

# Jordan の曲線定理と単連結領域

柳原 宏

山口大学工学部

[hiroshi@yamaguchi-u.ac.jp](mailto:hiroshi@yamaguchi-u.ac.jp)

# 目次

第 1 章	Jordan の曲線定理	3
1.1	Tietze の拡張定理 . . . . .	3
1.2	曲線の回転数 . . . . .	5
1.3	境界を保つ閉円板から自身への写像の全射性 . . . . .	8
1.4	前原による Jordan の曲線定理の証明 . . . . .	11
1.5	Jordan 曲線の内, 外部と横断線 . . . . .	15
第 2 章	単純多角形に関する Schönflies の定理	19
2.1	単純多角形に関する Jordan の定理 . . . . .	19
2.2	単純多角形に関する Schönflies の定理 . . . . .	23
2.3	単純多角形による単純曲線の近似 . . . . .	27
第 3 章	単連結領域	32
3.1	単連結性 . . . . .	32
3.2	$\epsilon$ -連結性 . . . . .	33
3.3	Jordan 曲線による分離定理 . . . . .	36
3.4	単連結性の条件 . . . . .	41
3.5	Jordan 曲線による分離定理 II . . . . .	42
参考文献		44
索引		45

# 序

「解析学を学ぶ上で避けて通ることのできない重要な定理であるが、初学者は無理して証明を求めることなく、成り立つことを認めた上で学習を進める方が得策である。」このように解説される事項は幾つかあるが、中でも Jordan の曲線定理はその典型的な例であろう。そして成り立つことを認めた上で学習を進め、プロの研究者になったものの証明を知らないままにいる方も多いのではないだろうか。斯く言う筆者も 30 を過ぎるまで証明を知らなかったことを白状しておこう。この冊子では Jordan の曲線定理と、関連する話題についての解説を行う。

2 次元平面  $\mathbb{R}^2$  上の単位円板を  $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$  と置き、その境界を  $\partial\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  と表そう。さて連続な単射  $\varphi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$  のことを、単純閉曲線または Jordan 曲線と呼ぶ。Jordan 曲線の像  $\varphi(\partial\mathbb{D})$  はコンパクトであるから、その補集合  $\mathbb{R}^2 \setminus \varphi(\partial\mathbb{D})$  は開集合である。これの連結成分が 2 つであり、それぞれの成分の境界が  $\varphi(\partial\mathbb{D})$  であることを主張するのが Jordan の曲線定理である。第 1 章では、琉球大学の前原先生による Jordan の曲線定理の短く簡明な証明を解説する。Jordan の曲線定理よりもさらに進んだ話題として、与えられた Jordan 曲線  $\varphi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$  を位相同型  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  に拡張できると言う Schönflies の定理が有名である。残念ながら Schönflies の定理の証明をこのような短い冊子の中で与えることは、筆者の能力を越えている。そこで妥協案として、第 2 章では  $\varphi$  が折れ線よりなる単純多角形の場合に限定し、この弱い形の定理の証明を与える。このように限定しても応用上、十分な場合も多々あるし、聞くところによれば Schönflies 自身も、この限定された場合の証明を発表したのみらしい。次に  $\hat{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  を  $\mathbb{R}^2$  の 1 点コンパクト化とする。第 3 章では  $\hat{\mathbb{R}}^2$  内の領域  $\Omega$  が単連結であるためには補集合  $\hat{\mathbb{R}}^2 \setminus \Omega$  が空であるかまたは連結であることが必要十分条件になることを証明する。

尚、一般的な位相空間に関する事項、例えば開集合、閉集合、閉包、Hausdorff 空間などについては知っているものとして解説する。位相に関する教科書の最初の数章を読めば書いてある話である。また連結性、弧状連結性などについても知っているものと仮定する。やはり位相に関する大抵の教科書に載っている内容である。単連結性については定義を知っているくらいで十分である。2 次元平面  $\mathbb{R}^2$  と、その 1 点コンパクト化  $\hat{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  の代わりに複素平面  $\mathbb{C}$  及び Riemann 球面  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  を使う方が記述が簡単になることが多い。例えば Euler の公式  $e^{it} = \cos t + i \sin t$  や複素数の偏角  $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$  などの等式を用いることが出来るからである。そこで本書では  $\mathbb{R}^2$ ,  $\hat{\mathbb{R}}^2$  の代わりに複素平面  $\mathbb{C}$  及び Riemann 球面  $\hat{\mathbb{C}}$  の上で Jordan の曲線定理やその他の事項を解説する。これは複素解析の研究者である筆者の我儘であるが、ご寛恕を頂ければ幸いである。しかしながら解説された結果を  $\mathbb{R}^2$ ,  $\hat{\mathbb{R}}^2$  の場合に翻訳することは、それほど苦勞することなく可能であろう。

# 第 1 章

## Jordan の曲線定理

この章では 1984 年に発表された、琉球大学の前原先生の論文 [5] “The Jordan curve Theorem via the Brouwer fixed point theorem”, *American Mathematical Monthly* **91** (1984), 641-643. による Jordan の曲線定理の証明を解説する. この論文は Moise [6] による Jordan の曲線定理の証明をできるだけ簡略化したものだそうである. 題名から分かるように Brouwer の不動点定理を用いるということが新機軸である. とは言うものの, よく読めば平面内の閉曲線の回転数の概念と Tietze の拡張定理さえ知っていれば十分であり Brouwer の不動点定理は必要がない. 前原先生の証明に必要なのは,

- (i)  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  が単純曲線, つまり  $\gamma$  が連続な単射である時に, その像の補集合  $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$  が連結であること.
- (ii) 長方形の垂直な 2 辺を結ぶ閉長方形内の曲線と, 水平な垂直な 2 辺を結ぶ閉長方形内の曲線は必ず交わる.

という 2 つの結果である. (i) は Tietze の拡張定理を用いて証明される. (ii) は Jordan の曲線定理以上に直観的に肯定しやすい結果であるが, 証明はそれほど容易ではない. 閉曲線の回転数を用いて導かれる  $\mathbb{D}$  から自身への写像が全射になるための十分条件を用いて証明を行う.

一応, 準備的な節 §1.1, 1.2, 1.3 を設け Tietze の拡張定理や, 平面内の曲線の回転数について初学者にも分かるように解説を行ったが, 既に学習済みで必要としない読者も多いであろう. §1.4 において紹介する Jordan の曲線定理の証明は実質 1,2 ページで終わる. これだけ短い証明は他に見たことがない. この証明のおまけとして, Jordan 曲線の内部の点に関し, 回転数が  $\pm 1$  となることも解説しておいた. 最後の §1.5 は Jordan の曲線定理から直ちに従う結果や横断線についての解説である.

### 1.1 Tietze の拡張定理

集合  $S$  を距離  $d$  を持つ距離空間とし, 点  $p \in S$  と空でない部分集合  $A \subset S$  について

$$d(p, A) = \inf\{d(p, q) : q \in A\}$$

と置く. このとき  $d(p, A)$  は  $p \in S$  の関数とみなして Lipschitz 連続である. 実際, 任意の  $p_0, p_1 \in S$  と  $q \in A$  について

$$d(p_0, A) \leq d(p_0, q) \leq d(p_0, p_1) + d(p_1, q)$$

が成り立つので,  $d(p_0, A) \leq d(p_0, p_1) + d(p_1, A)$  を得る. 同様に  $d(p_1, A) \leq d(p_1, p_0) + d(p_0, A)$  も成り立つので,

$$|d(p_0, A) - d(p_1, A)| \leq d(p_0, p_1)$$

が得られる. よって  $d(p, A)$  は Lipschitz 定数 1 の Lipschitz 連続関数である.

さて  $p \in A$  ならば  $d(p, A) = 0$  であるが,  $d(p, A) = 0$  であっても  $p \in A$  とは限らない. しかしながら  $A$  が閉集合のときは

$$d(p, A) = 0 \iff p \in A$$

及び, これの対偶である命題

$$d(p, A) > 0 \iff p \notin A$$

が成り立つ.

**Definition 1.1.1.** 位相空間  $S$  が Hausdorff 空間であるとは, 任意の相異なる 2 点  $p, q \in S$  について共通部分を持たない 2 つの開集合  $U, V$  で  $p \in U, q \in V$  を満たすものが存在することであった. 同様に  $S$  が正規空間であるとは

- (i) 任意の  $p \in S$  について 1 点よりなる集合  $\{p\}$  は閉集合である.
- (ii) 共通部分を持たない 2 つの閉集合  $F_1, F_2$  について, 共通部分を持たない 2 つの開集合  $G_1, G_2$  で  $F_1 \subset G_1, F_2 \subset G_2$  を満たすものが存在する.

が成り立つときを言う.

位相空間  $S$  が正規空間ならば Hausdorff 空間であることは明らかであろう. また  $S$  が距離空間ならば正規空間であることも容易に分かる. 実際  $S$  が距離  $d$  を持つとき, 任意の  $p \in S$  について  $S \setminus \{p\} = \{q \in S : d(q, p) > 0\}$  であるから  $S \setminus \{p\}$  は開集合であり, 従って  $\{p\}$  は閉集合である. また  $F_1, F_2$  が共通部分を持たない 2 つの閉集合であれば

$$G_1 = \{p \in S : d(p, F_1) < d(p, F_2)\}, \quad G_2 = \{p \in S : d(p, F_2) < d(p, F_1)\},$$

と置けば  $G_1, G_2$  は共通部分を持たず, ともに開集合であり, 明らかに  $F_1 \subset G_1, F_2 \subset G_2$  を満たす.

Tietze-Urysohn の定理とは Hausdorff 空間  $S$  が正規空間であるためには, 次の定理の結論が成り立つことが必要十分であることを主張するものである. 一般の場合の証明は難しくないが少々手間がかかるので, ここでは距離空間に限定し必要条件であることのみを示しておく. 後に応用する際には, この形で十分である.

**Theorem 1.1.2** (Tietze-Urysohn の定理).  $F_0, F_1$  を距離空間  $S$  内の空でない閉集合で  $F_0 \cap F_1 = \emptyset$  とする. このとき連続関数  $f : S \rightarrow [0, 1]$  で  $F_0$  上で  $f(p) = 0$ ,  $F_1$  上で  $f(p) = 1$  となるものが存在する.

*Proof.*  $F_0 \cap F_1 = \emptyset$  より  $d(p, F_0) + d(p, F_1) > 0$  が  $S$  上で成り立ち連続である. そこで

$$f(p) = \frac{d(p, F_0)}{d(p, F_0) + d(p, F_1)}$$

と置けば良い. □

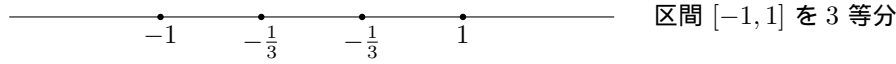
次の Tietze の拡張定理も Hausdorff 空間  $S$  が正規空間であるためには, 次の定理の結論が成り立つことが必要十分であることを主張するものである. 今度も距離空間に限定し, 必要性のみを示そう.

**Theorem 1.1.3** (Tietze の拡張定理). 距離空間  $S$  内の閉集合  $F$  上の連続関数  $g : F \rightarrow [-1, 1]$  について, 連続関数  $f : S \rightarrow [-1, 1]$  で  $f|_F = g$  を満たすものが存在する.

*Proof.* 集合  $g^{-1}([-1, -1/3])$  と  $g^{-1}([1/3, 1])$  は, ともに  $S$  の閉集合であり, 共通部分を持たない. Theorem 1.1.2 より連続関数  $f_0 : S \rightarrow [-1/3, 1/3]$  で, それぞれの閉集合上, 値  $-1/3$  と  $1/3$  を取るものが存在する. このとき明らかに

$$|f_0(p)| \leq \frac{1}{3} \text{ on } S$$

が成り立つ。また  $F = g^{-1}([-1, -1/3]) \cup g^{-1}((-1/3, 1/3)) \cup g^{-1}([1/3, 1])$  と分解して、それぞれの集合上で



の  $g$  と  $f_0$  の値を比較すれば

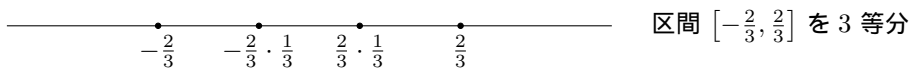
$$|g(p) - f_0(p)| \leq \frac{2}{3} \text{ on } F$$

が成り立つ。

次に  $g_1(p) = g(p) - f_0(p)$  と置き、 $g_1 : F \rightarrow [-2/3, 2/3]$  に同じ操作を行えば  $S$  上の連続函数  $f_1$  で

$$|f_1(p)| \leq \frac{2}{3} \frac{1}{3} \text{ on } S, \quad |g_1(p) - f_1(p)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 \text{ on } F$$

が成り立つものが存在する。



以上の操作を順次繰り返せば  $S$  上の連続函数  $f_n$  で

$$|f_n(p)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{3} \text{ on } S$$

かつ

$$|g(p) - f_0(p) - \dots - f_n(p)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \text{ on } F$$

を満たすものが取れる。このとき  $f(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(p)$  は  $S$  上で連続な函数列の一致収束極限であるから連続であり、 $|f(p)| \leq \frac{1}{3} \frac{1}{1-2/3} = 1$  また  $F$  上で  $g$  と  $f$  は一致する。□

## 1.2 曲線の回転数

閉区間  $[a, b]$  から位相空間  $X$  への連続写像  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  のことを曲線と呼び  $\gamma(a), \gamma(b)$  をそれぞれ曲線  $\gamma$  の始点、終点と言う。また  $\gamma(a) = \gamma(b)$  が成り立つ時  $\gamma$  は閉曲線であると言う。以下では  $X = \mathbb{C}$  とし、複素平面内の閉曲線を考えることにし、閉曲線  $\gamma$  について、回転数を呼ばれる量を定義しよう。但し議論を簡明にするために  $[a, b] = [0, 1]$  とする。また複素平面から負の実軸を除いた領域  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  における偏角の主枝を  $\text{Arg}$  と表す。  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  について  $|\text{Arg } z| < \pi$  である。

閉曲線  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  が与えられたとして  $z_0 \notin \gamma([0, 1])$  とする。このとき  $z_0$  における  $\gamma$  の回転数 (winding number) を以下のように定義する。

まず  $0 < d < d_0 := \inf\{|\gamma(t) - z_0| : 0 \leq t \leq 1\}$  を満たす  $d$  を取る。このとき  $\gamma$  の一様連続性より、ある  $\delta > 0$  を

$$s, t \in [0, 1], \quad |s - t| \leq \delta \implies |\gamma(s) - \gamma(t)| \leq d$$

が成り立つように取れる。  $[0, 1]$  の分割  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$  で

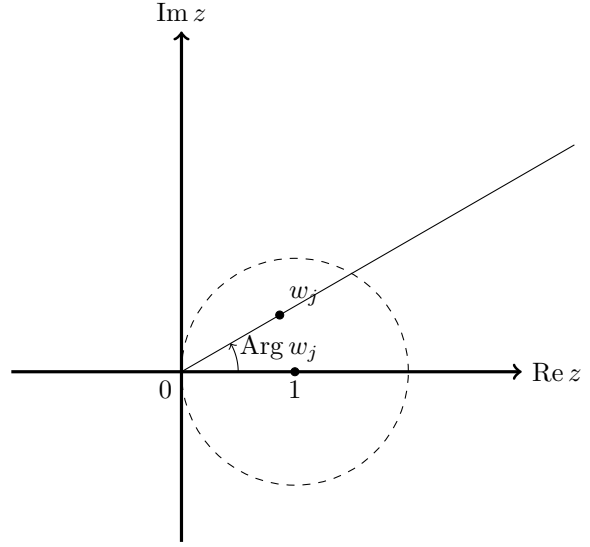
$$(1.2.1) \quad \max\{|t_j - t_{j-1}| : j = 1, 2, \dots, n\} \leq \delta$$

を満たすものについて  $|f(t_j) - f(t_{j-1})| \leq d$  であるから

$$w_j = \frac{\gamma(t_j) - z_0}{\gamma(t_{j-1}) - z_0}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

と置けば

$$|w_j - 1| = \left| \frac{\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})}{\gamma(t_{j-1}) - z_0} \right| \leq \frac{d}{d_0} < 1$$



より,  $w_j$  の実部は正である. 従って  $\Theta_j = \text{Arg } w_j \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  は一意に定まる. そして  $\prod_{j=1}^n w_j = 1$  より  $\sum_{j=1}^n \Theta_j$  は  $2\pi$  の整数倍である. そこで

$$(1.2.2) \quad n(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \Theta_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \text{Arg} \left( \frac{f(t_j) - z_0}{f(t_{j-1}) - z_0} \right)$$

と置き, 曲線  $\gamma$  の  $z_0$  における回転数と呼ぶ.

以上の定義が正当であることを示すには, 上式の右边が  $[0, 1]$  の分割に依らないことを示す必要がある. そこで (1.2.1) を満たす 2 つの分割について右边が一致することを示そう. それには一方の分割の分点に, もう一方の分割の分点を 1 つずつ追加していく操作を行っても, 右边が変わらないことを言えばよい. 従ってある  $j \in \{1, \dots, n\}$  について  $\tau \in (t_{j-1}, t_j)$  とし,  $[t_{j-1}, t_j]$  が  $[t_{j-1}, \tau]$  と  $[\tau, t_j]$  に細分される時,  $\Theta_j$  と対応する

$$\Theta'_j = \text{Arg} \left( \frac{f(\tau) - z_0}{f(t_{j-1}) - z_0} \right), \quad \Theta''_j = \text{Arg} \left( \frac{f(t_j) - z_0}{f(\tau) - z_0} \right)$$

について  $\Theta_j = \Theta'_j + \Theta''_j$  を示すことに帰着される. これは

$$\frac{f(t_j) - z_0}{f(t_{j-1}) - z_0} = \frac{f(\tau) - z_0}{f(t_{j-1}) - z_0} \cdot \frac{f(t_j) - z_0}{f(\tau) - z_0}$$

より, ある整数  $k$  により

$$\Theta_j = \Theta'_j + \Theta''_j + 2\pi k$$

が成り立つが,

$$|\Theta_j|, |\Theta'_j|, |\Theta''_j| \leq \frac{\pi}{2}$$

であるから  $|\Theta_j - (\Theta'_j + \Theta''_j)| \leq \frac{3\pi}{2}$  である. 従って  $k = 0$  であり,  $\Theta_j = \Theta'_j + \Theta''_j$  が成り立つ.

**Theorem 1.2.1.** 閉曲線  $\gamma$  の回転数  $n(\gamma, z)$  は  $z$  の函数として,  $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$  の各成分上で定数であり, 特に非有界成分上で 0 である.

*Proof.* 上の回転数を定義したときの記号を用いる.

$$|\gamma(t) - z'_0| \geq |\gamma(t) - z_0| - |z_0 - z'_0| \geq d_0 - |z_0 - z'_0|$$

より  $|z_0 - z'_0| < d_0 - d$  ならば  $|\gamma(t) - z'_0| > d$  が成り立つので,  $n(\gamma, z'_0)$  を定義するときの分割として  $n(\gamma, z_0)$  を定義したときの分割と同じものを採用して良い. このとき

$$v_j = \frac{\gamma(t_j) - z_0}{\gamma(t_j) - z'_0}$$

は, あらかじめ  $|z_0 - z'_0| < \min\{d, d_0 - d\}$  となるように取っておけば

$$|v_j - 1| = \left| \frac{z'_0 - z_0}{\gamma(t_j) - z'_0} \right| < 1$$

であるから  $|\text{Arg } v_j| < \frac{\pi}{2}$  である. ここで

$$\Theta'_j = \text{Arg} \left( \frac{\gamma(t_j) - z'_0}{\gamma(t_{j-1}) - z'_0} \right)$$

と置くと

$$\Theta'_j = \Theta_j - \text{Arg } v_j + \text{Arg } v_{j-1} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

となるが,  $|\Theta_j|, |\Theta'_j|, |\text{Arg } v_j|, |\text{Arg } v_{j-1}| < \frac{\pi}{2}$  より  $|k| < 1$  を得る. しかしながら  $k \in \mathbb{Z}$  であるから  $k = 0$  である. よって  $v_0 = v_n$  に注意すれば

$$\sum_{j=1}^n \Theta'_j = \sum_{j=1}^n \Theta_j - \sum_{j=1}^n (\text{Arg } v_j - \text{Arg } v_{j-1}) = \sum_{j=1}^n \Theta_j + \text{Arg } v_0 - \text{Arg } v_n = \sum_{j=1}^n \Theta_j$$

を得る. これは  $n(\gamma, z'_0) = n(\gamma, z_0)$  を示す.

以上より  $n(\gamma, z)$  は局所的に定整数値であることが分かった.  $\Omega$  を  $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$  の成分とし,  $z_0 \in \Omega$  を任意に 1 つ取る. このとき

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \{z \in \Omega : n(\gamma, z) = n(\gamma, z_0)\}, \\ \Omega_1 &= \{z \in \Omega : n(\gamma, z) \neq n(\gamma, z_0)\} \end{aligned}$$

と置けば, ともに開集合であり共通部分は空. また  $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$  である. よって  $\Omega$  の連結性より  $\Omega \subset \Omega_0$  または  $\Omega \subset \Omega_1$  のどちらか一方が成り立つ. ここで  $z_0 \in \Omega \cap \Omega_0$  であるから, 後者は成り立ち得ないので  $\Omega \subset \Omega_0$  である. これは  $n(\gamma, z)$  が  $\Omega$  上で一定値  $n(\gamma, z_0)$  に等しいことを示す.

像  $\gamma([0, 1])$  はコンパクトであるから, 十分大きな  $R > 0$  について  $\gamma([0, 1]) \subset \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq R\}$  である. 従って  $\{w \in \mathbb{C} : |w| > R\} \subset \mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$  が成り立つ. ここで  $\{w \in \mathbb{C} : |w| > R\}$  は連結であるから  $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$  の非有界成分を  $\Omega_\infty$  と置けば  $\{w \in \mathbb{C} : |w| > R\} \subset \Omega_\infty$  である. ここで  $|z_0| > 3R$  ならば  $|\gamma(t) - z_0| \geq 3R - R = 2R$  が成り立ち,  $|\gamma(s) - \gamma(t)| \leq 2R$  であるから  $n(\gamma, z_0)$  を定義するときの分割として “ $n = 1, t_0 = 0, t_1 = 1$ ” を採用してよいことになり

$$\Theta_1 = \text{Arg} \frac{\gamma(1) - z_0}{\gamma(0) - z_0} = 0$$

であるから  $n(\gamma, z_0) = 0$  である. 回転数は各成分で一定値であるから  $\Omega_\infty$  上で 0 である. □

**Theorem 1.2.2.**  $\gamma_0, \gamma_1$  を  $\mathbb{C}$  内の 2 つの閉曲線で,  $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$  とする. また  $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  を  $\gamma_0$  と  $\gamma_1$  を結ぶ連続変形とする. つまり  $F$  は連続で

$$F(t, 0) = \gamma_0(t), \quad F(t, 1) = \gamma_1(t), \quad F(0, s) = F(1, s) = \gamma_0(0), \quad 0 \leq s, t \leq 1$$

を満たすとする. このとき  $z_0 \notin F([0, 1] \times [0, 1])$  ならば  $n(\gamma_0, z_0) = n(\gamma_1, z_0)$  が成り立つ.



*Proof.* 各  $s \in [0, 1]$  を固定し

$$\gamma_s(t) = F(t, s), \quad 0 \leq t \leq 1$$

と置けば,  $\gamma_s$  は  $\gamma_0(0)$  を始点と終点とする閉曲線である.

$$d_0 = \inf\{|F(t, s) - z_0| : (t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]\} > 0$$

と置き,  $d \in (0, d_0)$  を取る. そして  $\delta > 0$  を  $|t - t'| < \delta, |s - s'| < \delta$  ならば

$$|F(t, s) - F(t', s')| < d$$

が成り立つように取る. このとき  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  で  $\max\{s_1 - s_0, \dots, s_n - s_{m-1}, t_1 - t_0, \dots, t_n - t_{n-1}\} < \delta$  を満たす任意の分割について

$$2\pi n(\gamma_j, z_0) = \sum_{k=1}^n \text{Arg} \left( \frac{F(t_k, s_j) - z_0}{F(t_{k-1}, s_j) - z_0} \right)$$

が  $j$  に依らないことを示せばよい. 各  $j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n$  に対しある整数  $k$  を用いて

$$\begin{aligned} & \text{Arg} \left( \frac{F(t_k, s_j) - z_0}{F(t_{k-1}, s_j) - z_0} \right) - \text{Arg} \left( \frac{F(t_k, s_{j-1}) - z_0}{F(t_{k-1}, s_{j-1}) - z_0} \right) \\ &= \text{Arg} \left( \frac{F(t_k, s_j) - z_0}{F(t_k, s_{j-1}) - z_0} \right) - \text{Arg} \left( \frac{F(t_{k-1}, s_j) - z_0}{F(t_{k-1}, s_{j-1}) - z_0} \right) + 2\pi k \end{aligned}$$

と表せるが, 偏角に関する 4 つの項の絶対値が全て  $< \frac{\pi}{2}$  であることより  $k = 0$  が従う. よって

$$\begin{aligned} & 2\pi(n(\gamma_{s_j}, z_0) - n(\gamma_{s_{j-1}}, z_0)) \\ &= \sum_{k=1}^n \text{Arg} \left( \frac{F(t_k, s_j) - z_0}{F(t_{k-1}, s_j) - z_0} \right) - \sum_{k=1}^n \text{Arg} \left( \frac{F(t_k, s_{j-1}) - z_0}{F(t_{k-1}, s_{j-1}) - z_0} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \text{Arg} \left( \frac{F(t_k, s_j) - z_0}{F(t_k, s_{j-1}) - z_0} \right) - \text{Arg} \left( \frac{F(t_{k-1}, s_j) - z_0}{F(t_{k-1}, s_{j-1}) - z_0} \right) \right\} \\ &= \text{Arg} \left( \frac{F(t_n, s_j) - z_0}{F(t_n, s_{j-1}) - z_0} \right) - \text{Arg} \left( \frac{F(t_0, s_j) - z_0}{F(t_0, s_{j-1}) - z_0} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

### 1.3 境界を保つ閉円板から自身への写像の全射性

複素平面内の単位円板を  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  と置き, 同様に単位円周を  $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , 単位閉円板を  $\bar{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  と置く. さて閉曲線  $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  を

$$\gamma_0(t) = e^{2\pi it} = \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t, \quad t \in [0, 1]$$

と置こう. つまり  $\gamma_0$  は 1 から出発し, 単位円周  $\partial\mathbb{D}$  に沿い, 反時計回りに 1 周する閉曲線である. また  $w_0 \in \mathbb{C}$  について  $1_{w_0}(t) \equiv w_0, t \in [0, 1]$  と置く. つまり  $w_0$  に留まったまま動かない閉曲線である.

**Theorem 1.3.1.** 連続写像  $f : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \bar{\mathbb{D}}$  が  $f(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}$  を満たすとする. このとき閉曲線  $f \circ \gamma_0$  の  $\mathbb{D}$  の点に関する回転数が 0 で無ければ  $\mathbb{D} \subset f(\mathbb{D})$  が成り立つ.

*Proof.* 結論を否定すると  $z_0 \in \mathbb{D} \setminus f(\mathbb{D})$  が存在する. ここで

$$F(t, s) = (1 - s)e^{2\pi it} + s \in \bar{\mathbb{D}}, \quad s, t \in [0, 1]$$

と置けば、 $f \circ F$  は閉曲線  $f \circ \gamma_0$  と  $f \circ 1_1 = 1_{f(1)}$  を結ぶ連続変形である。ここで  $f(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}$  より  $z_0 \notin f(\partial\mathbb{D})$  . 従って  $z_0 \notin f(\mathbb{D})$  と合わせて  $z_0 \notin f(\overline{\mathbb{D}})$  が成り立つので  $z_0 \notin f \circ F([0, 1] \times [0, 1])$  である。よって Theorem 1.2.2 より

$$n(z_0, f \circ \gamma_0) = n(z_0, 1_{f(1)}) = 0$$

となるが、これは  $n(z_0, f \circ \gamma_0) \neq 0$  に矛盾する。 □

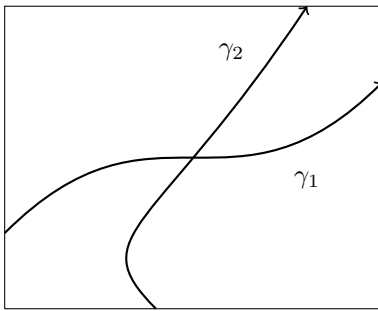
実数  $a, b, c, d$  ( $a < b, c < d$ ) について閉長方形  $R(a, b, c, d)$  を

$$R(a, b, c, d) = \{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Re} z \leq b, c \leq \operatorname{Im} z \leq d\}$$

で定義する。

**Theorem 1.3.2.** 閉長方形  $R(a, b, c, d)$  内の 2 つの連続曲線  $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow R(a, b, c, d), i = 1, 2$  が  $\operatorname{Re} \gamma_1(0) = a, \operatorname{Re} \gamma_1(1) = b, \operatorname{Im} \gamma_2(0) = c, \operatorname{Im} \gamma_2(1) = d$  を満たすとき  $\gamma_1(s) = \gamma_2(t)$  を満たす  $s, t \in [0, 1]$  が存在する。

$R(a, b, c, d)$



横の 2 辺を結ぶ曲線と縦の 2 辺を結ぶ 2 曲線は交点を持つ

*Proof.* 単位円周を 4 等分し

$$A_k = \left\{ e^{it} : \frac{2k-1}{4}\pi \leq t \leq \frac{2k+1}{4}\pi \right\}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

と置く。閉単位円板  $\overline{\mathbb{D}}$  から閉長方形  $R(a, b, c, d)$  への適当な位相写像を用いて変換することにより  $\gamma_i, i = 1, 2$  は  $\overline{\mathbb{D}}$  内の閉曲線であり、 $\gamma_1(0) \in A_2, \gamma_1(1) \in A_0, \gamma_2(0) \in A_3, \gamma_2(1) \in A_1$  を満たすとし、 $\gamma_1(s_0) = \gamma_2(t_0)$  となる  $(s_0, t_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$  が存在することを示せば良い。そこでこのような  $(s_0, t_0)$  が存在しないと仮定すると

$$f(s, t) = \frac{\overline{\gamma_1(s) - \gamma_2(t)}}{|\gamma_1(s) - \gamma_2(t)|}, \quad (s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

を定義することができ  $[0, 1] \times [0, 1]$  で連続であり  $f([0, 1] \times [0, 1]) \subset \partial\mathbb{D}$  が成り立つ。さらに  $[0, 1] \times [0, 1]$  の境界上での  $f$  の挙動を調べると、点  $(s, t)$  が  $(0, 0)$  から出発して  $[0, 1] \times [0, 1]$  の境界を半時計回りに一周するとき、 $f(s, t)$  は  $f(0, 0)$  から (単調とは限らないが) 反時計回りに 1 周する。以下ではこれを確かめよう。下の図 1.3.1 のように  $[0, 1] \times [0, 1]$  の境界を分解し  $\ell_0 = \{s : 0 \leq s \leq 1\}, \ell_1 = \{1 + it : 0 \leq t \leq 1\}, \ell_2 = \{s + i : 0 \leq s \leq 1\}, \ell_3 = \{it : 0 \leq t \leq 1\}$  と置く。

点  $(0, 0)$  から出発して  $\ell_0$  に沿い右に向かって  $(1, 0)$  まで点  $z = s + i0$  を動かすとき、偏角  $\arg$  の 1 価連続な分枝を適当にとれば  $\arg(\gamma_1(s) - \gamma_2(0))$  は、 $\arg(\gamma_2(0) - \gamma_1(0)) \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  から、 $\arg(\gamma_2(1) - \gamma_1(0)) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  までを (単調とは限らないが) 動く。

続いて点  $1 + it$  が  $\ell_1$  を下から上へ動くとき  $\arg(\gamma_1(1) - \gamma_2(t))$  は  $\arg(\gamma_1(1) - \gamma_2(0)) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  から  $\arg(\gamma_1(1) - \gamma_2(1)) \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$  までを動く。

次に点  $s+i$  が  $\ell_2$  を右から左に動くとき  $\arg(\gamma_1(s) - \gamma_2(1))$  は  $\arg(\gamma_1(1) - \gamma_2(1)) \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$  から  $\arg(\gamma_1(0) - \gamma_2(1)) \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$  を動く.

最後に点  $0+it$  が  $\ell_3$  に沿い上から下に動くとき  $\arg(\gamma_1(0) - \gamma_2(t))$  は  $\arg(\gamma_1(0) - \gamma_2(1)) \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$  から  $\arg(\gamma_1(0) - \gamma_2(0)) \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right]$  を動く.

以上より  $[0, 1] \times [0, 1]$  の境界上を点  $(s, t)$  が反時計回りに 1 周動くとき,  $f(s, t)$  も  $\partial\mathbb{D}$  を反時計回りに 1 周動く. 従って回転数は 1 である. このような連続写像  $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \partial\mathbb{D}$  は Theorem 1.3.1 によれば存在しないので矛盾である.

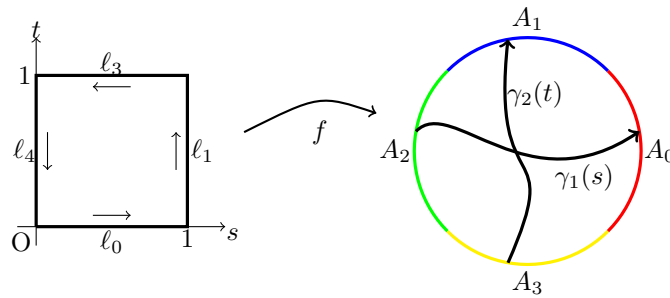


図 1.3.1:  $f(s, t)$  の境界対応

□

次節の Jordan の曲線定理の証明には必要ないが, おまけとして Brouwer の不動点定理の 2 次元版を証明しておこう. 後章とは関係がない議論が続くので興味のない読者はとばして読んでも差し支えない. このように後章を読むのに必要でない箇所は青字で書くことにする.

**Theorem 1.3.3** (The Brouwer Fixed Point Theorem). 連続写像  $f: \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \bar{\mathbb{D}}$  は不動点を持つ. つまり  $f(z_0) = z_0$  を満たす  $z_0 \in \bar{\mathbb{D}}$  が存在する.

*Proof.* もし存在しないとすれば,  $f(z) \neq z$  が任意の  $z \in \bar{\mathbb{D}}$  について成立する. そこで各点  $z \in \bar{\mathbb{D}}$  について  $f(z)$  から  $z$  へ延びる半直線と  $\partial\mathbb{D}$  との交点を  $g(z)$  と置く.  $g(z)$  の表示式を実際に求めよう. これには

$$|f(z) + tu(z)| = 1, \quad u(z) := \frac{z - f(z)}{|z - f(z)|}$$

を満たす  $t > 0$  を求めれば良いが, 左の等式を自乗して

$$t^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{f(z)}u(z))t + |f(z)|^2 - 1 = 0$$

より

$$t = -\operatorname{Re}(\overline{f(z)}u(z)) \pm \sqrt{(\operatorname{Re}(\overline{f(z)}u(z)))^2 + 1 - |f(z)|^2}$$

となるが,  $t > 0$  であるから  $+$  の方を取ればよい.

$$g(z) = f(z) + u(z)(-\operatorname{Re}(\overline{f(z)}u(z)) + \sqrt{(\operatorname{Re}(\overline{f(z)}u(z)))^2 + 1 - |f(z)|^2})$$

である. この式表示と  $u(z)$  が仮定より  $z \in \bar{\mathbb{D}}$  について連続であることより  $g(z)$  も  $\bar{\mathbb{D}}$  において連続であることが分かる. また作り方から  $z \in \partial\mathbb{D}$  について  $g(z) = z$  であり,  $g(\bar{\mathbb{D}}) \subset \partial\mathbb{D}$  である. しかしながらこのような性質を持つ連続写像は, 前定理より存在しない. □

## 1.4 前原による Jordan の曲線定理の証明

それでは前原 ([5]) による Jordan の曲線定理の証明を紹介しよう。

まず区間  $I \subset \mathbb{R}$  から  $\mathbb{C}$  の中への連続写像  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$  のことを曲線 (curve) と呼んだことを思い出しておこう。そして  $\gamma$  が 1 対 1 のとき単純曲線 (simple curve) と言う。本節では特に  $I = [0, 1]$  の場合を取り扱うことにし、 $\gamma(0)$  を始点  $\gamma(1)$  を終点と呼ぶ。また始点と終点一致する、つまり  $\gamma(0) = \gamma(1)$  の場合  $\gamma$  は閉曲線であると言う。閉曲線の定義域を  $[0, 1]$  から、単位円周  $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 = 1\}$  に変更したほうが都合が良いことも多い。この場合は連続写像  $\gamma : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  のことを閉曲線 (closed curve) と呼ぶことになり、 $\gamma$  が 1 対 1 のときは単純閉曲線 (simple closed curve) と呼ぶ。単純閉曲線は Jordan 曲線 (Jordan curve) と呼ばれることもある。単純曲線  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  の値域を像に制限し、 $\gamma : [0, 1] \rightarrow \gamma([0, 1])$  とみれば全単射になり、逆写像が存在する。また  $\gamma([0, 1])$  に  $\mathbb{C}$  の位相からの相対位相 ( $\mathbb{C}$  の距離を用いた距離空間とみてもよい) を導入すれば、コンパクト空間から Hausdorff 空間への全単射連続な写像であるから、逆写像も連続であることに注意しておこう。これは単純閉曲線  $\gamma : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  についても同様である。

**Remark 1.4.1.** また曲線  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  について慣例に従い、その像  $\gamma([0, 1])$  も単に  $\gamma$  と書き表すことにする。

**Lemma 1.4.2.**  $A$  が閉集合ならば  $\mathbb{C} \setminus A$  の任意の成分  $V$  について  $\partial V \subset A$  が成り立つ。

*Proof.*  $z_0 \in \partial V$  とし、 $\mathbb{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ ,  $r > 0$  を  $z_0$  の円近傍とする。このとき  $\mathbb{D}(z_0, r) \cap A \neq \emptyset$  が成り立つ。実際  $\mathbb{D}(z_0, r) \cap A = \emptyset$  ならば  $\mathbb{D}(z_0, r) \subset \mathbb{C} \setminus A$  であり

$$V \subsetneq V \cup \mathbb{D}(z_0, r) \subset \mathbb{C} \setminus A$$

が成り立つ。ここで  $V, \mathbb{D}(z_0, r)$  はともに連結であり  $V \cap \mathbb{D}(z_0, r) \neq \emptyset$  であるから  $V \cup \mathbb{D}(z_0, r)$  も連結である。これは  $V$  が成分  $A$  の成分であること、つまり  $\mathbb{C} \setminus A$  に含まれる最大の連結集合であることに反する。以上より  $z_0 \in \overline{A} = A$  が従うので  $\partial V \subset A$  である。□

**Theorem 1.4.3.**  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  が単純曲線ならば  $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$  は領域、つまり連結開集合である。

*Proof.*  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  が連結でないと仮定しよう。このとき  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  には 2 つ以上の成分が存在する。 $\gamma$  はコンパクトであるから  $\infty$  を含む成分が存在するので  $V_\infty$  と置く。また  $V_\infty$  以外の成分の 1 つを  $V$  と置く。このとき Lemma 1.4.2 より  $\partial V \subset \gamma$  が成り立つ。

$R > 0$  を  $\gamma([0, 1]) \subset \mathbb{D}(0, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$  となるように取る。このとき  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}(0, R)$  は連結で、 $\gamma$  と交わらないから  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}(0, R) \subset V_\infty$  であり、これより  $V \subset \mathbb{D}(0, R)$  が分かる。

写像  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \gamma([0, 1])$  の逆写像  $\gamma^{-1}$  は閉集合  $\gamma([0, 1])$  上で連続であるから Tietze の拡張定理よりある連続写像  $\varphi : \overline{\mathbb{D}}(0, R) \rightarrow [0, 1]$  で  $\varphi|_\gamma = \gamma^{-1}$  を満たすものが存在する。このとき合成写像  $\gamma \circ \varphi : \overline{\mathbb{D}}(0, R) \rightarrow \gamma([0, 1])$  は連続で  $\gamma$  上、恒等写像に等しい。そこで

$$f(z) = \begin{cases} z, & z \in \overline{\mathbb{D}}(0, R) \setminus V \\ \gamma \circ \varphi(z), & z \in V \end{cases}$$

と置く。このとき  $f$  が  $\overline{\mathbb{D}}(0, R)$  で連続であることは各  $z \in \partial V \subset \gamma$  上で  $\gamma \circ \varphi(z) = z$  であることより従う。また  $\partial\mathbb{D}(0, R)$  上で、恒等写像である。しかしながら  $f$  の値域は  $(\overline{\mathbb{D}}(0, R) \setminus V) \cup \gamma$  であり、 $\gamma([0, 1]) \cap V = \emptyset$  であるから、 $V$  の任意の点は  $f$  の値域に属さない。このような連続写像は Theorem 1.3.1 によれば存在しないので矛盾である。□

**Lemma 1.4.4.**  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  を *Jordan 曲線* とする. このとき  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  が連結でなければ各成分の境界は  $\gamma$  である.

*Proof.* 像  $\gamma$  はコンパクトであるから, 開集合  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  は  $\infty$  のある近傍を含む成分をただ 1 つ持つので, それを  $V_\infty$  と置く. また仮定より  $V_\infty$  以外の成分も存在するので, それらの中の任意の 1 つを  $V$  と置く. Lemma 1.4.2 より  $\partial V_\infty \subset \gamma$  と  $\partial V \subset \gamma$  が成り立つ. ここで  $\partial V \subsetneq \gamma$  と仮定しよう. このとき必要ならばパラメータを適当に取り替えることにより  $\gamma(0) = \gamma(1) \in \gamma([0, 1]) \setminus \partial V$  としてよい. 従って  $\partial V \subset \gamma_0$  を満たす  $\gamma$  の部分曲線  $\gamma_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $0 < a < b < 1$  が存在する. このとき  $\mathbb{C} \setminus \gamma_0$  は連結ゆえ任意の 2 点  $z_0 \in V$ ,  $z_1 \in V_\infty$  を結ぶ  $\mathbb{C} \setminus \gamma_0$  内の曲線が存在する. この曲線は  $V$  と  $V_\infty$  の 2 点を結ぶにも関わらず  $\partial V (\subset \gamma_0)$  と交わらないので矛盾である. 従って  $\partial V = \gamma$  が成り立つ.

$\partial V_\infty = \gamma$  についても同様である. □

**Theorem 1.4.5** (Jordan の曲線定理).  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  が *Jordan 曲線* ならば開集合  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  は  $\infty$  の近傍を含むものと有界なもの 2 つの成分よりなる. またそれぞれの成分を  $V_\infty, V_b$  と置けば

$$\partial V_\infty = \partial V_b = \gamma$$

が成り立つ.

*Proof.* 開集合  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  の  $\infty$  のある近傍を含む成分を  $V_\infty$  と置く. このとき  $V_\infty$  以外に有界な成分がただ 1 つ存在することを示せば十分である. 実際  $V_\infty$  ともう一つの成分に Lemma 1.4.4 を適用すれば定理の後半の主張が成り立つことが分かる. 以下では  $[z, w], (z, w)$  で, それぞれ  $z, w$  を結ぶ閉線分, 開線分を表すとする. また  $(z, w], [z, w)$  も同様とする.

さて像  $\gamma$  はコンパクトであるから,  $\max_{\zeta_1, \zeta_2 \in \gamma} |\zeta_1 - \zeta_2| = |z_1 - z_2|$  を満たす  $z_1, z_2 \in \gamma$  が存在する. 必要ならば回転と拡大を施すことにより  $z_1 = -1, z_2 = 1$  と仮定してよい. このとき

$$\gamma \subset E = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| \leq 1, |\operatorname{Im} z| \leq 2\}$$

であり,

$$\gamma \cap \partial E = \{\pm 1\}$$

が成り立つ. Theorem 1.3.2 より線分  $[-2i, 2i]$  と  $\gamma$  は交わるので

$$l = \max\{y \in [-2, 2] : yi \in \gamma\}$$

とおく. このとき

(i) 線分  $[2i, li)$  は  $\gamma$  と交わらない.

$\pm 1$  は  $\gamma$  を 2 つの部分単純曲線に分解するが,  $il$  が属す方を  $\gamma_+$  と置き, もう一方を  $\gamma_-$  と置く. そして

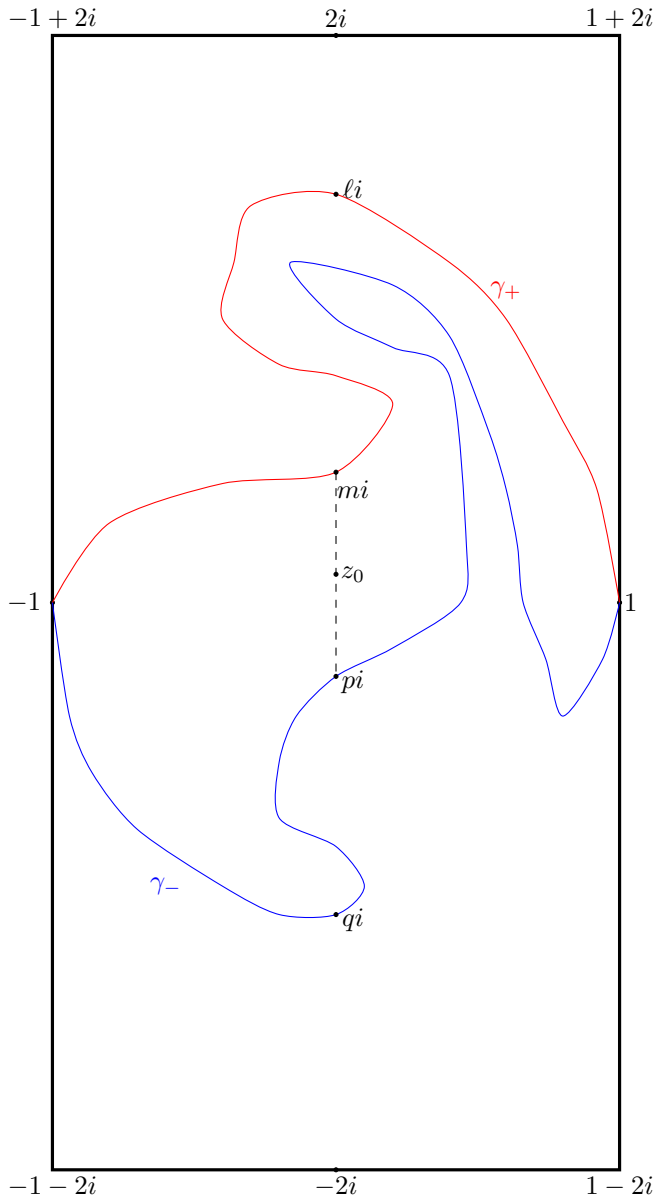
$$m = \min\{y \in [-2, 2] : iy \in \gamma_+\}$$

とおく.  $l$  と  $m$  は一致することもあり得ることに注意しておこう. このとき

(ii) 線分  $(mi, -2i]$  は  $\gamma_+$  と交わらない.

さて  $\widehat{li, mi}$  で  $\gamma_+$  の部分曲線で  $li$  と  $mi$  を結ぶものを表そう. このとき線分  $(mi, -2i]$  と  $\gamma_-$  は交わる. 実際  $+$  で曲線をつなぐ操作を表すことにすると  $[2i, li] + \widehat{li, mi} + [mi, -2i]$  と  $\gamma_-$  は Theorem 1.3.2 により交わるが,  $[2i, li)$  は  $\gamma$  と交わらず  $li$  は  $\gamma_+$  の点ゆえ, 線分  $[2i, li]$  と  $\gamma_-$  は交わらない. また  $\widehat{li, mi}$  は  $\gamma_+$  の部

分曲線であるから  $\gamma_-$  とは交わらない. 従って  $[2i, li] + \widehat{li, mi} + [mi, -2i]$  と  $\gamma_-$  の交点は線分  $(mi, -2i]$  上  
にのみ存在する.



ここで

$$p = \max\{y : yi \in \gamma_- \cap [mi, -2i]\}, \quad q = \min\{y : yi \in \gamma_- \cap [mi, -2i]\}$$

と置く. このとき  $m \geq p$  であるが, 特に  $\gamma_+ \cap \gamma_- = \pm 1$  より  $mi$  と  $pi$  が一致することはないので  $m > p$  であり, 開線分  $(mi, pi)$  は  $\gamma$  と交わることはない. そこで  $z_0 = i(m+p)/2$  と置けば,  $z_0 \notin \gamma$  である.

$z_0$  の属す  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  の連結成分は  $V_\infty$  ではないことを示そう. 実際もし  $z_0 \in V_\infty$  ならば  $z_0$  から出発して  $E$  の外部の任意の 1 点で終わる曲線  $\alpha : [0, 1] \rightarrow V_\infty$  が存在する.

$$t_0 = \inf\{t \in [0, 1] : \alpha(t) \notin \text{Int } E\}, \quad w_0 = \alpha(t_0) \in \partial E$$

と置き,  $\alpha_0 = \alpha|_{[0, t_0]}$  と置く. ここで  $w_0 \in V_\infty$  より  $w_0 \neq \pm 1$  であるから  $\text{Im } w_0 \neq 0$  である.  $\text{Im } w_0 < 0$  のときは  $w_0$  から出発して  $\pm 1$  を通らずに  $-2i$  に至る  $\partial E$  内の曲線  $\widehat{w_0, -2i}$  が取れる. このとき

$$[2i, li] + \widehat{li, mi} + [mi, z_0] + \alpha_0 + \widehat{w_0, -2i}$$

は  $\gamma_-$  と交わらないことになり矛盾である。  $\text{Im } w_0 > 0$  のときは  $w_0$  から出発して  $\pm 1$  を通らずに  $2i$  に至る  $\partial E$  内の曲線  $\widehat{w_0, 2i}$  が取れる。このとき

$$[-2i, z_0] + \alpha_0 + \widehat{w_0, 2i}$$

は  $\gamma_+$  と交わらないことになり矛盾である。以上より  $z_0$  の属す  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  の連結成分を  $V$  と置けば  $V \cap V_\infty = \emptyset$  である。

$V$  以外の他の成分が存在しないことを背理法で示す為に、もう 1 つの有界な成分  $W$  が存在すると仮定しよう。このとき  $W \subset E$  である。

$$\beta = [2i, li] + \widehat{li, mi} + [mi, pi] + \widehat{pi, qi} + [qi, -2i]$$

は  $2i$  と  $-2i$  を結び、 $V_\infty \cup V \cup \gamma$  に含まれるので  $\beta \cap W = \emptyset$  である。  $\beta$  は  $\pm 1$  を通らないので、それぞれ  $\pm 1$  を中心とする円板  $D_+, D_-$  を

$$D_+ \cap \beta = \emptyset = D_- \cap \beta$$

を満たすように取れる。ここで Lemma 1.4.2 より  $\partial W = \gamma$  ゆえ  $a \in W \cap D_-, b \in W \cap D_+$  が存在する。  $\widehat{a, b}$  で  $a$  から出発して  $b$  に終わる  $W$  内の曲線とすると

$$[-1, a] + \widehat{a, b} + [a, 1]$$

は  $-1$  と  $1$  を結ぶ  $E$  内の曲線であるが  $\beta$  と交わらないので矛盾である。  $\square$

Jordan 曲線  $\gamma$  について  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  の  $\infty$  をある近傍を含む非有界な成分を、 $\gamma$  の外側の領域と呼び、有界な成分を  $\gamma$  の内側の領域または  $\gamma$  で囲まれた領域と呼ぶ。

**Corollary 1.4.6.**  $\gamma : \partial \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  を Jordan 曲線とすると、 $\gamma$  の内側の領域上で恒等的に  $n(\gamma, z) \equiv 1$  または  $n(\gamma, z) \equiv -1$  のどちらかが成立する。また  $\gamma$  の外側の領域上では  $n(\gamma, z) \equiv 0$  が成立する。

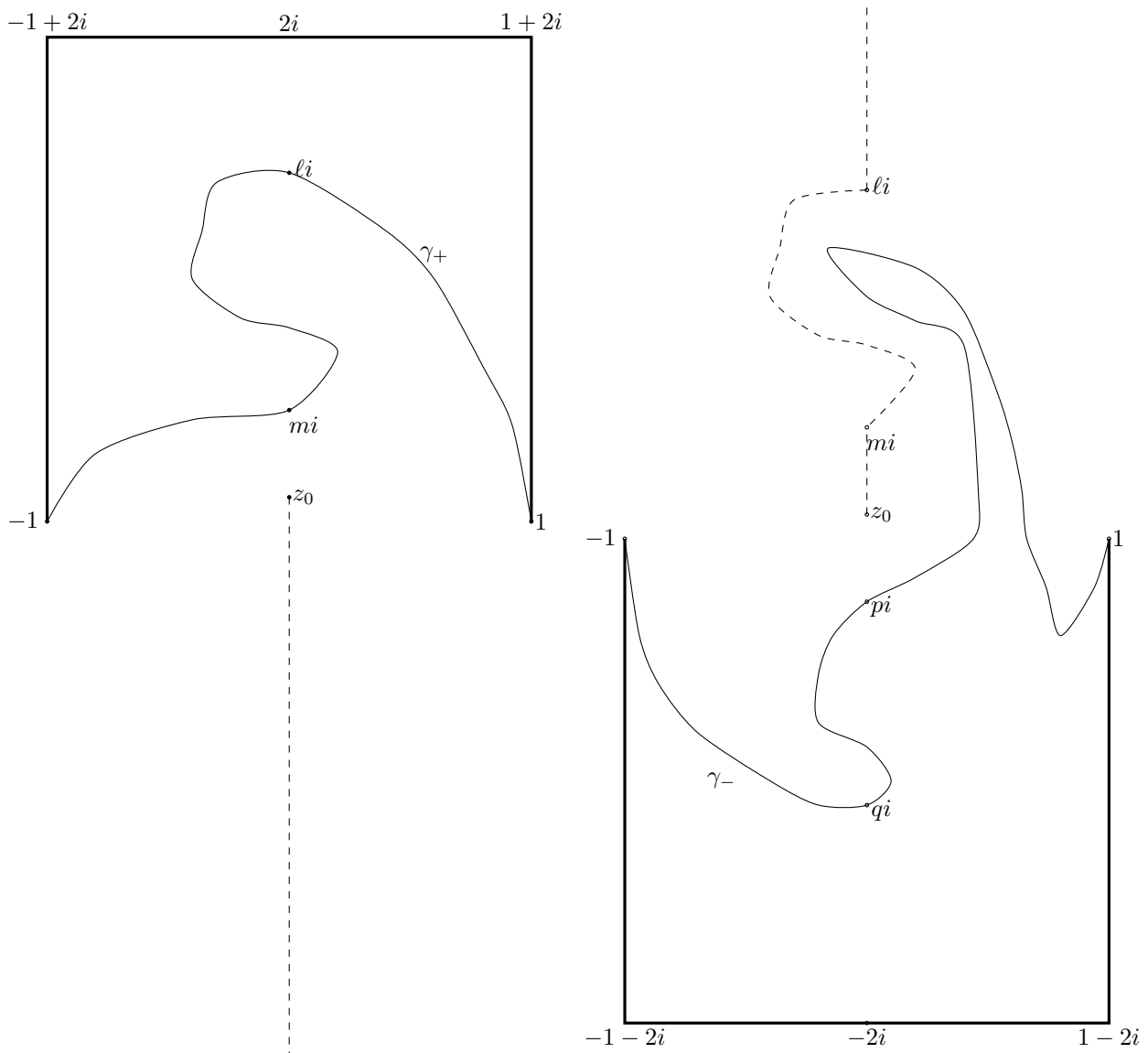
*Proof.* 閉曲線  $\gamma$  について回転数  $n(\gamma, z)$  は  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  で定義され、連続で整数値であるから  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  の各成分上で整数の定数値函数である。特に非有界な成分上では  $0$  となることに注意する。 ( $\lim_{z \rightarrow \infty} n(\gamma, z) = 0$  より従う。)

以下では Theorem 1.4.5 の証明中の記号を用いる。そして  $\partial \mathbb{D}$  上の 2 点  $\gamma^{-1}(1)$  と  $\gamma^{-1}(-1)$  を結ぶ反時計回りの円弧に  $\gamma_+$  が対応し、 $\gamma^{-1}(-1)$  と  $\gamma^{-1}(1)$  を結ぶ反時計回りの円弧に  $\gamma_-$  が対応する場合に  $n(z_0, \gamma) = 1$  となることを証明する。(対応が逆の場合は  $n(z_0, \gamma) = -1$  となる。)

まず  $\delta_+$  で線分  $[-1, -1+2i], [-1+2i, 1+2i], [1+2i, 1]$  よりなる、 $-1$  と  $1$  を結ぶ折れ線とする。このとき  $\gamma_+ + \delta_+$  は Jordan 曲線であり、 $z_0$  から  $z_0 - i\infty$  へ向かう半直線と交わらない。従って  $z_0$  は  $\mathbb{C} \setminus (\gamma_+ + \delta_+)$  の非有界成分  $V_\infty(\gamma_+ + \delta_+)$  に属す。よって  $n(\gamma_+ + \delta_+, z_0) = 0$  である。次に  $\delta_-$  を  $[1, 1-2i], [1-2i, -1-2i], [-1-2i, -1]$  よりなる、 $1$  と  $-1$  を結ぶ折れ線とする。このとき  $\gamma_+$  の部分曲線で  $mi$  と  $li$  を結ぶものを  $\widehat{mi, li}$  とし、 $[li, li + i\infty)$  で  $li$  から真上にのびる半直線を表せば、 $[z_0, mi] + \widehat{mi, li} + [li, li + i\infty)$  は、Jordan 曲線  $\gamma_- + \delta_-$  と交わらない。よって  $n(\gamma_- + \delta_-, z_0) = 0$  である。以上より

$$0 = n(\gamma_+ + \delta_+, z_0) + n(\gamma_- + \delta_-, z_0) = n(\gamma, z_0) + n(\delta_+ + \delta_-, z_0)$$

となるが、 $n(\delta_+ + \delta_-, z_0) = -1$  であるから  $n(\gamma, z_0) = 1$  となる。  $\square$



## 1.5 Jordan 曲線の内, 外部と横断線

この節でも曲線  $\gamma$  とその像を区別せず,  $\gamma$  で写像とその像の両方を表す.

**Definition 1.5.1.** Jordan 曲線  $\gamma : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  に対し  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  の 2 つの成分のうち, 非有界な方を  $\gamma$  の外側 (または外部) と呼び記号  $D_o(\gamma)$  で表す. また有界な方を  $\gamma$  の内側 (または内部) と呼び  $D_i(\gamma)$  と表すことにする.  $D_i(\gamma)$  は  $\gamma$  で囲まれた Jordan 領域 (Jordan domain) と呼ばれることも多い.

**Theorem 1.5.2.** 2 つの Jordan 曲線  $\gamma_j : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $j = 1, 2$  について  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$  ならば (a)  $\gamma_1 \subset D_i(\gamma_2)$ , (b)  $\gamma_2 \subset D_i(\gamma_1)$  または (c) “ $\gamma_1 \subset D_o(\gamma_2)$  かつ  $\gamma_2 \subset D_o(\gamma_1)$ ” のどれか 1 つ, そして 1 つのみが必ず成り立つ. さらに

(i) (a)  $\gamma_1 \subset D_i(\gamma_2)$  ならば

$$D_i(\gamma_1) \subset D_i(\gamma_2), \quad D_o(\gamma_2) \subset D_o(\gamma_1), \quad \gamma_2 \subset D_o(\gamma_1)$$

が成り立つ.



(ii) (b)  $\gamma_2 \subset D_i(\gamma_1)$  ならば

$$D_i(\gamma_2) \subset D_i(\gamma_1), \quad D_o(\gamma_1) \subset D_o(\gamma_2), \quad \gamma_1 \subset D_o(\gamma_2)$$

が成り立つ.

(iii) (c)  $\gamma_1 \subset D_o(\gamma_2)$  かつ  $\gamma_2 \subset D_o(\gamma_1)$  ならば

$$D_i(\gamma_1) \cap D_i(\gamma_2) = \emptyset, \quad D_i(\gamma_1) \subset D_o(\gamma_2), \quad D_i(\gamma_2) \subset D_o(\gamma_1)$$

が成り立つ.

*Proof.*  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$  より  $\gamma_1 \subset \mathbb{C} \setminus \gamma_2 = D_i(\gamma_2) \cup D_o(\gamma_2)$  であるが,  $\gamma_1$  の連結性より  $\gamma_1 \subset D_i(\gamma_2)$  または  $\gamma_1 \subset D_o(\gamma_2)$  のどちらか一方が成り立つ. 同様に  $\gamma_2 \subset D_i(\gamma_1)$  または  $\gamma_2 \subset D_o(\gamma_1)$  のどちらか一方が成り立つので, 論理的には次の 4 つの可能性がある.

	$\gamma_1 \subset D_i(\gamma_2)$	$\gamma_1 \subset D_o(\gamma_2)$
$\gamma_2 \subset D_i(\gamma_1)$	(d)	(b')
$\gamma_2 \subset D_o(\gamma_1)$	(a')	(c)

手始めに (i) を示そう. これが示されれば  $(a) \iff (a')$  も従うことに注意しよう.  $\gamma_1 \subset D_i(\gamma_2)$  ならば

$$\gamma_1 \cap D_o(\gamma_2) \subset D_i(\gamma_2) \cap D_o(\gamma_2) = \emptyset$$

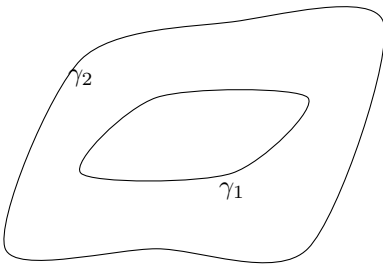
より  $D_o(\gamma_2) \subset \mathbb{C} \setminus \gamma_1 = D_i(\gamma_1) \cup D_o(\gamma_1)$  が成り立つ. ここで  $D_o(\gamma_2)$  は連結であるから  $D_o(\gamma_2) \subset D_i(\gamma_1)$  または  $D_o(\gamma_2) \subset D_o(\gamma_1)$  のどちらか一方が成り立つことになるが  $D_o(\gamma_2)$  は非有界で  $D_i(\gamma_1)$  は有界であるから前者は成り立たない. よって

$$D_o(\gamma_2) \subset D_o(\gamma_1)$$

が成り立つ. 両辺の閉包を取ると

$$(1.5.1) \quad \gamma_2 \cup D_o(\gamma_2) = \overline{D_o(\gamma_2)} \subset \overline{D_o(\gamma_1)} = \gamma_1 \cup D_o(\gamma_1)$$

である. これと  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$  より  $\gamma_2 \subset D_o(\gamma_1)$  が成り立つことが分かる. また (1.5.1) の両辺の補集合を取ると  $D_i(\gamma_1) \subset D_i(\gamma_2)$  が従う.



(ii) が成り立つことも殆ど同様に示されるので省略するが  $(b) \iff (b')$  が成り立つことに注意しておこう.

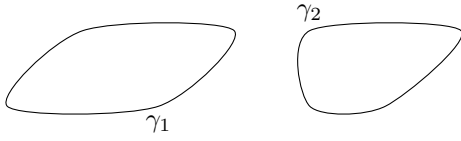
(iii) を示そう.  $\gamma_1 \subset D_o(\gamma_2)$  より

$$\gamma_1 \cap D_i(\gamma_2) \subset D_o(\gamma_2) \cap D_i(\gamma_2) = \emptyset$$

より  $D_i(\gamma_2) \subset \mathbb{C} \setminus \gamma_1 = D_i(\gamma_1) \cup D_o(\gamma_1)$  が成り立つが,  $D_i(\gamma_2)$  の連結性より  $D_i(\gamma_2) \subset D_i(\gamma_1)$  または  $D_i(\gamma_2) \subset D_o(\gamma_1)$  のどちらか一方が成り立つ. 仮に  $D_i(\gamma_2) \subset D_i(\gamma_1)$  が成り立つとすると

$$\gamma_2 \cup D_i(\gamma_2) = \overline{D_i(\gamma_2)} \subset \overline{D_i(\gamma_1)} = \gamma_1 \cup D_i(\gamma_1)$$

となるが、これと  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$  より  $\gamma_2 \subset D_i(\gamma_1)$  を得る。これは  $\gamma_2 \subset D_o(\gamma_1)$  に反する。よって  $D_i(\gamma_2) \subset D_o(\gamma_1)$  が成り立つ。同様に  $\gamma_2 \subset D_o(\gamma_1)$  より  $D_i(\gamma_1) \subset D_o(\gamma_2)$  が導かれる。



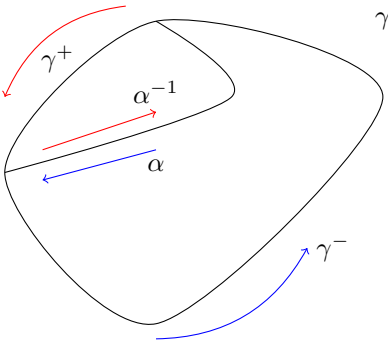
最後に (d) が起き得ないことを示そう。これは (i) の証明より  $\gamma_1 \subset D_i(\gamma_2)$  から  $D_i(\gamma_1) \subset D_i(\gamma_2)$  が従うことと、 $\gamma_2 \subset D_i(\gamma_1)$  から  $D_i(\gamma_2) \subset D_i(\gamma_1)$  が従うことを合わせて  $D_i(\gamma_1) = D_i(\gamma_2)$  となるが、これより  $\gamma_1 = \partial D_i(\gamma_1) = \partial D_i(\gamma_2) = \gamma_2$  となり矛盾を生じる。□

**Definition 1.5.3 (横断線).**  $\Omega$  を  $\mathbb{C}$  内の領域、 $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  を単純曲線とする。  $\alpha$  の 2 つの端点が両方とも  $\partial\Omega$  に属し、残りの点が全て  $\Omega$  に属す、つまり  $\alpha(0), \alpha(1) \in \partial\Omega$  かつ  $\alpha((0, 1)) \subset \Omega$  が成り立つとき  $\alpha$  は  $\Omega$  の横断線 (cross cut) であると言う。

**Theorem 1.5.4.**  $\gamma : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  を Jordan 曲線とし、 $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  を  $\gamma$  で囲まれた領域  $D_i(\gamma)$  の横断線とする。このとき  $\alpha(0) = \gamma(e^{it_0})$ ,  $\alpha(1) = \gamma(e^{it_1})$ ,  $0 \leq t_0 < t_1 < 2\pi$  となる  $t_0, t_1$  を取り  $\gamma^+$  を  $\gamma(e^{it})$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$  と  $\alpha^{-1}$ ,  $0 \leq t \leq 1$  をつないで得られる Jordan 曲線とし、 $\gamma^-$  を  $\alpha$  と  $\gamma(e^{it})$ ,  $t_1 \leq t \leq t_0 + 2\pi$  とをつないで得られる Jordan 曲線とすれば、 $D_i(\gamma) \setminus \alpha([0, 1])$  の連結成分への分解は

$$D_i(\gamma) \setminus \alpha([0, 1]) = D_i(\gamma^+) \cup D_i(\gamma^-)$$

で与えられる。



*Proof.* まず

$$\gamma^\pm \cap D_o(\gamma) \subset (\gamma \cup D_i(\gamma)) \cap D_o(\gamma) = \emptyset$$

であるから  $D_o(\gamma) \subset \mathbb{C} \setminus \gamma^\pm = D_i(\gamma^\pm) \cup D_o(\gamma^\pm)$  が成り立つが  $D_o(\gamma)$  は連結であるから、 $D_i(\gamma^\pm)$  または  $D_o(\gamma^\pm)$  のどちらか一方に含まれる。しかしながら  $D_o(\gamma)$  と  $D_o(\gamma^\pm)$  は  $\infty$  の近傍を共有するので  $D_o(\gamma) \subset D_o(\gamma^\pm)$  が成り立つ。よって

$$D_o(\gamma) \cup \gamma = \overline{D_o(\gamma)} \subset \overline{D_o(\gamma^\pm)} = D_o(\gamma^\pm) \cup \gamma^\pm$$

であるが、両辺の補集合を取れば

$$D_i(\gamma^\pm) \subset D_i(\gamma)$$

が従う。よって  $D_i(\gamma^+) \cup D_i(\gamma^-) \subset D_i(\gamma) \setminus \alpha$  が成り立つ。

次に  $z \in D_i(\gamma) \setminus \alpha$  を取ると  $n(\gamma, z) = 1$  または  $n(\gamma, z) = -1$  である。また  $\gamma^+, \gamma^-$  はともに  $\alpha$  に対応する部分を含むが、向きが逆であるから

$$n(\gamma, z) = n(\gamma^+, z) + n(\gamma^-, z)$$

が成り立つ.  $n(z, \gamma^+)$ ,  $n(z, \gamma^-)$  も  $0, \pm 1$  のいずれかであるから, 結局  $n(z, \gamma^+)$  または  $n(z, \gamma^-)$  のどちらか一方は  $\pm 1$  であり, もう一方は  $0$  である. 従って  $z \in D_i(\gamma^+)$ ,  $z \in D_i(\gamma^-)$  のどちらか一方が成り立つ. よって  $D_i(\gamma) \setminus \alpha \subset D_i(\gamma^+) \cup D_i(\gamma^-)$  が成り立つ.

以上で

$$D_i(\gamma) \setminus \alpha = D_i(\gamma^+) \cup D_i(\gamma^-)$$

となることが分かった. 右辺の 2 つの集合はともに連結開集合である. 従って共通部分が空であることを示せば連結成分への分解を与えていることが分かる.

$z \in D_i(\gamma^+) \cap D_i(\gamma^-)$  が存在するとすると,  $n(\gamma^+, z) = \pm 1$ ,  $n(\gamma^-, z) = \pm 1$  であるから  $n(\gamma, z) = n(\gamma^+, z) + n(\gamma^-, z)$  は  $\pm 2$  または  $0$  である. ( $\gamma$  は Jordan 曲線であるから  $n(\gamma, z) = 2$  となることはない.) どの場合も  $z \in D_i(\gamma)$  に矛盾する. □

## 第2章

# 単純多角形に関する Schönflies の定理

前章で前原 ([5]) による Jordan の曲線定理の証明を紹介した. 他にも  $\mathbb{C}$  または  $\mathbb{C}$  の位相について知っておくべき事項はまだある. 例えば “Riemann 球面  $\hat{\mathbb{C}}$  内の領域  $\Omega$  が単連結であるための必要十分条件は, 補集合  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  が空集合であるかまたは連結であること” などがそうである. このような結果を証明するには, Jordan の曲線定理の精密化である, Schönflies の定理が重要な役割を果たす. Schönflies の定理とは, “与えられた Jordan 曲線  $\gamma: \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  に対し位相写像  $\phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  で  $\phi(\partial\mathbb{D}) = \gamma(\partial\mathbb{D})$  を満たすものが存在する” という定理である. これを, 連続性と単射性のみ仮定する一般の  $\gamma$  について証明するのは, この冊子の程度を越える. しかしながら応用上  $\gamma$  が単純多角形の場合に限定しても差し支えないことが多い. そこで手始めに §2.1 において  $\gamma$  が折れ線よりなる場合に Jordan 曲線定理が成り立つことを, 前章と独立に, より簡明な方法で証明する. ([9] 及び, その解説である [3], [4] を参照.) このときに導入される単純多角形に関する交点数などの様々な手法や考え方は, この章のみならず, 第3章でも応用される.

§2.2 において,  $\gamma$  が単純多角形の場合に多角形の頂点の個数に関する帰納法を用いて Schönflies の定理を証明する. これには単純多角形には対角線や耳が存在すること, そして対角線や耳の部分で分解できることが, 帰納法のサイクルを回す上で重要である. この節の内容は [2] を参考にさせて頂いた §2.3 では単純曲線, Jordan 曲線 (= 単純閉曲線) をそれぞれ単純折れ線, 単純多角形で補間することにより近似ができることを [1] に従って示す.

Jordan の曲線定理や Schönflies の定理の歴史については [2] の Chapter 1 が詳しい. 一読をお勧めする.

## 2.1 単純多角形に関する Jordan の定理

以下では  $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$  について  $[z_0, z_1]$  で  $a, b$  を端点とする (閉) 線分を表す. つまり

$$[z_0, z_1] = \{(1-t)z_0 + tz_1 : 0 \leq t \leq 1\}$$

である. また開線分

$$(z_0, z_1) = \{(1-t)z_0 + tz_1 : 0 < t < 1\}$$

を  $[z_0, z_1]$  の内部と言う.

Jordan 曲線  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  が単純多角形 (simple polygon) であるとは, 区間  $[0, 1]$  の分割  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ , と複素定数  $\alpha_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $\beta_k \in \mathbb{C}$ ,  $k = 1, \dots, n$  により

$$\gamma(t) = \alpha_k t + \beta_k, \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k, \quad k = 1, \dots, n$$

と表せる時を言う. つまり有限個の線分をつないでできる Jordan 曲線が単純多角形である. 単純多角形のこ

とを Jordan 多角形と呼ぶこともある。以下では

$$z_k = \gamma(t_k), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$E_k = \{\gamma(t) : t_{k-1} \leq t \leq t_k\} = [z_{k-1}, z_k], \quad k = 1, \dots, n$$

と置く。  $z_n = z_0$  に注意しよう。また

$$z_{n+1} = z_1, \quad E_0 = E_n, \quad E_{n+1} = E_1$$

と置く。各  $z_k, E_k$  はそれぞれ  $\gamma$  の頂点, 辺と呼ばれる。混乱が生じない限り像  $\gamma(\partial\mathbb{D})$  を  $\gamma$  で表して, 曲線とその像を区別せずに書き表すことは, 前章と同様である

**Theorem 2.1.1** (多角形版 Jordan の曲線定理).  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  を単純多角形とすれば, 開集合  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  の連結成分は非有界なものが 1 つと, 有界なものが 1 つの 2 つよりなる。また成分のそれぞれを  $U_0, U_1$  と置けば  $\partial U_0 = \partial U_1 = \gamma$  が成り立つ。

*Proof.* 点  $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$  より伸び, 実軸の正の向きと角  $\theta$  をなす半直線を  $r(z, \theta)$  と置く。また  $r(z, \theta)$  と  $\gamma$  の交点の個数を  $n(z, \theta)$  と表し, 交点数と呼ぶ。但し交点数の数え方は次のようにする。

- (a)  $r(z, \theta)$  が辺  $E_k$  を内部の点 (頂点で無い点) において横切るときは 1 と数える。
- (b)  $r(z, \theta)$  が頂点  $z_k$  を通り,  $z_k$  を共有する 2 つの辺  $E_k, E_{k+1}$  が  $r(z, \theta)$  の左右の同じ側にあるときは 2 と数え, 左右異なる側にあるときは 1 と数える。
- (c)  $r(z, \theta)$  が辺  $E_k$  を含む場合,  $E_k$  の前後の 2 つの辺  $E_{k-1}, E_{k+1}$  が  $r(z, \theta)$  の左右の同じ側にあるときは 2 と数え, 左右異なる側にあるときは 1 と数える。

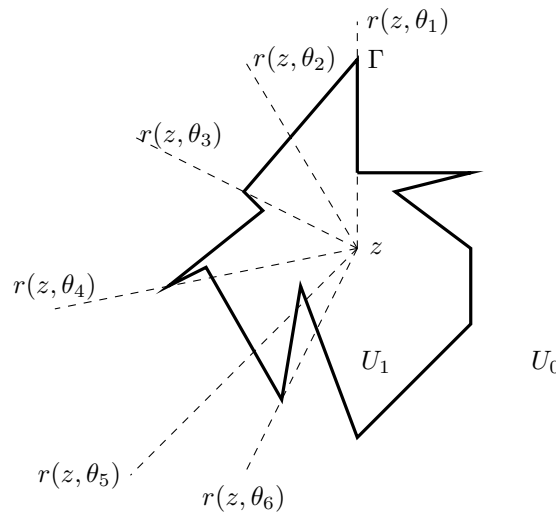


図 2.1.1:  $r(z, \theta_1) = 1, r(z, \theta_2) = 1, r(z, \theta_3) = 1, r(z, \theta_4) = 3, r(z, \theta_5) = 3, r(z, \theta_6) = 3$

$n(z, \theta)$  は非負整数値を取る。また  $z$  を固定し  $n(z, \theta)$  を  $\theta \in \mathbb{R}$  の関数と考えると,  $\theta$  が動く時, 取る値  $n(z, \theta)$  は変化するかも知れないが, 偶数が奇数かは一定である。そこで, 各  $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$  について  $n(z, \theta)$  が偶数のとき  $n(z) = 0$ ,  $n(z, \theta)$  が奇数のとき  $n(z) = 1$  と定義する。このとき  $n(z)$  は  $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$  の関数とみなして連続である。実際  $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$  について半直線  $r(z, \theta)$  が頂点  $z_1, \dots, z_n$  を通らないように  $\theta$  を取れば,  $z$  の十分小さな近傍  $V$  で  $n(z^*, \theta) = n(z, \theta)$ ,  $z^* \in V$  となるものが存在する。以上より

$$U_0 = \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma : n(z) = 0\}, \quad U_1 = \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma : n(z) = 1\}$$

と置けば,  $U_0, U_1$  は開集合であり

$$\mathbb{C} \setminus \gamma = U_0 \cup U_1, \quad U_0 \cap U_1 = \emptyset$$

が成り立つ. 特に

(2.1.1)  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  内の曲線  $\alpha$  は  $U_0, U_1$  のどちらか一方に含まれる.

が成り立つ. 何故ならば, もしそうでないと仮定すれば  $\alpha \cap U_0, \alpha \cap U_1$  が  $\alpha$  の分割を与えることになり  $\alpha$  の連結性に矛盾する. 従って  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  の成分は  $U_0, U_1$  のどちらか一方に含まれる.

次に  $U_0, U_1$  がともに空でない連結集合であることを示すために, 辺  $E_k$  の適当 (都合の良い) な近傍を考えよう. はじめに  $n = 3$  のときは  $\delta$  を 3 頂点の最短距離とする, つまり

$$\delta = \min\{|z_0 - z_1|, |z_1 - z_2|, |z_2 - z_0|\}$$

と置く.  $n \geq 4$  のときは  $\delta$  を隣り合わない辺同士の最短距離とする. つまり

$$\delta = \min\{\text{dist}(E_k, E_\ell) : 2 \leq \ell - k \leq n - 2\}$$

と置く.  $n = 3$  のときは  $0 < \rho < \frac{\delta}{3}$  を満たす  $\rho$  を, そして  $n \geq 4$  のときは  $0 < \rho < \frac{\delta}{2}$  を満たす  $\rho$  について

$$N = \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, \gamma) < \rho\},$$

$$N_k = \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, E_k) < \rho\}, \quad k = 1, \dots, n$$

と置く. ( $n = 3$  のとき  $\rho < \frac{\delta}{3}$  とする理由は,  $\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \notin N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$  のように三角形の内部に  $N$  に属さない点があることを保証するためである.)

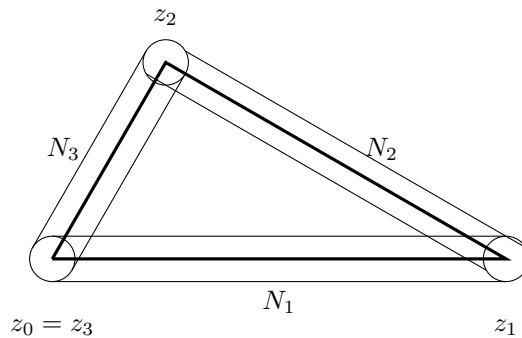


図 2.1.2:  $n = 3$  の場合

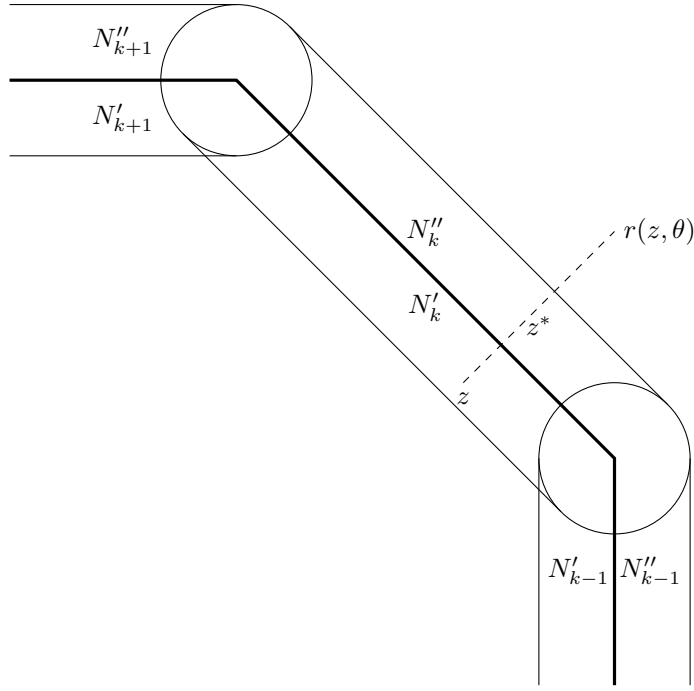
このとき  $k = 1, 2, \dots, n$  について  $N_k$  は  $N_{k-1}, N_{k+1}$  とのみ交わり, 他の  $N_\ell$  とは交わらない. そして

$$N_k \cap \gamma \subset E_{k-1} \cup E_k \cup E_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n \quad (E_0 = E_n, E_{n+1} = E_1 \text{ に注意})$$

であり  $N_k \setminus \Gamma$  は 2 つの成分よりなる. そこでこれらの成分を  $N'_k, N''_k$  と置くが, 各  $k = 1, 2, \dots, n$  について

$$N'_k \cap N'_{k+1} \neq \emptyset, \quad N''_k \cap N''_{k+1} \neq \emptyset, \quad k = 1, \dots, n - 1$$

となるように取っておく.



さて空でない共通部分を持つ 2 つの連結集号の和集合は再び連結であることに注意すれば  $N'_k, N''_k$  のとり方より

$$N' := N'_1 \cup \dots \cup N'_n, \quad N'' := N''_1 \cup \dots \cup N''_n$$

は連結な開集合である.

この段階では論理的に 2 つの可能性がある.

- (i)  $N'_n \cap N'_1 \neq \emptyset$  かつ  $N''_n \cap N''_1 \neq \emptyset$ .
- (ii)  $N'_n \cap N''_1 \neq \emptyset$  かつ  $N''_n \cap N'_1 \neq \emptyset$ .

(ii) の場合が起こりえないことを示そう.  $N'$  の任意の 2 点は  $N'$  内の曲線で結べ,  $N''$  の任意の 2 点も  $N''$  内の曲線で結べるので (ii) が起こると仮定すれば  $N' \cup N''$  の任意の 2 点も  $N' \cup N''$  内の曲線で結べることになり, 前半で示したことにより  $N' \cup N'' \subset U_0$  または  $N' \cup N'' \subset U_1$  のどちらか一方が成り立つ. しかしながら  $r(z, \theta)$  が頂点を通らずに辺  $E_k$  を横切るように  $z \in N'_k$  を取り, この  $r(z, \theta)$  上で  $N''_k$  内にある点  $z^*$  を取れば  $n(z, \theta) = n(z^*, \theta) + 1$  である. 従って “ $z \in U_0$  かつ  $z^* \in U_1$ ” または “ $z \in U_1$  かつ  $z^* \in U_0$ ” のどちらか一方が起こる. それぞれの場合について “ $N' \subset U_0$  かつ  $N'' \subset U_1$ ” または “ $N' \subset U_1$  かつ  $N'' \subset U_0$ ” となるので, 矛盾である.

これで  $U_0, U_1$  はともに空でないことが分かった. 必要ならば ' と '' を取り替えることにより  $N' \subset U_1, N'' \subset U_0$  が成り立つと仮定してよい.

$U_0, U_1$  がともに連結であることを示そう. これは任意の  $\zeta_0 \in U_0$  について  $\zeta_0$  と  $\gamma$  の任意の点とを線分で結べば,  $\zeta_0$  から出発し, この線分上を進めば  $\gamma$  の点とぶつかる前に  $N'$  または  $N''$  のどちらかの点  $\zeta$  とぶつかる. しかしながら (2.1.1) より  $[\zeta_0, \zeta]$  は  $U_0$  に含まれるので  $\zeta \in N''$  である. 以上より  $U_0$  の任意の点は  $U_0$  中の曲線で  $N''$  の点と結べることになり, これより  $U_0$  が連結であることが分かる.  $U_1$  の連結性も全く同様な議論により示される. これで  $U_0, U_1$  はともに空でない連結な開集合であり  $\mathbb{C} \setminus \gamma = U_0 \cup U_1$  が成分への分解を与えることが分かった.

最後に  $\partial U_0 = \partial U_1 = \gamma$  を示そう. まず  $\gamma$  の任意の点の任意の近傍内に  $N'$  と  $N''$  の点が必ず含まれる

ので  $\gamma \subset \partial U_0, \gamma \subset \partial U_1$  が成り立つ. 逆に  $U_0 \cap U_1 = \emptyset$  より  $U_0 \subset U_1^c$  であり  $U_1^c$  が閉集合であることより  $\bar{U}_0 \subset U_1^c$  が成り立つ. よって  $\partial U_0 \subset \bar{U}_0 \subset U_1^c$  であるから  $\partial U_0 \cap U_1 = \emptyset$  である. 全く同様に  $\partial U_1 \cap U_0 = \emptyset$  である. そして  $U_0, U_1$  は開集合であるから  $\partial U_0 \cap U_0 = \emptyset, \partial U_1 \cap U_1 = \emptyset$  が成り立つ. これらと

$$\mathbb{C} = (\mathbb{C} \setminus \gamma) \cup \gamma = U_1 \cup U_2 \cup \gamma$$

の右辺が互いに共通部分を持たない 3 つの集号の和であることより  $\partial U_0 \subset \gamma, \partial U_1 \subset \gamma$  が成り立つ.  $\square$

単純多角形  $\gamma$  について  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  の非有界な成分を  $D_o(\gamma)$  で表し, 有界な成分を  $D_i(\gamma)$  で表す.  $D_i(\gamma)$  のことを  $\gamma$  で囲まれた領域と呼ぶ.

**Corollary 2.1.2.**  $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$  について

$$\begin{aligned} z \in D_i(\gamma) &\iff n(z, \theta) \text{ が奇数} \\ z \in D_o(\gamma) &\iff n(z, \theta) \text{ が偶数} \end{aligned}$$

が成り立つ.

*Proof.*  $\gamma \subset \mathbb{D}(0, R)$  となる  $R > 0$  を取る. このとき各  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}(0, R)$  について  $r(z, \theta)$  が  $\gamma$  と交わらないように  $\theta$  を取ることが出来るので  $n(z, \theta) = 0$  である. よって  $n(z) = 0$  となる. 従って  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}(0, R) \subset U_0$  である. 従って  $U_0$  は非有界な成分であるので  $D_o(\gamma) = U_0$  が成り立つ.  $\square$

## 2.2 単純多角形に関する Schönflies の定理

“Jordan 曲線  $\gamma : \partial \mathbb{D}$  について位相同型  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  で  $\varphi(\partial \mathbb{D}) = \gamma(\partial \mathbb{D})$  を満たすものが存在する” ということを主張するのが Schönflies の定理である. この定理をこのままの形で証明するのは本書の程度を超えるので, この節では  $\gamma$  が単純多角形の場合に限定して証明を行う. 後章での応用にはこのような限定を行っても差し支えない.

前節まで単純多角形とは区分的に線形な単射連続写像  $\gamma : \partial \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  としてきたが, この節ではこれに加えて次の見方も行う.  $n$  個の相異なる点

$$p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{C}$$

が次の条件を満たすとき, これらの点をこの順につないで, 最後に  $p_n$  と  $p_1$  をつないで, できる曲線が単純閉曲線となるので, これを  $p_1, \dots, p_n$  により定まる単純多角形と言い  $P = P(p_1, \dots, p_n)$  と表す.

その条件とは

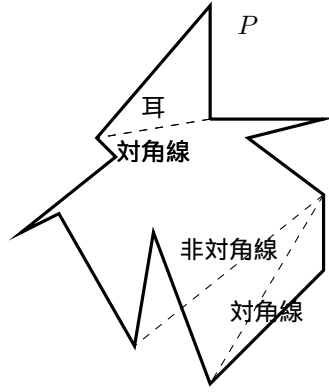
$$E_1 = [p_0, p_1], E_2 = [p_1, p_2], \dots, E_n = [p_{n-1}, p_n], E_0 = E_1, E_{n+1} = E_1$$

と置いて,

- (i) “ $E_1$  と  $E_2$ ”, “ $E_2$  と  $E_3$ ”,  $\dots$ , “ $E_n$  と  $E_{n+1}(= E_1)$ ” のように番号が連続する線分が平行でない. (このとき特に, 番号が連続する線分同士は 1 頂点のみを共有する)
- (ii)  $E_k, E_\ell$  を番号が連続しない 2 線分とすれば  $E_k \cap E_\ell = \emptyset$

これらの条件を満たすとき  $E_1, \dots, E_n$  をつないで得られる曲線が単純曲線になることは容易に分かる. これが  $P = P(p_1, \dots, p_n)$  である. 各  $p_k, E_k$  を  $P$  の頂点と辺と呼ぶのは前節と同様である.  $P$  の頂点が 3 つで三角形をなすときは  $P(p, q, r)$  の代わりに  $T(p, q, r)$  と表すことにする.





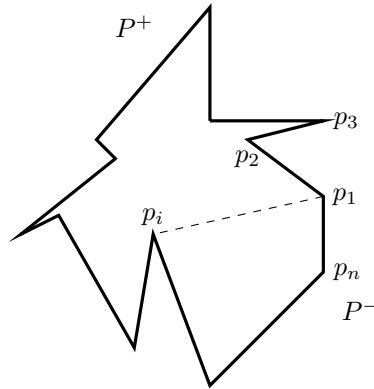
**Definition 2.2.1.** 単純多角形  $P(p_1, \dots, p_n)$  の対角線 (diagonal) とは  $P$  の 2 つの頂点を端点とする線分で、端点以外は  $P$  で囲まれた領域  $D_i(P)$  に含まれるものを言う。また  $p, q, r$  が  $P$  の番号が連続する 3 頂点であり、 $[p, r]$  が対角線であるならば  $p, q, r$  を 3 頂点に持つ三角形  $T(p, q, r)$  (これも Jordan 多角形である) のことを  $P(p_1, \dots, p_n)$  の耳 (ear) と言う。

**Theorem 2.2.2.**  $p_1, \dots, p_n$  を頂点とする単純多角形  $P$  について線分  $[p_1, p_i]$  が  $P$  の対角線であるとする。このとき  $P^+$  を  $p_1, \dots, p_i$  を頂点に持つ単純多角形とし、 $P^-$  を  $p_1, p_i, \dots, p_n$  を頂点に持つ単純多角形とすれば

$$D_i(P) = D_i(P^+) \cup [p_1, p_i] \cup D_i(P^-)$$

と分解される。

証明は Theorem 1.5.4 の証明と全く同様であり、Jordan の曲線定理を使っている所を多角形版の Jordan の曲線定理である Theorem 2.1.1 に置き換え、回転数に関する所を交点数に置き換えて Corollary 2.1.2 を用いればよい。とは言うものの、念の為に証明しておこう。



*Proof.* 仮定より  $(p_1, p_i) \subset D_i(P)$  であるから  $P^\pm$  とともに単純多角形になる。 ( $P^+$  が単純であることは容易に分かるが、 $[p_i, p_1]$  と  $[p_1, p_2]$  が平行になることはあり得る。その場合は  $p_1$  を除いて  $[p_i, p_2]$  を辺とすること。  $P^-$  についても同じである。) また  $(p_1, p_i) \cap D_o(P) = \emptyset$  が成り立つ。よって

$$P^\pm \cap D_o(P) = \emptyset$$

となり、従って

$$D_o(P) \subset D_i(P^\pm) \cup D_o(P^\pm) \quad (\text{複合同順})$$

となるが  $D_o(P)$  の連結性より  $D_o(P) \subset D_i(P^\pm)$  または  $D_o(P) \subset D_o(P^\pm)$  のどちらか一方が成り立つ。

$D_o(P)$  は非有界で,  $D_i(P^\pm)$  は有界であるから  $D_o(P) \subset D_o(P^\pm)$  が成り立つ. 両辺の閉包を取ると

$$D_o(P) \cup P = \overline{D_o(P^\pm)} \subset \overline{D_o(P^\pm)} = D_o(P^\pm) \cup P^\pm \quad (\text{複合同順})$$

が成り立つ. 両辺の補集合を取れば  $D_i(P^\pm) \subset D_i(P)$  が従う. 以上より  $D_i(P^+) \cup (p_1, p_i) \cup D_i(P^-) \subset D_i(P)$  が成り立つ.

逆の包含関係を示すために  $z \in D_i(P) \setminus (p_1, p_i)$  とする. そして  $P, P^+, P^-$  に関する交点数を  $n(z, \theta), n^+(z, \theta), n^-(z, \theta)$  とし,  $r(z, \theta)$  と  $(p_1, p_i)$  の共有点の個数 (0 または 1 である) を  $n_0(z, \theta)$  と置く. このとき半直線  $r(z, \theta)$  が  $P$  のいかなる頂点も通らないような  $\theta$  について (頂点の個数は  $n$  個であるから, このような  $\theta$  は明らかに存在する)

$$n(z, \theta) = n^+(z, \theta) + n^-(z, \theta) - 2n_0(z, \theta)$$

が成り立つ.  $z \in D_i(P)$  であるから Corollary 2.1.2 より  $n(z, \theta)$  は奇数であるが, この場合上式より  $n^+(z, \theta), n^-(z, \theta)$  のどちらか一方, そして一方のみが奇数である. 従って再び Corollary 2.1.2 より  $z \in D_i(P^+)$  か  $z \in D_i(P^-)$  のどちらか一方が成り立つ. よって  $D_i(P) \setminus (p_1, p_i) \subset D_i(P^+) \cup D_i(P^-)$  が成り立つ. 両辺に  $(p_1, p_i)$  を加えれば  $D_i(P) \subset D_i(P^+) \cup (p_1, p_i) \cup D_i(P^-)$  が成り立つ.  $\square$

**Corollary 2.2.3.**  $T = T(p, q, r)$  が単純多角形  $P$  の耳ならば  $D_i(T) \subset D_i(P)$  が成り立つ.

**Lemma 2.2.4.** 頂点を 4 つ以上持つ単純多角形は対角線を持つ.

*Proof.*  $q$  を単純多角形  $P$  の最も右にある頂点 (複数あればその中最も上) とし, 直前の番号の頂点を  $p$ , 直後の番号の頂点を  $r$  とする. また  $T$  を  $p, q, r$  を頂点に持つ (単純) 三角形とする.

(I) はじめに線分  $[p, r]$  が端点以外で  $P$  と交わらないと仮定する. このとき開線分  $(p, r)$  は連結集合で  $P$  と交わらないから, “ $(p, r) \subset D_i(P)$ ” または “ $(p, r) \subset D_o(P)$ ” のどちらか一方が成り立つ.

(I-i)  $(p, r) \subset D_i(P)$  の場合は,  $[p, r]$  は対角線であり,  $T(p, q, r)$  は  $P$  の耳である.

(I-ii) 次に  $(p, r) \subset D_o(P)$  のときを考えよう.  $(p, r) \cap D_i(P) = \emptyset$  であり

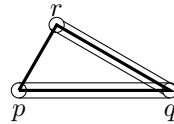
$$([p, q] \cup [q, r]) \cap D_i(P) \subset P \cap D_i(P) = \emptyset$$

より  $T \cap D_i(P) = \emptyset$  である. よって

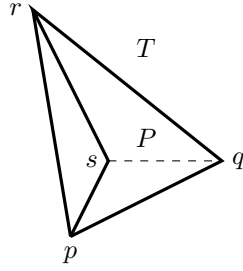
$$D_i(P) \subset D_i(T) \cup D_o(T)$$

となるが  $D_i(P)$  の連結性より “ $D_i(P) \subset D_i(T)$ ” または “ $D_i(P) \subset D_o(T)$ ” のどちらか一方が成り立つ.

$D_i(P) \subset D_o(T)$  は起き得ない. 実際  $q$  が最も右にある頂点なので図のように  $q$  の少し左側に  $D_i(T) \cap D_i(P)$  に属する点が存在する.



$D_i(P) \subset D_i(T)$  の場合は  $P$  の頂点の個数は 4 以上であるから  $p, q, r$  以外の頂点で  $\overline{D_i(T)} = D_i(T) \cup T$  内にあるものが少なくとも 1 つ存在する.  $P$  は単純多角形であるから, このような頂点は  $[p, q] \cup [q, r]$  上にはないので  $(p, r)$  上または  $D_i(T)$  内にある.  $s$  をこのような頂点の中で最も右にあるもの (の 1 つ) とする.  $s$  から  $q$  へ伸びる半直線を取ると, この半直線上の  $(s, q)$  の部分には  $P$  の点は存在せず,  $q$  から先にも  $P$  の点は存在しない. 従って  $z \in (s, q)$  に対し,  $n(z) = 1$  であり  $(s, q) \subset D_i(P)$  である. よって  $[s, q]$  は  $P$  の対角線である.



(II) 最後に線分  $[p, r]$  が端点以外で  $P$  と交わる場合を考えよう. この場合も  $p, q, r$  以外の頂点で  $D_i(T) \cup (p, r)$  内にあるものが少なくとも 1 つ存在するので, その中の最も右にあるものを  $s$  とすれば上と同様に  $[s, q]$  が対角線を与える.  $\square$

**Theorem 2.2.5.** 頂点を 4 つ以上持つ単純多角形は  $P$  の辺を共有しない 2 つの耳を持つ.

*Proof.* 頂点の個数  $n$  に関する帰納法を用いて証明する.  $n = 4$  の場合  $P$  は Lemma 2.2 より対角線  $[p, r]$  を持つので, そこで  $P$  を分解すれば 2 つの三角形に分解でき, それぞれが  $P$  の耳であり,  $P$  の辺を共有しない. (勿論  $[p, r]$  は 2 つの三角形に共有されるが, これは  $P$  の辺ではない.)

次に  $n - 1$  まで正しいと仮定し  $P$  を  $n$  個の頂点よりなる単純多角形とし,  $[p, q]$  が対角線とする. このとき Theorem 2.2.2 で行ったように  $P$  を 2 つの Jordan 多角形  $P^+, P^-$  で 1 つの辺  $[p, q]$  を共有するものに分解できる.  $P^+$  が三角形ならば,  $P^+$  自身が  $P$  の耳である.  $P^+$  が三角形でないとする. このとき  $P^+$  の耳で  $[p, q]$  を辺に持つものは高々 2 つであるが, 帰納法の仮定より, これ以外の  $P^+$  の耳で  $[p, q]$  を辺に持たないものが少なくとも 1 つ存在する. これは  $P$  の耳になる. 以上どちらの場合でも  $P^+$  の耳で  $P$  の耳でもあるものが存在する.  $P^-$  についても同様であるから, 結局  $P$  には  $P$  の辺を共有しない 2 つの耳が存在する.  $\square$

これで単純多角形に関する Schönflies の定理を証明する準備が 1 つのトピックを除いて整った. 最後の 1 つはアフィン写像に関するものである.

$p, q$  を相異なる 2 点とし, これらをこの順に, 相異なる 2 点  $p', q'$  に写像するアフィン写像は一意ではないが, 線分  $[p, q]$  から線分  $[p', q']$  への写像に制限すれば一意である. 実際そのようなアフィン写像が線形写像  $\varphi$  と点  $r_0$  により  $\varphi + r_0$  と表されたとすると

$$\varphi((1-t)p + tq) + r_0 = (1-t)\{\varphi(p) + r_0\} + t\{\varphi(q) + r_0\}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

となるからである.

次に 2 つの三角形  $T(p, q, r), T(p', q', r')$  について  $p, q, r$  をこの順に  $p', q', r'$  に写像するアフィン写像は一意に定まり,  $\mathbb{C}$  から自身への位相写像である. この写像は上で述べたことから  $[p, q], [q, r], [r, p]$  を対応する  $[p', q'], [q', r'], [r', p']$  の上に 1:1 に写像する. さらに  $T(p, q, r)$  の内側の領域を  $T(p', q', r')$  の内側の領域の上に 1:1 に写像する. これは  $T(p, q, r)$  と  $T(p', q', r')$  で囲まれた領域の和集合が

$$z = t_1 p + t_2 q + t_3 r, \quad t_1 + t_2 + t_3 = 1, \quad t_1, t_2, t_3 \in [0, 1]$$

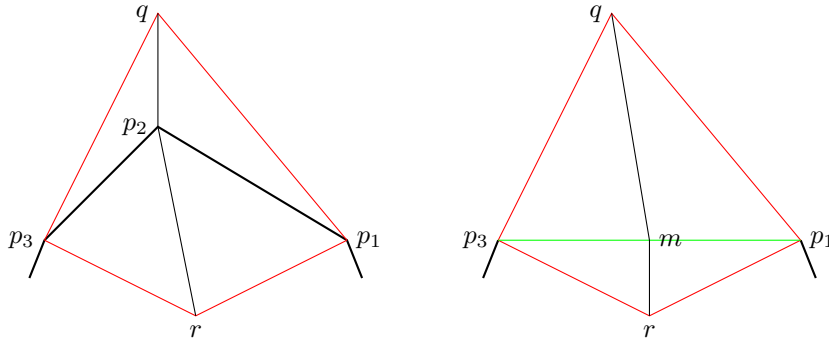
と表されることと, 上と同様な考察より従う.  $(t_1, t_2, t_3)$  を  $z$  の重心座標 (barycentric coordinate) と呼ぶ.

$$z \in D_i(T(p, q, r)) \iff t_1, t_2, t_3 \in (0, 1)$$

であることに注意する.

**Theorem 2.2.6.**  $P = P(p_1, p_2, \dots, p_n)$  を単純多角形とすれば位相写像  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  で  $P$  をある三角形の上に, そして  $P$  で囲まれた領域を三角形で囲まれた領域の上に写像するものが存在する.

*Proof.* 頂点の個数  $n$  に関する帰納法を用いて証明する.  $n = 3$  の場合は明らかであるから  $n \geq 4$  とする. 一般性を失うことなくまた  $T(p_1, p_2, p_3)$  が  $P$  の耳であると仮定してよい. このとき  $P(p_1, p_3, \dots, p_n)$  もまた単純多角形になる.



頂点  $p_2$  の近くに点  $q$  を  $P$  の外側にあるように取る. また  $[p_1, p_3]$  の中点を  $m$  とし,  $m$  の近くに点  $r$  を  $T(p_1, p_2, p_3)$  の外側でかつ  $P$  の内側にあるように取る. このとき  $p_1, q, p_3, r$  を 4 頂点として持つ四角形を  $Q$  とし, 写像  $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  を以下のように定義する. まず  $Q$  及び  $Q$  の外側では  $\psi$  は恒等写像とし,  $\bar{Q}$  の各三角形において

$$\begin{aligned} T(p_2, q, p_3) &\text{ を } T(m, q, p_3) \text{ にうつすアフィン写像,} \\ T(p_2, p_1, q) &\text{ を } T(m, p_1, q) \text{ にうつすアフィン写像,} \\ T(p_2, p_3, r) &\text{ を } T(m, p_3, r) \text{ にうつすアフィン写像,} \\ T(p_2, r, p_1) &\text{ を } T(m, r, p_1) \text{ にうつすアフィン写像} \end{aligned}$$

をつないで写像を作る. 定理の主張の直前に述べた注意により, このようなアフィン写像達は各三角形の共有辺上で一致し, 特に  $Q$  上では恒等写像に一致するので,  $\psi$  は位相写像である. そして  $\psi$  は  $P$  を  $P' = P(p_1, p_3, \dots, p_n)$  の上に写像し, また  $P$  の内側の領域を  $P' = P(p_1, p_3, \dots, p_n)$  の内側の領域の上に写像する.

帰納法の仮定より  $P'$  を三角形の上に, そして  $P'$  の内側の領域を, その三角形の内側の領域の上にうつす位相写像  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  が存在する. このとき合成写像  $h \circ \psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  が要求される性質を持つ位相写像である. □

## 2.3 単純多角形による単純曲線の近似

この節では Riemann 多様体上の単純曲線に関する [1] の内容を, (複素) 平面に限定して紹介する.

はじめに単純曲線が補間的な単純折れ線により近似が出来ることを示そう.

**Theorem 2.3.1.**  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  を単純曲線 とし,  $\varepsilon > 0, \delta > 0$  とする. このとき区間  $[0, 1]$  の分割  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$  で次の性質を持つものが存在する.

$$(i) \max\{t_k - t_{k-1} : k = 1, \dots, n\} \leq \delta.$$

$\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)$  を結ぶ折れ線  $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  を

$$(2.3.1) \quad \hat{\gamma}(t) = \left(1 - \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\right) \gamma(t_{k-1}) + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \gamma(t_k), \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k, \quad k = 1, \dots, n$$

と置くとき,

$$(ii) |\hat{\gamma}(t) - \gamma(t)| \leq \varepsilon, 0 \leq t \leq 1.$$

(ii)  $\hat{\gamma}$  は単純.

*Proof.* 必要ならば  $\delta$  を小さく取り直すことにより

$$(2.3.2) \quad |t - s| \leq \delta \implies |\gamma(t) - \gamma(s)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つと仮定する.  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \gamma([0, 1]) \subset \mathbb{C}$  はコンパクト空間から Hausdorff 空間の上への連続な単射であるから, 逆写像も連続である. 従って  $\eta \in (0, \varepsilon)$  を

$$(2.3.3) \quad |\gamma(t) - \gamma(s)| \leq \eta \implies |t - s| \leq \delta$$

が成り立つように取れる. 次に  $t_0 = 0$  において帰納的に

$$t_k = \sup \left\{ t \in [t_{k-1}, 1] : |\gamma(t) - \gamma(t_{k-1})| \leq \frac{\eta}{2} \right\}$$

と定義する. このとき  $t_{k-1} < 1$  ならば  $\gamma$  の連続性より  $t_{k-1} < t_k \leq 1$  が成り立ち, 特に  $t_k < 1$  ならば  $|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = \frac{\eta}{2}$  が成り立つ. ここで  $t_k < 1$  を満たす  $t_k$  が有限個であり, 従ってある  $n \in \mathbb{N}$  について

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = t_{n+1} = \cdots = 1$$

となることを示そう. これは  $\gamma$  の一様連続性より

$$|t - s| < \rho \implies |\gamma(t) - \gamma(s)| < \frac{\eta}{2}$$

を満たす  $\rho > 0$  が取れる.  $t_k < 1$  ならば  $|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = \frac{\eta}{2}$  であるから  $t_k - t_{k-1} \geq \rho$  が成り立つ. よって  $t_k < 1$  を満たす  $k$  について  $t_k \geq k\rho$  が成り立つので結局  $t_k < 1$  となる  $k$  は有限個である.

このとき

$$\begin{aligned} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| &= \frac{\eta}{2}, \quad |\gamma(t) - \gamma(t_{k-1})| > \frac{\eta}{2} \text{ for } t \in (t_{k-1}, 1], \quad k = 1, \dots, n-1, \\ |\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})| &\leq \frac{\eta}{2} \end{aligned}$$

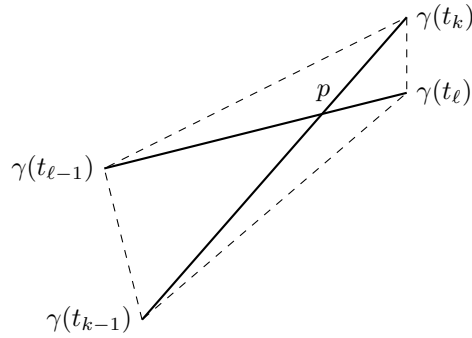
が成り立つことに注意しよう.

このように取った分割  $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$  が (i) を満たすことは上の評価式と (2.3.3) より従う. また  $t \in [0, 1]$  について  $t_{k-1} \leq t \leq t_k$  を満たす  $k$  を取れば (2.3.2) より

$$\begin{aligned} |\hat{\gamma}(t) - \gamma(t)| &\leq |\hat{\gamma}(t) - \gamma(t_{k-1})| + |\gamma(t) - \gamma(t_k)| \\ &\leq \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| + |\gamma(t) - \gamma(t_{k-1})| \leq \frac{\eta}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

となるので (ii) が成り立つ.

残るは (iii)  $\hat{\gamma}$  の単射性である. まず折れ線  $\hat{\gamma}$  において隣り合う 2 つの線分  $[\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)]$ ,  $[\gamma(t_k), \gamma(t_{k+1})]$  の共有点は  $\gamma(t_k)$  のみである. 実際もし  $\gamma(t_k)$  以外に共有点を持てば  $k \leq n-2$  のときは  $|\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_k)| = |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k+1})| = \frac{\eta}{2}$  より 2 つの線分は一致し,  $\gamma(t_{k-1}) = \gamma(t_{k+1})$  が成り立つ. これは  $\gamma$  の単射性に矛盾する.  $k = n-1$  のときは ( $t_n = 1$  に注意)  $|\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})| \leq \frac{\eta}{2} \leq |\gamma(t_{n-1}) - \gamma(t_{n-2})|$  より  $[\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)] \subset [\gamma(t_{n-2}), \gamma(t_{n-1})]$  が成り立つが, これより  $|\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-2})| \leq \frac{\eta}{2}$  を得る. 一方  $t_{n-1}$  の定義より  $t \in (t_{n-1}, 1]$  について  $|\gamma(t) - \gamma(t_{n-2})| > \frac{\eta}{2}$  が成り立つので矛盾を生じる.



最後に隣り合わない 2 つの線分  $[\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)], [\gamma(t_{\ell-1}), \gamma(t_{\ell})]$ ,  $1 \leq k < k+2 \leq \ell \leq n, \ell - n \leq n-1$  が共有点を持たないことを背理法で示そう. そこで 2 つの線分  $[\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)]$  と  $[\gamma(t_{\ell-1}), \gamma(t_{\ell})]$  が交わると仮定する. このとき図のような  $\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k), \gamma(t_{\ell-1}), \gamma(t_{\ell})$  を頂点に持つ四角形を考えると, 2 本の対角線の長さは  $\frac{\eta}{2}$  以下であるから 4 つの辺の中で長さが  $\frac{\eta}{2}$  より小さいものが存在する. 実際, 対角線の交点を  $p$  とおけば,

$$\min\{|\gamma(t_{k-1}) - p|, |\gamma(t_k) - p|\} \leq \frac{\eta}{4}, \quad \min\{|\gamma(t_{\ell-1}) - p|, |\gamma(t_{\ell}) - p|\} \leq \frac{\eta}{4}$$

が成り立つ. 例えば  $|\gamma(t_k) - p| \leq \frac{\eta}{4}, |\gamma(t_{\ell}) - p| \leq \frac{\eta}{4}$  の場合は三角不等式より  $|\gamma(t_k) - \gamma(t_{\ell})| < \frac{\eta}{2}$  を得る. しかしながら  $t_{\ell} > t_k$  であるからこれは  $t \in (t_{k+1}, 1]$  において  $|\gamma(t) - \gamma(t_k)| > \frac{\eta}{2}$  が成り立つことに反する. 他の 3 つの場合も同様に矛盾を導くことが出来る.  $\square$

**Theorem 2.3.2.**  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  を Jordan 閉曲線とし,  $\varepsilon > 0, \delta > 0$  とする. このとき区間  $[0, 1]$  の分割  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  で,  $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)$  を結ぶ折れ線  $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  を

$$\hat{\gamma}(t) = \left(1 - \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\right) \gamma(t_{k-1}) + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \gamma(t_k), \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k, \quad k = 1, \dots, n$$

と置くととき次の性質を持つものが存在する.

- (i)  $\max\{t_k - t_{k-1} : k = 1, \dots, n\} < \delta$ .
- (ii)  $|\hat{\gamma}(t) - \gamma(t)| < \varepsilon, 0 \leq t \leq 1$ .
- (ii)  $\hat{\gamma}$  は単純多角形.

*Proof.*  $\delta_1 > 0$  を

$$(2.3.4) \quad |t - s| < \delta_1 \implies |\gamma(t) - \gamma(s)| < \varepsilon$$

が成り立つように取り,  $\eta_1 \in (0, \varepsilon)$  を

$$(2.3.5) \quad |\gamma(t) - \gamma(s)| < \eta_1 \implies |t - s| < \min\{\delta, \delta_1\}$$

が成り立つように取る.

$$M = \max_{0 \leq t \leq 1} |\gamma(t) - \gamma(0)|$$

と置いて  $M = |\gamma(s_0) - \gamma(0)|$  を満たす点  $s_0 \in (0, 1)$  を取り

$$0 < \eta < \min\left\{\eta_1, \frac{\varepsilon}{2}, \frac{M}{2}\right\}$$

を取る.

以上の準備のもとで

$$t_1 = \sup\{t \in [0, s_0] : |\gamma(t) - \gamma(0)| \leq \eta\}$$

$$t^* = \inf\{t \in [s_0, 1] : |\gamma(t) - \gamma(0)| \leq \eta\}$$

と置けば  $0 < t_1 < s_0 < t^* < 1$  が成り立つ. また  $\eta \leq \eta_1 < \varepsilon$  であるから  $t_1 < \delta, 1 - t^* < \delta$  が成り立つ. さらに

$$(2.3.6) \quad |\gamma(t) - \gamma(0)| > \eta, \quad t_1 < t < t^*, \quad |\gamma(t_1) - \gamma(0)| = |\gamma(t^*) - \gamma(0)| = \eta$$

が成り立つ.

さて  $\gamma|_{[t_1, t^]}$  は単純曲線であるから帰納的に

$$t_k = \sup\left\{t \in [t_{k-1}, 1] : |\gamma(t) - \gamma(t_{k-1})| \leq \frac{\eta}{2}\right\}, \quad k \geq 2$$

と定義すれば, Theorem 2.3.1 の証明と同様にして有限回で  $t^*$  に達し, 以降の全ての番号について  $t_k = t^*$  となる. そこで

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-2} < t_{n-1} = t^*$$

が成り立つように  $n \geq 2$  を取りあらためて  $t_n = 1$  と置く. このとき

$$(2.3.7) \quad |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = \frac{\eta}{2}, \quad k = 2, \dots, n-2 \quad |\gamma(t_{n-1}) - \gamma(t_{n-2})| \leq \frac{\eta}{2},$$

$$(2.3.8) \quad |\gamma(t_1) - \gamma(t_0)| = \eta, \quad |\gamma(t_{n-1}) - \gamma(t_0)| = \eta$$

が成り立つ. また  $\eta < \eta_1$  より

$$(2.3.9) \quad \max\{t_1 - t_0, t_2 - t_1, \dots, t_{n-1} - t_{n-2}, t_n - t_{n-1}\} < \min\{\delta, \delta_1\} \leq \delta$$

が成り立つ. 特に  $2 \leq k \leq n-2$  ならば

$$(2.3.10) \quad |\gamma(t) - \gamma(t_{k-1})| > \frac{\eta}{2}, \quad t_k < t < t_{n-1} = t^*$$

が成り立つ. このように取った区間  $[0, 1]$  の分割  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} = t^* < t_n = 1$  について  $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \gamma(t_2), \dots, \gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n) = \gamma(t_0)$ , を結ぶ閉じた折れ線を

$$\hat{\gamma}(t) = \left(1 - \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\right) \gamma(t_{k-1}) + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \gamma(t_k), \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k, \quad k = 1, \dots, n$$

と定義する.

このとき (2.3.9) より (i) が成り立つ. また  $t \in [0, 1]$  について  $t_{k-1} \leq t \leq t_k$  を満たす  $k$  を取れば

$$\begin{aligned} |\hat{\gamma}(t) - \gamma(t)| &\leq |\hat{\gamma}(t) - \gamma(t_{k-1})| + |\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_k)| \\ &\leq \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| + |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \leq 2\eta < \varepsilon \end{aligned}$$

より (ii) が成り立つ.

最後に  $\hat{\gamma}$  が単純であることを背理法で示そう. 作り方から区間  $[t_1, t_{n-1}]$  と  $[0, t_1] \cup [t_{n-1}, t_n]$  のそれぞれで単射である. また (2.3.6) より  $[\gamma(t_0), \gamma(t_1)]$  と  $[\gamma(t_1), \gamma(t_1)]$  は  $\gamma(t_1)$  以外に共有点を持たない. 同様に  $[\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)]$  と  $[\gamma(t_{n-2}), \gamma(t_{n-1})]$  は  $\gamma(t_{n-1})$  以外に共有点を持たない. 従って  $\hat{\gamma}$  が単純でないとする, 次の少なくとも一方が起こる.

- (I) ある  $k \in \{3, \dots, n-1\}$  について 2 線分  $[\gamma(0), \gamma(t_1)], [\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)]$  は共有点を持つ
- (II) ある  $k \in \{2, \dots, n-2\}$  について 2 線分  $[\gamma(0), \gamma(t_{n-1})], [\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)]$  は共有点を持つ

(I) が起きたとして 2 線分の交点を  $p$  と置く.  $\min\{|\gamma(t_k) - p|, |\gamma(t_{k-1}) - p|\} \leq \frac{1}{2}|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = \frac{\eta}{4}$  である. そこで  $|\gamma(t_k) - p| \leq \frac{\eta}{4}$  と仮定して証明を進めよう. ( $|\gamma(t_{k-1}) - p| \leq \frac{\eta}{4}$  の場合も同様である.) まず  $|\gamma(t_0) - p| > \frac{3\eta}{4}$  が成り立つ. 実際そうでないとし  $|\gamma(t_0) - p| \leq \frac{3\eta}{4}$  が成り立つならば

$$\eta < |\gamma(t_0) - \gamma(t_k)| \leq |\gamma(t_0) - p| + |p - \gamma(t_k)| \leq \frac{3\eta}{4} + \frac{\eta}{4} = \eta$$

となり矛盾を生じる. 従って  $|\gamma(t_0) - p| > \frac{3\eta}{4}$  が成り立つ. これより  $|\gamma(t_1) - p| < \frac{\eta}{4}$  が成り立ち, さらに

$$|\gamma(t_k) - \gamma(t_1)| \leq |\gamma(t_k) - p| + |p - \gamma(t_1)| < \frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{4} = \frac{\eta}{2}$$

が成り立つことになるが, これは (2.3.10) より得られる

$$|\gamma(t) - \gamma(t_1)| \geq \frac{\eta}{2}, \quad t_2 \leq t \leq t_{n-1}$$

に反する.  $|\gamma(t_{k-1}) - p| \leq \frac{\eta}{4}$  の場合も同様な議論により

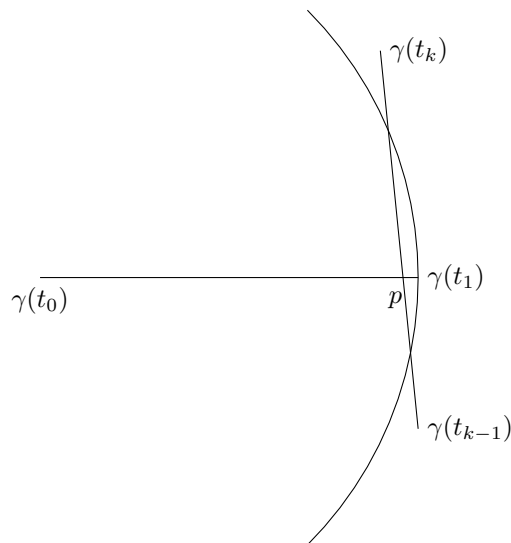
$$|\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_1)| < \frac{\eta}{2}$$

が成り立つことが示されるので, やはり矛盾を生じる,

(II) が起きた場合も同様に

$$|\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_{n-1})| < |\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_k)| = \frac{\eta}{2} \quad \text{または} \quad |\gamma(t_k) - \gamma(t_{n-1})| < |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = \frac{\eta}{2}$$

が成り立つので矛盾を生じる.



□



## 第3章

# 単連結領域

函数論の学習の初等的な段階では Jordan の曲線定理を知っておけば十分であるが, 等角写像論などに進むと単連結領域についての知識も要求される. 領域  $\Omega$  が単連結であることの位相的な定義は “ $\Omega$  内の任意の閉曲線が, 始点に留まったままで動かない曲線に  $\Omega$  内で連続変形出来る” である. しかしながら教科書に依っては “ $\Omega$  内の任意の Jordan 曲線  $\gamma$  について  $D_i(\gamma) \subset \Omega$ ” という定義を採用したり, “ $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  が連結であること” を採用するものもある. そこでこの章では,  $\mathbb{C}$  内の領域に関して, これら 3 つの定義が同値であることを証明する.

### 3.1 単連結性

**Definition 3.1.1.** 複素平面  $\mathbb{C}$  または Riemann 球面  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  内の領域  $\Omega$  が単連結であるとは,  $\Omega$  内の任意の閉曲線  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  が連続的に始点  $a = \gamma(0) (= \gamma(1))$  に変形出来ること, つまり連続写像  $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$  で

$$\Gamma(0, s) = \Gamma(1, s) = a, \quad 0 \leq s \leq 1$$

かつ

$$\begin{cases} \Gamma(t, 0) = \gamma(t), & 0 \leq t \leq 1 \\ \Gamma(t, 1) = a, & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

を満たすものが存在するときをいう.

例えば凸領域は単連結である. 実際  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$  が閉曲線ならば

$$\Gamma(t, s) = (1-s)\gamma(t) + s\gamma(0)$$

と置けば良い. 従って  $\mathbb{C}$ ,  $\hat{\mathbb{C}}$ , 円板  $\mathbb{D}(c, r)$  や半平面などは単連結である.

点  $a$  に留まったまま動かない閉曲線  $1_a$  を  $1_a(t) = a, 0 \leq t \leq 1$  と定義する.

**Theorem 3.1.2.**  $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$  を領域とする. このとき次の 2 条件は互いに同値である.

- (i)  $\Omega$  は単連結である.
- (ii)  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  は空であるか, または連結.

さらに  $\infty \notin \Omega$  のときは次の条件とも同値である.

- (iii)  $\Omega$  内の任意の単純閉曲線  $\gamma$  について  $\gamma$  で囲まれた領域は  $\Omega$  に含まれる. つまり  $D_i(\gamma) \subset \Omega$ .

条件 (iii) は  $\Omega$  の内部に穴が開いていないことを Jordan の曲線定理を利用して述べていると考えられる。そして  $\Omega$  に穴が開いていなければ、閉曲線を始点に留まったままの曲線  $1_{\gamma(0)}$  に連続変形出来るということは直観的に頷けるであろう。また穴が開いていれば、その穴のまわりを回る閉曲線は  $1_{\gamma(0)}$  に連続変形できないということも直観的に頷けるであろう。従って  $\infty \notin \Omega$  ならば (i) と (iii) が同値になる筈であるが、これを論理的に示すのはそれほど簡単ではない。

条件 (ii) については若干の注意が必要である。例えば

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0 + it : |t| \geq 1\}$$

と置けば、 $\Omega$  は複素平面から 2 本の半直線を除いた領域である。従って補集合  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  は 2 本の半直線で、 $\mathbb{C}$  で考えると連結成分は 2 つの半直線のそれぞれである。しかし  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega = (\mathbb{C} \setminus \Omega) \cup \{\infty\}$  であり、2 本の半直線は  $\infty$  でつながっているので  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  は連結である。このように  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  と  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  の連結成分は必ずしも一致しないことに注意する。

Theorem 3.1.2 の証明は長いので、この節では一部を証明するのみに止める。

**Proposition 3.1.3.**  $\infty \notin \Omega$  ならば (i)  $\implies$  (iii) 及び (ii)  $\implies$  (iii) が成り立つ。

*Proof.* “(i)  $\implies$  (iii)” を背理法で示そう。(iii) を否定すると、単純閉曲線  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  と点  $a \in D_i(\gamma) \setminus \Omega$  が存在する。このとき Corollary 1.4.6 より  $n(\gamma, a) = \pm 1$  であるが  $\gamma$  は  $1_{\gamma(0)}$  に  $\Omega$  で連続的に変形できるので  $n(\gamma, a) = n(1_{\gamma(0)}, a) = 0$  となり矛盾を生じる。

今度は “(ii)  $\implies$  (iii)” を示そう。(ii) を仮定すると  $F = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  は連結であり、 $\infty \in F$  である。さて単純閉曲線  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  について  $\gamma \cap F = \emptyset$  と  $F$  の連結性より  $F \subset D_i(\gamma)$  または  $F \subset (D_o(\gamma) \cup \{\infty\})$  のどちらか一方が成り立つが、 $\infty \in F$  であるから  $F \subset (D_o(\gamma) \cup \{\infty\})$  が成り立つことになる。よって  $D_i(\gamma) \cap F = \emptyset$  であり  $D_i(\gamma) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus F = \Omega$  が成り立つ。  $\square$

## 3.2 $\varepsilon$ -連結性

この節では  $X$  を距離  $d$  を持つ距離空間とし、点  $x \in X$  について

$$N_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$$

と置く。つまり  $x$  の  $\varepsilon$ -近傍である。同様に集合  $E \subset X$  について

$$N_\varepsilon(E) = \{y \in X : \exists x \in E \text{ with } d(x, y) < \varepsilon\}$$

と置く。また集合  $E, F \subset X$  について

$$d(E, F) = \inf\{d(x, y) : x \in E, y \in F\}$$

と置く。

**Definition 3.2.1.**  $\varepsilon > 0$  とする。集合  $E \subset X$  内の 2 点  $x, y$  が  $E$  内の  $\varepsilon$ -鎖 ( $\varepsilon$ -chain) で結べるとは  $x = a_0, y = a_n$  を満たす有限個の点の列  $\{a_k\}_{k=0}^n \subset E$  で

$$d(a_{k-1}, a_k) \leq \varepsilon, \quad k = 1, \dots, n$$

を満たすものが存在するときを言う。全ての  $x, y \in E$  が  $E$  内の  $\varepsilon$ -鎖で結べるとき  $X$  は  $\varepsilon$ -連結であると言う。

**Theorem 3.2.2.**  $X$  を距離空間とし、 $E \subset X$  とする。

(i)  $E$  が連結ならば, 全ての  $\varepsilon > 0$  について  $\varepsilon$ -連結である.

(ii)  $E$  がコンパクトならば

$$E \text{ は連結} \iff \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ について } E \text{ は } \varepsilon\text{-連結}$$

が成り立つ.

*Proof.*  $x_0 \in X$  を任意に取り固定し,

$$E_\varepsilon = \{x \in E : x \text{ は } x_0 \text{ と } E \text{ 内の } \varepsilon\text{-鎖で結べる}\}, \quad \varepsilon > 0$$

と置く. このとき任意の  $x \in E_\varepsilon$  について  $N_\varepsilon(x) \cap E \subset E_\varepsilon$  が成り立つので  $E_\varepsilon$  は  $E$  の開集合である. また  $E \setminus E_\varepsilon$  も同様に  $E$  の開集合である.  $E = E_\varepsilon \cup (E \setminus E_\varepsilon)$  であるから  $E$  の連結性より  $E = E_\varepsilon$  または  $E = E \setminus E_\varepsilon$  のどちらか一方が成り立つことになるが  $x_0 \in E_\varepsilon$  より前者が成り立つことが従う.

(ii) の " $\Leftarrow$ " の部分については対偶を証明する.  $E$  がコンパクトであると仮定する. もし  $E$  が連結でなければ  $H_1 \cap H_2 = \emptyset$  を満たす 2 つの空でない閉集合  $H_1, H_2$  で共通部分を持たないものにより  $X = H_1 \cup H_2$  と分解される. このとき  $H_1, H_2$  もコンパクトであるから  $d(H_1, H_2) > 0$  が成り立つ. このとき任意の  $x \in H_1, y \in H_2$  について  $0 < \varepsilon < d(H_1, H_2)$  ならば  $x, y$  が  $E$  内の  $\varepsilon$ -鎖で結ぶことが出来ないことは明らかである.  $\square$

**Lemma 3.2.3.**  $\{F_n\}_{n=1}^\infty$  を距離空間  $X$  の空でないコンパクトな集合の減少列とする. このとき  $F = \bigcap_{n=1}^\infty F_n$  は空でない.

*Proof.* もし空ならば開被覆  $F_1 \subset \bigcup_{n=1}^\infty F_n^c$  が得られるが,  $F_1$  はコンパクトゆえ, 十分大きな全ての  $N$  について  $F_1 \subset \bigcup_{n=1}^N F_n^c = F_N^c$  となる. よって  $F_N \subset F_1^c$  となるが, これと  $F_N \subset F_1$  を合わせて  $F_N \subset F_1 \cap F_1^c = \emptyset$  となり矛盾を生じる.  $\square$

**Theorem 3.2.4.**  $\{F_n\}_{n=1}^\infty$  を距離空間  $X$  の  $\varepsilon$ -連結かつ空でないコンパクトな集合の減少列とする. このとき  $F = \bigcap_{n=1}^\infty F_n$  も  $\varepsilon$ -連結である.

*Proof.* Lemma 3.2.3 より  $F = \bigcap_{n=1}^\infty F_n$  は空でないことに注意する.  $x_0 \in F$  を任意に取り固定し

$$F_0 = \{x \in F : x \text{ は } x_0 \text{ と } F \text{ 内の } \varepsilon\text{-鎖で結べる}\}$$

と置く. 勿論  $x_0 \in F_0$  であるから  $F_0$  は空でない.

それでは  $F \setminus F_0 \neq \emptyset$  と仮定し矛盾を導こう. Theorem 3.2.2 の証明中で示したように  $F_0$  及び  $F \setminus F_0$  はコンパクト集合  $F$  内の開かつ閉部分集合であり, 共通部分を持たない. 従ってともにコンパクトであり  $\delta = d(F_0, F \setminus F_0) > 0$  であり,  $d(a, b) = \delta$  を満たす  $a \in F_0, b \in F \setminus F_0$  が存在する.

もし  $\delta \leq \varepsilon$  ならば  $a$  と  $b$  は  $F$  内の  $\varepsilon$ -鎖で結べることになり, 従って  $x_0$  と  $b$  も  $F$  内の  $\varepsilon$ -鎖で結べる. これは  $b \notin F_0$  に矛盾する. よって  $\delta > \varepsilon$  が成り立つ. そこで

$$F_n \subset N_{\frac{\delta-\varepsilon}{2}}(F) := \left\{ y \in X : \text{ある } x \in F \text{ について } d(x, y) < \frac{\delta-\varepsilon}{2} \right\}$$

を満たす番号  $n$  を取る. このような番号が存在することは次のようにして分かる. もし存在しないと仮定すれば, 全ての  $n \in \mathbb{N}$  について  $F_n \not\subset N_\eta(F)$  ( $\eta = \frac{\delta-\varepsilon}{2}$  と置いた) であるから  $F_n \setminus N_\eta(F)$  は空でない. さらに  $F_n \setminus N_\eta(F)$  はコンパクトであり  $n$  について減少列であるから Lemma 3.2.3 より

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^\infty (F_n \setminus N_\eta(F)) = \left( \bigcap_{n=1}^\infty F_n \right) \setminus N_\eta(F) = F \setminus N_\eta(F) = \emptyset$$

となり矛盾を生じる.

ここで任意の  $p \in F_0, q \in F \setminus F_0$  について  $p, q \in F_n$  より  $p, q$  を結ぶ  $F_n$  内の  $\varepsilon$ -鎖  $p = a_0, \dots, a_n = q$  が存在する. これら  $\{a_k\}$  の各点と  $F = F_0 \cup (F \setminus F_0)$  との距離は  $\frac{\delta - \varepsilon}{2}$  より小であるから, 各  $a_k$  について  $d(a_k, F_0) < \frac{\delta - \varepsilon}{2}$  または  $d(a_k, F \setminus F_0) < \frac{\delta - \varepsilon}{2}$  の少なくとも一方が成り立つが, 両方成り立つことはない. 実際, 両方成り立てば  $d(F_0, F \setminus F_0) \leq d(a_k, F_0) + d(a_k, F \setminus F_0) < \delta - \varepsilon$  となり矛盾を生じる.

さて  $a_0 = p \in F_0, a_n = q \in F \setminus F_0$  であるから  $d(a_0, F_0) = 0 < \frac{\delta - \varepsilon}{2}, d(a_n, F \setminus F_0) = 0 < \frac{\delta - \varepsilon}{2}$  が成り立つ. 従って  $k = 1, \dots, n$  の中に

$$d(a_{k-1}, F_0) < \frac{\delta - \varepsilon}{2}, \quad d(a_k, F \setminus F_0) < \frac{\delta - \varepsilon}{2}$$

が成り立つものが存在する. これと  $d(a_{k-1}, a_k) < \varepsilon$  を合わせて

$$d(F_0, F \setminus F_0) \leq d(a_{k-1}, F_0) + d(a_{k-1}, a_k) + d(a_k, F \setminus F_0) < \frac{\delta - \varepsilon}{2} + \varepsilon + \frac{\delta - \varepsilon}{2} = \delta$$

となり矛盾を生じる. □

さて連続体とは 2 点以上を含むコンパクトかつ連結な集合のことであった.

**Theorem 3.2.5.**  $X$  を距離空間とし,  $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$  を  $X$  の連続体の減少列とする. このとき  $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$  は連続体であるか, 1 点である.

*Proof.*  $F \neq \emptyset$  は Lemma 3.2.3 より従う. そして  $F$  は閉集合の列の共通部分ゆえ閉集合であり, コンパクト集合  $F_1$  に含まれるのでコンパクトである. また任意の  $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$  について  $F_n$  は  $\varepsilon$ -連結であるから  $F$  もそうであり,  $\varepsilon$  の任意性より  $F$  は連結である. よって  $F$  は 1 点よりなるか, さもなければ連続体である. □

**Theorem 3.2.6.** 距離空間  $X$  のコンパクト部分集合  $F$  と  $x \in F$  について  $x$  を含む  $F$  の連結成分  $C$  は

$$C = \{y \in F : \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ について } x \text{ と } y \text{ は } F \text{ 内の } \varepsilon\text{-鎖で結ばれる}\}$$

と表せる. これより特に  $y \in F$  について  $x, y$  が  $F$  の同一の成分に含まれる為の必要十分条件は  $x, y$  が任意の  $\varepsilon > 0$  について  $F$  内の  $\varepsilon$ -鎖で結ばれることである.

*Proof.* “ $\subset$ ” を示そう.  $y \in C$  ならば  $C$  の連結性と Theorem 3.2.2 より任意の  $\varepsilon > 0$  について  $x$  と  $y$  は  $C$  内の  $\varepsilon$ -鎖で結ばれる. 従って  $F$  内の  $\varepsilon$ -鎖で結ばれる.

“ $\supset$ ” を示そう.

$$F_n = \{y \in F : y \text{ は } x \text{ と } F \text{ 内の } \frac{1}{n}\text{-鎖で結べる}\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

と置くと,

$$\{y \in F : \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ について } x \text{ と } y \text{ は } F \text{ 内の } \varepsilon\text{-鎖で結ばれる}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

であるから,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subset C$  を示せばよい. Theorem 3.2.2 の証明中で示したように  $F_n$  は閉集合であり, コンパクト集合  $F$  に含まれるので  $F_n$  はコンパクトである. また明らかに  $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$  は減少列であり任意の  $k \in \mathbb{N}$  について

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=k}^{\infty} F_n$$

が成り立つ. ここで上式の右辺はコンパクトかつ  $\frac{1}{k}$ -連結集合の減少列の共通部分ゆえ Theorem 3.2.4 よりコンパクトかつ  $\frac{1}{k}$ -連結である. さらに  $k \in \mathbb{N}$  の任意性より  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$  は連結であり  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subset C$  が成り立つ.  $C$  は  $x$  を含み  $F$  に含まれる最大の連結集合であったから  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subset C$  が成り立つ. □

**Theorem 3.2.7.**  $X$  を距離空間とし,  $F$  を  $X$  のコンパクト部分集合とする. このとき 2 点  $x, y \in F$  が  $F$  の異なる成分に属せば  $x \in H_1, y \in H_2$  を満たす  $F$  の分割  $H_1, H_2$  が存在する.

*Proof.*  $x, y \in F$  は  $F$  の異なる成分に属するので, ある  $\varepsilon > 0$  について  $F$  内の  $\varepsilon$ -鎖で結ばれない. そこで

$$H_1 = \{a \in F : x \text{ と } a \text{ は } F \text{ 内の } \varepsilon\text{-鎖で結ばれる}\}, \quad H_2 = F \setminus H_1$$

と置く. このとき Theorem 3.2.2 の証明中で示したように  $H_1, H_2$  はともに開集合であり, 明らかに共通部分を持たない. また  $x \in H_1, y \in H_2$  であるから, ともに空でない. よって  $H_1, H_2$  は  $F$  の分割である.  $\square$

Theorem 3.2.7 は次のように一般化できる.

**Theorem 3.2.8.**  $F$  を距離空間  $X$  のコンパクト部分集合とする. また  $C$  を  $F$  の成分,  $E$  を  $F$  の空でない閉部分集合とし,  $C \cap E = \emptyset$  とする. このとき  $C \subset H_1, E \subset H_2$  を満たす  $F$  の分割  $H_1, H_2$  が存在する.

*Proof.*  $\eta > 0$  で  $C$  の任意の点と  $E$  の任意の点が  $F$  内の  $\eta$ -鎖で結べないようなものが存在することを示そう. これが示されれば  $a \in C$  を任意に取り

$$H_1 = \{x \in F : x \text{ は } a \text{ と } F \text{ 内の } \varepsilon\text{-鎖で結べる}\}, \quad H_2 = F \setminus H_1$$

と置けば Theorem 3.2.2 で示したように  $H_1, H_2$  はともに  $F$  の開集合である. そして  $a \in C \cap H_1$  と  $C$  の連結性より  $C \subset H_1$  が成り立ち,  $\eta$  の性質より  $E \subset H_2$  が成り立つ.

さてもしこのような  $\eta > 0$  が存在しないとすると  $x_n \in C, y_n \in E$  で  $F$  内の  $\frac{1}{n}$ -鎖で結べるものが存在する. このとき  $C, E$  のコンパクト性より  $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in C, y_{n_k} \rightarrow y_0 \in E$  となる部分列が取れる. 任意の  $\varepsilon > 0$  について

$$\frac{1}{n_k} < \varepsilon, \quad d(x_0, x_{n_k}) < \varepsilon, \quad d(y_0, y_{n_k}) < \varepsilon$$

を満たすように十分大きな  $k$  を取れば,  $x_{n_k}$  と  $y_{n_k}$  は  $\frac{1}{n_k}$ -鎖, 従って  $\varepsilon$ -鎖で結べるので,  $x$  と  $y$  も  $F$  内の  $\varepsilon$ -鎖で結べることになる. よって Theorem 3.2.6 より  $x, y$  は同一の  $F$  の成分に属すことになり仮定に反する.  $\square$

Theorem 3.2.8 において  $E$  として,  $C$  以外の成分の 1 つ, または  $C$  以外の成分の有限和などとすることができる.

**Theorem 3.2.9.**  $X$  を距離空間とし,  $F$  を  $X$  のコンパクト部分集合とする. また  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  を  $F$  内の収束点列とし, 各  $n \in \mathbb{N}$  に対し  $x_n, y_n$  は  $F$  の同一の成分に属すとする. このとき  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  も  $F$  の同一の成分に属す.

*Proof.* 任意の  $\varepsilon > 0$  について  $d(x_0, x_n) < \varepsilon, d(y_0, y_n) < \varepsilon$  を満たす  $n$  を取る.  $x_n, y_n$  は  $F$  の同一の成分に属するので  $\varepsilon$ -鎖  $a_1 = x_n, \dots, a_k = y_n$  が取れる. これに  $x_0, y_0$  を追加すれば  $a_0 = x_0, a_1 = x_n, \dots, a_k = y_n, a_{k+1} = y_0$  は  $x_0, y_0$  を結ぶ  $F$  内の  $\varepsilon$ -鎖である. よって  $x_0, y_0$  は任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $F$  内の  $\varepsilon$ -鎖で結ばれるので,  $F$  の同一の成分に属す.  $\square$

### 3.3 Jordan 曲線による分離定理

**Definition 3.3.1.**  $a < b, c < d$  を満たす実数  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  について辺が座標軸に平行な閉長方形  $S = \{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Re} z \leq b, c \leq \operatorname{Im} z \leq d\}$  と置く. そして  $S$  の分割  $G : a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b, c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$  のことを長方形格子 (*rectangular grating*) と言い,  $\partial S$  のことを枠 (*frame*)

と言う。ただし分割を行わない ( $m = n = 1$ ) 場合も長方形格子であると考え。以下では長方形格子を略して単に格子と言うことにする。長方形  $S$  に関する格子  $G$  について細分された個々の閉長方形  $\{z \in \mathbb{C} : x_{i-1} \leq \operatorname{Re} z \leq x_i, y_{j-1} \leq \operatorname{Im} z \leq y_j\}$  を 2-胞体と言う。また  $S$  の外側の領域と周の和集合 (非有界である) も  $G$  の 2-胞体とみなすことにし、非有界な 2-胞体と言う。ただし非有界な 2-胞体は  $\infty$  を含むとし、 $\hat{\mathbb{C}}$  で考える。2-胞体の辺を  $G$  の辺と言い、2-胞体の頂点を  $G$  の頂点と呼ぶ。

**Definition 3.3.2.**  $G$  の 2-胞体の有限個の和集合を 2-複体と呼ぶ。2-複体  $K$  について  $\partial K$  は  $G$  の辺で、その辺を介して隣り合う 2 つの 2-胞体の 1 つが  $K$  に含まれ、もう 1 つは  $K$  に含まれないものの和集合である。 $K$  の頂点  $p$  が非正則であるとは、 $p \in \partial K$  であり、

- (i)  $p \in \partial S$  であるかまたは
- (ii)  $p \notin \partial S$  であり、 $p$  を頂点として持つ 4 つの 2-胞体で対角の位置にある 2 つが  $K$  に含まれ、残りの 2 つが  $K$  に含まれない

時を言う。2-複体  $K$  が正則であるとは、 $K$  が非正則頂点を持たない時を言う。

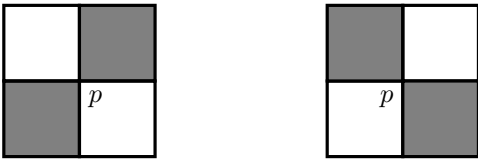


図 3.3.1: 非正則頂点

2-複体  $K$  の (連結) 成分は、2-胞体の連結性より、やはり 2-複体であることに注意しよう。

**Lemma 3.3.3.** 2-胞体  $A$  と  $B$  が 2-複体  $K$  の同じ (連結) 成分に含まれる為の必要十分条件は

$$A = A_1, A_2, \dots, A_n = B$$

のように  $A$  から出発し、前後の 2-胞体と点を共有する 2-胞体で  $K$  に含まれるものを並べ  $B$  まで到達できることである。特に 2-複体  $K$  の 2-胞体  $A$  を含む成分とは上のように隣り合うもの同志が交わりを持ち  $K$  に含まれる 2-胞体の列で到達することができる 2-胞体  $B$  の全ての和よりなる 2-複体である。

*Proof.*  $C$  を  $A$  を含む  $K$  の成分とする。さて点を共有する 2 つの連結集合の和は連結であることに注意すれば、 $A$  と  $B$  を結ぶ上記のような列が存在するとき  $\bigcup_{k=1}^n A_k$  も連結であることが分かる。 $C_1$  を  $A$  と上記のような列で結べる  $K$  の 2-胞体の全ての和よりなる 2-複体とすれば、先に示したことより  $C_1 \subset C$  が成り立つ。

次に  $C_2$  を  $A$  と上記のような列で結べない  $K$  の 2-胞体 の全ての和よりなる 2-複体とすれば、

$$C_1 \cap C_2 = \emptyset, \quad C_1 \cup C_2 = K$$

が成り立つ。また  $C_1, C_2$  は、どちらも閉集合であるから、 $K$  の相対位相のもとで開集合である。従って連結集合  $C$  について  $C \subset C_1$  または  $C \subset C_2$  のどちらか一方のみが成り立つ。しかしながら  $A \subset C \cap C_1$  であるから  $C \subset C_1$  が成り立つ。

以上より  $C = C_1$ 、つまり Lemma の後半の主張が成り立つ。前半の主張は後半より直ちに従う。 □

**Lemma 3.3.4.**  $K$  が正則ならば  $K$  の (連結) 成分も正則である。

*Proof.*  $p$  が  $K$  の成分  $C$  の非正則頂点であるとする。 $p \in \partial S$  ならば  $p$  は  $K$  の頂点でもあるから、 $K$  の正則性に矛盾する。

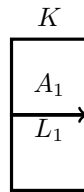
次に  $p \notin \partial S$  の場合を考える. 図 3.3.1 において影のついた 2-胞体が  $C$  の含まれ, 影がつかない 2-胞体が  $C$  に含まれないとする. 影のつかない 2-胞体  $A$  が  $K$  に含まれるとすると,  $A$  は  $C$  と点を共有する連結集合であるから  $C \cup A$  も連結であり  $C \cup A \subset K$  を満たす. これは成分  $C$  の最大性に反する. よって  $A$  が  $K$  に含まれない. 従って  $p$  は  $K$  の非正則頂点となり  $K$  の正則性に反する.  $\square$

**Lemma 3.3.5.** 2-複体  $K$  が正則で連結ならば  $\text{Int } K$  も連結である.

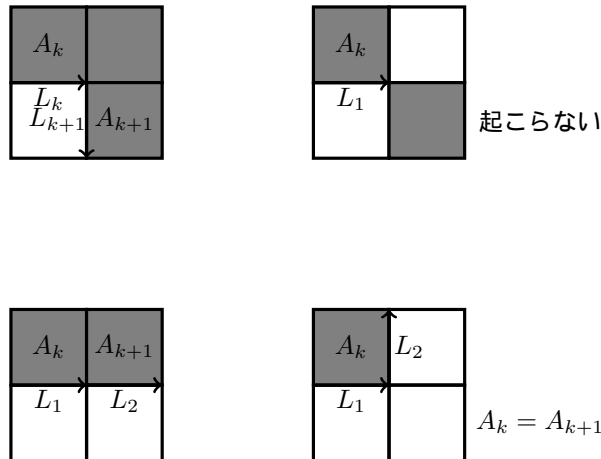
*Proof.* 点  $p, q \in \text{Int } K$  について  $p \in A \subset K, q \in B \subset K$  を満たす 2-複体  $A, B$  を取る. このとき  $p \in \text{Int } K$  より  $p$  と  $A$  の中心を結ぶ閉線分も  $\text{Int } K$  に含まれる. 同様に  $q$  と  $B$  の中心を結ぶ閉線分も  $\text{Int } K$  に含まれる.  $K$  の連結性より  $A = A_1, \dots, A_n = B$  を  $A$  から出発し, 前後の 2-胞体と点を共有する 2-胞体で  $K$  に含まれるものの列が存在する.  $K$  は正則であるから, 必要ならば 2-複体を追加することにより隣り合う 2-胞体は辺を共有すると仮定してよい. このとき, 各 2-胞体の中心を線分で結び, つないでゆけば  $A$  の中心と  $B$  の中心を結ぶ折れ線が出来る. そしてこの折れ線は  $\text{Int } K$  に含まれる. 以上の 2 線分と折れ線をつなげば  $p$  と  $q$  を結ぶ  $\text{Int } K$  内の折れ線が出来上がる. よって  $\text{Int } K$  は (弧状) 連結である.  $\square$

**Theorem 3.3.6.**  $K$  が有界, 正則かつ連結な 2-複体ならば  $\partial K$  を構成する  $G$  の辺 (の一部) をつないでできる単純多角形  $\gamma$  で  $\gamma \subset \partial K, \text{Int } K \subset D_i(\gamma)$  を満たすものが存在する.

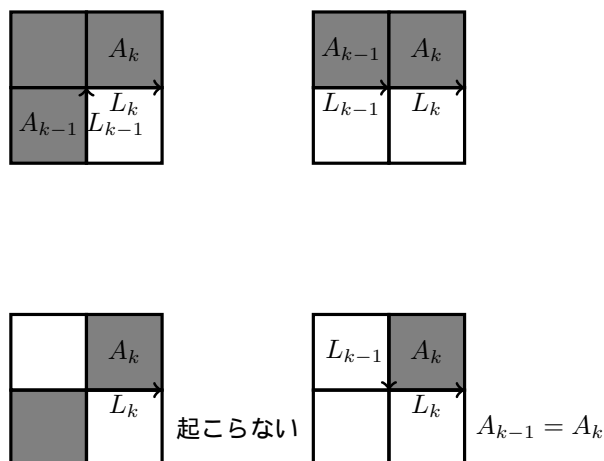
*Proof.*  $K$  の最も下にある辺の 1 つを取り  $L_1$  と置けば  $L_1$  の上の 2-胞体  $A_1$  は  $K$  に含まれ, 下側の 2-胞体は  $K$  に含まれない.  $L_1$  には,  $A_1$  の内側が左側に見える向きを付けておく.



このような辺を帰納的に取っていき辺  $L_k$  で進行方向の左側の 2-胞体が  $K$  に含まれ, 右側の 2-胞体が  $K$  に含まれないものが取れた時, 同じ性質をもつ辺  $L_{k+1}$  が 1 意的に存在する. 実際,  $L_k$  が左から右へ向かう辺で  $A_k$  が  $L_k$  の左側の 2-胞体とする.  $K$  に含まれる 2-胞体に影をつけて表せば, 下図のように, 4 つの場合がある.  $K$  が正則であることより下図の右上の場合は起こらず, この場合以外は  $L_{k+1}$  が一意的に取れることは図から了解できる.



逆に  $L_k$  の前の辺  $L_{k-1}$  も一意的に取れることは、同様に下図より分かる。



さて  $L_1$  から出発し、 $\partial K$  に含まれる辺で進行方向の左側の 2-胞体が  $K$  に含まれるものを 1 意的に次々に取っていけば、 $\partial K$  に含まれる辺は有限個しかないから、いつかは重複が起こる。そこで

$$L_1, L_2, \dots, L_n, L_{n+1}$$

に於いて、 $L_1, \dots, L_n$  が相異なり、 $L_{n+1}$  が  $L_1, \dots, L_n$  のどれかに一致するとしよう。もし  $L_j = L_{n+1}$ ,  $2 \leq j \leq n$  ならば  $L_{j-1}$  と  $L_n$  が一致することになるので矛盾である。従って  $L_{n+1} = L_1$  であり  $\gamma$  を折れ線  $L_1, L_2, \dots, L_n$  よりなる閉曲線と置けば、 $\gamma$  は単純多角形である。実際、単純であることは次のように示される。

$L_1, L_2, \dots, L_n$  の中に隣り合う辺以外に共有点を持つ 2 つの辺があるとする。適当に辺の番号をずらせば  $L_1$  と  $L_j$ ,  $3 \leq j \leq n-1$  が  $L_1$  の終点を共有すると仮定して一般性を失わない。しかしながら  $K$  は非正則頂点を持たないので  $L_2$  以外に、 $\partial R_0$  の辺で  $L_1$  の終点を共有する  $\partial K$  の辺は存在しない。

以上より  $L_1, L_2, \dots, L_n$  をつないでできた曲線を  $\gamma$  とおけば  $\gamma$  は単純多角形であり  $\gamma \subset \partial K$  より  $\text{Int } K \cap \gamma = \emptyset$  である。よって

$$\text{Int } K \subset D_i(\gamma), \quad \text{Int } K \subset D_o(\gamma) \quad \text{のどちらか一方のみが成り立つ}$$

ここで  $L_1$  より下の 2-胞体を  $B$  と置けば  $\text{Int } B \subset D_o(\gamma)$  が成り立つ。実際  $L_1$  を含む水平線より下側に、 $K$  に含まれる 2-胞体はない。従って  $B$  の任意の内点  $a$  から下方に垂直の半直線を引けば、この半直線は  $K$  を通らない。従って  $\gamma \subset \partial K \subset K$  も通らない。よって単純多角形に関する交点数の議論を思い出せば、 $a \in D_o(\gamma)$  であることが分かる。よって  $\text{Int } B \subset D_o(\gamma)$  であり、 $\text{Int } A_1 \subset D_i(\gamma)$  であることも同様に交点数の議論より分かる。  $\text{Int } A_1 \subset \text{Int } K$  であるから上式において  $\text{Int } K \subset D_i(\gamma)$  の方が成り立つことが分かる。  $\square$

それでは Jordan 曲線による分離定理を幾つか述べよう。はじめの定理が、最も状況が複雑な場合である。

**Theorem 3.3.7.**  $\Omega$  を  $\hat{C}$  内の領域とし  $C_1, C_2$  を補集合  $\hat{C} \setminus \Omega$  の相異なる成分とする。このとき  $\Omega$  内の単純閉曲線  $\gamma$  で  $C_1$  と  $C_2$  を分離する、つまり  $\hat{C} \setminus \gamma$  の 2 つの成分の一方に  $C_1$  が含まれ、もう一方に  $C_2$  が含まれるものが存在する。

*Proof.*  $\hat{C}$  はコンパクト距離空間であるから、Theorem 3.2.8 及び、その証明の後の注意より  $C_1 \subset H_1$ ,  $C_2 \subset H_2$  を満たす  $\hat{C} \setminus \Omega$  の分割  $H_1, H_2$  が存在する。すなわち  $H_1, H_2$  はともに空でない閉集合で  $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ ,  $H_1 \cup H_2 = \hat{C} \setminus \gamma$  を満たす。ここで必要ならば適当な同相写像を合成すればよいので、 $\infty \in C_2$  と



仮定する. このとき  $H_1$  は閉集合で  $\infty \notin H_1$  であるから  $\mathbb{C}$  のコンパクト部分集合である. これと  $H_1 \cap H_2 = \emptyset$  より

$$d(H_1, H_2) = \inf\{|z - w| : z \in H_1, w \in H_2\} > 0$$

である.  $d(H_1, H_2) = \infty$  となるのは  $H_2 = \{\infty\}$  の場合で, この場合に定理が成り立つのは明らかであるから,  $0 < d(H_1, H_2) < \infty$  と仮定する.

辺が座標軸に平行で 1 辺の長さが  $\ell$  の閉正方形  $S$  を  $H_1 \subset \text{Int } S$  が成り立つように取る. そして  $n \in \mathbb{N}$  を

$$\frac{\ell}{n} < \min\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}d(H_1, H_2), d(H_1, \partial S)\right\}$$

を満たすように取り,  $S$  を上下左右にそれぞれ  $n$  等分して格子  $G$  を作る. このとき  $G$  の各 2-胞体は

$$\frac{\sqrt{2}\ell}{n} < \frac{1}{2}d(H_1, H_2) < d(H_1, H_2)$$

より  $H_1, H_2$  と同時に交わることはない.

さて  $K$  を  $H_1$  と交わる 2-胞体全てよりなる 2-複体とする. 2-胞体  $A$  が  $K$  に含まれる, つまり  $H_1$  と交われば

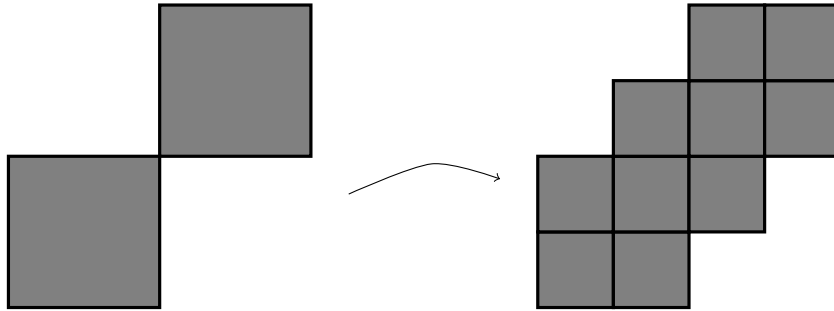
$$\frac{\ell}{n} < d(H_1, \partial S)$$

より  $A$  は  $\partial S$  から内側に向かって 1 列めにはない. また

$$\frac{2\sqrt{2}\ell}{n} < d(H_1, H_2)$$

より  $A$  及び  $A$  と交わる周囲の 2-胞体 (全部で 8 個) も  $H_2$  とは交わらない. さらに  $H_1 \subset \text{Int } K$  となることに注意しよう.

2-複体  $K$  は正則とは限らない. そこで  $K$  に非正則頂点  $p$  が存在すれば下図のように  $p$  を頂点に持ち,  $K$  に含まれない 2 の 2-胞体を上下, 左右にそれぞれ 2 等分し, 得られた 8 つの閉小正方形の中で  $p$  を頂点に持つものを  $K$  に追加する. この操作を  $K$  の非正則頂点全てについて行って得られる 2-複体を  $K^*$  と置く.  $K$  から  $K^*$  を作る操作を肥厚 (thickening) と呼ぶ.  $K^*$  は  $G$  ではなく  $S$  の上下, 左右をそれぞれ  $2n$  等分して得られる格子の上の 2-複体である.



さて  $K^*$  は  $K^* \cap \partial S = \emptyset$  を満たし, 非正則頂点を持たないので正則な複体であり, 作り方から  $H_1 \subset \text{Int } K \subset \text{Int } K^*$ ,  $H_2 \cap K^* = \emptyset$  が成り立つ. これより特に  $\partial K^* \cap (H_1 \cup H_2) = \emptyset$  が成り立つので  $\partial K^* \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus (H_1 \cup H_2) = \Omega$  である.  $K_1^*$  を  $C_1$  を含む  $K^*$  の成分とすれば  $K_1^*$  は連結な正則 2-複体であり  $\partial K_1^* \subset \partial K^* \subset \Omega$  が成り立つ. ここで Lemma 3.3.6 より  $\gamma \subset \partial K_1^* \subset \Omega$ ,  $C_1 \subset \text{Int } K_1^* \subset D_i(\gamma)$  を満たす単純多角形  $\gamma$  が存在する.  $\gamma \cap H_2 = \emptyset$  が成り立つので, 特に  $\gamma \cap C_2 = \emptyset$  であり,  $C_2$  の連結性より  $C_2 \subset D_i(\gamma)$  または  $C_2 \subset D_o(\gamma)$  のどちらか一方が成り立つ. しかしながら  $\infty \in C_2$  であるから  $C_2 \subset D_o(\gamma)$  が成り立つ.

以上で  $C_1, C_2$  を分離する  $\Omega$  内の単純多角形  $\gamma$  が存在することが示された. □

**Theorem 3.3.8.**  $F_1, F_2$  がともに  $\hat{\mathbb{C}}$  内の空でない連結閉集合で  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$  ならば  $F_1, F_2$  を分離する単純閉曲線が存在する.

*Proof.* 必要ならば適当な同相写像を合成すればよいので,  $\infty \in F_2$  と仮定する. このとき  $F_1$  は閉集合で  $\infty \notin F_1$  であるから  $\mathbb{C}$  のコンパクト部分集合である. これと  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$  より

$$d(F_1, F_2) = \inf\{|z - w| : z \in F_1, w \in F_2\} > 0$$

である.  $d(F_1, F_2) = \infty$  となるのは  $F_2 = \{\infty\}$  の場合であり, この場合に定理が成り立つのは明らかである. 従って  $0 < d(F_1, F_2) < \infty$  と仮定する.

辺が座標軸に平行で 1 辺の長さが  $\ell$  の閉正方形  $S$  を  $F_1 \subset \text{Int } S$  が成り立つように取る. そして  $n \in \mathbb{N}$  を

$$\frac{\ell}{n} < \min\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}d(F_1, F_2), d(F_1, \partial S)\right\}$$

を満たすように取り,  $S$  を上下左右にそれぞれ  $n$  等分して格子  $G$  を作る.  $K$  を  $F_1$  と交わる 2-胞体全てよりなる 2-複体とすれば,  $K$  は正則な 2-複体で  $F_1$  の連結性より,  $K$  も連結である.  $K^*$  を  $K$  の肥厚とすれば  $K^*$  は連結な正則 2-複体であり Lemma 3.3.6 より  $\gamma \subset \partial K^* \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus (F_1 \cup F_2)$ ,  $F_1 \subset \text{Int } K^* \subset D_i(\gamma)$  を満たす単純多角形  $\gamma$  が存在することが分かる. また  $\gamma \cap (F_1 \cup F_2) = \infty$  と  $F_2$  の連結性より  $F_2 \subset D_i(\gamma)$ ,  $F_2 \subset D_o(\gamma)$  のどちらか一方が成り立つが  $\infty \in F_2$  より 後者が成り立つ.  $\square$

**Theorem 3.3.9.**  $\Omega$  を  $\hat{\mathbb{C}}$  内の領域とし  $F$  は閉集合で  $\infty \notin F \subset \Omega$  を満たすとする. このとき  $\Omega \setminus \{\infty\}$  内の単純多角形  $\gamma$  で  $F \subset D_i(\gamma)$  を満たすものが存在する.

*Proof.*  $F$  は  $\hat{\mathbb{C}}$  の閉集合で  $\infty \notin F$  を満たすので  $\mathbb{C}$  のコンパクト部分集合である.  $\Omega = \hat{\mathbb{C}}$  または  $\Omega = \mathbb{C}$  のとき Theorem は明らかに成り立つのでそうでない, つまり  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  は  $\infty$  以外の点を少なくとも 1 つ含むと仮定する. このとき  $0 < d(F, \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega) < \infty$  である.

辺が座標軸に平行で 1 辺の長さが  $\ell$  の閉正方形  $S$  を  $F \subset \text{Int } S$  が成り立つように取る. そして  $n \in \mathbb{N}$  を

$$\frac{\ell}{n} < \min\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}d(F, \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega), d(F, \partial S)\right\}$$

を満たすように取り,  $S$  を上下左右にそれぞれ  $n$  等分して格子  $G$  を作る.  $K$  を  $F$  と交わる 2-胞体全てよりなる 2-複体とすれば,  $K$  は正則な 2-複体で  $F$  の連結性より,  $K$  も連結である.  $K^*$  を  $K$  の肥厚とすれば  $K^*$  は連結な正則 2-複体であり  $K^* \subset \Omega$  を満たす. Lemma 3.3.6 より  $\gamma \subset \partial K^* \subset \Omega$ ,  $F \subset \text{Int } K^* \subset D_i(\gamma)$  を満たす単純多角形  $\gamma$  が存在することが分かる.  $\square$

### 3.4 単連結性の条件

それでは領域  $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$  について, 3 条件

- (i)  $\Omega$  は単連結である.
- (ii)  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  は空であるかまたは連結.
- (iii)  $\Omega$  内の任意の単純閉曲線  $\gamma$  で  $\infty$  を通らないものについて  $\gamma$  で囲まれた領域は  $\Omega$  に含まれる. つまり  $D_i(\gamma) \subset \Omega$ .

の中で (i), (ii) が同値であること, そして  $\infty \notin \Omega$  のときは (i), (ii), (iii) が同値になること証明の続きを述べよう.

**Proposition 3.4.1.**  $\infty \notin \Omega$  のとき “(iii)  $\implies$  (i)” が成り立つ.

*Proof.*  $F = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  と置く.  $F = \{\infty\}$ , 換言すれば  $\Omega = \mathbb{C}$  のときに主張が成り立つのは明らかなので, そうでないと仮定する. つまり  $F$  は  $\infty$  以外の点を少なくとも 1 つ含むとする.  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$  を  $\Omega$  内の閉曲線とすれば, 像  $\gamma$  は  $\Omega$  に含まれる  $\hat{\mathbb{C}}$  の連結なコンパクト集合である.  $F \cap \gamma = \emptyset$  であるから Theorem 3.3.9 より  $\Omega$  内の単純多角形  $\tilde{\gamma}$  で  $\gamma \subset D_i(\tilde{\gamma})$  を満たすものが存在する.

ここで Theorem 2.2.6 より同相写像  $\varphi: D_i(\tilde{\gamma}) \rightarrow \mathbb{D}$  が存在する.  $\mathbb{D}$  の単連結性より  $\varphi \circ \gamma$  から  $1_{\varphi(\gamma(0))}$  への  $\mathbb{D}$  における連続変形が存在する. これを  $\varphi^{-1}$  で引き戻せば  $\gamma$  から  $1_{\gamma(0)}$  への  $D_i(\tilde{\gamma})$  における連続変形である. そして  $D_i(\tilde{\gamma}) \subset \Omega$  であるから, この変形は  $\Omega$  における連続変形でもある. 以上で  $\Omega$  が単連結であることが示された.  $\square$

**Proposition 3.4.2.**  $\infty \notin \Omega$  のとき “(iii)  $\implies$  (ii)” が成り立つ.

*Proof.*  $\infty \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  であるから  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  が連結であることを示せばよい. そこでそうでないと仮定すれば, 相異なる 2 つの成分  $C_1, C_2$  が存在する. これらに Theorem 3.3.7 を適用すれば  $\Omega$  内の単純閉曲線で  $D_i(\gamma)$  に  $C_1, C_2$  のどちらか一方を含み,  $D_o(\gamma)$  に残りのもう一方を含むものが存在する.  $\square$

**Proposition 3.4.3.** “(i)  $\implies$  (ii)”

*Proof.* 領域  $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$  が (位相的に) 単連結であるとする.  $\Omega = \hat{\mathbb{C}}$  またはある  $a \in \hat{\mathbb{C}}$  により  $\Omega = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{a\}$  と表される場合, (ii) が成り立つことは明らかであるから, そうでないと仮定する. つまり  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  が 2 点以上を含む連結集合であるとする. このとき適当な同相写像を用いて変換することにより  $\infty \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  と仮定してよい. この場合 Proposition 3.1.3 より (iii) が成り立ち, 次に Proposition 3.4.2 より (ii) が成り立つ.  $\square$

**Proposition 3.4.4.** “(ii)  $\implies$  (i)”

*Proof.*  $\Omega = \hat{\mathbb{C}}$  のとき (i) が成り立つことは明らかであるから,  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  は空でないと仮定してよい. このとき適当な同相写像を用いて変換することにより  $\infty \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  と仮定してよい. この場合 Proposition 3.1.3 より (iii) が成り立ち, 次に Proposition 3.4.1 より (i) が成り立つ.  $\square$

以上で Theorem 3.1.2 の証明は完結した.

Theorem 3.1.2 の応用は数多いが, ここでは次の定理とその系に触れるに止める.

**Theorem 3.4.5.**  $F$  が  $\hat{\mathbb{C}}$  の連結閉部分集合ならば補集合  $F^c = \hat{\mathbb{C}} \setminus F$  の連結成分は ( $\hat{\mathbb{C}}$  の位相のもとで) 単連結である.

*Proof.*  $\Omega$  を  $F^c = \hat{\mathbb{C}} \setminus F$  の連結成分とする. 必要ならば適当な一次変換を施すことにより  $\infty \in F$  と仮定してよい. このとき  $\Omega \subset \mathbb{C}$  となる. 従って  $\Omega$  の単連結性を示すには  $\Omega$  内の Jordan 曲線についての内側の領域が再び  $\Omega$  に含まれることを示せばよい.

$\Omega$  内の任意の Jordan 閉曲線  $\gamma$  について  $\gamma \cap F \subset \Omega \cap F \subset F^c \cap F = \emptyset$  より  $F \subset D_i(\gamma) \cup (D_o(\gamma) \cup \{\infty\})$  が成り立つ. これと  $F$  が連結であることから  $F \subset D_i(\gamma)$  または  $F \subset (D_o(\gamma) \cup \{\infty\})$  のどちらか一方のみが成り立つが  $\infty \in F$  より  $F \subset (D_o(\gamma) \cup \{\infty\})$  が成り立つ. よって特に  $F \cap D_i(\gamma) = \emptyset$  であり,  $D_i(\gamma) \subset F^c$  が成り立つ. ここで  $D_i(\gamma)$  は連結であり  $\gamma \subset \Omega$  より  $\Omega \cap D_i(\gamma) \neq \emptyset$  であるから  $D_i(\gamma) \subset \Omega$  が成り立つ.  $\square$

## 3.5 Jordan 曲線による分離定理 II

それでは最後に Theorem 3.3.7 の一般化である次の定理を証明しよう. 成分は閉集合であることに注意すれば, 次の定理の主張の  $F$  として,  $C$  と異なる  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  成分の有限個の和集合を取ることが出来る. 従って  $\hat{\mathbb{C}}$  内の

領域  $\Omega$  について 1 つの成分  $C$  と  $C$  と異なる成分の有限個を分かち  $\Omega$  内の単純閉曲線の存在が分かる.

**Theorem 3.5.1.**  $\Omega$  を  $\hat{\mathbb{C}}$  内の領域とし,  $C$  を  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  の成分,  $F$  を  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  に含まれる閉集合で  $F \cap C = \emptyset$  とする. このとき  $\Omega$  内の単純閉曲線で  $C$  と  $F$  を分離するものが存在する.

*Proof.* Theorem 3.2.8 より  $C \subset H_1, F \subset H_2$  を満たす  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  の分割が存在する. 必要ならば適当な同相写像を施すことにより  $\infty \in F$  と仮定してよい. また  $H_2 = \{\infty\}$  のとき, 定理の主張は明らかに成り立つので  $H_2$  は  $\infty$  以外の点を少なくとも 1 つ含むとする. このとき  $H_1$  はコンパクトであるから  $0 < d(H_1, H_2) < \infty$  である. また  $H_1 \subset \text{Int } S$  を満たす辺が座標軸に平行で 1 辺の長さが  $\ell$  の閉正方形  $S$  を取る. そして  $n \in \mathbb{N}$  を

$$\frac{\ell}{n} < \min\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}d(H_1, H_2), d(H_1, \partial S)\right\}$$

を満たすように取り,  $S$  を上下左右にそれぞれ  $n$  等分して格子  $G$  を作る. このとき  $G$  のどの 2-胞体も  $H_1, H_2$  と同時に交わらないことに注意しよう.

$K$  を  $H_2$  と交わる 2-胞体全てよりなる 2-複体とする.  $\infty \in H_2$  より  $K$  は非有界 2-胞体を含むことに注意する. また  $H_2 \subset \text{Int } K$  であり,  $\partial K \subset \Omega$  が成り立つ. そこで  $K$  の非有界 2-胞体を含む成分を  $K_0$  とし,  $K_0$  以外の各成分  $K'$  (有限個である) を  $\Omega$  内の曲線で結ぶ. これは  $\partial K_0 \subset \partial K \subset \Omega, \partial K' \subset \partial K \subset \Omega$  と  $\Omega$  の弧状連結性より可能である. このようにして  $K$  に有限個の曲線を付け加えて出来る連結閉集合を  $\tilde{F}$  と置けば  $H_2 \subset \tilde{F}$  であり,  $H_1 \cap \tilde{F} = \emptyset$  である.

$\hat{\mathbb{C}} \setminus \tilde{F}$  の  $C$  を含む成分を  $\Omega_0$  とすれば  $\Omega_0$  は Theorem 3.4.5 より単連結である. また  $H_1 \cap \Omega_0$  は  $\hat{\mathbb{C}}$  の閉部分集合である. 実際  $H_1 \cap \Omega_0$  の点列  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  が  $c_0$  に収束すれば,  $H_1$  は閉集合であるから  $c_0 \in H_1$  である. また  $c_0 \in \overline{\Omega_0}$  であるが, もし  $c_0 \in \partial \Omega_0$  とすると  $\partial \Omega_0 \subset \partial \tilde{F} \subset \Omega$  より  $c_0 \in \Omega$  となるが, これは  $c_0 \in H_1 \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  に反する. 従って  $c_0 \in \Omega_0$  も成り立つので  $c_0 \in H_1 \subset \Omega_0$  となり,  $H_1 \subset \Omega_0$  は閉集合である. よって Theorem 3.3.9 より  $H_1 \subset D_i(\gamma)$  を満たす  $\Omega_0$  内の単純閉曲線  $\gamma$  が存在する.  $\gamma \subset \Omega_0$  より  $\gamma \cap \tilde{F} = \emptyset$  であり, これと  $\tilde{F}$  の連結性と  $\infty \in \tilde{F}$  を合わせて  $(F \subset H_2 \subset) \tilde{F} \subset D_o(\gamma)$  が従う. 最後に  $\gamma$  は  $\Omega_0$  に含まれ  $H_1 \cap \Omega_0$  と交わらないので  $H_1$  とも交わらない. よって  $\gamma$  は  $H_1 \cup H_2 = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  と交わらないので  $\gamma \subset \Omega$  が成り立つ. □

## 参考文献

- [1] H. Boedihardjo and X. Geng, Simple Piecewise Geodesic Interpolation of Simple and Jordan Curves with Applications, arXiv:1309.1576v2 [math.CA] 17 Jul 2014.
- [2] J. Erickson, Computational Topology, <http://compgeom.cs.uiuc.edu/~jeffe/teaching/comptop/>
- [3] C. Kosniowski, A first course in algebraic topology, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 1980.
- [4] クゼ・コスニオフスキ, トポロジー入門, 東京大学出版会, 1983.
- [5] R. Maehara, The Jordan curve Theorem via the Brouwer fixed point theorem, The Amer. Math. Monthly 91 (1984), no. 10, 641–643.
- [6] Moise, Edwin E., Geometric Topology in Dimension 2 and 3, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 47. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
- [7] M. H. A. Newman, Elements of the Topology of Plane Sets of Points, Cambridge Univ. Press, 1939.
- [8] M. H. A. ニューマン, 位相数学序論 主として平面点集合の, 白水社, 1960.
- [9] H. Tverberg, A proof of the Jordan curve theorem, Bull. London Math. Soc. 12 (1980), no. 1, 34-38.

# 索引

barycentric coordinate, 30

closed curve, 15  
cross cut, 21  
curve, 14

diagonal, 28

ear, 28

Hausdorff space, 8  
Hausdorff 空間 (Hausdorff space), 8

Jordan curve, 15, 24  
Jordan domain, 19  
Jordan polygon, 24  
Jordan 曲線 (Jordan curve), 15  
Jordan 曲線 (Jordan curve), 24  
Jordan 多角形 (Jordan polygon), 24  
Jordan 領域 (Jordan domain), 19

normal space, 8

Schönflies Theorem, 27  
Schönflies の定理 (the Schönflies Theorem), 27  
simple, 24  
simple closed curve, 15  
simple curve, 14  
simple polygon, 24

Tietze extention thorem, 8  
Tietze の拡張定理 (Tietze extention thorem), 8  
Tietze-Urysohn の定理 (Tietze-Urysohn theorem), 8

winding number, 9

横断線 (cross cut), 21  
回転数 (winding number), 9  
曲線 (curve), 14  
重心座標 (barycentric coordinate), 30  
正規空間 (normal space), 8  
対角線 (diagonal), 28  
単純 (simple), 24  
単純曲線 (simple curve), 14  
単純多角形 (simple polygon), 24  
単純閉曲線 (simple closed curve), 15  
閉曲線 (closed curve), 15  
耳 (ear), 28