逆関数の定理

柳原 宏

山口大学工学部

目次

1 Notation と逆函数の定理

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ について

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

と置き, x 中心で半径 $r > 0$ の開球と閉球を

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}, \quad \bar{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \le r\}$$

で表す.

Ω を $\mathbb{R}^n$ の領域とし Ω 上の C^1 級の写像 $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_d(x_1, \dots, x_n))$, について, 函数行列を

$$Df(x) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \tag{1}$$

で定義する. $Df(x)$ は各点において n 次正方行列である.

以上の notation のもとで C^1 級の函数に関する逆函数の定理は次のように述べられる.

Theorem 1.1. Ω を $\mathbb{R}^n$ 内の領域 *(空でない連結開集合)* とし, $a \in \Omega$ とする. また $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ を C^1 級の函数とする. このとき $\det Df(a) \neq 0$ ならば, a を含む領域 $U(\subset \Omega)$ と $f(a)$ を含む領域 $V(\subset \mathbb{R}^n)$ で,

$f(U)=V$ かつ $f|_U:U\to V$ が全単射で, $f|_U$, $(f|_U)^{-1}$ がともに C^1 級となるものが存在する. さらに

$$D(f|_U^{-1})(y)=\left\{Df(f|_U^{-1}(y))\right\}^{-1},\quad y\in V \tag{2}$$

が成り立つ.

証明については T. Tao [1] の Thoerem 6.7.2 を参考にした. また T. Tao のホームページ [2] には C^1 級という仮定を除き, 各点で全微分可能で各点で $Df(x)$ が正則 (= 可逆) に変更した版がある.

Theorem 1.2. Ω を $\mathbb{R}^n$ 内の領域 (空でない連結開集合) とする. また $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ を Ω の各点で全微分可能で各点で函数行列 $Df(x)$ が正則な函数とする. 各 $a\in\Omega$ について a を含む領域 $U(\subset\Omega)$ と $f(a)$ を含む領域 $V(\subset\mathbb{R}^n)$ で, $f(U)=V$ かつ $f|_U:U\to V$ が全単射で, $(f|_U)^{-1}$ が連続となるものが存在し, $b=f|_U(a)\in V$ において

$$D(f|_U)^{-1}(b)=\left\{Df(f|_U^{-1}(a))\right\}^{-1} \tag{3}$$

が成り立つ.

この版の定理において各点で全微分可能で $Df(x)$ が正則という仮定を, 各点で全微分可能で 1 点 $a\in\Omega$ で $Df(a)$ が正則という条件に緩めると, もはや a のある近傍で単射になることすら期待出来ない. これは $n=1$ とし $f(x)=x+x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $f(0)=0$ を考えると各点で微分可能であり $f'(0)=1$, $f'(x)=1+2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ である. 従って原点の任意の近傍で f' は正, 負どちらの値も取り, 単射ではあり得ない.

2 縮小写像に関する Lemmas

まずは縮小写像の定義から始める.

Definition 2.1. (X,d) を距離空間とする. このとき写像 $\varphi:X\to X$ が縮小写像であるとは

$$d(\varphi(x',x))\le d(x',x)),\quad x,x'\in X$$

が成り立つときを言う. 縮小写像は明らかに連続である. また φ が狭義縮小写像であるとはある $c\in(0,1)$ で

$$d(\varphi(x',x))\le cd(x',x)),\quad x,x'\in X \tag{4}$$

が成り立つものが存在するときを言う.

Lemma 2.2. (X,d) が空でない完備距離空間であり, 写像 $\varphi:X\to X$ が狭義縮小写像ならば φ の不動点は一意的に存在する.

Proof. $X \neq \emptyset$ より $x_1 \in X$ を任意に取り $x_2 = \varphi(x_1), \ldots, x_{k+1} = \varphi(x_k), \ldots$ と置く．このとき

$$\begin{aligned}
d(x_k, x_{k+p}) &= d(\varphi(x_{k-1}), \varphi(x_{k+p-1}) \\
&\leq cd(x_{k-1}, x_{k+p-1}) \\
&\ \vdots \\
&\leq c^{k-1} d(x_1, x_{p+1}) \\
&\leq c^{k-1}\{d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_p, x_p + 1)\} \\
&\leq c^{k-1}\{d(x_1, x_2) + cd(x_1, x_2) + \cdots + c^{p-1} d(x_1, x_2)\} = c^{k-1} \frac{1 - c^p}{1 - c} d(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

より $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ は Cauchy 列である．(X, d) は完備であるから $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k$ が存在する．このとき $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ において $k \to \infty$ として $f(x_0) = x_0$ を得るので, x_0 は不動点である．

x^* も不動点であるとすると $f(x^*) = x^*$ より

$$d(x^*, x_0) = d(f(x^*), f(x_0)) \leq cd(x^*, x_0)$$

が成り立つので $x^* = x_0$ である． □

Lemma 2.3. *$c \in (0, 1)$, $r > 0$ とし, I を $\mathbb{R}^n$ の恒等写像とする．写像 $g : B(0, r) \to \mathbb{R}^n$ が*

$$|g(x') - g(x)| \leq c|x' - x)|, \quad x', x \in B(0, r)$$

と $g(0) = 0$ を満たすとき $f = I + g$ は単射であり $B(0, (1 - c)r) \subset f(B(0, r)) \subset B(0, (1 + c)r)$ を満たす．

Proof.

$$|f(x') - f(x)| \geq |x' - x| - |g(x') - g(x)| \geq (1 - c)|x' - x|$$

より f は単射である．

次に任意の $y \in B(0, (1 - c)r)$ について $|y| \leq (1 - c)r'$ となる $r' \in (0, r)$ を取る．このとき写像 $F(x) = y - g(x)$, $x \in \overline{B}(0, r')$ は

$$|F(x)| \leq |y| + |g(x) - g(0)| \leq (1 - c)r' + cr' = r'$$

より, $F(\overline{B}(0, r')) \subset \overline{B}(0, r')$ を満たし

$$|F(x') - F(x)| = |g(x') - g(x)| \leq c|x' - x|$$

が成り立つので縮小写像である．よって不動点 $x^* \in \overline{B}(0, r')$ が存在する．ここで

$$F(x*) = x^* \iff y - g(x^*) = x^* \iff y = x^* + g(x^*) = f(x^*)$$

であるから, $y \in B(0, (1-c)r)$ について $y = fx^*)$ を満たす $x^* \in \overline{B}(0, r') \subset B(0, r)$ が存在することが示された．従って $B(0, (1-c)r) \subset f(B(0, r))$ が成り立つ．また $x \in B(0, r)$ について $|f(x)| \leq |x| + |g(x) - g(0)| < (1 + c)r$ より $f(B(0, r)) \subset B(0, (1 + c)r)$ が成り立つ． □

3 逆函数の定理の証明

それでは逆函数の定理を証明しよう．

Proof of Theorem 1.1. $\tilde{f}(x) = Df(a)^{-1}\{f(x+a) - f(a)\}$ と置けば $\tilde{f}(0) = 0$ かつ $D\tilde{f}(0) = I$ (I は $\mathbb{R}^n$ の恒等写像) である．まず $\tilde{f}$ について考えよう．

$g(x) = \tilde{f}(x) - x = (\tilde{f} - I)(x)$, $x \in \Omega$ と置くと $g(0) = 0$ であり $Dg(0) = D\tilde{f}(0) - DI(0) = 0$ であるから, g の $x = 0$ における函数行列は零行列である．従って $r > 0$ を $\overline{B}(0,r) \subset \Omega$ かつ

$$\left|\frac{\partial g_j}{\partial x_k}(x)\right| \leq \frac{1}{2n}, \quad x \in \overline{B}(0,r), \quad j,k = 1,\ldots,n$$

が成り立つように取ることが出来る．このとき任意の $x \in \overline{B}(0,r)$ とベクトル $v = {}^t(v_1,\ldots,v_n)$ について

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(x) v_k\right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial g_j}{\partial x_k}(x)\right)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2} \leq \frac{|v|}{2\sqrt{n}}$$

が成り立つ．よって $x, x' \in B(0,r)$ について

$$\begin{aligned}
|g_j(x') - g_j(x)| &= \left|\int_0^1 \frac{d}{dt}\{g_j(x + t(x'-x))\}\,dt\right| \\
&= \left|\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(x + t(x'-x))(x'_k - x_k)\,dt\right| \leq \frac{|x'-x|}{2\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

従って

$$|g(x') - g(x)| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(g_j(x') - g_j(x))^2} \leq \frac{|x'-x|}{2}, \quad x, x' \in B(0,r)$$

が成り立つ．

Lemma 2.3 より $\tilde{f} = I + g$ は $B(0,r)$ で単射であり $B\left(0, \frac{r}{2}\right) \subset \tilde{f}(B(0,r))$ が成り立つ．よって

$$\tilde{V} = B\left(0, \frac{r}{2}\right), \quad \tilde{U} = (\tilde{f}|_{B(0,r)})^{-1}\left(B\left(0, \frac{r}{2}\right)\right)$$

と置けば $\tilde{f}|_U$ は $\tilde{U}$ から $\tilde{V}$ への全単射である．$\tilde{V}$ は明らかに $f(0) = 0$ を含む領域である．また $\tilde{f}$ は連続であるから $\tilde{U}$ は開集合である．さらに

$$|\tilde{f}(x') - \tilde{f}(x)| \geq |x'-x| - |g(x' - g(x)| \geq \frac{1}{2}|x'-x|, \quad x', x \in B(0,r)$$

が成り立つので, $y', y \in B\left(0, \frac{r}{2}\right)$ について, $x' = (\tilde{f}|_U)^{-1}(y')$, $x = (\tilde{f}|_U)^{-1}(y)$ に対しこの不等式を適用すれば

$$|(\tilde{f}|_U)^{-1}(y') - (\tilde{f}|_U)^{-1}(y)| \leq 2|y'-y|$$

を得る．よって $(\tilde{f}|_{\tilde{U}})^{-1}$ は連続であるから, $\tilde{U} = (\tilde{f}|_{\tilde{U}})^{-1}(\tilde{V})$ は連結である．よって $\tilde{U}$ は連結な開集合, つまり領域である．

それでは $(\tilde{f}|_{\tilde{U}})^{-1}$ の $y=0$ における微分可能性を示そう．f が $x=0$ において全微分可能であり $f(0)=0$, $Df(0)=I$ であるから

$$f(x)=x+\eta(x),\quad \lim_{x\to 0}\frac{|\eta(x)|}{|x|}=0$$

が成り立つ．$x=(\tilde{f}|_{\tilde{U}})^{-1}(y)$ を代入すると

$$y=(\tilde{f}|_{\tilde{U}})^{-1}(y)+\eta((\tilde{f}|_{\tilde{U}})^{-1}(y)) \quad\Longleftrightarrow\quad (\tilde{f}|_{\tilde{U}})^{-1}(y)=y-\eta((\tilde{f}|_{\tilde{U}})^{-1}(y))=0+Iy-\eta((\tilde{f}|_{\tilde{U}})^{-1}(y))$$

であるから $\lim_{y\to 0}\frac{|\eta((\tilde{f}|_{\tilde{U}})^{-1}(y))|}{|y|}=0$ を示せば, $(\tilde{f}|_{\tilde{U}})^{-1}(y)$ が $y=0$ で全微分可能で $D((\tilde{f}|_{\tilde{U}})^{-1})(0)=I$ が示されことになる．任意の $\varepsilon>0$ について $\delta>0$ を $0<|x|<\delta$ ならば $\frac{|\eta(x)|}{|x|}<\varepsilon$ となるように取る．ここで $|\tilde{f}(x)|=|x+g(x)-g(0)|\geq|x|-\frac{1}{2}|x|=\frac{1}{2}|x|$ より $0<|y|<\frac{\delta}{2}$ ならば $|(\tilde{f}|_{\tilde{U}})^{-1}(y)|\leq 2|y|<\delta$ より

$$\frac{\eta((\tilde{f}|_{\tilde{U}})^{-1}(y)}{2|y|}\leq\frac{\eta((\tilde{f}|_{\tilde{U}})^{-1}(y)}{\tilde{f}|_{\tilde{U}})^{-1}(y)}$$

が成り立つ．よって $\lim_{y\to 0}\frac{|\eta(\tilde{f}|_{\tilde{U}})^{-1}(y)(y))|}{|y|}=0$ が成り立つ．

最後に $U=\tilde{U}+a$, $V=Df(a)\tilde{V}+f(a)$ とおいて $h:\tilde{V}\to U$ を

$$h(y)=(\tilde{f}|_{\tilde{U}})^{-1}(Df(a)^{-1}(y-f(a)))+a,\quad y\in V$$

と置けば $x\in U$ について

$$h(f(x))=(\tilde{f}|_{\tilde{U}})^{-1}(Df(a)^{-1}(f(x-a+a)-f(a)))+a=(\tilde{f}|_{\tilde{U}})^{-1}(\tilde{f}(x-a))+a=x-a+a=x$$

が成り立つ．作り方から h は U から V への全単射であるから $h=(f|_U)^{-1}$ である．また $h=(f|_U)^{-1}$ は $f(a)$ で全微分可能であり, 合成函数の偏微分の公式より $Dh(f(a))=IDf(a)^{-1}=Df(a)^{-1}$ であるから $D(f|_U)^{-1}(f(a))=Df(a)^{-1}$ が成り立つ．U 上で $\det Df(x)\neq 0$ であるからこの等式は $x=a$ 以外の U の点でも成り立つので

$$D(f|_U)^{-1}(f(x))=Df(x)^{-1}$$

が成り立つ．これよりさらに

$$D(f|_U)^{-1}(y)=Df((f|_U)^{-1}(y))^{-1}$$

が成り立つが, $Df(x)$ の x に関する連続性と $(f|_U)^{-1}(y)$ の y に関する連続性より右辺は y の連続函数である．よって $(f|_U)^{-1}$ は V で C^1 級である． □

参考文献

[1] Terence Tao, Analysis II, Texts and Readings in Mathematics 38, Hindustan Book Agency,

[2] Terence Tao, https://terrytao.wordpress.com/2011/09/12/the-inverse-function-theorem-for-everywhere-differentiable-maps/