

Step 3. $f_n(\mathbb{D}) \to f(\mathbb{D})$ については $\{f_n\}$ の任意の部分列は同一の極限 f に収束するから Step 1 と 2 より $\{f_n(\mathbb{D})\}$ の任意の部分列の Kernel は $f(\mathbb{D})$ である. よって $f_n(\mathbb{D}) \to f(\mathbb{D})$ が成り立つ.

Theorem 1.2.3 *Let $\{D_n\}$ be a sequence of simply connected proper subdomains in $\mathbb{C}$ such that $w_0 \in D_n$ for all $n \in \mathbb{N}$. Let f_n be the conformal mapping of $\mathbb{D}$ onto D_n with $f(0) = w_0$ and $f'(0) > 0$, $n = 1, 2, \ldots$. If $D_n \to \mathrm{Ker}\,(\{D_n\}, w_0) \neq \mathbb{C}$ in the sense of kernel convergence, then either $\mathrm{Ker}\,(\{D_n\}, w_0) = \{w_0\}$ and $f_n \to w_0$ uniformly on each compact subset of $\mathbb{D}$ or*

$\mathrm{Ker}(\{D_n\}, w_0)$ *is a simply connected domain which contains* w_0 *and* $\{f_n\}$ *converge the conformal mapping* f *of* $\mathbb{D}$ *onto* $\mathrm{Ker}(\{D_n\}, w_0) = \{w_0\}$ *satisfies* $f(0) = w_0$ *and* $f'(0) > 0$.

Proof.
Step 1. $\{f_n\}$ が normal family であることを示す. $\{f_n'(0)\}$ が unbounded とすると $f_{n_\nu}'(0) \to \infty$ となる $\{n_\nu\}$ がとれる. Koebe の 1/4 定理より

$$\{w \in \mathbb{C} : |w| < \frac{f_{N_\nu}'(0)}{4}\} \subset D_{n_\nu}$$

となり $\mathrm{Ker}(\{D_{n_\nu}\}, w_0) = \mathbb{C}$ となり矛盾. よって $\{f_n'(0)\}$ は bounded である. ここで Koebe の distortion theorem より

$$|f_n(z)| \leq \frac{f_n'(0)|z|}{(1-|z|)^2}, \quad |z| < 1$$

となるから, $\{f_n(z)\}$ は locally uniformly bounded で normal family である.

Step 2. $\{f_n\}$ が locally uniformly に収束することを示す. 収束しないと仮定すれば compact subset $\exists K$ of $\mathbb{D}$ で $\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N}$: $\exists z_1 \in K$ and m, $n \geq N$ s.t. $|f_n(z_1) - f_m(z_1)| \geq \varepsilon$. よって 2 つの部分列 $\{f_{n_\nu}\}$, $\{f_{m_\nu}\}$ で $\max_{z \in K} |f_{n_\nu}(z) - f_{m_\nu}(z)| \geq \varepsilon$ となるものがとれる. 必要ならば部分列を取ることによる $f_{n_\nu} \to f$, $f_{m_\nu} \to g$ で $f \neq g$ としてよい. 直前の Proposition より $\mathrm{Ker}(D_{n_\nu}, w_0) = \mathrm{Ker}(\{f_{n_\nu}(\mathbb{D})\}, w_0) = f(\mathbb{D})$, $\mathrm{Ker}(D_{m_\nu}, w_0)$ $\mathrm{Ker}(\{f_{m_\nu}(\mathbb{D})\}, w_0) = g(\mathbb{D})$ となり, $D_n \to \mathrm{Ker}(\{D_n\}, w_0)$ の定義より $f(\mathbb{D}) = g(\mathbb{D})$ である. このとき f が constant ならば, g も constant で $f = g$ となり矛盾. また f が nonconstant ならば g もそうなり, ともに univalent で $\mathbb{D}$ を同じ領域に写像し $f(0) = g(0) = w_0$ であり $f'(0) \geq 0$, $g'(0) \geq 0$ であるから $f = g$ となり, やはり矛盾である. 以上より $f_n \to f$ が locally uniformly に成り立つ. 再び直前の Proposition を用いて $\mathrm{Ker}(\{D_n\}, w_0) = f(\mathbb{D})$ である.

Step 3. $\mathrm{Ker}(\{D_n\}, w_0) = f(\mathbb{D})$ ならば $f(z) \equiv w_0$ である. $\mathrm{Ker}(\{D_n\}, w_0) \neq f(\mathbb{D})$ のときは f は univalent function の広義一様収束極限で nonconstant ゆえ, やはり univalent で $\mathbb{D}$ を $\mathrm{Ker}(\{D_n\}, w_0)$ に map する写像函数である. また $f(0) = \lim f_n(0) = w_0$ で $f'(0) = \lim f_n'(0) \geq 0$ である. 特に f' は零点を持たないから $f'(0) > 0$ となる.

1.3 Counter example

ここでは Carathéodory Convergence Theorem をどこまで一般化できるかを反例を挙げながら考えてみよう.

Theorem 1.3.1 *Let* $\{f_n\}$ *be a sequnce of analytic functions in a domain* $\Omega \subset \mathbb{C}$. *with* $w_0 = f_n(z_0)$ *for all* $n \in \mathbb{N}$. *If* $f_n \to f$ *uniformly on every compact subset of* Ω, *then* $f(\Omega) \subset \mathrm{Ker}(\{f_n(\Omega)\}, w_0)$.

Proof. THeorem 1.2.1 の証明の Step 1 がそのまま使えるが, ここではもう少し具体的に証明する. Let D be the kernel of $\{f_n(\Omega)\}$ with respect to w_0. f が定数函数ならば, 必然的に $f(z) \equiv w_0$ となるが kernel の定義から $w_0 \in D$ ゆえこのとき $f(\Omega) = \{w_0\} \subset D$. 次に f が非定数ならば, $w_1 \in f(\Omega)$ について $z_1\Omega$ を $f(z_1) = w_1$ となるようにとる. $\gamma : z = z(t), 0 \leq t \leq 1$ を $z(0) = z_0$ とをみたす Ω 内の curve とする. 各 $\alpha \in \gamma$ について $f(z) = f(\alpha) + c(z-\alpha)^{m(\zeta)} + \cdots$, $c \neq 0$ となる

$m(\zeta) \in \mathbb{N}$ をとる．このとき $r(\alpha) > 0$ と α の近傍 $U(\alpha)$ で $\bar{U}(\alpha) \subset \Omega$, $f(\partial U(\alpha)) = \mathbb{D}(f(\alpha), r(\alpha))$ かつ, 任意の $w \in \mathbb{D}(f(\alpha), r(\alpha))$, $w \neq f(\alpha)$ について $f(z) = w$ をみたす $z \in U(\alpha)$ が丁度 $m(\alpha)$ 個存在するようにとれる．$N(\alpha) \in \mathbb{N}$ を $n \geq N(\alpha)$ ならば $|f_n(z) - f(z)| < r(\alpha)/2$ for $z \in \partial U(\alpha)$ となるようにとる．このとき $|w - f(\alpha)| \leq r(\alpha)/2$ となる w について $|f_n(z) - f(z)| < |f(z) - w|$ が $z \in \partial U(\alpha)$ について成立．よって $f_n(z) = w$ をみたす z は $U(\alpha)$ 内に重複度を込めて $m(\alpha)$ 個存在する．よって $\mathbb{D}(f(\alpha), r(\alpha)/2) \subset f_n(\omega)$ for all $n \geq N(\alpha)$ である．ここで open covering

$$f(\gamma) \subset \bigcup_{\alpha \in \gamma} \mathbb{D}(f(\alpha), r(\alpha)/2)$$

を考えれば, $f(\gamma)$ は compact ゆえ有限個の a_1, α_2, ..., $\alpha_J \in \gamma$ で

$$f(\gamma) \subset \bigcup_{j=1,\ldots J} \mathbb{D}(f(\alpha_j), r(\alpha_j)/2)$$

となるものがとれる．このとき

$$H = \bigcup_{j=1,\ldots J} \mathbb{D}(f(\alpha_j), r(\alpha_j)/2)$$

$N = \max\{N(a_1), N(\alpha_2), \ldots, N(\alpha_J)\}$ とおけば w_0, $w_1 \in f(\gamma) \subset H$ で $n \geq N$ について $H \subset f_n(\Omega)$ よって $w_1 \in D$ である．$\Box$

Example 1.3.2 残念ながら上の *Theorem* の逆, つまり $D \subset f(\Omega)$ は成り立たない．実際に *domain* H で $w_0 \in H$ かつ $H \subset f_n(\Omega)$ が全ての n について成り立っていても $H \cap f(\Omega) = \emptyset$ となる例がある．ここでは *(ちょっと, 皮肉だが) univalent functions* についての *Carathéodory Convergence Theorem* を用いてこのような例を構成する．

$$\begin{aligned} G_0 &= \{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < 2, |\arg w| < \frac{3}{4}\pi\} \\ \ell_n &= \{w \in \mathbb{C} : 1 + \frac{1}{n} \leq |w| < 2, \arg w = \frac{\pi}{6}\} \\ G_n &= G_0 - \ell_n \end{aligned}$$

とおいて $g_n : \mathbb{D} - G_n$ を $g_n(0) = \sqrt{2}$, $g_n'(0) > 0$ をみたす *conformal mapping* とする．このとき $\{G_n\}$ の *kernel* G は

$$G = \{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < 2, -\frac{3}{4}\pi < \arg w < \frac{1}{6}\pi\}$$

であるから *Carathéodory Convergence Theorem* より g_n は $\mathbb{D}$ から G への *conformal mapping* g で $g(0) = \sqrt{2}$ $g'(0) > 0$ をみたすものへ広義一様収束する．このとき $f_n = g_n^2$, $f = g^2$ とおくと, $\{f_n\}$ も f に広義一様収束する．

$$f_n(\mathbb{D}) = \{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < 4\} - \{w \in \mathbb{C} : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leq |w| < 4, \arg w = \frac{1}{3}\pi\}$$

となり, $\{f_n(\mathbb{D})\}$ の *kernel* D は

$$D = \{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < 4\} - \{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < 4, \arg w = \frac{1}{3}\pi\}$$

となるが,

$$f(\mathbb{D}) = \{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < 4,\ -\frac{3}{2}\pi < \arg w < \frac{1}{3}\pi\}$$

である．つまり *sector* $\{w : 1 < |w| < 4, \pi/3 < \arg w < \pi/2\}$ は全ての $f_n(\mathbb{D})$ に含まれるのに極限函数の像 $f(\mathbb{D})$ に含まれない.

1.4 Sequnces of universal covers

Carathéodory Convergence Theorem の前半 Theorem1.2.1 は, 前節でみたようにあまり一般の函数列では成り立たない．ここでは各 f_n が, unramified and unlimited な covering であるという仮定のもとで一般化する．後半の Theorem1.2.3 の analogue が成り立つ為には, 各 f_n が D_n と 1 点での正規化で決まるような函数でないと駄目であろう．D_n が simply conected でないとき 1 点での正規化で一意的に決まる函数としては universal covering map が考えられる．そこで各 D_n について f_n を universal cover として一般化する．univalent map ならば universal cover であるからこれは Theorem1.2.3 の拡張である．まず

Lemma 1.4.1 *Let $\tilde{S}$ and S be two Riemann surfaces, and $f : \tilde{S} \to S$ is an unramified and unlimited covering of $\tilde{S}$ onto S. Suppose that H is a simply connected subdomain of S and $\tilde{p}_0 \in f^{-1}(H)$. Then f maps the connected component of $\tilde{H}$ of $f^{-1}(H)$ with $\tilde{p}_0 \in \tilde{H}$ conformally onto D_0.*

Proof. $p_0 = f(\tilde{P}_0)$ とおく．任意の $p \in D_0$ について p_0 と p を H 内の curve γ で結ぶ．仮定より γ の lift $\tilde{\gamma}$ で p_0 を始点に持つものが存在する．$\tilde{\gamma}$ の終点を $\tilde{p}$ とすれば明らかに $\tilde{p} \in U$ である．H の単連結性より $\tilde{p}$ は γ に依らず一意に定まる．この関係を $\tilde{q} = \varphi(q)$ で表わすことにすれば $f \circ \varphi = \mathrm{id}_H$ をみたす．$\varphi(H) \subset \tilde{H}$ は $\varphi(H)$ が連結で $\tilde{p}$ を含み, $f(\varphi(H)) = H$ より従う．U を $H \subset U, U - \tilde{H} \neq \emptyset$ をみたす domain で $U \subset f^{-1}(H)$ とすると, $\tilde{q}_0 \in \partial\tilde{H} \cap U$ がとれる．f は open mapp ゆえ $f(U)$ は $f(\tilde{q}_0)$ の近傍を含む．よって $f(U) - H \neq \emptyset$ となり $U \subset f^{-1}(H)$ に矛盾. 以上より $\varphi(H)$ が $\tilde{p}$ を含み $f^{-1}(H)$ に含まれる domain の中で最大であることがわかり, $\varphi(H)$ が $f^{-1}(H)$ の $\tilde{p}$ を含む連結成分である.

Theorem 1.4.2 *Let Ω be a domain in $\mathbb{C}$ and $z_0 \in \Omega$, $w_0 \in \mathbb{C}$. Let $\{f_n\}$ a sequence in $H(\Omega)$ such that each f_n is an unramified and unlimited covering map of Ω onto $f_n(\Omega)$ and that $f_n(z_0) = w_0$ for all $n \in \mathbb{N}$. Suppose that $f_n \to f$ locally uniformly in Ω. Then $\mathrm{Ker}\,(\{f_n(\Omega)\}, w_0) = f(\Omega)$ and $f_n(\Omega) \to f(\Omega)$ in the sense of kernel convergence. Furthermore if f is not constant, then f is also an unramified and unlimited covering map of Ω onto $f(\Omega)$.*

Proof. Step 1. We first prove $f(\Omega) \subset \mathrm{Ker}\,(\{f_n(\Omega)\}, w_0)$. Since $w_0 = \lim f_n(z_0) = f(z_0) \in \mathrm{Ker}\,(\{f_n(\Omega)\}, w_0)$, we may assume that f is not constant. For any $w_1 \in f(\Omega)$ take $z_1 \in \Omega$ with $f(z_1) = w_1$ and a domain Ω_0 with $z_1 \in \bar{\Omega}_0 \subset \Omega$. Put $H = f(\Omega_0)$. Then w_0, $w_1 \in H$. We claim that there exists $N \in \mathbb{N}$ such that $H \subset f_n(\Omega)$ for all $n \geq N$. This implies $w_1 \in \mathrm{Ker}\,(\{f_n(\Omega)\}, w_0)$. Suppose this is false. Then there exists $n_\nu \to \infty$ and $w_\nu \in f(\Omega_0) - f_n(\Omega)$. We may assume that $w_\nu \to w^* \in \bar{H} = \overline{f(\Omega_0)} = f(\bar{\Omega}_0)$. Since $f_{n_\nu} - w_\nu \neq 0$ for all $z \in \Omega$ and $n \geq N$, we therefore obtain from Hurwitz's theorem that $f(z) - w^* = \lim(f_{n_\nu} - w_\nu) \neq 0$ for all $z \in \Omega$ because f is not constant. This contradicts $w^* \in f(\bar{\Omega}_0) \subset f(\Omega)$.

Step 2. Now we prove $\mathrm{Ker}(\{f_n(\Omega)\}, w_0) \subset f(\Omega)$. Since $w_0 \in f(\Omega)$, we may assume $\mathrm{Ker}(\{f_n(\Omega)\}, w_0) \neq \{w_0\}$. For any $w_1 \mathrm{Ker}(\{f_n(\Omega)\}, w_0)$ take a domain H and $N \in \mathbb{N}$ such that w_0, $w_1 \in H$ and $H \subset f_n(\Omega)$ for $n \geq N$. Since we can connect w_0 and w_1 by a piecewise linear curve in H, there exists a simply connected domain H_0 with w_0, $w_1 \in H$ and $H_0 \subset \bar{H}_0 \subset H$. For $n \geq N$ let Ω_n be the connected component of $f_n^{-1}(H_0)$ which contains z_0.

Since f_n is an unramified and unlimited covering, by Lemma 1.4.1 f_n maps Ω_n conformally onto H_0. Let φ_n be the inverse mapping of $f|_{\Omega_n}$ on H_0. Clearly $\{\varphi_n\}$ is uniformly bounded by 1. Hence there exists a subsequence $\{\varphi_{n_\nu}\}$ such that $\varphi_{n_\nu} \to \varphi$ locally uniformly in H_0. By the Maximum principle and $\varphi(w_0) = \lim \varphi_{n_\nu}(w_0) = z_0$, we have $|\varphi(w)| < 1$ for all $w \in H_0$. For any $w^{\in} H_0$ put $z^* = \varphi(w^*)$. Since $\varphi_{n_\nu}(w^*) \to z^*$ and $f \to f$ on a neighborhood of z^*, we have $f(z^*) = \lim_{\nu\to\infty} f_{n_\nu}\varphi_{n_\nu}(w^*) = w^*$. Thus we have $f \circ \varphi(w^*) = w^*$ in H_0 and hence $w_1 \in H_0 = f \circ \varphi(H_0) \subset f(\Omega)$.

Step 3. "$f_n(\Omega) \to f(\Omega)$ in the sense of kernel convergence". を示す. By Step 1 and Step 2 we have for any subsequence $\{f_{n_\nu}\}$ of $\{f_n\}$, $\mathrm{Ker}(\{f_{n_\nu}(\Omega)\}, w_0) = f(\Omega)$. In other words $f_n(\Omega) \to f(\Omega)$ in the sense of kernel convergence.

Step 4. We assume f is not constant. Then by Hurwitz's theorem $f'(z) \neq 0$ for all $z \in \Omega$. Let $b \in f(\Omega)$ and H_0 be an open and simply connected neighborhood of b. It follows from a similar argument in Step 2 that every connected coponent of $f^{-1}(H_0)$ is mapped conformally onto f onto H_0. Put $\{a_j\} = f^{-1}(b)$. For each a_j let $U(a_j)$ be the connected coponent of $f^{-1}(H_0)$ which contains a_j. Thus

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} U(a_j) = f^{-1}(H_0).$$

This implies f is an unramified and unlimited covering of Ω onto $f(\Omega)$.

Remark 1.4.3 この定理から一点を固定する *universal covers* の列の広義一様収束極限は定数または *universal cover* であることがわかる.

Carathéodory Convergence Theorem の後半 Theorem1.2.3 の universal cover への analogue を述べる前に Lemma を用意する.

Lemma 1.4.4 *Suppose that $f(z)$ is analytic in $\mathbb{D}$ and 0, $1 \notin f(\mathbb{D})$. Then*

$$\log|f(z)| \leq (7 + \log^+|f(0)|)\frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Proof. See Ahlfors [2] p.19.

Theorem 1.4.5 *Let $w_0 \in \mathbb{C}$ and $\{D_n\}$ be a sequence of domains in $\mathbb{C}$ such that $w_0 \in D_n$ and $\mathbb{C} - D_n$ contains more than one point for all n. For each n let f_n be the universal covering map of $\mathbb{D}$ onto D_n with $f_n(0) = w_0$ and $f_n'(0) > 0$. Suppose that $D_n \to D (n \to \infty)$ in the sense of kernel convergence. Then if $\mathbb{C} - D$ contains more than one point, $f_n \to f (n \to \infty)$ locally uniformly in $\mathbb{D}$ where f is the universal covering map of $\mathbb{D}$ onto D with $f(0) = w_0$ and $f'(0) > 0$.*

Proof. $a, b \in \partial D$ $a \neq b$ について Theorem 1.1.6 より $\partial D_n \ni a_n \to a \in \partial D$ $\partial D_n \ni b_n \to b \in \partial D$ をみたす点列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がとれる．このとき $a_n \not b_n$ for all n と仮定してよい．各 $(f_n(z)-a)/(b-a)$ に Lemma 1.4.4 を用いて $\{f_n\}$ が locallu uniformly bounded in $\mathbb{D}$ であることがわかる．従って Montel の定理から収束部分列 $\{f_{n_\nu}\}$ が存在する．$g = \lim f_n$ とおく．Theorem 1.4.2 より $g(\mathbb{D}) = \mathrm{Ker}\,(\{D_{n_\nu}\}, w_0) = D$ であり, D は domain であるから g は universal cover である．明らかに $g(0) = \lim_{\nu\to\infty} f_{n_\nu}(0) = w_0$ であり, $g'(0) = \lim_{\nu\to\infty} f_{n_\nu}(0) \geq 0$ と $g'(0) \neq 0$ より $g'(0) > 0$ である．よって $g = f$ である．以上の議論は $\{f_n\}$ の任意の部分列について通用するから, “$\{f_n\}$ の任意の部分列は f に広義一様収束する部分列を含む” が成立し, これは $\{f_n\}$ 自身が f に広義一様収束することを示す.

関連図書

[1] L. V. Ahlfors, *An extension of Schwarz's lemma*, Trans. Amer. Math. Soc. **43**(1938), 359-364.

[2] L. V. Ahlfors, *Conformal Invariants*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[3] L. V. Ahlfors and H. Grunsky, *Über die Blochsche Konstante*, Math. Z. **42**(1937), 671-673.

[4] A. Bloch, *Les théorèmes de M. Valiron sur les functions entières et la théorie de l'uniformisation*, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse **17**(1925).

[5] M. Bonk, *On Bloch's constant*, Proc. Amer. Math. Soc. **110**(1990), 889-894.

[6] M. Bonk, *Distortion estimates for Bloch functions*, Bull. London Math. Soc. **23**(1991), 454-456.

[7] C. Carathéodory, *Theory of Functions*, Vol. II, 2nd ed., Chelsea, New York, 1960.

[8] P. L. Duren, *Univalent Functions*, Springer, New York 1983.

[9] M. Heins, *On a class of conformal metrics*, Nagoya Math. J. **21**(1962), 1-60.

[10] E. Landau, *Über die Blochsche Konstante und zwei verwandte Weltkonstanten*, Math. Z. **30**(1929), 608-634.

[11] X. Liu and D. Minda, *Distortion estimates for Bloch functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **333**(1992), 325-338.

[12] D. Minda, *Bloch constants*, J. Analyse Math. **41**(1982), 54-84.

[13] D. Minda, *Marden constants for Bloch and normal functions*, J. Analyse Math. **42**(1982/1983), 117-127.

[14] D. Minda, *The Bloch and Marden constants*, in Computational methods and function theory, ed. by E. B. Staff, L. C. Salinas and R. S. Varga, Proceedings Valparaíso 1989, Lecture Notes in Math. 1435, Springer-Verlag, Berlin, 1990, 131-142.

[15] E. Peschl, *Über die Verwendung von Differentialinvarienten bei gewissen Funktionenfamilien und die Übertragung einer darauf gegründeten Methode auf partielle Differentialgleichungen vom elliptische Typus*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI **336**/6(1963), 23 pp.

[16] E. Peschl, *Über unverzweigte konforme Abbildungen*, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. K1. S.-B II **185**(1976), 55-78.

[17] Ch. Pommerenke, *On Bloch functioons*, J. London Math. Soc. (2) **2**(1970), 689-695.

[18] Ch. Pommerenke, *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1975.

[19] R.M. Robinson, *Bloch constants*, Duke Math. J. **2**(1936) 453-459.

[20] Wolfram Research, Inc., *Mathematica*, Version 2.0, Wolfram Research, Inc., Champaign, Illinois, (1982).

[21] A. Yamada, *Bounded analytic functions and metrics of constant curvature on Riemann surfaces*, Kodai Math. J. **11**(1988), 317-324.

[22] H. Yanagihara, 'On the locally univalent Bloch constant', *J. Analyse Math.*, to appear.

[23] H. Yanagihara, 'Sharp distortion estimate for locally schlicht Bloch functions', *Bull. London Math. Soc*, to appear.