超関数と Fourier 変換

柳原 宏

平林先生に捧ぐ

目 次

第Ⅰ部

理論編

第 1 章　位相ベクトル空間

1.1　位相空間

それでは位相空間についての復習から始めよう．空でない集合 S について 2^X で S の全ての部分集合よりなる族を表そう．このとき $\tau \subset 2^S$ と書けば, τ は S の (全てとは限らない) 部分集合よりなる族と言う意味になる．

空でない集合 S と $\tau \subset 2^X$ の組 (S, τ) が位相空間 (topological space) であるとは

($\mathcal{T}1$) $S, \varnothing \in \tau$

($\mathcal{T}2$) $U, V \in \tau \Longrightarrow U \cap V \in \tau$

($\mathcal{T}3$) $V_\lambda \in \tau,\ \lambda \in \Lambda \Longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \in \tau$

の 3 条件を満たす時を言う．τ の個々の要素 $V \in \tau$ を開集合 (open set) と言い, τ を S の開集合族または位相 (topology) と呼ぶ．

位相空間 (S, τ) について $E \subset S$ が閉集合 (closed set) であるとは $E^c = S \backslash E \in \tau$ であることと定義する．さて S の部分集合 E について

$$\overline{E} = \bigcap_{F,\text{closed } E\subset F} F, \qquad \operatorname{Int} E = \bigcup_{V,\text{open } V\subset E} V$$

と置き, それぞれ E の閉包 (closure) と 内部 (interior) と呼ぶ．$\overline{E}$ は E を含む最小の閉集合であり, $\operatorname{Int} E$ は E に含まれる最大の開集合である．

また集合 $V(\subset S)$ が点 $p \in S$ の近傍 (neighborhood) であるとは, V が開集合であり $p \in N$ を満たすときを言う．

Remark 1.1.1 通常, 集合 N が点 p の近傍であるとは $p \in V \subset U$ を満たす開集合 V が存在するときと定義し, N 自身が開集合のときは特に N を p の開近傍であると言う．しかしながら本書では開近傍だけを用いるので, 以後近傍と言えば開近傍のことであるとする．

$\mathscr{N}_p(S)$ で p の近傍の全体を表し, p に於ける局所近傍系と言う．そして局所近傍系の集まり $\{\mathscr{N}_p(S)\}_{p\in S}$ を近傍系 と言う．$\mathscr{N}_p(S)$ の空でない部分族 $\mathscr{N}_p^*$ が

$$\forall U \in \mathscr{N}_p(S) : \exists V \in \mathscr{N}_p^* : V \subset U$$

を満たすとき, $\mathscr{N}_p^*$ は p における局所近傍基であると言う．

Remark 1.1.2 通常の数学の本では叙述の際に全称記号 $\forall$ や存在記号 $\exists$ を使用するのを控えるのがお作法であるが, 本書ではあまり拘らずに使用することにする．

点 p における局所近傍基 $\mathscr{N}_p^*$ が与えられれば p の近傍の全体 $\mathscr{N}_p(S)$ は完全に定まる. 実際 $\mathscr{N}_p(S)$ はある $V \in \mathscr{N}_p^*$ を含む S の開部分集合の全体に他ならない. 各点 $p \in S$ に於ける局所近傍基が与えられているとして, その全体がなす系 $\{\mathscr{N}_p^*\}_{p\in S}$ を基本近傍系 (fundamental sysytem of neighborhoods) と言う. 基本近傍系は次の条件を満たす.

($\mathcal{F}ON0$) $\forall p \in S : \mathscr{N}_p^* \neq \emptyset$

($\mathcal{F}ON1$) $\forall U \in \mathscr{N}_p^* : p \in U$

($\mathcal{F}ON2$) $\forall U, V \in \mathscr{N}_p^* : \exists W \in \mathscr{N}_p^* : W \subset U \cap V$

($\mathcal{F}ON3$) $\forall U \in \mathscr{N}_p^*$ and $q \in U : \exists V \in \mathscr{N}_q^* : V \subset U$

Theorem 1.1.3 各点 $p \in S$ について X の部分集合の族 $\mathscr{N}_p^*$ が与えられていて, 上の 4 条件を満たすとしよう. このとき集合 G で条件

$$\forall p \in G : \exists U \in \mathscr{N}_p^* : U \subset G \tag{1.1.1}$$

を満たすものの全体を τ と置けば, τ は X の位相であり, $\{\mathscr{N}_p^*\}_{p\in S}$ は (S,τ) の基本近傍系である. また τ は $\{\mathscr{N}_p^*\}_{p\in S}$ を基本近傍系とする位相は τ に限る. つまり $\tilde{\tau}$ も $\{\mathscr{N}_p^*\}_{p\in S}$ を基本近傍系とする S の位相であるならば $\tilde{\tau} = \tau$ である.

Proof. 任意の $p \in S$ について ($\mathcal{F}ON0$) と ($\mathcal{F}ON1$) より $p \in V \subset$ となる $V \in \mathcal{N}_p^*$ が存在するので $X \in \tau$ が従い, $\emptyset \in \tau$ は (1.1.1) が無内容的に成り立つことから分かる. よって ($\mathcal{T}1$) が成り立つ. ($\mathcal{T}2$) は ($\mathcal{F}ON2$) より従い, ($\mathcal{T}3$) は定義 (1.1.1) より従う. 従って τ は位相になるが, τ のもとで各 $V \in \mathcal{N}_p^*$ が開集合になることを保証するのが ($\mathcal{F}ON3$) である. そして定義 (1.1.1) は $\mathscr{N}_p^*$ が局所近傍基になることを保証している.

最後に $\tilde{\tau}$ も X の位相で, $\tilde{\tau}$ のもとで $\mathscr{N}_p^*$ が局所近傍基であるとしよう. この時 $G \in \tilde{\tau}$ ならば任意の $p \in G$ について G は p の $\tilde{\tau}$-近傍であり, $p \in V \subset G$ を満たす $V \in \mathscr{N}_p^*$ が取れる. 従って $G \in \tau$ となるので, $\tilde{\tau} \subset \tau$ が分かる. 逆に $G \in \tau$ ならば任意の $p \in G$ について $p \in V_p \subset G$ を満たす $V_p \in \mathscr{N}_p^*$ が取れるので

$$G = \bigcup_{p\in G} V_p$$

となるが, 各 V_p は $\tilde{\tau}$ のもとでも開集合ゆえ, $G \in \tilde{\tau}$ が従う. よって $\tau \subset \tilde{\tau}$ が成り立つ. □

位相空間 (S,τ) の部分集合 $E \subset S$ について $E \cap \tau = \{E \cap V : V \in \tau\}$ と置けば, $E \cap \tau$ は ($\mathcal{T}1$)-($\mathcal{T}3$) を満たし E 上の位相になる. $E \cap \tau$ を τ から誘導される相対位相 (the relative topolgy induced by τ) と呼ぶ.

集合族 $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}(\subset 2^S)$ が集合 $E(\subset S)$ の開被覆 index かいひふく@開被覆 (open covering) であるとは, 各 G_λ が開集合であり $E \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ が成り立つときを言う.

集合 $K(\subset S)$ がコンパクト (compact) であるとは K の任意の開被覆 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ から有限部分開被覆 $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_j}$ がが取り出せるときを言う.

位相空間 (S,τ) が Hausdorff 空間であるとは S の任意の相異なる 2 点について, それらを分離する開集合が存在するときを言う. つまり Hausdorff の分離公理と呼ばれる

$$\forall p_1, p_2 \in S \text{ with } p_1 \neq p_2 : \exists V_1, V_2 \in \tau : p_1 \in V_1,\ p_2 \in V_2 \text{ and } V_1 \cap V_2 = \emptyset \tag{1.1.2}$$

が成り立つ時を言う.

集合 S の直積 $S^2 = S \times S$ 上の関数 $d(p, q)$ が

($\mathcal{M}1$) $\forall p,\ q \in S : 0 \leqslant d(p, q) < \infty$

($\mathcal{M}2$) $d(p, q) = 0 \Longleftrightarrow p = q$

($\mathcal{M}3$) $\forall p, q \in S : d(p, q) = d(q, p)$

($\mathcal{M}4$) $\forall p, q, r \in S : d(p, r) \leqslant d(p, q) + d(q, r)$

を満たすとき S 上の距離 (distance, metric) であると言い, (S, d) を距離空間 (metric space) と言う. 各 $p \in S,\ r > 0$ について

$$B_r(p) = \{q \in S : d(p, q) < r\}, \qquad \overline{B}_r(p) = \{q \in S : d(p, q) < r\}$$

と置いて, それぞれ p を中心とする半径 r の開球 (open ball) または閉球 (closed ball) と言う.　このとき

$$\mathscr{N}_p^* = \{B_r(p) : r > 0\}$$

と置けば, $\{\mathscr{N}_p^*\}_{p \in S}$ は ($\mathcal{F}N0$)-($\mathcal{F}N3$) を満たし S の基本近傍系になる. これより定まる位相を d から誘導される位相と言う.

1.2　位相ベクトル空間

記号 Φ で複素数体 $\mathbb{C}$ または実数体 $\mathbb{R}$ を表そう. また空でない集合 $X \neq \emptyset$ に, 和と呼ばれ $X \times X \ni (x, y) \mapsto x + y \in X$ と表記される演算と, スカラー倍と呼ばれ $\Phi \times X \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda x \in X$ と表記される演算が定義されているとする. この 2 つの演算が定義された集合 X が次の条件を全て満たす時, X は Φ を係数体 に持つ線形空間 (linear space) またはベクトル空間 (vector space) であると言う.

($\mathcal{L}1$) $\forall x, y \in X : x + y = y + x$

($\mathcal{L}2$) $\forall x, y, z \in X : x + (y + z) = (x + y) + z$

($\mathcal{L}3$) $\exists 0 \in X : \forall x \in X : x + 0 = x$ (注. ($\mathcal{L}1$), ($\mathcal{L}2$) より, このような 0 は一意である)

($\mathcal{L}4$) $\forall x \in X : \exists -x \in X : x + (-x) = 0$ (注. ($\mathcal{L}1$)-($\mathcal{L}3$) より, このような $-x$ は x に対して一意である)

($\mathcal{L}5$) $\forall x \in X : 1x = x$

($\mathcal{L}6$) $\forall \alpha, \beta \in \Phi,\ x \in X : \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

($\mathcal{L}7$) $\forall \alpha \in \Phi,\ x, y \in X : \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

($\mathcal{L}8$) $\forall \alpha, \beta \in \Phi,\ x \in X : (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

厳密にはベクトル空間 X の零元である 0 と Φ の零元 0 を区別して書き表さなければならないが, 文脈により判別は容易であるから同じ記号で表すことにする.

ベクトル空間において $(-1)x = -x$, $0x = 0$ などが成り立つことなどについては入門的な教科書を参照して欲しい.

さて $A, B \subset X$ と $x \in X$, $\lambda \in \Phi$ について

$$x + A = \{x + a : a \in A\} \tag{1.2.1}$$

$$x - A = \{x - a : a \in A\} \tag{1.2.2}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\} \tag{1.2.3}$$

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\} \tag{1.2.4}$$

と置く. これらの記法は大変便利であり, これから頻繁に使うが, 必ずしも $A + A = 2A$ が成り立つとは限らないなど若干の注意が必要である. $2A = \{a + a : a \in A\} \subset A + A$ は成り立つが, 逆の包含関係は成り立つとは限らない. 例えば $X = \mathbb{R}$, $A = 1, 2$ の時 $2A = \{2, 4\}$ であるが, $A + A = \{2, 3, 4\}$ である.

上の記号を使って以下のように定義する.

- $Y \subset X$ が部分空間 (subspace) であるとは

  $$\forall \alpha, \beta \in \Phi : \alpha Y + \beta Y \subset Y$$

  が成り立つ時を言う.

- $C \subset X$ が凸 (convex) であるとは

  $$\forall t \in [0, 1] : (1 - t)C + tC \subset C$$

  が成り立つ時を言う. $[0, 1]$ を $(0, 1)$ に変更しても同値な条件になることを注意しておこう.

- $B \subset X$ が平衡的 (balanced) であるとは

  $$\forall \alpha \in \Phi \text{ with } |\alpha| \leqslant 1 : \alpha B \subset B$$

  が成り立つ時を言う.

- X が 0 次元 (dimension) であるとは $X = \{0\}$ であることと定義する. また $n \in \mathbb{N}$ について X が n 次元であるとは n 本のベクトルよりなる基底 (base) が存在すること. つまり

  $$\exists u_1, \ldots, u_n \in X : \forall x \in X : \exists! \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Phi : x = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$$

  が成り立つ時を言う.

ベクトル空間 X に位相 τ が与えられていて,

($\mathcal{T}V1$) 写像 $X \times X \ni (x, y) \mapsto x + y \in X$ と $\Phi \times X \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda x \in X$ は連続

を満たす時, X(または (X, τ)) は位相ベクトル空間 (topological vector space) であると言う. また本書では加えて

($\mathcal{T}V2$) $\forall x \in X : \{x\}$ は閉集合

も仮定する. $(\mathcal{T}V1)$ と $(\mathcal{T}V2)$ を合わせると, $(\mathcal{T}V2)$ 単独よりも強く, X は Hausdorff 空間になることを示すことができる. 証明は次節で行うこととして, 本書では位相ベクトル空間といえば $(\mathcal{T}V2)$ も仮定し, Hausdorff 性を仮定することに注意する.

点 x の近傍の全体は $\mathcal{N}_x(X)$ と表されたので $(\mathcal{T}V1)$ は次のように表現できる.

$$\forall x_1, x_2 \in X,\ V \in \mathcal{N}_{x_1+x_2}(X) : \exists V_1 \in \mathcal{N}_{x_1}(X),\ V_2 \in \mathcal{N}_{x_2}(X) : V_1 + V_2 \subset V \tag{1.2.5}$$

$$\forall \alpha \in \Phi,\ x \in X,\ V \in \mathcal{N}_{\alpha x}(X) : \exists \delta > 0,\ W \in \mathcal{N}_x(X) : \forall \beta \text{ with } |\beta - \alpha| < \delta : \beta W \subset V \tag{1.2.6}$$

また $a \in X$ と $\lambda \in \Phi$ について X から自身への写像 T_a, M_λ を

$$T_a(x) = x + a, \qquad M_\lambda(x) = \lambda x \tag{1.2.7}$$

と定義する.

Theorem 1.2.1 任意の $a \in X$ と $\lambda \in \Phi\backslash\{0\}$ について写像 T_a と M_λ はともに X から自身への位相同型 *(homeomorphism)* である.

Proof. $T_a \circ T_{-a} = \mathrm{id}$, $T_{-a} \circ T_a = \mathrm{id}$ より T_a が全単射であることが従い. $T_a^{-1} = T_{-a}$ である. また $(\mathcal{T}V1)$ より T_a と T_{-a} が連続であることが直ちに分かるので, T_a は位相同型である. M_λ については $M_\lambda \circ M_{\lambda^{-1}} = \mathrm{id}$, $M_{\lambda^{-1}} \circ M_\lambda = \mathrm{id}$ が成り立つので同様に示すことができる. □

この定理を用いれば $\mathcal{N}_{x+a}(X) = T_a(\mathcal{N}_x(X))$, $\mathcal{N}_{\lambda x}(X) = M_a(\mathcal{N}_x(X))$ であることが分かるので, 近傍系 $\{\mathcal{N}_x(X)\}_{x\in X}$ を考える必要は無く, 原点に於ける局所近傍系 $\mathcal{N}_0(X)$ を考えれば十分である. この場合 $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}_0(X)$ が局所近傍基であるとは

$$\forall U \in \mathcal{N}_0(X) : \exists V \in \mathcal{B} : V \subset U \tag{1.2.8}$$

が成り立つことになる. $\mathcal{B}$ が局所近傍基ならば

$$G \subset X \text{ が open} \iff G = \bigcup_{\substack{a \in G,\ V \in \mathcal{B} \\ \text{with } a + V \subset G}} (a + V) \tag{1.2.9}$$

が成り立つ.

位相ベクトル空間 X の部分集合 E が有界 (bounded) であるとは

$$\forall U \in \mathcal{N}_0(X) : \exists \delta > 0 : \forall t \geqslant \delta : E \subset tU \tag{1.2.10}$$

ときを言う.

ベクトル空間 X 上の距離 d が平行移動に関して不変 (translation invariant) であるとは

$$\forall x, y,\ a \in X : d(x + a, y + a) = d(x, y) \tag{1.2.11}$$

が成り立つときを言う. また位相ベクトル空間 (X, τ) 上の距離 d が τ と compatible であるとは d から誘導された位相が τ と一致する時を言う.

ベクトル空間 X の各元 x に実数 $\|x\|$ が与えられていて

(a) $\forall x \in X : 0 \leqslant \|x\| < \infty$

(b) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(c) $\forall \alpha \in \Phi,\ x \in X : \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

(d) $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

が成り立つ時 $\|\cdot\|$ をノルム (norm) と言う．ノルム $\|\cdot\|$ が与えられたとき

$$d(x, y) = \|x - y\|, \qquad x, y \in X$$

により X に距離 d を導入することができる．このように定義された d は勿論, 平行移動に関して不変である．X が位相ベクトル空間でこの d から導入される位相が, もともとの位相と一致するとき $\|\cdot\|$ と τ は compatible であると言う.

それでは位相ベクトル空間 (X, τ) について次のような分類を考えよう.

(a) (X, τ) が局所凸 (locally convex) とは 各 $V \in \mathcal{B}$ が convex であるような局所近傍基 $\mathcal{B}$ が存在する時を言う.

(b) (X, τ) が局所有界 (locally bounded) とは 有界な 0 の近傍 V が少なくとも 1 つ存在する時を言う.

(c) (X, τ) が局所コンパクト (locally compact) とは 0 の近傍 V で $\overline{V}$ が compact であるものが少なくとも 1 つ存在する時を言う.

(d) (X, τ) が距離化可能 (metrizable) とは τ と compatible な距離が存在する時を言う.

(e) (X, τ) が F-空間 (F-space) であるとは τ と compatible な位相を導入する距離で完備かつ平行移動に関して不変なものが存在する時を言う.

(f) (X, τ) が Fréchet 空間 (Fréchet space) であるとは (X, τ) が局所凸な F-空間である時を言う.

(g) X がノルム化可能 (normable) であるとは τ と compatible なノルムが存在すること.

(h) ベクトル空間 X にノルム $\|\cdot\|$ が与えられているとき $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間 (normed space) と言い, さらに完備ならば Banach 空間 (Banach space) であると言う.

(i) (X, τ) が Heine-Borel 性を持つとは全ての閉かつ有界な部分集合が compact である時を言う.

Remark 1.2.2 位相ベクトル空間における完備性は通常 *Cauchy filter* を用いて定義され, それだけで 1 つ以上の節を費やす解説が必要になる．しかしながら上の分類を扱う限り, 完備性の概念が必要になるのは距離空間の場合であり, 距離空間における完備性は任意の *Cauchy* 列が収束することと定義しても同値となる．そこで本書では *Cauchy filter* は必要になったときに説明することにして, この章では触れないことにする.

以上の分類の包含関係を図にすると次のようになる.

$$
\begin{tikzcd}
\text{locally compact} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, shift right] & \text{finite dimension} \\
\text{locally bounded} \arrow[u, dashed, shift right, "+\text{ Heine-Borel property}"'] \arrow[r] \arrow[d, dashed, shift left, "+\text{locally convex}"] & \text{countable local base} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\text{normable}\leftrightarrow\text{normed space} \arrow[u, shift left] \arrow[r] \arrow[d, dashed, shift left, "+\text{complete}"] & \text{metrizable} \arrow[d, dashed, shift left, "+\text{complete \& invariant}"] \\
\text{Banach space} \arrow[u, shift left] \arrow[dr] & F\text{-space} \arrow[u, shift left] \arrow[d, dashed, shift left, "+\text{locally convex}"] \\
 & \text{Fréchet space} \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}
$$

まず次節で位相ベクトル空間が Hausdorff 空間になることを示し, 次々節以降で図に示した関係が成り立つことを証明していこう.

1.3　分離公理と局所近傍基

始めに

Proposition 1.3.1 $\mathcal{B}$ が局所近傍基であるとき, 任意の $\alpha \in \Phi\backslash\{0\}$ について $\alpha\mathcal{B}$ も局所近傍基である.

Proof.　写像 $x \mapsto \alpha x$ の $x = 0$ に於ける連続性より, 任意の $U \in \mathcal{N}_0$ について $V_0 \in \mathcal{N}_0$ を $\alpha V_0 \subset U$ が成り立つように取れる. このとき $V \in \mathcal{B}$ を $V \subset V_0$ となるように取れば $\alpha V \subset \alpha V_0 \subset U$ が成り立つ. これは $\alpha\mathcal{B}$ が局所近傍基であることを示す. □

Definition 1.3.2 V を位相ベクトル空間 X における 0 の近傍とすると, 任意の $A \subset X$ について

$$A + V = \bigcup_{a\in A}(a + V)$$

と表せるが, 各 $a \in A$ について $a+V$ は開集合であるから $A+V$ も開集合であり, $0 \in V$ より $A \subset A+V$ である. $A + V$ を A の V-近傍と言う.

Proposition 1.3.3 任意の $W \in \mathcal{N}_0$ について *symmetric* な $U \in \mathcal{N}_0$ (つまり $-U = U$) で $U + U \subset W$ が成り立つものが存在する.

Proof.　写像 $(x, y) \mapsto x + y$ の連続性より, $V_1, V_2 \in \mathcal{N}_0$ で $V_1 + V_2 \subset W$ が成り立つものが存在する. このとき

$$U = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2)$$

と置くと良い. □

Proposition 1.3.3 は簡単なようであるが有用な事実である．これを用いれば次に示すように位相ベクトル空間において 1 点と閉集合が分離されることを簡単に示すことができる．

Theorem 1.3.4 C を位相ベクトル空間 X の閉集合とし $x \notin C$ とする．このとき 0 の近傍 V で

$$(x+V)\cap(C+V)=\varnothing$$

を満たすものが存在する．

Proof. C の補集合 $C^c = X\backslash C$ は x の近傍であるから Proposition 1.3.3 より symmetric な $V \in \mathcal{N}_0(X)$ を $x+V+V \subset X\backslash C$ が成り立つように取ることができる．このとき

$$\begin{aligned} x+V+V \subset X\backslash C &\Longleftrightarrow (x+V+V)\cap C=\varnothing \\ &\Longleftrightarrow \forall a,b\in V : x+a+b\notin C \\ &\Longleftrightarrow \forall a,b\in V : x+a\notin C-b \\ &\Longleftrightarrow (x+V)\cap(C-V)=\varnothing \\ &\Longleftrightarrow (x+V)\cap(C+V)=\varnothing \quad (\because\ -V=V) \end{aligned}$$

となる． □

Corollary 1.3.5 $\mathcal{B}$ が位相ベクトル空間 X の局所近傍基であれば

$$\forall U\in\mathcal{B} : \exists V\in\mathcal{B} : \overline{V}\subset U.$$

Proof. 閉集合 $C = U^c(= X\backslash U)$ と原点 0 に Theorem 1.3.4 を適用すれば，近傍 $V_1 \in \mathcal{N}_0(X)$ で $V_1\cap(C+V_1)=\varnothing$ を満たすものが取れる．従って $V_1\subset(C+V_1)^c$ が成り立つが，$(C+V_1)^c$ は閉集合であるから $\overline{V}_1\subset(C+V_1)^c$ が成り立つ．よって $\overline{V}_1\cap(C+V_1)=\varnothing$ であり，特に $\overline{V}_1\cap C=\varnothing$ が成り立つ．これより $\overline{V}_1\subset C^c=U$ が従う．そこで $V\subset V_1$ を満たす $V\in\mathcal{B}$ を取れば $\overline{V}\subset\overline{V}_1\subset U$ となる． □

Theorem 1.3.4 の証明の手法をもう少し精密化すると，交わらない compact 集合と閉集合を分離できる．

Theorem 1.3.6 K, C をそれぞれ位相ベクトル空間 X の *compact* 部分集合と閉部分集合とし，$K\cap C=\varnothing$ とする．このとき

$$(K+V)\cap(C+V)=\varnothing$$

を満たす $V\in\mathcal{N}_0(X)$ が存在する．

Proof. Theorem 1.3.4 と Proposition 1.3.3 より各 $x\in K$ について symmetric な $V_x\in\mathcal{N}_0(X)$ で $(x+V_x+V_x)\cap(C+V_+V_x)=\varnothing$ が成り立つものが取れる．このとき特に

$$(x+V_x+V_x)\cap(C+V_x)=\varnothing$$

が成り立つ．K は compact ゆえ開被覆 $\{x+V_x\}_{x\in K}$ より部分開被覆を

$$K\subset(x_1+V_{x_1})\cup\cdots\cup(x_m+V_{x_m})$$

となるように取る．このとき

$$(x+V_{x_k}+V_{x_k})\cap(C+V_{x_k})=\varnothing \quad (k=1,\dots,m)$$

が成り立つ. $V = V_{X_1} \cap \cdots \cap V_{x_m}$ と置くと, $V \in \mathcal{N}_0$ であり,

$$K + V \subset \bigcup_{k=1}^{m} (x_k + V_{x_k}) + V \subset \bigcup_{k=1}^{m} (x_k + V_{x_k} + V) \subset \bigcup_{k=1}^{m} (x_k + V_{x_k} + V_{x_k})$$

であるが, 最右辺は $C + V$ と交わらないから $(K + V) \cap (C + V) = \varnothing$ である. □

さて Proposition 1.3.3 から Theorem 1.3.6 までの結果は全て, $(\mathcal{T}V2)$ を用いずに証明されている. 従って $(\mathcal{T}V2)$ が成り立たない位相ベクトル空間とは交わらない 1 点 (または compact 集合) と閉集合が分離できるのに, 分離できない 2 点が存在するというかなり病理的な空間になる. $(\mathcal{T}V)2$ を仮定するのが自然なことは, このことからも了解できるであろう.

Theorem 1.3.7 *位相ベクトル空間は Hausdorff 空間である.*

Proof. 2 点 $x, y \in X$, $x \neq y$ が与えられたとする. $C = \{y\}$ と置けば, $(\mathcal{T}V2)$ より C は閉集合であるから Theorem 1.3.4 より $(x + V) \cap (y + V) = (x + V) \cap (C + V) = \varnothing$ を満たす $V \in \mathcal{N}_0$ が存在する. □

Theorem 1.3.8 *X を位相ベクトル空間とし, $\mathcal{B}$ を局所近傍基とすると次が成り立つ.*

(a) 任意の $A \subset X$ について $\overline{A} = \bigcap_{V \in \mathcal{B}} (A + V)$

(b) 任意の $A, B \subset X$, $\lambda \in \Phi$ について $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$, $\overline{\lambda A} = \lambda \overline{A}$

(c) $Y \subset X$ が部分空間ならば $\overline{Y}$ も部分空間

(d) $C \subset X$ が凸ならば $\overline{C}$, $\mathrm{Int}\, C$ も凸

(e) $B \subset X$ が平衡的ならば $\overline{B}$ も平衡的. さらに $0 \in \mathrm{Int}\, B$ ならば $\mathrm{Int}\, B$ も平衡的

(f) $E \subset X$ が有界ならば $\overline{E}$ も有界

Proof. (a) 任意の局所近傍基について

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{B} : (x + V) \cap A \neq \varnothing \\ &\Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{B} : x \in A - V \\ &\Longleftrightarrow \forall V' \in -\mathcal{B} : x \in A + V' \end{aligned}$$

に於いて, $-\mathcal{B}$ も局所近傍基であるから, $\mathcal{B}$ の代わりに $-\mathcal{B}$ に上の関係を適用すれば

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{B} : x \in A + V$$

が成り立つ.

(b) 既に示した (a) を用いれば $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$, $W \in \mathcal{N}_0(X)$ について $a + b \in (A + B) + W$ を示せば良い. symmetric な $W_1, W_2 \in \mathcal{N}_0(X)$ を $W_1 + W_2 \subset W$ となるように取れば (a) より $a + W_1 \cap A \neq \varnothing$ が成り立つので $a \in A - W_1 = A + W_1$ であり, 同様に $b \in B + W_2$ も成り立つので

$$a + b \in (A + W_1) + (B + W_2) = (A + B) + (W_1 + W_2) \subset (A + B) + W.$$

よって再び (a) を用いれば $a + b \in \overline{A + B}$ 　が従う.

次に $\lambda \neq 0$ のときは

$$\begin{aligned} y \in \overline{\lambda A} &\Longleftrightarrow \forall W \in \mathcal{B} : y \in \lambda A + W \\ &\Longleftrightarrow \forall W' \in \frac{1}{\lambda}\mathcal{B} : \frac{1}{\lambda} y \in A + W' \\ &\Longleftrightarrow \frac{1}{\lambda} y \in \overline{A} \quad (\because \frac{1}{\lambda}\mathcal{B} \text{ も局所近傍基 }) \\ &\Longleftrightarrow y \in \lambda \overline{A} \end{aligned}$$

より $\overline{\lambda A} = \lambda \overline{A}$ が成り立つ. $\lambda = 0$ の時については $\overline{\lambda A} = \overline{\{0\}}$ であるが, $(\mathcal{T}V2)$ より $\overline{\{0\}} = \{0\} = 0\overline{A}$ である.

(c) 部分空間 Y について

$$\begin{aligned} \alpha\overline{Y} + \beta\overline{Y} &= \overline{\alpha Y} + \overline{\beta Y} \quad (\because \text{(b) より }) \\ &\subset \overline{\alpha Y + \beta Y} \quad (\because \text{(b) より }) \\ &\subset \overline{Y} \quad (\because Y \text{ は部分空間ゆえ }) \end{aligned}$$

(d) に於ける $\overline{C}$ の凸性と (e) に於ける $\overline{B}$ の平衡性は上記の (c) の場合とほぼ同様に証明できるので省略する.

(d) の $\mathrm{Int}\, C$ に関する凸性を示そう. $t \in (0,1)$ のときに成り立つ包含関係

$$(1-t)\mathrm{Int}\, C + t\mathrm{Int}\, C \subset (1-t)C + tC \subset C$$

に於いて, 最左辺は開集合であり C に含まれる. $\mathrm{Int}\, C$ は C に含まれる最大の開集合であるから $(1-t)\mathrm{Int}\, C + t\mathrm{Int}\, C \subset C\mathrm{Int}$ が成り立ち, $\mathrm{Int}\, C$ も凸である.

(e) の後半についても $0 < |\alpha| \leqslant 1$ ならば写像 $M_\alpha(x) = \alpha x$ は位相同型ゆえ $\alpha\mathrm{Int}\, B = \mathrm{Int}\,(\alpha B)$ であるから

$$\alpha\mathrm{Int}\, B = (\alpha\mathrm{Int}\, B) \subset \alpha B \subset B$$

に於いて, $\alpha\mathrm{Int}\, B$ は開集合であり, B に含まれる最大の開集合が $\mathrm{Int}\, B$ であるから $\alpha\mathrm{Int}\, B \subset \mathrm{Int}\, B$ が成り立つ. $\alpha = 0$ の時は仮定より $0B = \{0\} \subset \mathrm{Int}\, B$ が成り立つ. よって B は平衡的である.

(f) $E \subset X$ は有界とする. 任意の $U \in \mathcal{N}_0(X)$ について $\overline{V} \subset U$ を満たす $V \in \mathcal{N}_0$ を取る. このとき E の有界性よりある $t_0 > 0$ について $\forall t \geqslant t_0 : E \subset tV$ が成り立つ. よって $t \geqslant t_0$ の時

$$\overline{E} \subset \overline{tV} = t\overline{V} \subset tU$$

が成り立つ. 従って $\overline{E}$ も有界であある. □

Theorem 1.3.9 位相ベクトル空間 X について次が成り立つ.

(a) $\forall U \in \mathcal{N}_0 : \exists W \in \mathcal{N}_0 : W \subset U,\ W$ は平衡的.

(b) $\forall U \in \mathcal{N}_0$, かつ U は凸 $: \exists W \in \mathcal{N}_0 : W \subset U,\ W$ は凸かつ平衡的.

Proof. (a) $\delta > 0$ と $V \in \mathcal{N}_0$ を "$\forall \alpha$ with $|\alpha| < \delta : \alpha V \subset U$" が成り立つように取る. このとき $\alpha \neq 0$ について αV 　は 0 の近傍ゆえ開集合であり, $0 \in \alpha V$ であるから

$$W = \bigcup_{|\alpha|<\delta} \alpha V$$

と置けば W は開集合であり $0 \in W \subset U$ が成り立つ. また平衡的であることも容易に分かる.

(b) $U \in \mathcal{N}_0(X)$ が凸の場合

$$A = \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha U$$

と置くと凸集合である. また (a) を用いて平衡的な $W \in \mathcal{N}_0(X)$ を取る. W は平衡的であるから $|\alpha| = 1$ について $\alpha W \subset W$, $\alpha^{-1}W \subset W$ ゆえ $\alpha W = W$ が成り立つ. よって $W \subset U$ より

$$\forall |\alpha| = 1 : W = \alpha W \subset \alpha U$$

となるので $W \subset A$ が成り立つ. よって $W \subset \operatorname{Int} A$ となり $\operatorname{Int} A \in \mathcal{N}_0$ である. $\operatorname{Int} A$ は凸集合 A の内部ゆえ自身も凸であるから, $\operatorname{Int} A$ が平衡的であることを示せば証明は完了する. これには Theorem 1.3.8 (e) より A が平衡的であることを示せば良い. これは $0 \leqslant r \leqslant 1$, $|\beta| = 1$ について

$$\begin{aligned} r\beta A = \bigcap_{|\alpha|=1} r\beta\alpha U &= \bigcap_{|\alpha|=1} r\alpha U \\ &\subset \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha U \quad (\because 0 \in \alpha U \text{ で } \alpha U \text{ は凸}) \\ &= A \end{aligned}$$

より従う. $\square$

Corollary 1.3.10 (a) 位相ベクトル空間は平衡的集合よりなる局所近傍基を持つ.

(b) 局所凸位相ベクトル空間は平衡的凸な集合よりなる局所近傍基を持つ.

Proof. $\mathcal{B}$ を局所近傍基 (例えば $\mathcal{B} = \mathcal{N}_0(X)$ で良い) とする. (a) の場合は, 各 $U \in \mathcal{B}$ について Theorem 1.3.9 (a) より平衡的な 0 の近傍 V で $V \subset U$ となるものが存在する. このような V の全体を $\tilde{\mathcal{B}}$ とおけば $\tilde{\mathcal{B}}$ も局所近傍基である. 実際任意の $W \in \mathcal{N}_0(X)$ について $U \subset W$ を満たす $\mathcal{B}$ が存在するからこの U について上記の 0 の近傍 $V \in ma\tilde{thcalB}$ を取れば $V \subset U \subset W$ となるので, $ma\tilde{thcalB}$ も局所近傍基である. (b) の場合は凸集合よりなる局所近傍基 $\mathcal{B}$ が存在するので, 各 $U \in \mathcal{B}$ について Theorem 1.3.9 (b) より存在の保証される凸平衡的な V を取り, このような V の全体を $\tilde{\mathcal{B}}$ と置けば良い. $\square$

Theorem 1.3.11 (a) 任意の $V \in \mathcal{N}_0(X)$ について $0 < r_1 < r_2 < \cdots$ かつ $r_k \to \infty$ $(k \to \infty)$ ならば $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} r_k V$

(b) $V \in \mathcal{N}_0(X)$ が有界で $\delta_1 > \delta_2 > \cdots$ かつ $\delta_k \to 0$ $(k \to \infty)$ ならば $\{\delta_k V\}_{k=1}^{\infty}$ は局所近傍基である.

Proof. (a) 任意の $x_0 \in X$ について写像 $\lambda \mapsto \lambda x_0$ は $\lambda = 0$ で連続ゆえ $\delta > 0$ を $\forall |\lambda| < \delta : \lambda x_0 \in V$ が成り立つように取れる. 従って $r_k > \frac{1}{\delta}$ を満たす k について $\frac{1}{r_k} x_0 \in V$ となり, $x_0 \in r_k V$ が成り立つ. よって $x_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} r_k$ となり, x_0 の任意性より $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} r_k V$ である.

(b) V が有界ならば, 任意の $U \in \mathcal{N}_0(X)$ について $t_0 > 0$ を $t \geqslant t_0$ ならば $V \subset tU$ となるように取れる. よって $\delta_k \leqslant \frac{1}{t_0}$ を満たす k について $\delta_k V \subset U$ が成り立つ. 従って $\{\delta_k V\}_{k=1}^{\infty}$ は局所近傍基である.
$\square$

Corollary 1.3.12 位相ベクトル空間 X の部分集合 K が *compact* ならば有界である.

Proof. $K \subset X$ が compact で, $U \in \mathcal{N}_0(X)$ とする．$V \in \mathcal{N}_0(X)$ を平衡的で $V \subset U$ が成り立つように取る．また $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ を $0 < r_1 < r_2 < \cdots$, $r_j \to \infty$ となるように取る．このとき V の平衡性より $r_1 V \subset r_2 V \subset \cdots$ が成り立ち, Theorem 1.3.11 (a) より $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} r_k V$ である．従って開被覆 $K \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} r_k V$ においてある $K \subset r_k V$ を満たす k が存在することが分かる．これより $t \geqslant r_k$ ならば $K \subset r_k V \subset tV \subset tU$ が成り立つので K は有界である． □

ベクトル空間 X の部分集合 A が吸収的 (absorbing) であるとは

$$\forall x \in X : \exists t(x) > 0 : \forall t \geqslant t(x) : x \in tA$$

が成り立つ時を言う. 吸収的な集合 A はつねに 0 を要素に持つ. 実際, ある $t > 0$ について $0 \in tA$ が成り立つので $\exists a \in A : 0 = ta$ となるが, 両辺を t で割れば $a = 0$ である.

Theorem 1.3.13 位相ベクトル空間 X の任意の 0 の近傍は吸収的である.

Proof. $U \in \mathcal{N}_0(X)$ と $x_0 \in X$ を任意に取る．$x_0 = 0$ のときは tU も 0 の近傍であるから $0 \in tU$ が全ての $t > 0$ について成り立つ．$x_0 \neq 0$ の時は写像 $\Phi \ni \alpha \mapsto \alpha x_0$ の $\alpha = 0$ に於ける連続性より $\delta > 0$ を $|\alpha| < \delta$ ならば $\alpha x_0 \subset U$ が成り立つように取れる．従って $t > \frac{1}{\delta}$ ならば $\frac{1}{t} x_0 \in U$ より $x_0 \in tU$ となる．
□

Corollary 1.3.10 と Theorem 1.3.13 より平衡的かつ吸収的な集合よりなる局所近傍基 $\mathcal{B}$ が存在する．$\mathcal{B}$ の持つ性質を列挙すれば

($\mathcal{L}B1$) $\forall U \in \mathcal{B} : 0 \in U$

($\mathcal{L}B2$) $\forall U, V \in \mathcal{B} : \exists W \in \mathcal{B} : W \subset U \cap V$

($\mathcal{L}B3$) $\forall U \in \mathcal{B},\ x \in U : \exists V \in \mathcal{B} : x + V \subset U$

($\mathcal{L}B4$) 各 $U \in \mathcal{B}$ は吸収的である

($\mathcal{L}B5$) 各 $U \in \mathcal{B}$ は平衡的である

($\mathcal{L}B6$) $\forall U \in \mathcal{B} : \exists V \in \mathcal{B} : V + V \subset U$

($\mathcal{L}B7$) $\forall x \in X \backslash \{0\} : \exists U \in \mathcal{B} : x \notin U$

でなる. 重要なのはこの逆が成立することである.

Theorem 1.3.14 ベクトル空間 X の部分集合の族 $\mathcal{B} \neq \emptyset$ が ($\mathcal{L}B1$)-($\mathcal{L}B3$) を満たすとき, 集合 $G \subset X$ で

$$\forall x \in G : \exists V \in \mathcal{B} : x + V \subset G$$

を満たすものの全体を τ と置けば, τ は $\mathcal{B}$ を局所近傍基とする X の唯一の位相である．さらに ($\mathcal{L}B4$)-($\mathcal{L}B6$) を満たせば和 $x + y$ とスカラー倍 λx の 2 つの演算は, この位相のもとで連続になる．加えて ($\mathcal{L}B7$) を満たせば, ($\mathcal{T}V2$) が成り立ち X は位相ベクトル空間である.

Proof. $\mathcal{N}_x^* = x + \mathcal{B} = \{x + U : U \in \mathcal{B}\}$ と置けば, ($\mathcal{L}B1$), ($\mathcal{L}B2$), ($\mathcal{L}B3$) はそれぞれ ($\mathcal{F}ON1$), ($\mathcal{F}ON2$) ($\mathcal{F}ON3$) に対応するので, Theorem 1.1.3 より X の位相 τ で $\mathcal{B}$ を局所近傍基とするものが一意的に存在する.

次に $(\mathcal{L}B6)$ が和 $x+y$ の連続性を保証することは容易に分かるであろう. スカラー倍 λx の連続性を示すために $\lambda_0 \in \Phi$, $x_0 \in X$, $U \in \mathcal{B}$ が与えられたとする. このとき $2+|\lambda_0| < 2^k$ を満たす自然数 k を取り, $(\mathcal{L}B6)$ を繰り返し用いて

$$V + V + \cdots + V \subset U$$

が成り立つように $V \in \mathcal{B}$ を取る. 但し上式の右辺は 2^k 個の V の和とする. $(\mathcal{L}B4)$ と $(\mathcal{L}B5)$ を用いて $\forall \mu \in \Phi$ with $|\mu| \leqslant a : \mu x_0 \in V$ が成り立つように $a > 0$ を取る. 一般性を失うことなく $a < 1$ と仮定して良いことに注意する. この時 $|\mu| \leqslant a$ ならば V の平衡性より

$$(\lambda_0+\mu)(x_0+V) \subset \lambda_0 x_0 + \lambda_0 V + \mu x_0 + \mu V \subset \lambda_0 x_0 + |\lambda_0| V + V + aV \subset \lambda_0 x_0 + 2^k V \subset \lambda_0 x_0 + U$$

が成り立つ.

最後に $(\mathcal{L}B7)$ が $(\mathcal{T}V2)$ を導くことから, X は位相ベクトル空間になる. □

1.4 線形写像と有限次元位相ベクトル空間

それでは位相ベクトル空間 X について locally compact であることと X が有限次元であることが同値であることを示そう. これには Φ^n から位相ベクトル空間 X への線形写像が常に連続になるという事実が重要な役割を果たす. そこで線形写像について復習しておこう.

同じ係数体 Φ を持つベクトル空間 X からベクトル空間 Y への写像 $\Lambda : X \to Y$ が線形 (linear) であるとは

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \Phi,\ x_1, x_2 \in X : \quad \Lambda(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \Lambda(x_1) + \alpha_2 \Lambda(x_2)$$

が成り立つときを言う. また特に $Y = \Phi$ のとき, 線形汎関数 (linear functional) という.

線形写像 Λ については括弧を省略して $\Lambda(x) = \Lambda x$ と表す. 以下に容易に分かる事実をまとめておく.

Proposition 1.4.1 線形写像 $\Lambda : X \to Y$ について

(a) $\Lambda 0 = 0$

(b) $A \subset X$ がそれぞれ部分空間, 凸, 平衡的ならば $\Lambda(A)$ も部分空間, 凸, 平衡的である.

(c) $B \subset Y$ がそれぞれ部分空間, 凸, 平衡的ならば $\Lambda^{-1}(B)$ も部分空間, 凸, 平衡的である.

(d) $\operatorname{Ker}\Lambda := \Lambda^{-1}(0)$ は部分空間である.

Theorem 1.4.2 X, Y を位相ベクトル空間とし, 写像 $\Lambda : X \to Y$ は線形とする. このとき

$$\Lambda \text{ が連続} \iff \Lambda \text{ が } 0 \text{ で連続}$$

が成り立つ.

Proof. $\Longleftarrow$ のみ示そう. 任意の開集合 $G \subset Y$ と $x \in \Lambda^{-1}(G)$ について $\Lambda x + U \subset G$ を満たす $U \in \mathcal{N}_0(Y)$ を取る. Λ の 0 における連続性より $\Lambda(V) \subset U$ を満たす $V \in \mathcal{N}_0(X)$ が存在する. このとき

$$\Lambda(x+V) = \Lambda x + \Lambda(V) \subset \Lambda x + U \subset G$$

となるので $x + V \subset \Lambda^{-1}(G)$ が成り立つ. 従って $\Lambda^{-1}(G)$ は開集合であり, Λ は連続である. □

Theorem 1.4.3 Λ が位相ベクトル空間 X 上の線形汎関数で $\Lambda \neq 0$ とする．このとき, 次の 4 条件は同値である．

(a) Λ は連続．

(b) $\operatorname{Ker}\Lambda$ は閉集合．

(c) $\operatorname{Ker}\Lambda$ は X で稠密でない．

(d) Λ はある近傍 $V \in \mathcal{N}_0(X)$ 上で有界．

Proof. (*a*) $\Longrightarrow$ (*b*) Λ が連続ならば $\operatorname{Ker}\Lambda = \Lambda^{-1}(0)$ は閉集合 $\{0\}(\subset \Phi)$ の原像であるから, やはり閉集合である．

(*b*) $\Longrightarrow$ (*c*) $\operatorname{Ker}\Lambda$ が閉集合であると仮定する．このとき, もし $\operatorname{Ker}\Lambda$ が稠密ならば $\operatorname{Ker}\Lambda = X$ となり $\Lambda \neq 0$ に矛盾する．

(*c*) $\Longrightarrow$ (*d*) $\operatorname{Ker}\Lambda$ が稠密でないと仮定すると, $x \in X$ と平衡的な $V \in \mathcal{N}_0(X)$ で $(x+V) \cap \operatorname{Ker}\Lambda = \varnothing$ を満たすものが存在する．$\Lambda(V)$ が有界で無いと仮定して矛盾を導こう．まず $\Lambda(V)$ は位相ベクトル空間 Φ の平衡的な部分集合であるから, 非有界性より $\Lambda(V) = \Phi$ が成り立つ．従って $\Lambda y = -\Lambda x$ を満たす $y \in V$ が存在する．$\Lambda(x+y) = 0$ より $x + y \in \operatorname{Ker}\Lambda$ となるが, これは $(x+V) \cap \operatorname{Ker}\Lambda = \varnothing$ に矛盾する．

(*d*) $\Longrightarrow$ (*a*) $x \in V$ について $|\Lambda x| \leqslant M$ と仮定する．任意の $r > 0$ について $W = \frac{r}{M+1}V \in \mathcal{N}_0(X)$ と置くと,

$$|\Lambda x| \leqslant \frac{r}{M+1}M < r \quad \forall x \in W$$

が成り立つので Λ は $x = 0$ で連続であり, Theorem 1.4.2 より X で連続である．□

Theorem 1.4.4 X を位相ベクトル空間とし, 写像 $f : \Phi^m \to X$ は線形であるとする．このとき f は連続である．

Proof. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_1 = f(e_1), \ldots, u_m = f(e_m)$ と置くと

$$f(\alpha) = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m \quad \text{for } \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \Phi^m$$

となるが, 写像 $\Phi^m \ni \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \mapsto \alpha_k$, $k = 1, \ldots, m$ は連続であるから, これらの和である上式の右辺も連続である．□

Theorem 1.4.5 Y が係数体 Φ を持つ位相ベクトル空間 X の m 次元部分空間ならば Y は閉集合であり, 任意の線形な全単射 $f : \Phi^m \to Y$ は位相同型である．

Proof. $f : \Phi^m \to Y$ を線形な単射とする．f が連続であることは Theorem 1.4.4 より従う．

$$S = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \Phi^m : |\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_m|^2 = 1\},$$
$$B = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \Phi^m : |\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_m|^2 < 1\}$$

と置くと, $K = f(S)$ は compact 集合 S の像ゆえ compact である. また $f(0) = 0$ であり f は単射ゆえ $0 \notin K$. 従って Theorem 1.3.6 より平衡的な $V \in \mathcal{N}_0$ で $V \cap K = \varnothing$ となるものが存在する. $E = f^{-1}(V) = f^{-1}(V \cap Y)$ と置くと $E \cap S = \varnothing$. f は線形で E は平衡的であるから E は連結である. そして $S = \partial B$ と交わらず, $0 \in E \cap B$ ゆえ

$$f^{-1}(V \cap Y) \subset B \tag{1.4.1}$$

が成り立つ. これより $f^{-1} : Y \to \Phi^m$ は $0 \in Y$ の近傍 $V \cap Y$ で有界であるから, m 個の成分 (= 線形汎関数である) に Theorem 1.4.4 を適用すれば連続であることが分かる. 従って f^{-1} も連続であり, f は位相同型である.

次に Y が閉集合であることを示そう. Y の基底 $u_1, \ldots, u_m$ を取り,

$$f(\alpha) = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m \quad \text{for } \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \Phi^m$$

で線形写像 $f : \Phi^m \to Y$ を定める. f が全単射になることは $u_1, \ldots, u_m$ が基底であることから容易に分かる. 従って前段で示したことより f は位相同型である. また V をこの f に関して前段と同様に取った, X における 0 の平衡的な近傍とする.

さて $p \in \overline{Y}$ について $p \in tV$ を満たす $t > 0$ を取る. このとき $p \in \overline{Y \cap tV}$ が成り立つ. 実際, 任意の $U \in \mathcal{N}_0$ について $(p + U_0) \subset (p + U) \cap tV$ を満たす $U_0 \in \mathcal{N}_0$ を取れば $p \in \overline{Y}$ より $(p + U_0) \cap Y \neq \varnothing$ となり $(p + U_0) \cap (Y \cap tV) = (p + U_0) \cap Y \neq \varnothing$ である.

さて (1.4.1) より

$$Y \cap (tV) = tY \cap tV = t(Y \cap V) \subset f(tB) \subset f(t\overline{B})$$

$t\overline{B}$ は compact であるから, $f(t\overline{B}))$ も compact であり, X の閉集合である. よって

$$p \in \overline{Y \cap (tV)} \subset f(t\overline{B})) \subset Y$$

である. □

Theorem 1.4.6 X が Φ 上の $m(\in \mathbb{N})$ 次元位相ベクトル空間ならば Φ^m と同型である.

Proof. Theorem 1.4.5 の証明と同様に X の基底 $u_1, \ldots, u_m$ を取り,

$$f(\alpha) = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m \quad \text{for } \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \Phi^m$$

で線形写像 $f : \Phi^m \to X$ を定めれば全単射であり, 再び Theorem 1.4.5 より f は位相同型である. □

Theorem 1.4.7 位相ベクトル空間 X が局所 *compact* でであることと有限次元であることは同値.

Proof. X が局所 compact ならば $\overline{V}$ が compact である $V \in \mathcal{N}_0(X)$ が存在する. このとき V は有界であるから $2^{-n}V$ は局所近傍基である. $\overline{V}$ は compact であるから

$$\overline{V} \subset (x_1 + \frac{1}{2}V) \cup \cdots \cup (x_m + \frac{1}{2}V)$$

を満たすように $x_1, \ldots, x_m$ を取れる. Y を $x_1, \ldots, x_m$ の張る部分空間とすれば $V \subset Y + \frac{1}{2}V$ が成り立つので $\frac{1}{2}V \subset \frac{1}{2}Y + \frac{1}{4}V = Y + \frac{1}{4}V$ となり $V \subset Y + \frac{1}{2}V \subset Y + Y + \frac{1}{4}V \subset Y + \frac{1}{4}V$ となる. この操作を続ければ $V \subset Y + \frac{1}{2^n}V$ となり Theorem 1.3.8 の (a) と Y が有限次元であることから $\overline{Y} = Y$ であるので

$$V \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(Y + \frac{1}{2^N} V \right) = \overline{Y} = Y$$

よって $kV \subset kY = Y$ が任意の $k \in \mathbb{N}$ について成り立つが, $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kV$ であるから $X \subset Y$ となり $X = Y$ である.

逆に X が m 次元ならば Φ^m と同型であるから局所 compact である. $\square$

Theorem 1.4.8 位相ベクトル空間 X が局所有界で *Heine-Borel* 性を持つことと有限次元であることは同値.

Proof. 位相ベクトル空間 X が局所有界で Heine-Borel 性を持つとする. 有界な $V \in \mathcal{N}_0$ を取る. このとき $\overline{V}$ も有界であり, 閉集合であるから Heine-Borel 性より $\overline{V}$ は compact である. 従って X は局所 cmpact になり, Thorem 1.4.7 より有限次元である.

逆に X が m 次元ならば Φ^m と同型であるから局所有界で Heine-Borel 性を持つ. $\square$

1.5 距離

ベクトル空間 X が平行移動に関して不変な距離 d を持てば, d が誘導する位相のもとで X は位相ベクトル空間になる. そして $V_n = \{x \in X : d(x,0) < n^{-1}\}$, $n \in \mathbb{N}$ と置けば $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ は可算局所近傍基になる. この事実の逆も成立する.

Theorem 1.5.1 (X,τ) が位相ベクトル空間で可算局所近傍基 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ を持つとする. このとき平行移動に関して不変な距離 d で

(a) d の誘導する位相は τ と一致する.

(b) 0 を中心とする開球 $B_r(0) = \{x \in X : d(x,r) < r\}$ は各 $r > 0$ について平衡的.

を満たすものが存在する. さらに X が局所凸ならば d を

(c) $B_r(0)$ は各 $r > 0$ について凸.

も満たすように取れる.

Proof. $\tilde{U}_n = U_1 \cap \cdots \cap U_n$, $n \in \mathbb{N}$ と置く. Theorem 1.3.9 より平衡的 (X が局所凸の場合は凸性も加える) な近傍 $V_1 \in \mathcal{N}_0$ を $V_1 \subset \tilde{U}_1$ を満たすように取れる. 次に $\tilde{U}_{n_1} \subset V_1$ を満たす $n_1 \geqslant 2$ を取れば, Proposition 1.3.3 と Theorem1.3.9 より $V_2 + V_2 + V_2 + V_2 \subset \tilde{U}_{n_1}$ を満たす平衡的 (X が局所凸の場合は凸性も加える) な近傍 $V_2 \in \mathcal{N}_0$ が取れる. 以下, この操作を続けて行けば

$$V_{n+1} + V_{n+1} + V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

を満たし, 平衡的 (X が局所凸の場合は凸性も加える) な集合よりなる可算局所近傍基 $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ が取れる.

次に D を 2 進有理数 $r \in [0,1)$ の全体とする. つまり

$$r = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k(r)}{2^k}, \quad c_k(r) = 0 \text{ or } 1 \text{ で}, c_k(r) = 1 \text{ となる } k \text{ は有限個}$$

と表現できる r の全体である．そして

$$A(r) = \begin{cases} X, & r \geqslant 1 \\ c_1(r)V_1 + c_2(r)V_2 + \cdots, & r \in D \end{cases}$$

と置く．$r \in D$ の場合の $A(r)$ の定義式の右辺は実際には有限和であることに注意しておこう．このとき

Lemma 1.5.2

$$A(r) + A(s) \subset A(r+s) \tag{1.5.1}$$

が成り立つ.

この包含関係の証明は後に回すことにして, 定理の証明を先に進めよう.

$$f(x) = \inf\{r \in D \cup [1,\infty) : x \in A(r)\}, \quad d(x,y) = f(x-y) \quad \text{for } x, y \in X$$

と置く．このとき $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ と平行移動に関する不変性 $d(x+a, y+a) = d(x,y)$ が成り立つことは明らかであろう．また $0 \leqslant r < t$ を満たす $r, t \in D \cup [1,\infty)$ について単調性 $A(r) \subset A(r) + A(t-r) \subset A(t)$ が成り立つ．これより $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$ が導かれる．実際任意の $x, y \in X$ と $\varepsilon > 0$ について $f(x) \leqslant r < f(x) + 2^{-1}\varepsilon$, $f(y) \leqslant s < f(y) + 2^{-1}\varepsilon$ を満たす r, $s \in D \cup [1,\infty)$ を取ると $x \in A(r)$, $y \in A(r)$ より $x + y \in A(r) + A(s) \subset A(r+s)$ となり $f(x+y) \leqslant r+s$ が成り立つ．よって

$$f(x+y) \leqslant r + s < f(x) + f(y) + \varepsilon$$

となり, ε の任意性より $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$ が成り立つ．よって

$$d(x,z) \leqslant f(x-z) \leqslant f(x-y+y-z) \leqslant f(x-y) + f(y-z) = d(x,y) + d(y,z)$$

が成り立つ. 次に V_n は平衡的であるから $A(r)$ も平衡的であり $|\alpha| = 1$ について $f(\alpha x) = f(x)$ が成り立つ. 従って $d(x,y) = f(x-y) = f(y-x) = d(y,x)$

また $r \in D$ について $0 \in A(r)$ ゆえ $f(0) = 0$ であり $d(x,x) = f(x-x) = f(0) = 0$ が成り立つ．そして $x \neq 0$ ならばある $n \in \mathbb{N}$ について $x \notin V_n = A(2^{-n})$ より $f(x) \geqslant 2^{-n} > 0$ となる．よって "$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$" が成り立ち, "$d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$" が成り立つ．これで d が平行移動に関して不変な距離であることが分かった.

さて

$$B_\delta(0) = \{x \in X : d(x,0) < \delta\} = \{x \in X : f(x) < \delta\} = \bigcup_{0 \leqslant r < \delta,\ r \in D \cup [1,\infty)} A(r)$$

の最右辺において各 $A(r)$ は平衡的であるから $B_\delta(0)$ も平衡的である．また X が局所凸の時は V_n も凸になるように取れたので, $A(r)$ も凸になり $B_\delta(0)$ も凸である．そして V_n が開集合であるから $A(r)$ も開集合であり結局 $B_\delta(0)$ も開集合である.

最後に任意の $n_0 \in \mathbb{N}$ について $r \in D$, $r < 2^{-n_0}$ ならば $c_1(r) = \cdots = c_{n_0}(r) = 0$ ゆえ $c_n(r) \neq 0$ となる最大の n を N とおくと

$$\begin{aligned} A(r) &\subset V_{n_0+1} + \cdots + V_{N-2} + V_{N-1} + V_N \\ &\subset V_{n_0+1} + \cdots + V_{N-2} + V_{N-1} + V_{N-1} \\ &\subset V_{n_0+1} + \cdots + V_{N-2} + V_{N-2} \\ &\vdots \\ &\subset V_{n_0+1} + V_{n_0+1} \subset V_{n_0} \end{aligned}$$

よって

$$B_{2^{-n_0}} = \bigcup_{0 \leqslant r < 2^{-n_0},\, r \in D \cup [1,\infty)} A(r) \subset V_{n_0}$$

となる. $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ が局所近傍基であったから $\{B_{2^{-n}}\}_{n=1}^{\infty}$ も局所近傍基になり, d の誘導する位相は τ と一致する. □

それでは Lemma 1.5.2 を証明しよう.

$$A(r) + A(s) \subset A(r+s)$$

Proof. $r+s \geqslant 1$ の時は明らかであるから $r+s<1$ と仮定する. $N \in \mathbb{N}$ を $c_n(r)^2 + c_n(s)^2 \neq 0$ となる最大の n とする. N に関する帰納法で証明を行う. $N=1$ のときは $r+s<1$ より $(c_1(r), c_1(s)) = (1,0)$ または $=(0,1)$ であり, $n \geqslant 2$ については $c_n(r) = c_n(s) = 0$ の場合である. (この場合は $(r,s) = (1/2, 0)$ または $(0, 1/2)$ であり, $r+2 = 1/2$ となる.) 従って

$$A(r) + A(s) = 0 + V_1 = V_1 = A(r+s)$$

となるので成り立つ.

$1, \ldots, N-1$ まで正しいと仮定する. まず $c_N(r) + c_N(s) = c_N(r+s)$ が成り立つ場合を考えよう. この場合は

$$(c_N(r), c_N(s), c_N(r+s)) = (0,1,0),\ (1,0,1),\ (0,0,0)$$

の 3 つの場合になり, $r+s$ の計算は次表のように行われる.

				N 位
r		$\cdots$	$*$	0
s	+)	$\cdots$	$*$	0
$r+s$			$*$	0

				N 位
r		$\cdots$	$*$	0
s	+)	$\cdots$	$*$	1
$r+s$			$*$	1

				N 位
r		$\cdots$	$*$	1
s	+)	$\cdots$	$*$	0
$r+s$			$*$	1

どの場合でも $r' = r - c_N(r)2^{-N}$, $s' = s - c_N(s)2^{-N}$ とおけば $r' + s' = r + s - c_N(r+s)2^{-N}$ となるので

$$A(r) = c_N(r)V_N + A(r'), \quad A(s) = c_N(s)V_N + A(s'), \quad A(r+s) = c_N(r+s)V_N + A(r'+s')$$

が成り立つ. ここで

$$\begin{aligned} A(r) + A(s) =& c_N(r)V_N + c_N(s)V_N + A(r') + A(s') \\ A(r+s) =& (c_N(r) + c_N(s))V_N + A(r'+s') \end{aligned}$$

であるが, 2 つの等式の右辺において

$$c_N(r)V_N + c_N(s)V_N = (c_N(r) + c_N(s))V_N$$

が成り立つこと, 及び r', s' については $c_n(r')^2 + c_n(s')^2 \neq 0$ となるのは $n \leqslant N-1$ の場合のみであるから, 帰納法の仮定が適用でき $A(r') + A(s') \subset A(r'+s')$ が成り立つことを合わせて $A(r) + A(s) \subset A(r+s)$ が成り立つ.

次に $c_N(r) + c_N(s) \neq c_N(r+s)$ の場合であるが, これは

$$(c_N(r), c_N(s), c_N(r+s)) = (1,1,0) \tag{1.5.2}$$

つまり, $r+s$ の N 位の桁が繰上げで $c_N(r+s)=0$ となる場合である. このとき $c_n(r+s)=1$ となる最大の n を N_0 とおけば, $N_0 \leqslant N-1$ であり $N_0+1 \leqslant n$ について $c_n(r+s)=0$ である. また

$$(c_n(r), c_n(s)) = (1,0) \text{ or } (0,1) \text{ for } N_0+1 \leqslant n \leqslant N \tag{1.5.3}$$

である. $c_{N_0}(r+s)=1$ となるのは $(c_{N_0}(r), c_{N_0}(s)) = (0,0)$ または $(1,1)$ の場合なので, 次のような計算を行うことになる.

$$\begin{array}{llllllll}
 & & N_0\text{ 位} & & & & N\text{ 位} \\
r & & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
s & +) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\
\hline
r+s & & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}
,\qquad
\begin{array}{llllllll}
 & & N_0\text{ 位} & & & & N\text{ 位} \\
r & & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
s & +) & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\
\hline
r+s & & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}$$

そこで

$$\begin{aligned}
r' =& r - c_N(r)2^{-N} - \cdots - c_{N_0+1}(r)2^{-N_0-1} \\
s' =& s - c_N(s)2^{-N} - \cdots - c_{N_0+1}(s)2^{-N_0-1}
\end{aligned}$$

とおけば, $r'+s' = r+s-2^{-N_0}$ であり

$$\begin{aligned}
A(r) =& c_N(r)V_N + \cdots + c_{N_0+1}(r)V_{N_0+1} + A(r') \\
A(s) =& c_N(s)V_N + \cdots + c_{N_0+1}(s)V_{N_0+1} + A(s') \\
A(r+s) =& V_{N_0} + A(r'+s')
\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで (1.5.2) と (1.5.3) より

$$c_N(r)V_N + \cdots + c_{N_0+1}(r)V_{N_0+1} + c_N(s)V_N + \cdots + c_{N_0+1}(s)V_{N_0+1} \subset V_{N_0}$$

が成り立つこと, 及び, 帰納法の仮定より $A(r') + A(s') \subset A(r'+s')$ が成り立つことを合わせて $A(r) + A(s) \subset A(r+s)$ が成り立つことが分かる.

位相ベクトル空間 (X, τ) の列 $\{x_n\}$ が Cauchy 列であるとは

$$\forall U \in \mathcal{N}_0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geqslant N : x_m - x_n \in U$$

が成り立つ時を言う. $\mathcal{B}$ が局所近傍基の時, 上式の $U \in \mathcal{N}_0(X)$ の部分を $U \in \mathcal{B}$ に変更しても同値な条件になる.

距離空間 (X, d) に於ける Cauchy 列の定義も同様に

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geqslant N : d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

である.

以下では 2 つの Cauchy 列の概念を区別してそれぞれ τ-Cauchy 列と, d-Cauchy 列と呼ぶことにしよう. 位相ベクトル空間の位相 τ が平行移動に関して不変な距離 d より誘導されるものと一致する時は 2 つの Cauchy 列を定義する条件は同値になる. 従って

Proposition 1.5.3 d_1, d_2 が 平行移動に関して不変な距離で同一の位相を誘導する時,

(a) $\{x_n\}$ が d_1-*Cauchy* 列であることと, d_2-*Cauchy* 列であることは同値である

(b) d_1 について X が完備であることと d_2 完備であることは同値である

但し d_1, d_2 の少なくとも一方が不変で無いときはこの限りではない. 例えば $\mathbb{C}$ において 2 点 z, w について Euclid 距離 $d_1(x,y)=|z-w|$ と

$$d_2(z,w)=\frac{|z-w|}{\sqrt{1+|z|}\sqrt{1+|w|}}$$

は同じ位相を誘導するが, $z_n\to\infty$ を満たす複素数列 $\{z_n\}$ は d_2-Cauchy 列であるが, Euclid 距離ではそうでない.

Theorem 1.5.4 *(X,d_X), (Y,d_Y) は距離空間で (X,d_X) は完備とする. $E\subset X$ が閉集合で, $f:E\to Y$ が連続. そして*

$$d_Y(f(x_1),f(x_2))\geqslant d_X(x_1,x_2)\quad \textit{for all } x_1,x_2\in E$$

ならば $f(E)$ は閉集合である.

Proof. $y\in\overline{f(E)}$ について $x_k\in E$ を $y=\lim_{k\to\infty}f(x_k)$ となるように取る. この時 $\{f(x_k)\}$ は Cauchy 列であり, 従って上の不等式より $\{x_k\}$ も Cauchy 列である. E は完備距離空間の閉集合であるから完備であるので $x=\lim_{k\to\infty}x_k$ が存在し, 連続性より $y=\lim_{k\to\infty}f(x_k)=f(x)\in f(E)$ となるので $f(E)$ は閉集合である.

Theorem 1.5.5 *X を位相ベクトル空間とし, $Y\subset X$ を部分空間とする. Y は X からの相対位相のもとで F-空間, つまりその位相が平行移動に関して不変な距離により導入されたものと一致し, 完備であるとする. このとき Y は閉集合である.*

Proof. d を平行移動に関して不変な距離で Y の位相を誘導するものとする. $B_{1/n}=\{y\in Y: d(y,0)<\frac{1}{n}\}$ と置いて, $U_n\in\mathcal{N}_0(X)$ を $B_{1/n}=Y\cap U_n$ を満たすように取る. そして symmetric な $V_n\in\mathcal{N}_0(X)$ を $V_n+V_n\subset U_n$ かつ $V_{n+1}\subset V_n$ を満たすように取る. このとき $x\in\overline{Y}$ について $E_n=Y\cap(x+V_n)$ と置くと, $y_1,y_2\in E_n$ ならば $y_1-y_2\in Y$ かつ $y_1-y_2\in V_n-V_n=V_n+V_n\subset U_n$ であるから $y_1-y_2\in Y\cap U_n=B_{1/n}$ となる. これは $\operatorname{diam}E_n=\sup\{d(y_1,y_2): y_1,y_2\in E_n\}\to 0$ を意味する. $E_{n+1}\subset E_n$ であり, Y は完備ゆえ, ある $y_0\in Y$ について $\bigcap\overline{E_n}=\{y_0\}$ が成り立つ. 但し $\overline{E_n}$ は Y での閉包を表す.

$W\in\mathcal{N}_0(X)$ について $F_n=Y+(x+(W\cap V_n))$ と置くと前段と同様にして $\bigcap\overline{F_n}$ は 1 点のみからなるが, $F_n\subset E_n$ より, それは $\{y_0\}$ である. ここで $F_n\subset x+W$ より $y_0\in\overline{x+W}=x+\overline{W}$ である. 但し $\overline{x+W}$, $\overline{W}$ は X に於ける閉包である. これが任意の $W\in\mathcal{N}_0(X)$ について成り立つことと X の Hausdorff 性より $x=y_0\in Y$ となり, Y は閉集合である. □

Theorem 1.5.6 (a) *d がベクトル空間 X 上の平行移動に関して不変な距離ならば, 任意の $x\in X$ と $n\in\mathbb{D}$ について $d(nx,0)\leqslant nd(x,0)$*

(b) *X が距離化可能な位相ベクトル空間ならば $x_n\to 0$ である列 $\{x_n\}$ についてスカラー列 $\{\gamma_n\}$ を $\gamma_n\to\infty$ かつ $\gamma_n x_n\to 0$ が成り立つように取れる.*

Proof. (a)

$$d(nx,0)\leqslant d(nx,(n-1)x)+d((n-1)x,0)=d(x,0)+d((n-1)x,0)$$

を繰り返せば直ちに従う.

(b) 自然数列 $1 < n_1 < n_2 < \cdots$ を $n \geqslant n_k$ について $d(x_k, 0) < \frac{1}{k^2}$ が成り立つように取り, $n_0 = 1$ と置く. そして $n_{k-1} \leqslant n \leqslant n_k - 1$ について $\gamma_n = k$ と置く. このとき $n_{k-1} \leqslant n \leqslant n_k - 1$ について $\gamma_n = k$ と $d(x_n, 0) < \frac{1}{k^2}$ より

$$d(\gamma_n x_n, 0) = d(kx_n, 0) \leqslant kd(x_n, 0) < k\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k}$$

となり, $\gamma_n x_n \to 0$ が分かる. □

1.6　有界性と連続性

位相ベクトル空間 X の部分集合 E が有界であるとは

$$\forall U \in \mathcal{N}_0 : \exists t_0 > 0 : \forall t \geqslant t_0 : E \subset tU$$

が成り立つことと定義した. これは距離空間 (X, d) における通常の有界性の定義

$$\exists M \geqslant 0 : \forall x, y \in E : d(x, y) \leqslant M$$

とは必ずしも同値では無い. そこで暫くの間, 後者のほうを d-有界と表して区別することにしよう.

(X, τ) が位相ベクトル空間で, 平行移動に関して不変な距離 d が導入する位相と τ が一致する場合でも有界性と d-有界性は必ずしも一致しない. 実際 Thorem 1.5.1 の証明で構成した平行移動に関して不変な距離は $d(x, y) \leqslant 1$ を満たすので X 自身が d-有界になるが, X は $X = \{0\}$ となる場合を除き有界では無い. この事実は後ほど示す Proposition 1.6.3 において, “$\{0\}$ に一致する場合を除いて位相ベクトル空間の部分空間は有界でない” という形で証明する.

Proposition 1.6.1 X がノルム空間で d がノルムから誘導される距離, つまり $d(x, y) = \|x - y\|$ のとき有界性と d-有界性は同値である.

Proof. E が有界ならば $B_r(0) = \{x \in X : \|x\| < r\}$ と置くと $B_1(0)$ は 0 の近傍ゆえ, ある t_0 について

$$E \subset tB_1(0) = B_t(0) \quad \forall t \geqslant t_0$$

が成り立つ. よって $x, y \in E$ について $x - y \in B_{t_0}0) - B_{t_0}(0) \subset B_{2t_0}(0)$ となり $d(x, y) = \|x - y\| \leqslant 2t_0$ ゆえ E は d-有界である.

次に E が d-有界ならば

$$d(x, y) \leqslant M \quad \forall x, y \in E$$

となる $M \geqslant 0$ を取る. 0 の近傍 V について $B_\delta(0) \subset V$ となる $\delta > 0$ を取る. また $x_0 \in E$ を 1 つ取り固定する. このとき任意の $x \in E$ について

$$\|x\| \leqslant \|x_0\| + \|x - x_0\| \leqslant \|x_0\| + M = \frac{\|x_0\| + M}{\delta}\delta$$

より

$$x \in tB_\delta(0) \quad \forall t \geqslant \frac{\|x_0\| + M}{\delta}$$

が成り立つ. 従って

$$E \subset tB_\delta(0) \subset tV \quad \forall t \geqslant \frac{\|x_0\| + M}{\delta}$$

が成り立ち, E は有界である. □

以後, 位相ベクトル空間において特に断らない限り" 有界" といえば "$\exists t_0 > 0 : E \subset tU \forall t \geqslant t_0$" の定義を採用したものとする.

位相ベクトル空間において, compact 集合は有界であり (Theorem 1.3.11 の (b)) また有界集合の閉包も有界である (Theorem 1.3.8 (f)) であった. このように有界性を保証する条件, 及び非有界性を保証する条件をもう少しあげておこう.

Proposition 1.6.2 *Cauchy 列は有界である. 従って特に収束列は有界である.*

Proof. $\{x_n\}$ を Cauchy 列とし, W を 0 の近傍とする. 平衡的な 0 の近傍 V を $V + V \subset W$ を満たすように取る. このとき $\exists N \in \mathbb{N}$ を "$x_n - x_m \in V \ \forall m, n \geqslant N$" が成り立つように取れる. 特に $n \geqslant N$ について $x_n - x_N \in V$ より $x_n \in x_N + V$. そこで $t_0 \geqslant 1$ を "$\forall t \geqslant t_0 : x_1, \ldots, x_N \in tV$" が成り立つように取る. この時 $n \geqslant N$ ならば $t \geqslant t_0$ について

$$x_n \in x_N + V \subset tV + V \subset tV + tV = t(V + V) \subset tW$$

また $1 \leqslant n \leqslant N - 1$ の時でも $t \geqslant t_0$ について

$$x_n \in tV \subset t(V + V) \subset tW$$

が成り立つ. 従って $\{x_n\}$ は有界である. □

Proposition 1.6.3 *$x \in X \backslash \{0\}$ について $E = \{nx : n = 1, 2, \ldots\}$ と置くと, E は非有界. これより特に $\{0\}$ を除く X の部分空間は非有界.*

Proof. $U = X \backslash \{x\}$ と置くと, 位相ベクトル空間の公理 $(\mathcal{T}V2)$ より U は開集合であり, $0 \in U$ ゆえ, 0 の近傍である. $x \notin U$ より $nx \notin nU$ が成り立つ. 従って任意の $n \in \mathbb{N}$ について $E \not\subset nU$. 従って E は有界でない. □

有界性の点列による特徴付けを与えておこう.

Theorem 1.6.4 位相ベクトル空間 X の部分集合 E について

$$E \text{ は有界} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{“}E \text{ 内の列 } \{x_k\} \text{ とスカラー列 } \alpha_k \to 0 \text{ について } \alpha_k x_k \to 0''$$

Proof. E が有界とする. 任意の $U \in \mathcal{N}_0(X)$ について平衡的な 0 の近傍 V を $V \subset U$ となるように取る. このときある $\exists t_0 > 0$ で $\forall t \geqslant t_0 : E \subset tV$ が成り立つものが存在する. V は平衡的であるから

$$\forall \lambda \text{ with } |\lambda| \leqslant \frac{1}{t_0} : \lambda E \subset V \subset U$$

が成り立つ. 従って N を $n \geqslant N$ ならば $|\alpha_n| < \frac{1}{t_0}$ が成り立つように取れば, $n \geqslant N$ について

$$\alpha_n x_n \in \alpha_n E \subset V$$

が成り立つ．よって $\alpha_n x_n \to 0$ である．

次に E が非有界とする．このときある $U \in \mathcal{N}_0(X)$ と正数列 $r_n \to \infty$ を $E \not\subset r_n U$ が成り立つように取れる．そこで各 $n \in \mathbb{N}$ について $x_n \in E \backslash r_n U$ を取れば $\{x_n\}$ は E の列である．また $x_n \notin r_n U$ より $\frac{1}{r_n} x_n \in U$ であるから $\left\{\frac{1}{r_n} x_n\right\}$ は 0 に収束しない． □

集合の有界性に加えて, 線形写像の有界性についても触れておこう．X, Y をともに位相ベクトル空間とし, 写像 $\Lambda : X \to Y$ は線形とする．このとき Λ が有界 (bounded) であるとは,

$$E \subset X \text{ が } X \text{ に於いて有界} \Longrightarrow \Lambda(E) \text{ は } Y \text{ に於いて有界}$$

が成り立つ時, つまり有界集合の像が有界となる時を言う．Φ に値を持つ関数としての有界性 (値域が有界) と混同しないように注意しよう．

Theorem 1.6.5 *X, Y をともに位相ベクトル空間とし, 写像 $\Lambda : X \to Y$ は線形とする．このとき以下の 4 条件について $(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (c)$ が成り立つ．さらに X が距離化可能ならば $(c) \Longrightarrow (d) \Longrightarrow (a)$ が成り立ち, 4 条件は全て同値になる．*

(a) Λ は連続である．

(b) Λ は有界である．

(c) $x_n \to 0$ ならば $\{\Lambda x_n\}$ は有界である．

(d) $x_n \to 0$ ならば $\Lambda x_n \to 0$ である．

Proof. $(a) \Longrightarrow (b)$ について．Λ が連続であるとし, E を X の有界な部分集合とする．Y に於ける 0 の近傍 W について X に於ける 0 の近傍 V を $\Lambda(V) \subset W$ を満たすように取る．そして $t_0 > 0$ を $\forall t \geqslant t_0 : E \subset tV$ が成り立つように取る．このとき $t \geqslant t_0$ について

$$\Lambda(E) \subset \Lambda(tV) = t\Lambda(V) \subset tW$$

が成り立つので, $\Lambda(E)$ は有界である．

$(b) \Longrightarrow (c)$ について．$x_n \to 0$ ならば $\{x_n\}$ は有界であるから, (b) により $\{\Lambda x_n\}$ も有界である．

以後は X が距離化可能を仮定する．$(c) \Longrightarrow (d)$ について．$x_n \to 0$ ならば Theorem 1.5.6 (b) より $\gamma_n x_n \to 0$, $\gamma_n \to \infty$ を満たすスカラー列 $\{\gamma_n\}$ が取れる．このとき (c) より $\{\Lambda(\gamma_n x_n)\}$ は有界である．従って $x_n = \frac{1}{\gamma_n}\gamma_n x_n \to 0$ は Theorem 1.6.4 より $x_n \to 0$ を満たす．

最後に $(d) \Longrightarrow (a)$ の対偶を示そう．そこで Λ が連続でないとする．このときある Y に於ける 0 の近傍 W で $\Lambda^{-1}(W)$ が X に於ける 0 の近傍を含まないものが存在する．d を平行移動に関して不変な距離で, X の位相と同じ位相を誘導するものとしよう．$V_n = \{x \in X : d(x, 0) < \frac{1}{n}\}$ と置くと, $V_n \not\subset \Lambda^{-1}(W)$ ゆえ各 $n \in \mathbb{N}$ について $x_n \in V_n \backslash \Lambda^{-1}(W)$ が取れる．このとき $x_n \to 0$ であるが, $\Lambda x_n \notin W$ より $\Lambda x_n \to 0$ は成り立たない． □

1.7　セミノルムと局所凸性

ベクトル空間 X 上の実数値関数 p がセミノルム (seminorm) であるとは

(a) $\forall x, y \in X : p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$

(b) $\forall \alpha \in \Phi,\ x \in X : p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$

の 2 条件が成り立つ時を言う．条件 (a) は劣加法性 (subadditivity) と呼ばれる．セミノルム p について $p(0) = p(0 \cdot 0) = |0| p(0) = 0$ より

(c) $p(0) = 0$

また $0 = p(0) = p(x - x) \leqslant p(x) + p(-x) = 2p(x)$ より

(d) $\forall x \in X : p(x) \geqslant 0$

が成り立つ．

セミノルム p について, 次の事実も成り立つ．

(e) $\forall x, y \in X : |p(x) - p(y)| \leqslant p(x+y)$

(f) $\{x \in X : p(x) = 0\}$ は X の部分空間

Proof. $p(x) \leqslant p(x-y) + p(y)$ より $p(x) - p(y) \leqslant p(x-y)$．同様に $p(y) - p(x) \leqslant p(y-x) = p(x-y)$ より (e) が成り立つ．(f) については $p(x) = p(y) = 0$ ならば $0 \leqslant p(\alpha x + \beta y) \leqslant |\alpha| p(x) + |\beta| p(y) = 0$ より $p(\alpha x + \beta y) = 0$ となることより従う． □

ベクトル空間 X の部分集合 A が吸収的であるとは

$$\forall x \in X : \exists t(x) > 0 : \forall t \geqslant t(x) : x \in tA$$

が成り立つことと定義したことを思い出しておこう．また吸収的な集合は, 必ず 0 を要素に持つのであった．吸収的な集合 A について

$$\mu_A(x) = \inf\{t > 0 : x \in tA\} \tag{1.7.1}$$

と置いて, A の Minkowski 汎関数と呼ぶ．A が吸収的であることより $0 \leqslant \mu_A(x) < \infty$ が成り立つ．

Theorem 1.7.1 *ベクトル空間 X のセミノルム　p について $B = \{x \in X : p(x) < 1\}$ とおけば, B は凸, 平衡的かつ吸収的であり $\mu_B = p$ が成り立つ．*

Proof. $x, y \in B$ ならば $p(x) < 1$, $p(y) < 1$ ゆえ $t \in (0,1)$ について

$$p((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)p(x) + tp(y) < (1-t) + t = 1$$

より $(1-t)x + ty \in B$ となるから B は凸である．また $|\alpha| \leqslant 1$ ならば $p(\alpha x) = |\alpha| p(x) \leqslant p(x) < 1$ ゆえ $\alpha x \in B$ となり B は平衡的である．

次に B が吸収的であることを示そう．$p(x) = 0$ の場合は任意の $s > 0$ について $p(sx) = sp(x) = 0$ より $sx \in B$ 従って任意の $t > 0$ について $x \in tB$ である．次に $p(x) > 0$ のときは任意の $t > \frac{1}{p(x)}$ について $p(t^{-1}x) = t^{-1}p(x) < 1$ より $t^{-1}x \in B$ つまり $x \in tB$ である．以上より B は吸収的である．

最後に

$$\mu_B(x) = \inf\{t > 0 : x \in tB\}$$

に於いて,

$$x \in tB \Longleftrightarrow p(x) < t$$

より $\mu_B(x) = p(x)$ が成り立つ. □

Lemma 1.7.2 A をベクトル空間 X の凸かつ吸収的な部分集合とし, $x \in X$, $t_0 > 0$ とする. このとき $x \in t_0 A$ ならば $t \geqslant t_0$ について $x \in tA$.

Proof. $x \in t_0 A$ ならば $\frac{1}{t_0}x \in A$ が成り立つ. また A は吸収的であるから $0 \in A$ である. 従って A の凸性より $\forall\theta \in (0,1] : \frac{\theta}{t_0}x \in A$. よって $t \geqslant t_0$ について $x \in tA$ が成り立つ. □

Theorem 1.7.3 A がベクトル空間 X の凸かつ吸収的な部分集合ならば

(a) $\forall x, y \in X : \mu_A(x+y) \leqslant \mu_A(x) + \mu_A(y)$

(b) $\forall t \geqslant 0,\ x \in X : \mu_A(tx) = t\mu_A(x)$

(c) $B = \{x \in X : \mu_A(x) < 1\}$, $C = \{x \in X : \mu_A(x) \leqslant 1\}$ と置くと $B \subset A \subset C$ かつ $\mu_B = \mu_A = \mu_C$ が成り立つ.

(d) 加えて A が平衡的ならば $\mu_A(\alpha x) = |\alpha|\mu_A(X)$ が成り立ち, μ_A はセミノルムになる.

Proof. μ_A の定義より, 任意の $\varepsilon > 0$ について

$$\begin{aligned} x \in t_1 A, &\quad \mu_A(x) \leqslant t_1 < \mu_A(x) + \frac{\varepsilon}{2} \\ y \in t_2 A, &\quad \mu_A(y) \leqslant t_2 < \mu_A(y) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

を満たす $t_1, t_2 > 0$ が存在する. このとき A の凸性より

$$x + y \in t_1 A + t_2 A = (t_1 + t_2)\left\{\frac{t_1}{t_1+t_2}A + \frac{t_2}{t_1+t_2}A\right\} \subset (t_1+t_2)A$$

が成り立つので

$$\mu_A(x+y) \leqslant t_1 + t_2 < \mu_A(x) + \frac{\varepsilon}{2} + \mu_A(y) + \frac{\varepsilon}{2} = \mu_A(x) + \mu_A(y) + \varepsilon$$

となる. $\varepsilon > 0$ の任意性より $\mu_A(x+y) \leqslant \mu(x) + \mu(y)$ が成り立つ.

(b) については

$$\begin{aligned} \mu_A(tx) &= \inf\{s > 0 : tx \in sA\} \\ &= \inf\{s > 0 : x \in \frac{s}{t}A\} \\ &= \inf\{rt > 0 : r > 0,\ x \in rA\} \quad \left(\because r = \frac{s}{t} \text{ と置いた}\right) \\ &= t\mu_A(x) \end{aligned}$$

より従う.

(c) はじめに

$$\begin{aligned} x \in B &\Longleftrightarrow \inf\{t > 0 : x \in tA\} < 1 \\ &\Longleftrightarrow \exists t_0 < 1 : x \in t_0 A \end{aligned}$$

が成り立つので, $x \in B$ ならば Lemma 1.7.2 より $t \geqslant t_0$ について $x \in tA$ ゆえ, 特に $t = 1$ として $x \in A$. よって $B \subset A$ である. また $x \in A$ ならば $\mu_A(x) = \inf\{t > 0 : x \in tA\} \leqslant 1$ ゆえ $x \in C$ が成り立つ. よって $A \subset C$ である.

$$\mu_C(x) = \inf\{r > 0 : x \in rC\}$$

に於いて $x \in rC \Longleftrightarrow \mu_A(x) \leqslant r$ ゆえ, $\mu_C(x) = \mu_A(x)$ が成り立つ. 同様に

$$\mu_B(x) = \inf\{r > 0 : x \in rB\}$$

に於いて $x \in rB \Longleftrightarrow \mu_A(x) < r$ ゆえ $\mu_B(x) = \mu_A(x)$ が成り立つ.

(d) A が平衡的ならば $|\alpha| = 1$ を満たす $\alpha \in \Phi$ について $\alpha^{-1}A = A$ であるから

$$\begin{aligned} \mu_A(\alpha x) &= \inf\{t > 0 : \alpha x \in tA\} \\ &= \inf\{t > 0 : x \in t\alpha^{-1}A\} \\ &= \inf\{t > 0 : x \in tA\} = \mu_A(x) \end{aligned}$$

が成り立つ. □

$\mathcal{P}$ をベクトル空間 X 上のセミノルムの族とする. このとき $\mathcal{P}$ が分離的 (separating) であるとは,

$$\forall x \in X \backslash \{0\} : \exists p \in \mathcal{P} : p(x) \neq 0$$

が成り立つ時を言う.

Theorem 1.7.4 $\mathcal{B}$ を凸かつ平衡的な集合よりなる局所近傍基とする. このとき次の 2 条件が成り立つ.

(a) 各 $V \in \mathcal{B}$ について $V = \{x \in X : \mu_V(x) < 1\}$ が成り立ち, μ_V は連続なセミノルム.

(b) $\{\mu_V\}_{V \in \mathcal{B}}$ は分離的

Proof. (a) μ_V がセミノルムになることは Theorem 1.7.3 より従う. また $x \in V$ と仮定すると V が開集合であることより, ある $t < 1$ について $x \in tV$ となり $\mu_V(x) = \inf\{t > 0 : x \in tV\} < 1$. よって $V \subset \{x \in X : \mu_V(x) < 1\}$. また $x \notin V$ ならば, Lemma 1.7.2 より $\mu_V(x) = \inf\{t > 0 : x \in tV\} \geqslant 1$. よって $X \backslash V \subset \{\mu_V(x) \geqslant 1\}$. 従って $V = \{x \in X : \mu_V(x) < 1\}$ が成り立つ. μ_V が連続であることは, 任意の $\varepsilon > 0$ について $x \in \varepsilon V$ ならば $\mu_V(x) < \varepsilon$ となることより分かる.

(b) $x \in X \backslash \{0\}$ について $x \notin V$ を満たす V を取れば $\mu_V(x) \geqslant 1 \neq 0$ ゆえ, 分離的である. □

Theorem 1.7.5 ベクトル空間 X の分離的なセミノルムの族 $\mathcal{P}$ について

$$V(p, n) = \left\{x \in X : p(x) < \frac{1}{n}\right\}, \qquad p \in \mathcal{P} \textit{ and } n \in \mathbb{N}$$

とおき, $\mathcal{B}$ を $V(p,n)$ の形の集合の有限個の共通部分の全体とおく. このとき $\mathcal{B}$ の各要素は吸収的, 凸かつ平衡的な集合であり, $\mathcal{B}$ を局所近傍基とする位相 τ が一意的に存在し, (X, τ) は局所凸位相ベクトル空間になる. そして

(a) 各 $p \in \mathcal{P}$ は連続.

(b) 集合 $E \subset X$ が有界である為には各 $p \in \mathcal{P}$ の値が E 上有界であることが必要十分.

が成り立つ.

Proof. $\mathcal{B}$ が条件 ($\mathcal{L}B1$)-($\mathcal{L}B7$) を満たすことは容易に分かるので Theorem 1.3.14 を用いて $\mathcal{B}$ を局所近傍基とする位相 τ が一意的に存在し, (X, τ) は位相ベクトル空間になる.

(a) $p \in \mathcal{P}$ の連続性を示そう. 任意の $x_0 \in X$ と $\varepsilon > 0$ について $\frac{1}{n} < \varepsilon$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ を取れば

$$\begin{aligned} x \in x_0 + V(p,n) &\Longrightarrow x - x_0 \in V(p,n) \\ &\Longrightarrow |p(x) - p(x_0)| \leqslant p(x - x_0) < \frac{1}{n} < \varepsilon \end{aligned}$$

となることより従う.

(b) E が有界ならば $p \in \mathcal{P}$ と $n \in |mathbbN$ について $V(p,n)$ は 0 の近傍であるから, ある $t_0 > 0$ が存在し

$$\begin{aligned} &E \subset tV(p,n) \\ \Longrightarrow &\forall x \in E : \frac{1}{t}x \in V(p,n) \\ \Longrightarrow &\forall x \in E : p\left(\frac{1}{t}x\right) < \frac{1}{n} \\ \Longrightarrow &\forall x \in E : p(x) < \frac{t}{n} \end{aligned}$$

となるので, E 上 p の値は有界である.

逆に $p \in \mathcal{P}$ について p の値が E 上で有界で $p(x) \leqslant M$ となる $M > 0$ が存在すれば

$$\begin{aligned} &\forall x \in E : p(x) \leqslant M \\ \Longrightarrow &\forall x \in E : p\left(\frac{1}{nM}x\right) < \frac{1}{n} \\ \Longrightarrow &\forall x \in E : \frac{1}{nM}x \in V(p,n) \\ \Longrightarrow &\frac{1}{nM}E \subset V(p,n) \\ \Longrightarrow &E \subset nMV(p,n) \end{aligned}$$

となるが, $V(p,n)$ は平衡的であるから, $t \geqslant nM$ について $E \subset tV(p,n)$ が成り立つことになる. $p \in |mathcalP$, $n \in \mathbb{N}$ は任意であるから E が有界である. ことが従う. あるとする.

集合 E が有界である為の必要十分条件は

$$\forall p \in \mathcal{P},\ n \in \mathbb{N} : \exists t_0 > 0 : \forall t \geqslant t_0 : E \subset tV(p,n)$$

が成り立つことであるが,

$$E \subset tV(p,n) \Longleftrightarrow \forall x \in E : \frac{1}{t}x \in V(p,n) \Longleftrightarrow \forall x \in E : p(t^{-1}x) < \frac{1}{n} \Longleftrightarrow \forall x \in E : p(x) < \frac{t}{n}$$

であるから E 上 $p(x) \leqslant M$ ならば $t_0 > nM$ となる t_0 を取れば, $t \geqslant t_0$ について上の命題が成り立つ. また上の命題が成り立てば, 明らかに E 上 p は有界である. □

もし $\mathcal{P}=\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ がセミノルムの可算系で分離的ならば, Theorem 1.7.5 による $\mathcal{B}$ も可算系になり, Theorem 1.5.1 により平行移動に関して不変な距離を導入することができる. しかしながらこの場合は Theorem 1.5.1 の証明中に構成した距離ではなくもっと直接的に

$$d(x,y)=\max_k \frac{c_k p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)}$$

と置けば良い. ここで $\{c_k\}$ は正数の列で $c_k \to 0$ が成り立つものを 1 つ取り固定したものとする. 証明は難しくはないが省略する.

Theorem 1.7.6 位相ベクトル空間 (X,τ) がノルム化可能である為の必要十分条件は原点が, 凸かつ有界な近傍を持つこと.

Proof. U を原点の凸かつ有界な近傍とすると, Theorem 1.3.9 より同じく原点の近傍で凸かつ平衡的な V で $V\subset U$ を満たすものが存在する. 従って Theorem 1.7.3 より

$$\|x\|=\mu_V(x), \qquad x\in X$$

と置くと, セミノルムになる. 明らかに V は有界であるから $\{rV\}_{r>0}$ は Theorem 1.3.11 より局所近傍基になるので, 任意の $x\in X\backslash\{0\}$ について $x\notin rV$ を満たす $r>0$ が存在する. このとき Lemma 1.7.2 より $\mu_V(x)\geqslant r$ である. 従って $x\neq 0$ ならば $\|x\|>0$ が成り立つので $\|\cdot\|$ はノルムである. またこのノルムによる局所近傍基として $\{rV\}_{r>0}$ が採用できるので, このノルムが誘導する位相は τ と一致する.

逆に X にノルム $\|\cdot\|$ が導入できれば単位開球 $\{x\in X:\|x\|<1\}$ は凸かつ有界である. □

1.8 商空間

N をベクトル空間 X の部分空間とする. $x,y\in X$ について $x-y\in X$ が成り立つことを $x\sim y$ で表せば $\sim$ は同値関係になる. つまり

(i) $x\sim x$

(ii) $x\sim y \Longrightarrow y\sim x$

(iii) $x\sim y\ y\sim z \Longrightarrow x\sim z$

が成り立つ. 各 $x\in X$ について x と同値な元の全てがなす集合, つまり x の同値類を $\pi(x)$ と置けば, $\pi(x)=x+N$ と表せる. また X/N で, この同値関係による X の商空間 (quotient space) $X/\sim$ を表すことにする. 商空間への射影 $\pi: X\to X/N$ のことを商写像 (quotient map) と呼ぶが, これについて

$$\pi(x+y)=\pi(x)+\pi(y), \qquad x,y\in X$$

が成り立つ. これより X/N に和を導入することができる. 同様に

$$\pi(\alpha x)=\alpha\pi(x), \alpha\in\Phi\backslash\{0\}, x\in X$$

が成り立つ. 但し $\alpha=0$ の時のみは例外で左辺は N であるが, 右辺は $\{0\}$ になるので $N=\{0\}$ の時を除いて成り立たない. しかし N は X/N に於ける零元であるから $\{0\}$ を N と解釈することにすれば

$\alpha = 0$ の場合でも成り立つことになり, X/N にスカラー倍が導入できる. 従って X/N はベクトル空間であり, 商写像 $\pi : X \to X/N$ は線形である.

今度は X が位相 τ を持つ位相ベクトル空間であるとしよう. そして N は X の閉部分空間とする. このとき

$$\tau_{X/N} = \{E : E \subset X/N,\ \pi^{-1}(E) \in \tau\} \tag{1.8.1}$$

と置くと, $\tau_{X/N}$ が X/N の位相になることは簡単に分かる.

Theorem 1.8.1 *N を位相ベクトル空間 (X, τ) の閉部分空間で $\tau_{X/N}$ を上記のように定義された X/N に於ける位相とする. このとき*

(a) *$(X, \tau_{X/N})$ は位相ベクトル空間であり, 商写像 $\pi : X \to X/N$ は線形かつ連続な開写像である*

(b) *$\mathcal{B}$ が τ の局所近傍基ならば $\{\pi(V) : V \in \mathcal{B}\}$ は X/N の局所近傍基である*

(c) *X に関する性質" 局所凸, 局所有界, 距離化可能, ノルム化可能" は X/N に遺伝する. すなわち X が局所凸, 局所有界, 距離化可能またはノルム化可能ならば X/N もそれぞれ局所凸, 局所有界, 距離化可能またはノルム化可能である.*

(d) *X に関する性質"F-空間, Fréchet 空間, Banach 空間" は X/N に遺伝する.*

Proof. (a) X/N がベクトル空間で $\tau_{X/N}$ が位相になることは既に触れた. 次に

$$\begin{aligned} F(\subset X/N) \text{ が閉 in } X/N &\iff (X/N)\backslash F \text{ が開 in } X/N \\ &\iff \pi^{-1}((X/N)\backslash F) = X\backslash\pi^{-1}(F) \text{ が開 in } X \\ &\iff \pi^{-1}(F) \text{ が閉 in } X \end{aligned}$$

が成り立つ. 特に X/N の点 $\pi(x)$ について $\pi^{-1}(\pi(x)) = x + N$ は N が閉であるから閉である. 従って X/N の各点 1 点よりなる集合は閉集合である. つまり X/N は $(\mathcal{T}V2)$ を満たす.

商写像 $\pi : X \to X/N$ による X/N の開集合の原像は X に於ける開集合となるように $\tau_{X/N}$ を定義したので, π は連続である. そして線形であることも先に触れた. また $V \subset X$ について

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = N + V \tag{1.8.2}$$

が成り立つ. 実際

$$\begin{aligned} x \in \pi^{-1}(\pi(V)) &\iff \pi(x) \in \pi(V) \\ &\iff \exists y \in V : x + N = y + N \\ &\iff x \in V + N \quad (\because N - N = N) \end{aligned}$$

(1.8.2) に於いて V が開集合ならば $N + V$ は開集合ゆえ $\pi(V)$ は X/N の開集合になる. つまり π は開写像である.

$W \in \mathcal{N}_0(X/N)$ つまり X/N に於ける 0 の近傍とすれば $\pi^{-1}(W)$ は X に於ける 0 の近傍であるから $V \in \mathcal{N}_0(X)$ で $V + V \subset \pi^{-1}(W)$ となるものが存在する. よって

$$\pi(V) + \pi(V) \subset W$$

が成り立つ. $\pi(V)$ も X/N に於ける 0 の近傍であるから, これより X/N に於ける和の演算が連続であることが従う.

同様に $x \in X$, $W \in \mathcal{N}_0(X/N)$, $\alpha \in \Phi$ とすれば, $\pi^{-1}(W)$ は X に於ける 0 の近傍であるから $V \in \mathcal{N}_0(X)$ と $r > 0$ を $|\beta - \alpha| < r$ ならば $\beta(x+V) \subset \alpha x + \pi^{-1}(W)$ が成り立つように取れる. この時 $|\beta - \alpha| < r$ ならば

$$\beta\pi(V) \subset \pi(x) + W$$

が成り立つが, これは X/N に於けるスカラー倍の連続性を示す.

(b) は (a) の簡単な帰結である. (c) については $V \subset X$ が凸ならば

$$(1-t)\pi(V) + t\pi(V) = \pi(1-t)V + tV) \subset \pi(V)$$

より $\pi(V)$ も凸である. また $E \subset X$ が有界ならば任意の $W \in \mathcal{N}_0(X/N)$ について $\pi^{-1}(W) \in \mathcal{N}_0(X)$ ゆえ $t_0 > 0$ を "$\forall t \geqslant t_0 : E \subset t\pi^{-1}(W)$" が成り立つように取ることができる. 従って $t \geqslant t_0$ について $\pi(E) \subset tW$ が成り立つので $\pi(V)$ は有界である. 以上より X に関する性質, "局所凸", "局所有界" は X/N に遺伝することが分かった.

次に X に平行移動に関して不変な距離 d で, d の誘導する位相は τ と一致するものが存在するとしよう. このとき

$$\rho(\pi(x), \pi(y)) := \inf\{d(x-y, z) : z \in N\} \tag{1.8.3}$$

と置く. 定義と d が非負であることより $\rho(\pi(x)) \geqslant 0$ が成り立つ. また ρ の対称性は

$$\begin{aligned}
\rho(\pi(y), \pi(x)) &= \inf\{d(y-x, z) : z \in N\} \\
&= \inf\{d(y-x, -z) : z \in N\} \quad (\because -N = N) \\
&= \inf\{d(-z, y-x) : z \in N\} \quad (\because d(b,a) = d(a,b)) \\
&= \inf\{d(x-y, z) : z \in N\} \quad (\because d(a+c, b+c) = d(a,b)) \\
&= \rho(\pi(x), \pi(y))
\end{aligned}$$

より従う. 三角不等式は

$$\begin{aligned}
\rho(\pi(x), \pi(y)) &= \inf\{d(x-y, z) : z \in N\} \\
&= \inf\{d(x, y + z_1 - z_2) : z_1, z_2 \in N\} \quad (\because d(a+c, b+c) = d(a,b) \text{ and } N - N = N) \\
&= \inf\{d(x - z_1, y - z_2) : z_1, z_2 \in N\} \quad (\because d(a+c, b+c) = d(a,b)) \\
&\leqslant \inf\{d(x - z_1, a) + d(a, y - z_2) : z_1, z_2 \in N\} \quad (\because d(a,b) \leqslant d(a,c) + d(c,b)) \\
&= \inf\{d(x-a, z_1) + d(y-a, z_2) : z_1, z_2 \in N\} \\
&= \inf\{d(x-a, z_1) : z_1 \in N\} + \inf\{d(y-a, z_2) : z_2 \in N\} \\
&= \rho(\pi(x), \pi(a)) + \rho(\pi(a), \pi(y))
\end{aligned}$$

より従う. また

$$\rho(\pi(x)+\pi(a), \pi(y)+\pi(a)) = \rho(\pi(x+a), \pi(y+a)) = \inf\{d(x+a-(y+a), z) : z \in N\} = \rho(\pi(x), \pi(y))$$

より平行移動に関する不変性が従う.

ρ の誘導する位相が $\tau_{X/N}$ と一致することを示そう. まず

$$d(x, 0) < r \Longrightarrow \rho(\pi(x), \pi(0)) = \inf\{d(x, z) : z \in N\} < r$$

より $\pi(\{x \in X : d(x,0) < r\}) \subset \{u \in X/N : \rho(u,0) < r\}$ が成り立つ．逆に

$$\rho(\pi(x), \pi(0)) < r \Longrightarrow \exists z \in N : d(x,z) < r$$

より $\tilde{x} = x - z$ と置けば, $d(\tilde{x},0) = d(x,z) < r$ であり $\pi(x) = \pi(\tilde{x})$ であるから, $\{u \in X/N : \rho(u,0) < r\} \subset \pi(\{x \in X : d(x,0) < r\})$ が成り立つ．よって

$$\pi(\{x \in X : d(x,0) < r\}) = \{u \in X/N : \rho(u,0) < r\}$$

が成り立つ．ここで $\{x \in X : d(x,0) < 1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は X の局所近傍基であるから, その像である $\{\pi(\{x \in X : d(x,0) < 1/n\})\}_{n\in\mathbb{N}} = \{u \in X/N : \rho(u,0) < 1/n\}$ は X/N の近傍基である．よって ρ の誘導する位相は $\tau_{X/N}$ と一致する．以上で X/N にも平行移動に関して不変な距離で, $\tau_{X/N}$ と適合するものを導入することができた．特に X/N は距離化可能である．

X がノルム $\|x\|$ を持つときは

$$\|\pi(x)\| := \inf\{\|x - z\| : z \in N\}$$

によりノルムを導入することができる．実際

$$\begin{aligned}\|\pi(x) + \pi(y)\| &= \|\pi(x+y)\| \\ &= \inf\{\|x + y - z\| : z \in N\} \\ &= \inf\{\|x - z_1 + y - z_2\| : z_1, z_2 \in N\} \\ &\leqslant \inf\{\|x - z_1\| + \|y - z_2\| : z_1, z_2 \in N\} \\ &= \inf\{\|x - z_1\| : z_1 \in N\} + \inf\{\|y - z_2\| : z_2 \in N\} = \|\pi(x)\| + \|\pi(y)\|\end{aligned}$$

が成り立つことと, また $\alpha \neq 0$ の時

$$\begin{aligned}\|\alpha\pi(x)\| &= \|\pi(\alpha x)\| \\ &= \inf\{\|\alpha x - z\| : z \in N\} \\ &= \inf\{|\alpha|\|x - \alpha^{-1}z\| : z \in N\} = |\alpha| \inf\{\|x - z\| : z \in N\} = |\alpha|\|\pi(x)\|\end{aligned}$$

より従う．このノルムが誘導する位相が $\tau_{X/N}$ と一致することは $\|\|_X$ から距離 d_X を誘導し, 上記の方法で d_X から $d_{X/N} = \rho$ を作れば, $d_{X/N}$ の誘導する位相は $\tau_{X/N}$ と一致することが前記の議論より分かる．しかしながら $d_{X/N}$ は $\|\|_{X/N}$ から誘導した距離と一致するので, 結局 $\|\|_{X/N}$ から誘導される位相は $\tau_{X/N}$ と一致する．従って X がノルム化可能ならば X/N もそうである．

(d) を示すには, 例えば X が Fréchet 空間, つまり X が局所凸で平行移動に関して不変な距離で, τ と適合し完備なものが存在するときに, X/N もそうであることを示せば良い．完備性以外の性質が X/N に遺伝することはは既に (c) で示している．これは F-空間及び Banach 空間の場合も同様であり結局完備性のみを示せば十分である．

そこで X が平行移動に関して不変な距離 d を持ち完備とし, ρ を上記の方法で X/N に誘導した距離とする．$\{u_n\}$ が ρ-Cauchy 列ならば $\rho(u_{n_k}, u_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^k}$ を満たす部分列 $\{u_{n_k}\}$ を取る．このとき $\pi(x_k) = u_{n_k}$ かつ $d(x_k, x_{k+1}) < \frac{1}{2^k}$ を満たす X の列 $\{x_k\}$ が取れる．これは d-Cauchy 列であるから収束し, 極限を x と置けば, π の連続性より $u_{n_k} = \pi(x_k) \to \pi(x)$ が成り立つ．任意の $W \in \mathcal{N}_0(X/N)$ について $V + V \subset W$ を満たす $V \in \mathcal{N}_0(X/N)$ を取り $n_0 \in \mathbb{N}$ を $n, m \geqslant n_0$ ならば $u_m - u_n \in V$ が成り立つように取る．そして $k_0 \in \mathbb{N}$ を $k \geqslant k_0$ ならば $u_{n_k} - \pi(x) \in V$ が成り立つように取る．このとき $n \geqslant n_0$ ならば適当な $k \geqslant k_0$ により $u_n - \pi(x) = u_n - u_{n_k} + u_{n_k} - \pi(x) \in V + V \subset W$ となるので $\{u_n\}$ も $\pi(x)$ に収束する．従って X/N も完備である．　$\square$

Theorem 1.8.2 X を位相ベクトル空間とし, N, F を部分空間とする. この時 N が閉で F は有限次元であれば $N+F$ は閉部分空間である.

Proof. $\pi : X \to X/N$ を商写像とする. $\pi(F)$ は X/N は位相ベクトル空間の有限次元部分空間であるから閉である. また π は連続であるから $\pi^{-1}(\pi(F)) = F+N$ は閉である. □

Theorem 1.8.3 p をベクトル空間 X のセミノルムとする. このとき

$$N = \{x \in X : p(x) = 0\}$$

と置けば, N は部分空間である. $\pi : X \to X/N$ を商写像とし

$$\tilde{p}(\pi(x)) = p(x)$$

と置くと, $\tilde{p}$ は X/N のノルムである.

Proof.

$$\pi(x) = \pi(y) \Longrightarrow x - y \in N \Longrightarrow p(x-y) = 0$$

であるから, $\tilde{p}$ は well-defined であり, セミノルムになることも容易に分かる. また $u \in X/N$ が $u \neq 0$ であれば $\pi(x) = u$ となる x は $x \notin N$ であるから $\tilde{p}(u) = p(x) \neq 0$ である. よって $\tilde{p}$ はノルムになる. □

$r \in [1, \infty)$ について $\mathcal{L}^r$ で区間 $[0,1]$ 上の Lebesgue 可測関数で

$$p(f)^r = \int_0^1 |f(x)|^r \, dx < \infty$$

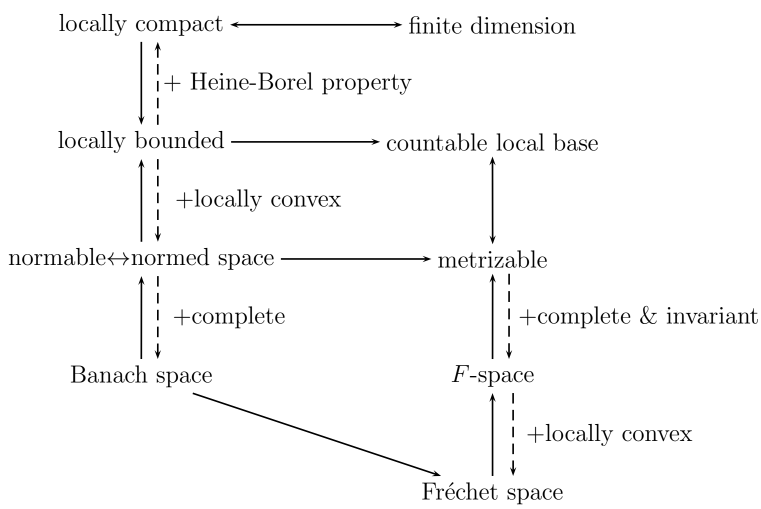
が成り立つものの全体と置く. $p(f)$ は $\mathcal{L}^r$ 上のセミノルムであり,

$$p(f) = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0 \quad a.e.$$

が成り立つ. このとき $L^r([0,1]) = \mathcal{L}^r/N$ がいわゆる Lebesgue 空間である.

1.9　例

前節までで下図に示した



という位相ベクトル空間の分類について証明を行った. ここでこれらの空間の例を述べておこう. その為に記号を整理しておこう.

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ と置く. つまり 0 以上の整数の全体である. そして

$$\mathbb{Z}_+^d = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) : \alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{Z}_+\}$$

と置く. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ を多重指数 (multi-index) と言い, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d$ を α の位数 (order) と言う. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ について $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_d + \beta_d)$ と置く. また各 $k = 1, \ldots, d$ について $\alpha_k \geqslant \beta_k$ が成り立つとき $\alpha \geqslant \beta$ と書くことにし, このとき $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_d - \beta_d)$ と置く. また $x = (x_1, \ldots, x_d)$ の関数 $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$ について偏微分作用素を

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial|\alpha| f}{\partial x^\alpha} := \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial \alpha_d}{\partial x_d^{\alpha_d}} f, \qquad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d \tag{1.9.1}$$

と置く.

空間 $C(\Omega)$　d-次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ 内の開集合 Ω について $C(\Omega)$ で Ω 上の複素数値連続関数の全体を表そう. 以下の方法で $C(\Omega)$ にセミノルムの可算系を定義すれば, $C(\Omega)$ は Fréchet 空間になる.

まず Ω の compact 部分集合の列 $\{K_n\}$ を

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega,$$
$$K_n \subset \operatorname{Int} K_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

が成り立つように取る. K_n の取り方は, 例えば $\Omega = \mathbb{R}^n$ のとき $K_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant n\}$ と置けば良いし, そうでなければ

$$K_n = \{x \in \Omega : |x| \leqslant n,\ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geqslant n^{-1}\}$$

と置けば良い. ここに

$$\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) = \inf\{|x - y| : y \in \partial\Omega\}$$

である.

さて各 $n \in \mathbb{N}$ について

$$p_n(f) = \max\{|f(x)| : x \in K_N\}$$

と置けば, $p_n(f + g) \leqslant p_n(f) + p_n(g)$, $p_n(\alpha f) = |\alpha| p_n(f)$ が成り立つのでセミノルムである. そして単調性 $p_1(f) \leqslant p_2(f) \leqslant \cdots$ が成り立つので Theorem 1.7.5 のような $V(p, n)$ の有限個の共通部分を取る必要はなく, 単に

$$V_n = \{f \in C(\Omega) : p_n(f) < n^{-1}\}$$

と置けば, $\{V_n\}$ を局所近傍基とする位相が導入できて $C(\Omega)$ は局所凸位相ベクトル空間である. またこの位相は距離

$$d(f, g) = \max_{n \in \mathbb{N}} \frac{p_n(f - g)}{2^n\{1 + p_n(f - g)\}}$$

か誘導される位相と一致する.

次に $\{f_j\}$ を Cauchy 列とすると, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $p_n(f - f_j) \to 0$ が成り立つので $\{f_j\}$ は K_n 上の連続関数 g_n に一様収束する. このとき $g_m|_{K_n} = g_n$, $m \geqslant n$ であるから, 関数 $\mathrm{g} \in C(\Omega)$ が存在して, 各 $n \in \mathbb{N}$ について $\{f_j\}$ は K_n 上 g に一様収束する. 従って $f_j \to g$ が成り立つことになり, $C(\Omega)$ は完備である.

さて Theorem 1.7.5 (b) によれば, 部分集合 $E \subset C(\Omega)$ が有界である為の必要十分条件は, 各 $n \in \mathbb{N}$ について "$\forall f \in E$ and $x \in K_n : |f(x)| \leqslant M_n$" となる $M_n \geqslant 0$ が存在することである. $f \in V_n$ で $p_{n+1}(f)$ が与えられた任意の値よりも大きいものを構成することができるので, V_n は有界ではありえない. 従って $C(\Omega)$ は局所有界ではなく, 特にノルム化可能でない.

空間 $H(\Omega)$　今度は Ω を複素平面内の空でない開集合とする. この場合も先に述べた Fréchet 空間 $C(\Omega)$ が定義できる. $f \in C(\Omega)$ で解析的 (holomorphic) なものの全体を $H(\Omega)$ と置くと, $H(\Omega)$ は $C(\Omega)$ の部分空間であり, $H(\Omega)$ に属す函数列の局所一様収束極限も解析的であるから $H(\Omega)$ は $C(\Omega)$ の閉部分空間である. 従って $H(\omega)$ 自身も Fréchet 空間である.

部分集合 $E \subset H(\Omega)$ が有界かつ閉とする. まず $C(\Omega)$ の場合と同じように E が有界である為の必要十分条件は, 各 $n \in \mathbb{N}$ について "$\forall f \in E$ and $z \in K_n : |f(z)| \leqslant M_n$" となる $M_n \geqslant 0$ が存在することである. 従って E は局所一様有界であり, Montel の定理により正規族になる. つまり E の元よりなる任意の列 $\{f_j\}$ について Ω 上, 局所一様収束する部分列が存在する. E は閉であるから, この局所一様収束極限も E に属する. 従って E は点列 compact(sequentially compact), つまり E の元からなる任意の列から E の元に収束する部分列が取れる. 距離空間に於いて, 点列 comapct と compact は同値であったから, $H(\Omega)$ に於いて, 有界閉集合は compact であることが示されたことになり, $H(\Omega)$ は Heine-Borel 性を持つ. $H(\Omega)$ が局所有界と仮定すれば, Theorem 1.4.8 より有限次元となるが, これは矛盾である. 実際 $z_0 \in \Omega$ を任意に取り $f_j(z) = (z - z_0)^j$ と置けば, $\{f_j\}$ は線形独立であることが容易に分かるので, 無限次元である. 従って $H(\Omega)$ は局所有界ではありえず, ノルム化可能でないこともこれより分かる.

空間 $C^\infty(\Omega)$ **と** $\mathscr{D}_K$　Ω を $\mathbb{R}^d$ 内の空でない開集合とする. 関数 $f \in C(\Omega)$ が任意の多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ について $D^\alpha f \in C(\Omega)$ を満たす時, f は無限回微分可能 (infinitely diffrentiable) であると言い, Ω 上の無限回微分可能関数の全体を $C^\infty(\Omega)$ と表す.

位相空間 X 上の連続関数 f について集合 $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ の閉包を, f の台 (support) と言い $\operatorname{supp} f$ と表す.

K が $\mathbb{R}^d$ の compact な部分集合である時 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ で $\operatorname{supp} f \subset K$ を満たす関数の全体を $\mathscr{D}_K$ と表す. もし $K \subset \Omega$ の時は $f \in \mathscr{D}_K$ の定義域を Ω に制限して得られる関数 $f|_\Omega$ と f 自身を同一視することにより $\mathscr{D}_K \subset C^\infty(\Omega)$ とみなすことができる.

それでは $C^\infty(\Omega)$ が Heine-Borel 性を持つ Fréchet 空間であるように, 次の方法で位相を定義する. この位相のもとで $\mathscr{D}_K$ は $K \subset \Omega$ である限り $C^\infty(\Omega)$ の閉部分空間になる.

Ω の compact 部分集合の列 $\{K_n\}$ を $\bigcup_{n=1}^\infty K_n = \Omega$, $K_n \subset \operatorname{Int} K_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ が成り立つように取る. そして

$$p_n(f) = \max\{|D^\alpha f(x)| : x \in K_n,\ |\alpha| \leqslant n\}$$

と置く. Theorem 1.7.5 と, その注意より $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は距離化可能な局所凸の位相を $C^\infty(\Omega)$ に誘導する.

各 $a \in \Omega$ について汎関数 $\ell_a : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ を $\ell_a(f) = f(a)$ と置けば, 連続である. 実際 $a \in K_n$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ について $p_n(f) < \varepsilon$ ならば $|\ell_a(f)| = |f(a)| < \varepsilon$ が成り立つ. 従って $\operatorname{Ker} \ell_a = \{f \in C^\infty(\Omega) : f(a) = 0\}$ は閉部分空間であるから

$$\mathscr{D}_K = \bigcap_{a \in \Omega \setminus K} \operatorname{Ker} \ell_a$$

も閉部分空間である.

p_n の n に関する単調性より, 局所近傍基として

$$V_n = \{f \in C^\infty(\Omega) : p_n(f) < n^{-1}\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

が取れる. $\{f_j\}$ が Cauchy 列ならば固定した $N \in \mathbb{N}$ について $f_i - f_j \in V_N$ が十分大きな全ての i, j について成り立つ. よって $|D^\alpha f_i - D^\alpha f_j| < N^{-1}$ が K_N 上 $|\alpha| \leqslant N$ を満たす多重指数 α について成り立つ. 従って各 α について $D^\alpha f_i$ は Ω 上, 局所一様に収束するので極限関数を $g_\alpha \in C(\Omega)$ と置き, $f = g_0$ と置こう. このとき例えば $\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$ の時

$$f_j(b, x') - f_j(a, x') = \int_a^b \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(t, x')\, dt$$

に於いて $j \to \infty$ とすれば

$$f(b, x') - f(a, x') = g_0(b, x') - g_0(a, x') = \int_a^b g_\alpha(t, x')\, dt$$

より $D^\alpha f = g_\alpha$ が分かる. 同じことを続けて行けば任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$ について $D^\alpha f = g_\alpha \in C(\Omega)$ が分かり, $f \in C(\Omega)$ が分かり, $\{D^\alpha f_j\}$ が $D^\alpha f$ に Ω 上, 局所一様に収束することが従う. よって $f_j \to f$ となり, $C(\Omega)$ の完備性が示された. 以上より $C(\Omega)$ は Fréchet 空間になり, その閉部分空間である $\mathscr{D}_K$ もそうである.

$C^\infty(\Omega)$ が Heine-Borel 性を持つことは, 部分集合 $E \subset C(\Omega)$ が有界ならば各 $n \in \mathbb{N}$ について定数 $M_n \geqslant 0$ を K_n 上で $\forall f \in E : |f(x)| \leqslant M_n$ が成り立つように取れることより, $D^\alpha f$, $|\alpha| \leqslant n$ は K_n 上で一様有界であることが分かり, これより $D^\beta f$, $|\beta| \leqslant n-1$ の K_{n-1} 上での同程度連続性が従う. よって Ascoli の定理より E の元よりなる任意の関数列 $\{f_j\}$ と任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$ について $\{D^\alpha f_j\}$ より Ω 上, 局所一様に収束する部分列が取れることになる. 対角線論法を用いれば任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$ について $D^\alpha f_{j_k}$ が Ω 上, 局所一様に収束するように部分列 $\{f_{j_k}\}$ が取れることになり, E は閉集合ゆえ極限関数も E に属する. 以上より E は距離化可能空間 $C(\Omega)$ で点列 compact であるから compcat であり, $C(\Omega)$ は Heine-Borel 性を持つことが分かった. よって特に無限次元空間 $C(\Omega)$ は局所有界ではありえず, 従ってノルム化可能でもない. $\operatorname{Int} K \neq \varnothing$ の時, $\mathscr{D}_K$ も無限次元の Fréchet 空間であるから局所有界でもノルム化可能でもない.

空間 L^p, $0 < p < 1$ $p \in (0, 1)$ を固定して $L^p([0, 1])$ で区間 $[0, 1]$ 上の Lebesgue 可測関数で

$$\Delta(f) = \int_0^1 |f(t)|^p\, dt < \infty$$

を満たすものについて, 殆ど至るところ等しいものは同一視するという通常の規約のもとで考えたものの全体とする.

さて $t \geqslant 1$ について不等式 $(1 + t)^p \leqslant 1 + t^p$ が成り立つことは, 両辺の微分を計算して $0 < p < 1$ を使えば容易に分かる. これより

$$(a + b)^p \leqslant a^p + b^p, \quad a, b \geqslant 0$$

が成り立つので

$$\delta(f + g) \leqslant \Delta(f) + \Delta(g)$$

が成り立つ. 従って $d(f, g) = \Delta(f - g)$ は平行移動に関して不変な距離を与える. この距離のもとで L^p が完備になることは $p \geqslant 1$ の場合の L^p 空間の完備性の証明とほぼ同様に示すことができる. 開球

$$B_r = \{f \in L^p : \Delta(f) < r\}, \qquad r > 0$$

の族 $\{B_r\}_{r>0}$ は L^p の局所近傍基を与え, L^p は局所有界な F-空間である.

それでは L^p の開凸部分集合は L^p または $\varnothing$ のみであることを示そう. そこで $V \neq \varnothing$ が開かつ凸であるとする. このとき $B_r \subset V$ を満たす $r > 0$ が存在する. $f \in L^p$ について $n^{p-1}\Delta(f) < r$ を満たす

$n \in \mathbb{N}$ を取る．積分の連続性と中間値の定理より

$$\int_{x_i-1}^{x_i} |f(t)|\,dt = \frac{1}{n}\Delta(f)$$

を満たす $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ が取れる．

$$g_i(t) = \begin{cases} nf(t), & x_{i-1} < t \leqslant x_i \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

と置けば,

$$\Delta(g_i) = n^{p-1}\Delta(f) < r$$

が成り立つ．よって $g_i \in B_r(\subset V)$ であり V は凸であるから

$$f = \frac{1}{n}(g_1 + \cdots * g_n) \in V$$

である．f の任意性より $L^p = V$ が成り立つ．

開凸真部分集合の非存在より面白い結論が導かれる．例えば $\Lambda : L^p \to Y$ を L^p から局所凸位相ベクトル空間 Y への連続線形写像とする．$\mathcal{B}$ を Y の凸近傍基とすると任意の $W \in \mathcal{B}$ について $\Lambda^{-1}(W)$ は開凸集合で $0 \in \Lambda^{-1}(W)$ ゆえ空でない．従って $\Lambda^{-1}(W) = L^p$ となり．W の任意性より $\Lambda = 0$ が従う．よって L^p から局所凸位相ベクトル空間への連続線形写像は 0 のみである．

第2章　線形写像

2.1　Banach-Steinhaus の定理

S を位相空間とする. S の部分集合 E が稠密 (dense) であるとは, $\overline{E} = S$ が成り立つ時を言う.

Proposition 2.1.1 位相空間 S の部分集合 E について

(i) E は稠密である.

(i) $\forall U \in \tau$ *with* $U \neq \varnothing : E \cap U \neq \varnothing$

(iii) E^c が内点を持たないことである.

Proof. E が稠密であれば, 任意の空でない開集合 U について $a \in U$ を取るとき, $a \in \overline{E}$ より $U \cap E \neq \varnothing$. よって "(i) $\Longrightarrow$ (ii)" が示された. 逆に (ii) が成り立つとしよう. $a \in S$ の 任意の近傍 U について $U \cap E \neq \varnothing$ が成り立つので $a \in \overline{E}$ である. よって $S \subset E$ となり E は稠密である.

(i) と (iii) の同値性については

$$\begin{aligned}
E \text{ が稠密} &\Longleftrightarrow \forall a \in S : a \in \overline{E} \\
&\Longleftrightarrow \forall a \in S \text{ and } U \in \mathcal{N}_a(S) : U \cap E \neq \varnothing \\
&\Longleftrightarrow \forall a \in S \text{ and } U \in \mathcal{N}_a(S) : U \not\subset E^c \\
&\Longleftrightarrow \forall a \in S : a \text{ は } E^c \text{ の内点ではない} \\
&\Longleftrightarrow E^c \text{ は内点を持たない}
\end{aligned}$$

より従う. □

部分集合 $E \subset S$ が全疎 (nowhere dense) であるとは

$$\mathrm{Int}\,(\overline{E}) = \varnothing$$

が成り立つこと, つまり E の閉包が内点を持たない時を言う. これは Proposition 2.1.1 を用いて言い換えれば, E の外部が稠密であることである.

また $F \subset S$ が第 1 類の集合 (a set of the first category) であるとは,

$$F = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, \quad \text{各 } E_j \text{ は全疎}$$

のように, 全疎な集合列の可算和として表せる時を言い, 第 2 類の集合 (a set of the second category) であるとは, 第 1 類でない時を言う.

次の定理が成り立つことは容易に分かるであろうから, 証明は省略する.

Theorem 2.1.2 位相空間 S の部分集合について次が成り立つ.

(a) $A \subset B$ で B が第 1 類ならば A も第 1 類である.

(b) 各 $j \in \mathbb{N}$ について F_j が第 1 類ならば $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$ も第 1 類である.

(c) E が閉集合の時, "E が内点を持たない $\Longrightarrow$ E が第 1 類".

(d) $h : S \to S$ が位相写像ならば, E と $h(E)$ は同じ類に属する.

Theorem 2.1.3 (Baire のカテゴリー定理) 空でない集合 S が (1) 完備距離空間であるか, または (2) 局所 *compact Hausdorff* 空間であるとする. このとき

(a) 各 $j \in \mathbb{N}$ について F_j が閉集合で, 内点を持たなければ $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$ も内点を持たない.

(b) 各 $j \in \mathbb{N}$ について G_j が開集合で S で稠密ならば $\bigcap_{j=1}^{\infty} G_j$ も S で稠密である.

Proof. $F_j = G_j^c (= S \backslash G_j)$ と置くと Proposition 2.1.1 より

$$F_j \text{ が閉集合で, 内点を持たない} \Longleftrightarrow G_j \text{ が開集合で } S \text{ で稠密}$$
$$\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \text{ が内点を持たない} \Longleftrightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j \text{ が } S \text{ で稠密}$$

が成り立つので (a) と (b) は同値である.

そこで (b) を示そう. B_0 を空でない S の開集合とする. G_1 は稠密であるから $G_1 \cap B_0 \neq \emptyset$ であり, G_1, B_0 ともに開集合であるから $G_1 \cap B_0$ も開集合である. (1) の場合は B_1 を半径 < 1 の開球, (2) の場合は $\overline{B}_1$ が compact であるような開集合で

$$\overline{B}_1 \subset G_1 \cap B_{n-1}$$

を満たすように取る. 以下この操作を続け, B_{n-1} が取れたとき B_n を

$$\overline{B}_n \subset G_n \cap B_{n-1}$$

を満たす開集合で, (1) の場合は B_n を半径 $< n^{-1}$ の開球, (2) の場合は $\overline{B}_n$ が compact であるように取る.

このとき $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ と置くと (1) の場合 B_n の中心の点列は Cauchy 列であるから収束し極限点が K に属すので $K \neq \emptyset$. (2) の場合は $\{\overline{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$ が減少列であるから有限交差性を持ち, $\overline{B}_1$ が compact であるから, やはり $K \neq \emptyset$ である. よってどちらの場合でも

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \cap B_0 \supset K \neq \emptyset$$

が成り立つ. 従って $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ は稠密である. □

Baire のカテゴリー定理を線形写像の族に応用すると, 一様有界性の原理と呼ばれる関数解析で基本的な定理が得られる. これを示す前に準備として同程度連続性から同程度有界性が従うことを示そう.

X, Y を位相ベクトル空間とし, Γ を X から Y への線形写像のある族とする. この時 Γ が同程度連続 (equicontinuous) であるとは

$$\forall W \in \mathcal{N}_0(Y) : \exists V \mathcal{N}_0(X) : \forall \Lambda \in \Gamma : \Lambda(V) \subset W$$

が成り立つ時を言う.

Theorem 2.1.4 X, Y を位相ベクトル空間とし, Γ を X から Y への線形写像のある族とする. Γ が同程度連続ならば, X の有界部分集合 E について

$$F = \bigcup_{\Lambda\in\Gamma} \Lambda(E)$$

は Y の有界集合である.

Proof. $W \in \mathcal{N}_0(Y)$ について $V \in \mathcal{N}_0(X)$ を, 任意の $\Lambda \in \Gamma$ について $\Lambda(V) \subset W$ が成り立つように取る. この時 E は X の有界部分集合であるから, ある $t_0 > 0$ で,

$$\forall t \geqslant t_0 : E \subset tV$$

を満たすものが存在する. よって $t \geqslant t_0$ と $\Lambda \in \Gamma$ について

$$\Lambda(E) \subset \Lambda(tV) = t\Lambda(V) \subset tW$$

が成り立つので

$$F = \bigcup_{\Lambda\in\Gamma} \Lambda(E) \subset tW$$

が成り立つ. よって F も有界である. □

Theorem 2.1.5 (Banach-Steinhaus) X, Y を位相ベクトル空間とし, Γ を X から Y への線形写像のある族とする. 各 $x \in X$ について $\Gamma(x) = \{\Lambda x : \Lambda \in \Gamma\}$ と置き,

$$B = \{x \in X : \Gamma(x) \text{ は } Y \text{ の有界部分集合 }\}$$

と置く. この時 B が第 2 類ならば, Γ は同程度連続であり, $B = X$ が成り立つ.

Proof. $W \in \mathcal{N}_0(Y)$ について平衡的な近傍 $U \in \mathcal{N}_0(Y)$ を $\overline{U} + \overline{U} \subset W$ を満たすように取り

$$E = \bigcap_{\Lambda\in\Gamma} \lambda^{-1}(\overline{U})$$

と置く. この時

$$\begin{aligned}
x \in B \quad &\Longrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} : \Gamma(x) \subset nU \\
&\Longrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} : \forall \Lambda \in \Gamma : \Lambda n^{-1} x \subset U \\
&\Longrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} : n^{-1} x \in E \\
\\
&\Longrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} : x \in nE
\end{aligned}$$

であるから,

$$B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nE$$

が成り立つ. B は第 2 類であるから, 少なくとも 1 つの n について nE も第 2 類である. 写像 $X \ni x \mapsto nx \in X$ は位相写像であるから集合 E も第 2 類であり, 閉集合であるから内点を持つ. 実際, 内点を持たないと仮定すると $\overline{E} = E$ は全疎であるから, 第 1 類となって矛盾を生じる.

$a \in E$ を E の内点とし, 平衡的な $V \in \mathcal{N}_0(X)$ を $a + V \subset E$ となるように取る. この時 $V \subset -a + E$ より

$$\Lambda(V) \subset -\lambda a + \Lambda(E) \subset -\Lambda(E) + \Lambda(E) \subset -\overline{U} + \overline{U} = \overline{U} + \overline{U} \subset W$$

これで Γ が同程度連続であることが分かった．特に任意の $x \in X$ について $\{x\}$ は有界であるから, Theorem 2.1.4 より $\Gamma(x)$ は Y の有界部分集合となり, $B = X$ が成り立つ． $\square$

X が F-空間ならば, 完備距離空間であるから X 自身は第 2 類である．従ってこの場合 Theorem 2.1.5 の簡単な応用として, 各点 $x \in X$ で Γ が有界ならば, Γ が同程度連続になることが分かる．詳しく述べると次のようになる．

Theorem 2.1.6 (一様有界性の原理) *Γ を F-空間 X から位相ベクトル空間 Y への線形写像のある族で*

$$\Gamma(x) = \{\Lambda x : \Lambda \in \Gamma\}$$

は, 任意の $x \in X$ について有界であるとする．このとき Γ は同程度連続である．

Corollary 2.1.7 *Γ を Banach 空間 X から Banach 空間 Y への線形写像のある族で*

$$\sup_{\Lambda \in \Gamma} \|\Lambda x\|_Y < \infty$$

が任意の $x \in X$ について成り立つとする．このときある定数 $M \geqslant 0$ が存在し

$$\|\Lambda x\|_Y \leqslant M\|x\|_X, \quad x \in X \ \mathit{and} \quad \Lambda \in \Gamma$$

が成り立つ．

Theorem 2.1.8 *X, Y を位相ベクトル空間とし, $\{\Lambda\}_{n=1}^{\infty}$ を X から Y への連続線形写像の列とする．このとき次が成り立つ．*

(a) *C を $\{\Lambda_n x\}$ が Cauchy 列になるような $x \in X$ の全体とする．C が第 2 類ならば $C = X$ である．*

(b) *L を $\Lambda x = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n x$ が存在するような $x \in X$ の全体とする．この時 L が第 2 類で Y が F-空間ならば $L = X$ であり, $\Lambda : X \to Y$ も連続である．*

Proof. (a) Cauchy 列は有界であったから C が第 2 類であるから Banach-Stienhaus の定理 (Theorem 2.1.5) より $\{\Lambda\}_{n=1}^{\infty}$ は同程度連続である．また C は X の部分空間であるから稠密である．実際, 稠密でなければ $\overline{C}$ は X の真部分集合であり部分集合であるから内点を持たない．よって C は全疎になり第 2 類であることに矛盾する．

$x \in X$ と $W \in \mathcal{N}_0(Y)$ を任意に取る．$W_0\mathcal{N}_0(Y)$ を $W_0 + W_0 + W_0 \subset W$ を満たすように取る．$\{\Lambda\}_{n=1}^{\infty}$ は同程度連続であるから $V \in \mathcal{N}_0(X)$ を

$$\forall n \in \mathbb{N} : \Lambda(V) \subset W_0$$

となるように取ることができる．C は稠密であるから $x' \in C \cap (x + V)$ が存在する．そして十分大きな全ての m, n について

$$\Lambda_m x' - \Lambda_n x' \in W_0$$

が成り立つ．よって 十分大きな全ての m, n について

$$\Lambda_m x - \Lambda_n x = (\Lambda_m x - \Lambda_m x') + (\Lambda_m x' - \Lambda_n x') + (\Lambda_n x' - \Lambda_n x) \in \Lambda(V) + W_0 + \Lambda(V) \subset W_0 + W_0 + W_0 \subset W$$

となるので $\{\Lambda_n x\}$ も Cauchy 列であり, $x \in C$ である．よって $C = X$ が成り立つ．

(b) 収束列は Cauchy 列であるから $L \subset C$ である．また Y は F-空間であるから完備なので Cauchy 列は収束する．従って $C \subset L$ が成り立ち, 結局 $L = C$ である．よって L が第 2 類ならば C もそうであり, (a) より $L = C = X$ である．特に $\{\Lambda\}_{n=1}^{\infty}$ は同程度連続である．$W \in \mathcal{N}_0(Y)$ に対して $U \in \mathcal{N}_0(Y)$ を $\overline{U} \subset W$ を満たすように取るそして $V \in \mathcal{N}_0(X)$ を

$$\forall n \in \mathbb{N} : \Lambda_n(V) \subset U$$

が成り立つように取れば

$$\Lambda(V) \subset \overline{U} \tag{2.1.1}$$

が成り立つので $\Lambda(V) \subset \overline{U} \subset W$ が成り立つことになり Λ も連続である．

念の為に (2.1.1) が成り立つことを示しておく．$x \in V$ について $\Lambda x = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n x$ であるから任意の $W' \in \mathcal{N}_0(Y)$ に対して $\Lambda x - \Lambda_n x \in W'$ が十分大きな全ての n について成り立つ．$\Lambda_n x \in \Lambda_n(V) \subset U$ であるから $\Lambda_n x \in (\Lambda x + W') \cap U$ となり $(\Lambda x + W') \cap U \neq \emptyset$ が成り立つ．従って $\Lambda x \in \overline{U}$ であり, $\Lambda(V) \subset \overline{U}$ が成り立つ． □

Theorem 2.1.9 X を F-空間, Y を位相ベクトル空間とする．$\{\Lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ が X から Y への連続線形写像の列で

$$\Lambda x = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n x$$

が任意の $x \in X$ について存在するならば, Λ は連続である．

Proof. Λ が線形であることは

$$\Lambda(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} (\alpha\Lambda_n x + \beta\Lambda_n y) = \alpha\Lambda x + \beta\Lambda y$$

より従う．X は F-空間ゆえ, 第 2 類であるから Banach-Steinhaus の定理 (Theorem 2.1.5) より $\{\Lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ が同程度連続であることが分かる．

$W \in \mathcal{N}_0(Y)$ について $U \in \mathcal{N}_0(Y)$ を $\overline{U} \subset W$ となるように取り $V \in \mathcal{N}_0(X)$ を

$$\forall n \in \mathbb{N} : \Lambda_n(V) \subset U$$

となるように取る．この時 $\Lambda(V) \subset \overline{U}$ が成り立つので

$$\Lambda(V) \subset \overline{U} \subset W$$

が成り立つことになり Λ は連続である． □

Theorem 2.1.10 X, Y を位相ベクトル空間とし $K \subset X$ は *compact* かつ凸とする．また Γ を X から Y への連続線形写像の族で

$$\Gamma(x) = \{\Lambda x : \Lambda \in \Gamma\}$$

は任意の $x \in K$ について Y の有界集合であるとする．このとき

$$B = \bigcup_{x\in K} \Gamma(x)$$

は有界である．

Proof. $W \in \mathcal{N}_0(Y)$ を任意に取る．そして平衡的な $W_0, U \in \mathcal{N}_0(Y)$ を $\overline{U} + \overline{U} \subset W_0 \subset W$ を満たすように取り

$$E = \bigcap_{\Lambda \in \Gamma} \Lambda^{-1}(\overline{U})$$

と置く．このとき $x \in K$ について $\Gamma(x)$ は有界であるから $\Gamma(x) \subset nU$ が成り立つ $n \in \mathbb{N}$ が存在する．従って

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) \subset nU \Longrightarrow & n^{-1}\Gamma(x) \subset U \\
\Longrightarrow & \forall \Lambda \in \Gamma : n^{-1}\Lambda(x) \subset U \\
\Longrightarrow & \forall \Lambda \in \Gamma : n^{-1}x \in \Lambda^{-1}(U) \\
\Longrightarrow & n^{-1}x \in \bigcap_{\Lambda \in \Gamma :} \Lambda^{-1}(U) \subset E
\end{aligned}$$

$x \in K$ ならば $x \in nE$ が少なくとも 1 つの $n \in \mathbb{N}$ について成り立つ．よって $K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nE$ が成り立ち

$$K = \bigcup_{n=1}^{\infty} (K \cap nE)$$

が成り立つ． K は compact であるから F-空間 X から誘導される相対位相のもとで局所 compact Hausdorff 空間である．よって Baire のカテゴリー定理 (Theorem 2.1.3) が適用できて, 少なくとも 1 つの $n \in \mathbb{N}$ について $K \cap nE$ は K の内点を持つ．以下 n と書いたら, この n のこととする．$x_0 \in K \cap nE$ を内点とし, $(x_0 + V) \cap K \subset K \cap nE$ を満たす $V \in mathcalN_0(X)$ を取る．

次に $K \subset x_0 + pV$ を満たすように $p > 0$ を十分大きく取る． この時, 任意の $x \in K$ について $x - x_0 \in K - x_0 \subset pV$ より $p^{-1}(x - x_0) \in V$ であるから $z = x_0 + p^{-1}(x - x_0) \in x_0 + V \subset$ かつ K の凸性より $z = (1 - p^{-1})x_0 + p^{-1}x \in K$ が成り立つので $z \in K \cap (x_0 + V) \subset nE$ である．$x = pz - (p-1)x_0$ であるから

$$\begin{aligned}
\Lambda x = & p\Lambda z - (p-1)\Lambda x_0 \\
\in & p\Lambda(nE) - (p-1)\Lambda(nE) \\
\subset & pn\overline{U} - (p-1)n\overline{U} \\
\subset & pn\overline{U} + pn\overline{U} \\
= & pn(\overline{U} + \overline{U}) \quad (\because U \text{ が平衡的ゆえ } \overline{U} \text{ も平衡的であるから } -(p-1)n\overline{U} \subset pn\overline{U}) \\
\subset & tpnW_0
\end{aligned}$$

従って $Bpn \subset W_0$ となるが W_0 へ平衡的であるから $t \geqslant pn$ について $B \subset tW_0 \subset tW$ が成り立つ．よって B は有界である． □

2.2 開写像定理

(S, τ_S), (T, τ_T) を位相空間とする．写像 $f : S \to T$ が点 $p \in S$ で開 (open at p) であるとは,

$$\forall V \in \tilde{\mathcal{N}}_p(S) : f(V) \in \tilde{\mathcal{N}}_{f(p)}(T)$$

が成り立つ, つまり p の近傍の像が $f(p)$ の近傍である時を言う．また単に開写像 (open mappig) であるとは

$$\forall G \in \tau_S : f(G) \in \tau_T$$

つまり開集合の像が開集合となる時を言う．このとき

$$f \text{ が open} \iff f \text{ が各 } p \in X \text{ で open}$$

が成り立つことが容易に分かる．また $f : S \to T$ が連続で全単射のとき f が位相写像である為の必要十分条件は f が開写像であることである．

X, Y が位相ベクトル空間で写像 $f : X \to Y$ が線形ならば f が開写像である為の必要十分条件は f が 0 で開であること．

Theorem 2.2.1 (開写像定理) X を F-空間, Y を位相ベクトル空間, そして写像 $\Lambda : X \to Y$ は連続線形であるとする．このとき $\Lambda(X)$ が第 2 類ならば Λ は開写像であり $\Lambda(X) = Y$ が成り立つ．また Y も F-空間である．

Proof. $V \in \mathcal{N}_0(X)$ を任意に取り, $\Lambda(V)$ が Y に於ける 0 の近傍を含むことを示そう．もしこれが示されれば f は 0 で開であるから, 線形性より開写像になる．従って $\Lambda(X)$ は開集合であり Y の部分空間であるから $\Lambda(X) = Y$ が成り立つ．

X の平行移動に関して不変な距離 d で X に位相と適合するものを取る．$V_0 = \{x \in X : d(x, 0) < r\} \subset V$ となるように $r > 0$ を取り,

$$V_n = \{x \in X : d(x, 0) < 2^{-n} r\}$$

と置く．このとき $V_{n+1} - V_{n+1} \subset V_n$ より

$$\overline{\Lambda(V_{n+1})} - \overline{\Lambda(V_{n+1})} \subset \overline{\Lambda(V_{n+1}) - \Lambda(V_{n+1})} \subset \overline{\Lambda(V_n)} \tag{2.2.1}$$

が成り立つ．

さて V_2 は 0 の近傍ゆえ $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kV_2$ が成り立つ () ので

$$\Lambda(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} k\Lambda(V_2)$$

である．ここで $\Lambda(X)$ は第 2 類であるから少なくとも 1 つの k について $k\Lambda(V_2)$ は第 2 類である．よって $\Lambda(V_2)$ もそうであり, 特に $\overline{\Lambda(V_2)}$ は内点を持つ．(実際, 持たなければ全疎になり第 1 類となり矛盾を生じる.) $a + W \subset \overline{\Lambda(V_2)}$ を満たす $a \in \overline{\Lambda(V_2)}$ と $W \in \mathcal{N}_0(Y)$ 存在するので

$$W \subset W - W = (a + W) - (a + W) \subset \overline{\Lambda(V_2)} - \overline{\Lambda(V_2)} \subset \overline{\Lambda(V_1)} \tag{2.2.2}$$

となる．

次に $\overline{\Lambda(V_1)} \subset \Lambda(V)$ を示そう．始めに $y_1 \in \overline{\Lambda(V_1)}$ を任意に取る．そして帰納的に $y_n \in \overline{\Lambda(V_n)}$ が定まったとして $x_n \in V_n$ と $y_{n+1} \in \overline{\Lambda(V_{n+1})}$ を以下のように取る．まず前段で示したのと同様に $\Lambda(V_{n+1})$ も $0 \in Y$ の近傍を含むので

$$(y_n - \overline{\Lambda(V_{n+1})}) \cap \Lambda(V_n) \neq \varnothing$$

そこで $x_n \in V$ を $\Lambda x_n \in y_n - \overline{\Lambda(V_{n+1})}$ となるように取る．そして $y_{n+1} = y_n - \Lambda x_n$ と置くと, $y_{n+1} \in \overline{\Lambda(V_{n+1})}$ である．

さて $x_n \in V_n$ より $d(x_n, 0) < 2^{-n} r$ が成り立つので

$$x_1 + \cdots + x_n$$

は Cauchy 列である．X は F-空間であるから完備であるので

$$x = \lim_{n\to\infty}(x_1 + \cdots + x_n)$$

が存在し $d(x,0) < r$ が成り立つので $x_0 \in V_0 \subset V$ である．

$$\sum_{n=1}^{m} \Lambda x_n = \sum_{n=1}^{m}(y_n - y_{n+1}) = y_1 - y_{m+1}$$

に於いて $m \to \infty$ とすれば左辺は Λx に収束するので y_{m+1} も収束するが, $y_{m+1} \in \overline{\Lambda(V_{m+1})}$ と Λ の連続性より $y_{m+1} \to 0$ である．よって $y_1 = \Lambda x \in \Lambda(V)$ が成り立つ．$y_1 \in \overline{\Lambda(V_1)}$ の任意性より $\overline{\Lambda(V_1)} \subset \Lambda(V)$ が成り立ち, (2.2.2) と合わせて $W \subset \Lambda(V)$ となり, Λ は 0 で開である．

次に $N = \operatorname{Ker}\Lambda$ と置いて, $\pi : X \to X/N$ を商写像とする．このとき $f : X/N \to Y$ を

$$f(\pi(x)) = (f(x+N) =)\Lambda x$$

と定義する．$\Lambda(X) = Y$ より f は全射であり, 単射であることも容易に分かる．また $V \subset Y$ が開集合ならば

$$f^{-1}(V) = \pi(\Lambda^{-1}(V))$$

に於いて $\Lambda^{-1}(V)$ は開集合であり, π は開写像ゆえ, 右辺は X の開部分集合である．よって f は連続である．次に $E \subset X/N$ が開集合ならば

$$f(E) = \Lambda(\pi^{-1}(E))$$

に於いて π の連続性より $\pi^{-1}(E)$ は開集合であり λ は開写像ゆえ, 右辺は Y の開部分集合である．従って f は開写像であり, 連続な全単射であるから f は位相写像である．X は F-空間であるから Theorem 1.8.1 (d) より X/N も F-空間である．以上より Y は F-空間 X/N の位相写像による像であるから, やはり F-空間である． □

開写像定理の簡単な帰結を述べておこう．

Corollary 2.2.2 X, Y が F-空間で写像 $\Lambda : X \to Y$ は連続線形であるとする．この時 Λ が全射ならば Λ は開写像であり, さらに Λ が単射ならば Λ は位相写像である．

Corollary 2.2.3 X, Y が *Banach* 空間で写像 $\Lambda : X \to Y$ は連続線形な全単射であるとする．この時, 定数 $a, b > 0$ が存在して

$$a\|x\| \leqslant \|\Lambda x\| \leqslant b\|x\|, \quad x \in X$$

が成り立つ．

Corollary 2.2.4 X がベクトル空間で τ_1, τ_2 を X の位相で $\tau_1 \subset \tau_2$ であるとする．このとき (X, τ_1), (X, τ_2) がともに F-空間であれば $\tau_1 = \tau_2$ が成り立つ．

Proof.　恒等写像 $\mathrm{id}_X : (X, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ は, 連続線形で全単射であるから Corolalry 2.2.2 より位相になる．従って $\tau_1 = \tau_2$ が成り立つ． □

2.3 閉グラフ定理

X, Y を集合とし写像 $f : X \to Y$ について

$$G_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$$

を X のグラフ (graph) と呼ぶ.

X, Y が位相空間の場合 $X \times Y$ には積位相を導入したとしよう. このとき $f : X \to Y$ が連続ならば G は $X \times Y$ の閉集合になることが予想できる. 実際に Y が Hausdorff 空間の場合には, この事実が成り立ち証明も難しくはない.

Proposition 2.3.1 *X を位相空間とし Y を Hausdorff 空間とする. このとき写像 $f : X \to Y$ が連続ならば, そのグラフは積位相空間 $X \times Y$ の閉集合である.*

Proof. $(x_0, y_0) \notin G$ を任意に取ると, $y_0 \neq f(x_0)$ であるから y_0 の近傍 U と $f(x_0)$ の近傍 V を $U \cap V = \emptyset$ となるように取ることができる. f の連続性より x_0 の近傍 W を $f(W) \subset V$ となるように取れるが, この時 $W \times U$ は (x_0, y_0) の $X \times Y$ に於ける近傍であり, $f(W) \subset V$ と $U \cap V = \emptyset$ より $W \times U \cap G = \emptyset$ である. 従って (x_0, y_0) は G^c の内点であり, $(x_0, y_0) \in G^c$ の任意性より G^c は開集合になる. よって G は閉集合である. □

X, Y が位相ベクトル空間で f が線形の場合には, 上の Proposition 事実の逆が成り立つ. つまり G が閉集合ならば f は連続になる.

Theorem 2.3.2 (閉グラフ定理) *X, Y を F-空間で写像 $\Lambda : X \to Y$ は線形とする. このとき $G = \{(x, \Lambda x) : x \in X\}$ が $X \times Y$ の閉部分集合ならば Λ は連続である.*

Proof. $X \times Y$ は

$$\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$$

と定義して, 和とスカラー倍を導入することによりベクトル空間となる. また d_X, d_Y で X, Y の平行移動に関して不変な距離でそれぞれの位相と適合するものを表そう. そして

$$d((x_1, y_1), (x_1, y_1)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

と置くことにより, $X \times Y$ に距離を導入すれば $X \times Y$ も F-空間である.

さて Λ は線形であるから

$$\alpha(x_1, \Lambda x_1) + \beta(x_2, \Lambda x_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha\Lambda x_1 + \beta\Lambda x_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \Lambda(\alpha x_1 + \beta\Lambda x_2))$$

より $\alpha G + \beta G \subset G$ が成り立つので G は $X \times Y$ の部分空間である. そして仮定より閉集合であるから, G は F-空間 $X \times Y$ の閉部分空間であるから, やはり F-空間である. $\pi_1 : G \to X$, $\pi_2 : X \times Y \to Y$ を

$$\pi_1(x, \Lambda x) = x, \quad \pi_2(x, y) = y$$

と定義すると, π_1 は F-空間 G から F-空間 X への連続線形な全単射であるから位相写像になり $\pi^{-1} : X \to G$ も連続である. また π_2 も連続であるから, $\Lambda = \pi_2 \circ \pi^{-1}$ も連続である. □

閉グラフ定理 Theorem 2.3.2 に於いて $X \times Y$ は F-空間であるから, 距離空間として良い. 距離空間に於いては, 閉集合である為の必要十分条件は収束点列の極限点が, その集合に再び属すことであるから, G が閉集合である為の必要十分条件として

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ と } y = \lim_{n\to\infty} \Lambda x_n \text{ が存在すれば } y = \Lambda x$$

を採用できる.

X, Y, Z をベクトル空間とする. この時, 写像 $B : x \times Y \to Z$ が双線形 (bilinear) であるとは $x \in X$ を固定するごとに $B(x, y)$ が y について線形, つまり

$$B(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha B(x, y_1) + \beta B(x, y_2) \qquad \text{for } y_1, y_2 \in Y,\ \alpha, \beta \in \Phi$$

と, $y \in Y$ を固定するごとに $B(x, y)$ が x について線形, つまり

$$B(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha B(x_1, y) + \beta B(x_2, y) \qquad \text{for } x_1, x_2 \in X,\ \alpha, \beta \in \Phi$$

が成り立つ時を言う. これは $x \in X$, $y \in Y$ について $B_x : Y \to Z$, $B^y : X \to Z$ を

$$B_x(y) = B(x, y), \qquad B^y(x) = B(x, y)$$

と定義するとき, これらの写像が全て線形になることと言い換えることができる.

X, Y, Z が位相ベクトル空間の時, B_x, B_y が全ての $x \in X$, $y \in Y$ について連続である時, B は各変数ごとに連続 (separately continuous) であると言う. もちろん $B : X \times Y \to Z$ が連続, つまり $X \times Y$ の積位相のもとで連続ならば, 各変数ごとに連続である. Banach-Steinhaus の定理の応用として X, Y のどちらか一方が F-空間で, もう一方が距離化可能のときに各変数ごとの連続性から B の連続性が導かれることを示そう.

Theorem 2.3.3 *X を F-空間, Y, Z を位相ベクトル空間とする. この時 $B : X \times Y \to Z$ が双線形で各変数ごとに連続であれば*

$$(x_n, y_n) \to (x_0, y_0) \Longrightarrow B(x_n, y_n) \to B(x_0, y_0)$$

が成り立つ. もし Y が距離化可能ならば, B は連続である.

Proof. $U, W \in \mathcal{N}_0(Z)$ を $U + U \subset W$ を満たすように取る. 各 $n \in \mathbb{N}$ について

$$b_n(x) = B(x, y_n), \quad x \in X$$

と置くと, 各 $x \in X$ を固定するごとに

$$\lim_{n\to\infty} b_n(x) = \lim_{n\to\infty} B(x, y_n) = B(x, y_0)$$

が成り立つことが, B の各変数ごとに関する連続性より従う. よって x を固定するごとに $\{b_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ は Z の有界集合であり, X は F-空間ゆえ第 2 類であるから Banach-Steinhaus の定理 (Theorem 2.1.5) より $\{b_n\}$ は同程度連続である. よって $V \in \mathcal{N}_0(X)$ を

$$\forall n \in \mathbb{N} : b_n(V) \subset U$$

が成り立つように取れる. ここで

$$B(x_n, y_n) - B(x_0, y_0) = B(x_n, y_n) - B(x_0, y_n) + B(x_0, y_n) - B(x_0, y_0) = b_n(x_n - x_0, y_0) + B(x_0, y_n - y_0)$$

に於いて, 十分大きな全ての n について $x_n - x_0 \in V$ より $b_n(x_n - x_0, y_0) \in b_n(V) \subset U$. また $Y \ni y \mapsto B(x_0, y) \in Z$ の連続性より, $B(x_0, y_n - y_0) \in U$ が, やはり十分大きな全ての n について成り立つ. よって

$$B(x_n, y_n) - B(x_0, y_0) \in U + U \subset W$$

となり, 点列に関する連続性 $B(x_n, y_n) \to B(x_0, y_0)$ が成り立つ.

もし Y が距離化可能ならば, X もそうであるから, $X \times Y$ も距離化可能であり, 点列に関する連続性と連続性は同値であるから, B は連続である. $\square$

第3章　局所凸位相ベクトル空間

この章ではベクトル空間の最も重要なクラスと言っても過言ではない局所凸位相ベクトル空間の性質を取り扱う．主なものとしては (a) 連続線形汎関数の存在を保証する Hahn-Banach の定理, (b) 双対空間の単位球の compact 性を示す Banach-Alaoglu の定理, (c) 凸集合の extreme points に関する Krein-Milman の定理である．

3.1　Hahn-Banach の定理

位相ベクトル空間 X の双対空間 (dual space) とは X 上の連続線形汎関数の全体がなす集合で, $\Lambda_1, \Lambda_2 \in X^*$, $\alpha \in \Phi$ について

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2)x = \Lambda_1 x + \Lambda_2 x, \quad (\alpha\Lambda)x = \alpha\Lambda x$$

と定義することによりベクトル空間である．

以下では複素ベクトル空間は, スカラーを実数に制限することにより実ベクトル空間とみなせることに注意しよう．そして一時的に次の用語を用いる．複素ベクトル空間の加法的汎関数 $\Lambda : X \to \mathbb{R}$ ($\Lambda(x+y) = \Lambda x + \Lambda y$ が成り立つと言う意味である) が実線形 (real linear) であるとは $\Lambda(\alpha x) = \alpha\Lambda x$ が任意の $x \in X$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ について成り立つ時を言う．同様複に複素ベクトル空間の加法的汎関数 $\Lambda : X \to \mathbb{C}$ が複素線形であるとは $\Lambda(\alpha x) = \alpha\Lambda x$ が任意の $x \in X$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ について成り立つ時を言う．

さて $f : X \to \mathbb{C}$ が複素線形の時, $u = \mathrm{Re}\, f$ は実線形であることは容易に分かる．そして $u(ix) = \mathrm{Re}\, f(ix) = \mathrm{Re}\,(if(x)) = -Imf(x)$ より

$$f(x) = u(x) - iu(ix)$$

が成り立つ. 逆に $u : X \to \mathbb{R}$ が実線形の時, $f(x)$ を上式で定義すれば

$$\begin{aligned}
f((a+ib)x) =& u((a+ib)x) - iu(i(a+ib)x) \\
=& au(x) + bu(ix) - i\{au(ix) - bu(x)\} \\
=& (a+ib)u(x) + (b-ia)u(ix) \\
=& (a+ib)\{u(x) - iu(ix)\} = (a+ib)f(x)
\end{aligned}$$

より複素線形である．

以上より複素位相ベクトル空間 X の複素線形汎関数 f が連続である為の必要十分条件は, その実部 $u = \mathrm{Re}\, f$ が連続の時であることである．また連続な実線形汎関数 v について $g \in X^*$ で $v = \mathrm{Re}\, g$ となるものが一意的に存在する．

Theorem 3.1.1 (Hahn-Banach の定理) X を実ベクトル空間とし, $p : X \to \mathbb{R}$ は任意の $x, y \in X$ と $t > 0$ について

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \quad p(tx) = tp(x)$$

を満たすとする. また M を X の部分空間とし, f を M 上の線形汎関数で, M 上 $f(x) \leqslant p(x)$ が成り立つとする. このとき X 上の線形汎関数 Λ で M 上 $\Lambda = f$ かつ

$$-p(-x) \leqslant \Lambda x \leqslant p(x) \quad \mathit{for}\, x \in X$$

が成り立つものが存在する.

Proof. $M = X$ の場合は $\Lambda = f$ と置けば良い. このとき確かめなければならないのは $-p(-x) \leqslant \Lambda x$ のみであるが, これは $\Lambda x \leqslant p(x)$ において x の代わりに $-x$ を代入すれば,

$$-\Lambda x = \Lambda(-x) \leqslant p(-x)$$

より直ちに従う.

$M \neq X$ の場合は

$$\mathcal{P} = \{(\tilde{M}, \tilde{f}) : \tilde{M} \text{ は } X \text{ の部分空間, } \tilde{f} \text{ は } \tilde{M} \text{ 上の線形汎関数で } \tilde{f}(x) \leqslant p(x) \text{ を満たす. }\}$$

$(\tilde{M}_1, \tilde{f}_1), (\tilde{M}_1, \tilde{f}_1) \in \mathcal{P}$ について $(\tilde{M}_1, \tilde{f}_1) \leqslant (\tilde{M}_1, \tilde{f}_1)$ とは

$$\tilde{M}_1 \subset \tilde{M}_2 \text{ and } \tilde{f}_2 = \tilde{f}_1 \text{ on } \tilde{M}_1$$

が成り立つときと定義すれば, $\leqslant$ は $\mathcal{P}$ の順序であり, この順序のもとで $\mathcal{P}$ は半順序集合である.

次に $\mathcal{P}$ が帰納的順序集合であることを示そう. つまり $\mathcal{Q}$ を $\mathcal{P}$ の全順序部分集合として $\mathcal{Q}$ が上界を持つことを示そう.

$$\hat{M} = \bigcup_{(\tilde{M}, \tilde{f}) \in \mathcal{Q}} \tilde{M}$$

と置き, $x \in \hat{M}$ について $x \in \tilde{M}$ を満たす $(\tilde{M}, \tilde{f}) \in \mathcal{Q}$ を取り $\hat{f}(x) = \tilde{f}(x)$ と置く. $\hat{f}(x)$ が $(\tilde{M}, \tilde{f})$ のとり方に依らず定まることは次のようにして分かる. $(\tilde{M}_1, \tilde{f}_1), (\tilde{M}_2, \tilde{f}_2) \in \mathcal{Q}$ が $x \in \tilde{M}_1$ かつ $x \in \tilde{M}_2$ とすれば, $\mathcal{Q}$ が全順序部分集合であることより $(\tilde{M}_1, \tilde{f}_1) \leqslant (\tilde{M}_2, \tilde{f}_2)$, $(\tilde{M}_2, \tilde{f}_2) \leqslant (\tilde{M}_1, \tilde{f}_1)$ のどちらかが成り立つ. 前者の場合は $\tilde{M}_1 \subset \tilde{M}_2$ で $\tilde{M}_1$ 上で $\tilde{f}_2 = \tilde{f}_1$ であるから $\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x)$ が成り立つ. 後者の場合も同様にして $\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x)$ が成り立つ. さて以上のように定義された $(\hat{M}, \hat{f})$ について

$$\forall (\tilde{M}, \tilde{f}) \in \mathcal{Q} : (\tilde{M}, \tilde{f}) \leqslant (\hat{M}, \hat{f})$$

が成り立つので $(\hat{M}, \hat{f})$ は $\mathcal{Q}$ の上界である.

さて $\mathcal{P}$ は帰納的順序集合であるから Zorn の補題により極大元 $(\check{M}, \check{f})$ が存在する. このとき $\check{M} \neq X$ ならば $\check{f}$ を $\check{M}$ を真に含む部分空間に $\check{f} \leqslant p$ を保ったまま拡張できることを示そう. もしこれができれば, $(\check{M}, \check{f})$ の極大性に矛盾するので, 結局 $\check{M} = X$ が従う. そして $\Lambda = \check{f}$ と置けば, $\Lambda x = f(x) \leqslant p(x)$ を満たし, これより $-p(-x) \leqslant \Lambda x$ が成り立つことも前と同様にして分かる.

前段までの議論により結局, $M \neq X$ の時, $x_1 \in X \backslash M$ を取り

$$M_1 = \{x + tx_1 : x \in M,\ t \in \mathbb{R}\}$$

と置くとき, f が $f \leqslant p$ を保ったまま M_1 に拡張できることを示せば良いことになる. そこでもしこのような拡張 f_1 が存在したと仮定すれば

$$f_1(x+tx_1) = f_1(x) + tf_1(x_1) = f(x) + tf_1(x_1), \quad x \in M,\ t \in \mathbb{R}$$

であるから, 問題は M_1 上で $f_1 \leqslant p$ を満たすためには $f_1(x_1)$ をどのように置けば良いのか, という問題に還元される. これは

$$f(x) + tf_1(x_1) = f_1(x+tx_1) \leqslant p(x+tx_1) \forall t \in \mathbb{R}$$

という不等式が $t=0$ の時は定理の仮定より成り立つので, $t>0$ と $t<0$ の場合を考えれば良いが $t>0$ の時は,

$$f_1(x_1) \leqslant \frac{1}{t}\{p(x+tx_1) - f(x)\} = p(t^{-1}x + x_1) - f(t^{-1}x) \quad \forall x \in M$$

と同値変形されるが, x が M を動くとき, $t^{-1}x$ も M を動くので,

$$f_1(x_1) \leqslant p(x+x_1) - f(x) \quad \forall x \in M$$

とさらに変形される. 同様に $t<0$ の時も

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &\geqslant \frac{1}{t}\{p(x+tx_1) - f(x)\} = -p(|t|^{-1}x - x_1) + f(|t|^{-1}x) \quad \forall x \in M \\ \Longleftrightarrow f_1(x_1) &\geqslant= f(x) - p(x - x_1) \quad \forall x \in M \end{aligned}$$

となるので, 結局

$$\sup_{x \in M}\{f(x) - p(x-x_1)\} \leqslant \alpha \leqslant \inf_{x \in M}\{p(x+x_1) - f(x)\}$$

を満たす α を取り $f_1(x_1) = \alpha$ と置けば良いことになる. 但し上式において $\sup \leqslant \inf$ となることを確かめておく必要があるが, これは $x, y \in M$ について

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \leqslant p(x+y) \leqslant p(x+x_1) + p(y-x_1)$$

より

$$f(y) - p(y-x_1) \leqslant p(x+x_1) - f(x)$$

が成り立つことより従う.

以上の予備的な考察のもとで α を上の不等式を満たすように取り

$$f_1(x+tx_1) = f(x) + tf_1(x_1)$$

と置けば M_1 上で線形であり $t>0$ のときは

$$f_1(x+tx_1) = f(x) + tf_1(x_1) \leqslant f(x) + t\{p(y+x_1) - f(y)\} \quad \forall y \in M$$

が成り立つので, $y = t^{-1}x$ を代すれば

$$f_1(x+tx_1) \leqslant f(x) + t\{p(t^{-1}x + x_1) - f(t^{-1}x)\} = f(x) + p(x+tx_1) - f(x) = p(x+tx_1)$$

が成り立つ. 同様に $t<0$ の時は

$$f_1(x+tx_1) = f(x) + tf_1(x_1) \leqslant f(x) + t\{f(y) - p(y-x_1)\} \quad \forall y \in M$$

が成り立つので, $y = |t|^{-1}x$ を代すれば

$$f_1(x+tx_1) \leqslant f(x) - |t|\{f(|t|^{-1}x) - p(|t|^{-1}x - x_1)\} = f(x) - \{f(x) - p(x+tx_1)\} = p(x+tx_1)$$

が成り立つ. □

Theorem 3.1.2 X を位相ベクトル空間とし, p を X 上のセミノルムとする. また M を X の部分空間とし, $f : M \to \Phi$ を線形汎関数で M 上 $|f| \leqslant p$ を満たすとする. このとき $\Lambda \in X^*$ で M 上で $\Lambda = f$ を満たし, X 上で $|\Lambda| \leqslant p$ を満たすものが存在する.

Proof. X が実ベクトル空間の時は, Throem 3.1.1 における Λ を取れば, $-p(-x) \leqslant \Lambda x \leqslant p(x)$ が成り立つ. p はセミノルムであったから $p(-x) = p(x)$ ゆえ, これより直ちに $-p(x) \leqslant \Lambda x \leqslant p(x)$, つまり $|\Lambda x| \leqslant p(x)$ が成り立つ.

X が複素ベクトル空間の場合は, $u = \mathrm{Re}\, f$ と置くと $|u| \leqslant |f| \leqslant p$ が成り立つ. そこで係数体を $\mathbb{C}$ から $\mathbb{R}$ に制限して X を実ベクトル空間とみなせば, 前段で示したようにこの場合には定理が成り立つので実線形な汎関数 $U : X \to \mathbb{R}$ で M 上 $U = u$, X 上 $|U| \leqslant p$ が成り立つものが存在する. このとき $\Lambda x = U(x) - iU(ix)$ と置けば, Throem 3.1.1 の直前で示したように Λ は複素線形である. また任意の $x \in X$ と $\theta \in \mathbb{R}$ について

$$U(x)\cos\theta + U(ix)\sin\theta = U(e^{i\theta}x) \leqslant p(e^{i\theta}x) = p(x)$$

が成り立つので, 特に

$$|\Lambda x| = \sqrt{U(x)^2 + U(ix)^2} = \max_{\theta\in\mathbb{R}}\{U(x)\cos\theta + U(ix)\sin\theta\} \leqslant p(x)$$

が成り立つ. □

Corollary 3.1.3 X をノルム空間とし, $x_0 \in X\backslash\{0\}$ とすると $\Lambda \in X^*$ で $\Lambda x_0 = \|x_0\|$ かつ X 上 $|\Lambda x| \leqslant \|x\|$ を満たすものが存在する.

Proof. $M = \{tx_0 : t \in \Phi\}$, $f : M \to \Phi$ を $f(tx_0) = t\|x_0\|$ と置けば $|f(tx_0)| = \|tx_0\|$ が成り立つので Theorem 3.1.2 をすれば良い. □

Theorem 3.1.4 X を位相ベクトル空間で A, B を X の凸部分集合で $A \cap B = \varnothing$ を満たすとする.

(i) A が開集合ならば $\lambda \in X^*$ と $\gamma \in \mathbb{R}$ で

$$\mathrm{Re}\,\Lambda x < \gamma \leqslant \mathrm{Re}\,\Lambda y, \qquad x \in A \ \mathit{and}\ y \in B$$

が成り立つものが存在する.

(ii) A が *compact* で B が閉集合かつ X が局所凸ならば $\Lambda \in X^*$ と $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ で

$$\mathrm{Re}\,\Lambda x \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 \leqslant \mathrm{Re}\,\Lambda y, \qquad x \in A \ \mathit{and}\ y \in B$$

が成り立つものが存在する.

Proof. X が実ベクトル空間の時, $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ を取り, $x_0 = b_0 - a_0$ とおくと $V = A - B + x_0$ は, A が開集合であるから, 開集合であり, $0 \in V$ ゆえ, 0 の近傍であり凸である. 従って V の Minkowski 汎関数を p と置く, つまり

$$p(x) = \inf\{t > 0 : x \in tV\}$$

と置けば Theorem 1.7.3 より

$$p(tx) = tp(x) \quad \forall x \in X \text{ and } t \geqslant 0$$
$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$$

が成り立つ．さらに C は 0 を元に持つ凸開集合であるから

$$\{x \in X : p(x) < 1\} = V \subset \{x \in X : p(x) \leqslant 1\}$$

が成り立つ．このとき $x_0 \notin V$ ゆえ $p(x_0) \geqslant 1$ である．また $M = \{tx_0 : t \in \mathbb{R}\}$ $f(tx_0) = t$ と置けば $t > 0$ の時は $p(x_0) \geqslant 1$ より, また $t < 0$ のときは $f(tx_0) = t < 0 \leqslant p(tx_0)$ より

$$f(tx_0) \leqslant p(tx_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

が成り立つ．従って Theorem 3.1.1 より f の拡張 $\Lambda : X \to \mathbb{R}$ で X 上 $\Lambda \leqslant p$ が成り立つものが存在する．特に V 上で $\Lambda \leqslant p \leqslant 1$ であるから $-V$ 上では $\Lambda \geqslant -1$ が成り立つ．よって 0 の近傍である $V \cap (-V)$ 上で $|\Lambda| \leqslant 1$ が成り立つから Λ は連続であり, $\Lambda^* \in X^*$ が成り立つ．また $a \in A$, $b \in B$ について $a - b + x_0 \in V$ より

$$\Lambda a - \Lambda b + 1 = \Lambda(a - b + x_0) \leqslant p(a - b + x_0) < 1$$

となり

$$\Lambda a < \Lambda b \quad \forall a \in A,\ b \in B$$

である．$\Lambda(A)$, $\Lambda(B)$ はともに, $\mathbb{R}$ の凸集合であり, $\Lambda(B)$ の左に $\Lambda(A)$ がある．そして $\Lambda(A)$ が開集合であることより $\gamma = \inf \Lambda(B)$ と置けば,

$$\Lambda a < \gamma \leqslant \Lambda(b) \quad \forall a \in A,\ b \in B$$

が成り立つ．

(ii) Theorem 1.3.6 と X の局所凸性より 0 の凸近傍 V を $(A+V) \cap (B+V) = \varnothing$ となるように取ることができる．そこで (i) を $A+V$ と $B+V$ に適用し, $\Lambda \in X^*$ を取れば, $\Lambda(A+V)$, $\Lambda(B+V)$ はともに $\mathbb{R}$ の凸開部分集合ゆえ, 開線分であり交わらず, $\Lambda(A+V)$ は $\Lambda(B+V)$ の左側にある．また $\Lambda(A)$ は開線分 $\Lambda(A+V)$ に含まれる有界閉区間であるから γ_1, γ_2 を

$$\max \gamma(A) < \gamma_1 < \gamma_2 < \sup \Lambda(A+V)$$

を満たすように取れば良い．

X が複素ベクトル空間の場合は X のスカラーを $\mathbb{R}$ に制限して実ベクトル空間とみなして, 前半の議論を適用すると, 連続な実線形汎関数 $\Lambda_1 : X \to \mathbb{R}$ で要求する不等式を満たすものが存在する．このとき $\Lambda x = \Lambda_1(x) - i\Lambda(ix)$ と置けば良い． □

Corollary 3.1.5 X が局所凸位相ベクトル空間ならば X^* は X の点を分離する．つまり任意の $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ についてある $\Lambda \in X^*$ で $\Lambda x_1 \neq \Lambda x_2$ を満たすものが存在する．

Proof. $A = \{x_1\}$, $B = \{x_2\}$ と置いて, Theorem 3.1.4 の (ii) を適用すれば直ちに従う． □

Theorem 3.1.6 X は局所凸位相ベクトル空間で M をその部分空間とし $x_0 \in X \backslash \overline{M}$ とする．このとき $\Lambda \in X^*$ で $\Lambda x_0 = 1$ かつ $\overline{M}$ 上 $\Lambda = 0$ を満たすものが存在する．

Proof. $A = \{x_0\}$, $B = \overline{M}$ と置いて, Theorem 3.1.4 の (ii) を適用すれば $\Lambda_0 \in X^*$ と $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ で

$$\mathrm{Re}\,\Lambda_0 x_0 \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 \leqslant \mathrm{Re}\,\Lambda_0 x, \qquad x \in \overline{M}$$

が成り立つものが存在する．ここで $\Lambda_0(\overline{M})$ は $\Phi = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ の部分空間であり, 上の不等式を満たすので $\{0\}$ である．つまり $\overline{M}$ 上 $\Lambda_0 = 0$ である．そこで $\Lambda = (\Lambda_0 x_0)^{-1}\Lambda_0$ と置けば良い． □

Theorem 3.1.7 X は局所凸位相ベクトル空間で M をその部分空間とし $f : M \to \Phi$ を連続な線形汎関数とすると, $\Lambda \in X^*$ で M 上 $\Lambda = f$ となるものが存在する．

Proof. $f = 0$ の時は $\Lambda = 0$ と置けば良いので, $f \neq 0$ とする．このとき $M_0 = \{x \in M : f(x) = 0\}$ と置くと, f の連続性より M_0 は M の相対位相に関する閉部分空間であるから X の閉部分空間でもある．$x_0 \in M$ を $f(x_0) = 1$ となるように取ると $x \in M$ について $x - f(x)x_0 \in M_0$ が成り立つ．ここで Theorem 3.1.6 を用いて $\Lambda x_0 = 1$ を満たす $\Lambda \in X^*$ を取れば $x \in M$ について

$$\Lambda x - f(x) = \Lambda x - f(x)\Lambda x_0 = \Lambda(x - f(x)x_0)0$$

が成り立つので M 上 $\Lambda = f$ である． □

Theorem 3.1.8 X は局所凸位相ベクトル空間で B を凸平衡的な閉部分集合とする．このとき任意の $x_0 \in X \backslash B$ について $\Lambda \in X^*$ で B 上 $|\Lambda| \leqslant 1$ かつ $\Lambda x_0 > 1$ を満たすものが存在する．

Proof. $A = \{x_0\}$ と置いて, Theorem 3.1.4 の (ii) を適用すれば $\Lambda_1 \in X^*$ と $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ で

$$\mathrm{Re}\,\Lambda_1 x_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \mathrm{Re}\,\Lambda_1 x \quad \forall x \in B$$

を満たすものが存在する．このとき B が平衡的であるから $\Lambda_1(B)$ も $\Phi = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ の平衡的な部分集合であるから, それぞれ 0 に関して対称な区間または原点を中心とする円板である．そこで $r = \sup\{|w| : w \in \Lambda(B)\}$ と置けば $|\Lambda_1 x_0| > r$ である．よって $\rho e^{i\theta} = \Lambda_1 x_0$ を満たす $\rho > 0$ と $\theta \in \mathbb{R}$ を取り $\Lambda = e^{-i\theta} r^{-1}\Lambda_1$ と置けば要求された性質を持つ． □

3.2 弱位相

X を集合とし, τ_1, τ_2 を X 上の位相とする．このとき τ_1 が τ_2 より弱いとは $\tau_1 \subset \tau_2$ が成り立つ時を言う．id で X 上の恒等写像を表すとき

$$\tau_1 \subset \tau_2 \Longleftrightarrow \mathrm{id} : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2) \text{ が開写像 } \Longleftrightarrow \mathrm{id} : (X, \tau_2) \to (X, \tau_1) \text{ が連続写像}$$

が成り立つ．この節では, 集合 X に 2 つの位相が定義されているとして, その強弱の判定や一致する条件などを扱う．

Proposition 3.2.1 τ_1, τ_2 を集合 X 上の位相で $\tau_1 \subset \tau_2$ とする．このとき (X, τ_1) が *Hausdorff* 空間で, (X, τ_2) は *compact* 空間ならば, $\tau_1 = \tau_2$ が成り立つ．

Proof.

$$
\begin{aligned}
F \text{ が } \tau_2\text{-閉} &\Longrightarrow F \text{ が } \tau_2\text{-compact} \quad (\because \text{compact 空間の閉集合は compact}) \\
&\Longrightarrow F \text{ が } \tau_1\text{-compact} \quad (\because \tau_1\text{-開被覆は } \tau_2\text{-開被覆}) \\
&\Longrightarrow F \text{ が } \tau_1\text{-閉} \quad (\because \text{Hausdorff 空間において compact 集合は閉})
\end{aligned}
$$

であるから $\tau_2 \subset \tau_1$ が成り立つ. □

Proposition 3.2.2 X を位相ベクトル空間とし, N をその閉部分空間とし, $\pi : X \to X/N$ を商写像とする. X/N の商位相 $\tau_{X/N} = \{G : G \subset X/N,\ \pi^{-1}(G)$ は X の開集合 $\}$ は π が連続となる最強の位相であり, π が開写像となる最弱の位相である. つまり $\pi : X \to X/N$ が連続となる X/N の位相を τ' とすれば $\tau' \subset \tau_{X/N}$ が成り立ち, $\pi : X \to X/N$ が開写像となる X/N の位相を τ'' とすれば $\tau_n \subset \tau''$ が成り立つ.

証明は容易であるから省略する.

X を集合とし $\mathcal{F}$ を X からある位相空間 Y_f への写像 $fX :\to Y_f$ の族とする. この時

$$f^{-1}(V), \quad V \text{ は } Y_f \text{ の開集合}$$

の形の集合の有限個の共通部分の全体を τ と置けば, τ は §1.1 の $(\mathcal{T}1)$-$(\mathcal{T}3)$ を満たす X の位相である. この位相 τ は $f \in \mathcal{F}$ を連続にする最弱の位相であるから $\mathcal{F}$ により誘導される弱位相 (weak topology) または $\mathcal{F}$-位相と言う.

$\mathcal{F}$-位相の典型的な例としては $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を位相空間の族として, 直積 $X = \Pi_{\alpha\in A}X_\alpha$ の直積位相がそうである. これは各 $\alpha \in A$ について射影を $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ と置くとき, π_α が連続となる最弱の位相, つまり $\{\pi_\alpha\}_{\alpha\in A}$-位相である.

さて $\Pi_{\alpha\in A}X_\alpha$ 上の直積位相を τ と置けば各 X_α が compact のとき $\Pi_{\alpha\in A}X_\alpha$ も Tychonoff の定理より compact である. また各 X_α が Hausdorff 空間のとき $\Pi_{\alpha\in A}X_\alpha$ も Hausdorff 空間である.

Proposition 3.2.3 各 $\alpha \in A$ について X_α が *compact Hausdorff* 空間とし, τ を $\Pi_{\alpha\in A}X_\alpha$ 上の直積位相とする. τ' が $\Pi_{\alpha\in A}X_\alpha$ の位相で, $\tau \subset \tau'$ かつこの位相のもとで $\Pi_{\alpha\in A}X_\alpha$ が *compact* ならば $\tau' = \tau$

Proof. Proposition 3.2.1 を用いれば直ちに従う. □

Proposition 3.2.4 $\mathcal{F}$ を集合 X からある *Hausdorff* 空間 Y_f への写像 $fX :\to Y_f$ の族とする. このとき $\mathcal{F}$ が X の点を分離すれば $\mathcal{F}$-位相は X の *Hausdorff* 位相である.

Proof. $a, b \in X$, $a \neq b$ について $f \in mathcalF$ を $f(a) \neq f(b)$ となるように取る. また Y_f における a の近傍 V と b の近傍 W を $V \cap W = \varnothing$ を満たすように取れば $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(W)$ はそれぞれ X における a, b の $\mathcal{F}$-近傍であり, $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(W) = \varnothing$ である. よって $\mathcal{F}$-位相は Hausdorff である. □

Proposition 3.2.5 X が *compact* 位相空間で $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が X 上の連続関数列で, X の点を分離するならば X は距離化可能である.

Proof. X 本来の位相を τ と置く. X は compact ゆえ $f_n(X)$ は $\mathbb{R}$ の compact 部分集合であるから, 始めから $|f_n| \leqslant 1$ と仮定して良いこの時

$$d(p,q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|f_n(p) - f_n(q)|, \quad p, q \in X$$

と置けば, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の τ-連続性より $d : X \times X \to \mathbb{R}$ も τ-連続である. また $0 \leqslant d(p,q)$, $d(p,q) = d(q,p)$, $d(p,q) \leqslant d(p,r) + d(r,q)$ を満たすことは容易に分かる. さらに $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が X の点を分離することから "$d(p,q) = 0 \Longleftrightarrow p = q$" が成り立つので d は距離である. 従って $B_\rho(p) = \{q \in X : d(p,q) < \rho\}$ は τ-開集合になり, d が導入する位相を τ_d と置けば, $\tau_d \subset \tau$ が成り立つ. 逆の包含関係は τ_d が Hausdorff 位相であり, τ が compact 位相であるので Proposition 3.2.1 より従う. □

Proposition 3.2.6 $\Lambda, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$ をベクトル空間 X の線形汎関数とし

$$N = \{x \in X : \Lambda_1 x = 0, \ldots, \Lambda_m x = 0\}$$

と置く. この時, 次の 3 条件は互いに同値.

(i) $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Phi : \Lambda = \alpha_1\Lambda_1 + \cdots + \alpha_m\Lambda_m$.

(ii) $\exists \gamma > 0 : \forall x \in X : |\Lambda x| \leqslant \gamma \max_{j=1,\ldots,m} |\Lambda_j x|$.

(iii) $\forall x \in N : \Lambda x = 0$.

Proof. (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) が成り立つことは容易に分かるので省略する. (iii) を仮定して (i) を示そう. $\pi : X \to \Phi^m$ を

$$\pi(x) = (\Lambda_1 x, \ldots, \Lambda_m x)$$

で定義すると

$$\begin{aligned} \pi(x) = \pi(x') &\Longleftrightarrow x - x' \in N \\ &\Longrightarrow \Lambda x = \Lambda x' \quad (\because \text{by (iii)}) \end{aligned}$$

より, $f : \pi(X) \to \Phi$ を $f(\pi(x)) = \Lambda x$ と定義でき線形汎関数になる. f を Φ^m に拡張したものを F と置けば Φ^m の座標を $(y_1, \ldots, y_m)$ とすれば, ある $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Phi$ により $F = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_m y_m$ と表せるので

$$\Lambda x = F(\pi(x)) = \alpha_1\Lambda_1 x + \cdots + \alpha_m\Lambda_m x$$

が成り立つ. □

Theorem 3.2.7 X をベクトル空間とし, X' を X の線形汎関数よりなるベクトル空間で, X' は X の点を分離するとする. この時 X'-位相のもとで X は局所凸位相ベクトル空間であり, X の双対空間は X' と一致する.

Proof. X'-位相とは有限個の $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m \in X'$ と $r_1, \ldots, r_m > 0$ について $V = \{x \in X : |\Lambda_1 x| < r_1, \ldots, |\Lambda_m x| < r_m\}$ と表せる凸集合の族 $\mathcal{B}$ を近傍基とする位相である. 従って Theorem 1.3.14 の $(\mathcal{L}B1)$, $(\mathcal{L}B2)$, $(\mathcal{L}B3')$, $(\mathcal{L}B4)$-$(\mathcal{L}B7)$ を満たすことを示せば良いが, $(\mathcal{L}B7)$ を以外の条件が満たされることは容易である. また $(\mathcal{L}B7)$ は, X' が分離的であることより従う. よって X'-位相のもとで, X は局所凸位相ベクトル空間である.

さて $\Lambda \in X'$ は X'-位相のもとで連続であるから $\Lambda \in X^*$ である. 従って $X' \subset X^*$ が成り立つ. 逆に $\Lambda \in X^*$ ならば, $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m \in X'$, $r_1, \ldots, r_m > 0$ を

$$|\Lambda x| \leqslant 1 \quad \text{on } V = \{x \in X : |\Lambda_1 x| < r_1, \ldots, |\Lambda_m x| < r_m\}$$

が成り立つように取る. この時 $x \in X$ について $R > \max_{j=1,\ldots,m} |\Lambda_j x|$ を満たす R を取り $r = \min_{j=1,\ldots,m} r_j$ と置くと $\frac{r}{R}x \in V$ が成り立つ. 実際

$$\left|\Lambda_j \left(\frac{r}{R}x\right)\right| = \frac{r}{R}|\Lambda_j x| \leqslant r \leqslant r_j$$

である. 従って $\left|\Lambda\left(\frac{r}{R}x\right)\right| \leqslant 1$ となるので

$$|\Lambda x| \leqslant \frac{R}{r}$$

が成り立つ. $R \to \max_{j=1,\ldots,m} |\Lambda_j x|$ とすれば

$$|\Lambda x| \leqslant \frac{1}{r} \max_{j=1,\ldots,m} |\Lambda_j x|$$

が成り立つことが分かる. よって Proposition 3.2.6 よりある $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Phi$ について $\Lambda = \alpha_1\Lambda_1 + \cdots + \alpha_m\Lambda_m$ となる. X' はベクトル空間であるから, この表示より $\Lambda \in X'$ が従う. よって $X^* \subset X'$ が成り立つ. □

X を位相 τ を持つ位相ベクトル空間とし, X^* を双対空間, つまり X 上の連続線形汎関数の全体がなすベクトル空間とする. また X^* は X の点を分離することを仮定する. 例えば X が局所凸の場合には, Corollary 3.1.5 より仮定を満たす. さてこの時 X^*-位相を τ_w と表して X の弱位相 (weak topolgy) と言う. $\mathcal{B}_w$ を

$$V = \{x \in X : |\Lambda_1 x| < r_1, \ldots, |\Lambda_1 x| < r_m\}, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_m \in X^*, r_1, \ldots, r_m > 0$$

の形の集合の全体とすれば, 弱位相 τ_w は $\mathcal{B}_w$ を近傍基とする位相である.

τ と τ_w の区別が必要な場合 τ のことを本来の (original) 位相と言うことにする. そして本来の位相における近傍系を表す記号 $\mathcal{N}_x(X)$ に w を付けた $\mathcal{N}_x^w(X)$ を弱位相における近傍系を表す. 他の記号についても

$$\text{w-}\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Longleftrightarrow x_n \to 0 \quad \text{originally} \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{N}_0^w(X) : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N : x_n \in V$$

のように, w- をつけたり, originally という言葉をつけたりして弱位相に関する表現を表すことにする. 勿論 $\tau_w \subset \tau_w$ であるから, $\mathcal{N}_x^w(X) \subset \mathcal{N}_x(X)$ が成り立つので

$$x_n \to 0 \quad \text{originally} \Longrightarrow x_n \to 0 \quad \text{weakly}$$

である.

Proposition 3.2.8 $E \subset X$ が弱有界である為の必要十分条件は任意の $\Lambda \in X^*$ が E 上で有界であること. つまり

$$\forall \Lambda \in X^* : \exists M \geqslant 0 : \forall x \in E : |\Lambda x| \leqslant M.$$

Proof. E が弱有界であるとは, 任意の $V \in \mathcal{B}_w$ について $t_0 \geqslant 0$ を $t \geqslant t_0$ について $E \subset tV$ が成り立つように取れることであるが, $V \in \mathcal{B}_w$ はある $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m \in X^*$, $r_1, \ldots, r_m > 0$ について

$$V = \{x \in X : |\Lambda_1 x| < r_1, \ldots, |\Lambda_1 x| < r_m\}$$

と表せる．また $t>0$ について

$$x\in tV \Longleftrightarrow |\Lambda_j t^{-1}x|<r_j,\ j=1,\dots,m \Longleftrightarrow |\Lambda_j x|<tr_j,\ j=1,\dots,m$$

であるから, E が弱有界 である為の必要十分条件は任意有限個の $\Lambda_1,\dots,\Lambda_m\in X^*$ と $r_1,\dots,r_m>0$ についてある $t_0\geqslant 0$ で

$$\forall x\in E,\ t\geqslant t_0 : |\Lambda_j x|<tr_j$$

となるものが存在することである．これは任意の $\Lambda\in X^*$ について Λ が E 上有界であることと同値である． □

さて弱位相における 0 の近傍 $V=\{x\in X:|\Lambda_1 x|<r_1,\dots,|\Lambda_1 x|<r_m\}$ は集合 $N=\{x\in X:\Lambda_1 x=\cdots=\Lambda_m x=0\}$ を含む．N は線形写像 $X\ni x\mapsto(\Lambda_1 x,\dots,\Lambda_m x)\in\Phi^m$ の核であるから

$$\dim X\leqslant m+\dim N$$

が成り立つが, 特に X が無限次元ならば N も無限次元となり, V は無限次元部分空間を含むことになる．Proposition 1.6.3 より $\{0\}$ 以外の X の部分空間は非有界であったから, 次が成り立つことになる．

Proposition 3.2.9 X が無限次元位相ベクトル空間ならば X_w は局所有界ではない．

例えば X が距離化可能ならば局所有界であるから, X と X_w は異なり, 弱位相は本来の位相より真に弱いことになる．逆に Theorem 3.2.7 より $(X_w)_w=X_w$ が成り立つので, 弱位相と本来の位相が一致する空間も存在することが分かる．

Theorem 3.2.10 X を局所凸位相ベクトル空間とし, $E\subset X$ を 凸集合とすると

$$\overline{E}_w=\overline{E}$$

つまり, 弱位相における閉包は本来の位相における閉包と一致する．

Proof. $\overline{E}_w$ は E を含む, 弱閉な集合全てのの共通部分であったが, 弱閉ならば閉であるから $\overline{E}\subset\overline{E}_w$ が成り立つ．

逆の包含関係を示す為に $x_0\notin\overline{E}$ を任意に取る．Theorem 3.1.4 の (ii) より $\Lambda\in X^*$ と $\gamma\in\mathbb{R}$ を

$$\operatorname{Re}\Lambda x_0<\gamma<\operatorname{Re}\Lambda x,\quad x\in\overline{E}$$

が成り立つように取る．上式は x_0 の弱近傍 $\{x\in X:\operatorname{Re}\Lambda x<\gamma\}$ が $\overline{E}$ と交わらないことを示しているので, $x_0\notin\overline{E}_w$ が成り立つ．$x_0\notin\overline{E}$ の任意性より $X\backslash\overline{E}\subset X\backslash\overline{E}_w$ となり, $\overline{E}_w\subset\overline{E}$ が成り立つ． □

Corollary 3.2.11 X を局所凸位相ベクトル空間とし, $E\subset X$ を 凸集合とすると

(i) E が本来の位相で閉 $\Longleftrightarrow$ E が弱閉

(ii) E が本来の位相で稠密 $\Longleftrightarrow$ E が弱位相で稠密

Proof.

$$\begin{aligned}
E\text{ が本来の位相で閉} &\Longleftrightarrow \overline{E}=E\\
&\Longleftrightarrow \overline{E}_w=E\quad(\because E\text{ が凸ゆえ }\overline{E}_w=\overline{E}\ )\\
&\Longleftrightarrow E\text{ が弱閉}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E \text{ が本来の位相で稠密} &\iff \overline{E} = X \\ &\iff \overline{E}_w = X \quad (\because E \text{ が凸ゆえ } \overline{E}_w = \overline{E}\,) \\ &\iff E \text{ が弱位相で稠密} \end{aligned}$$

□

Theorem 3.2.12 X を距離化可能な局所凸位相ベクトル空間とし, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ を X の列で弱位相での極限 $\text{w-}\lim_{n\to\infty} x_n = x$ を持つとする. この時 X の列 $\{y_i\}$ で

(i) 各 $i \in \mathbb{N}$ について y_i は $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ の中の有限個の *convex combination.*

(ii) 本来の位相について $\lim_{i\to\infty} y_i = x$

Proof. H を $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ の凸包とする. つまり $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ の中の有限個の convex combination の全体とする. また $K = \overline{H}_w$ と置くと H の凸性より $x \in \overline{H}_w = \overline{H}$ であり, X は距離化可能であるから $y_i \in H$, $i = 1, 2, \ldots$ を $\lim_{i\to\infty} y_i = x$ となるように取れる. □

上の定理の応用として

Theorem 3.2.13 K を *compact Hausdorff* 位相空間とし f, f_n, $n \in \mathbb{N}$ を K 上の連続関数で $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ かつ任意の $x \in K$, $n \in \mathbb{N}$ について $|f_n(x)| \leqslant 1$ が成り立つとする. この時関数列 $\{g_i\}_i^\infty$ で

(i) 各 $i \in \mathbb{N}$ について g_i は $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ の中の有限個の *convex combination.*

(ii) $\{g_i\}_{i=1}^\infty$ は K 上, 一様に収束する.

Proof. $C(K)$ を K 上の複素数値連続関数の全体がなす集合とし, $\|f\| = \sup_{x\in K} |f(x)|$ をノルムとする Banach 空間とみなす. この時 $C(K)^*$ は X 上の正則な複素 Borel 測度の全体になる. 各 $\mu \in C(K)^*$ について, 定理の仮定より Lebesgue's dominated convergence theorem を用いて

$$\int_K f_n(x)\, d\mu(x) \to \int_K f(x)\, d\mu(x)$$

が成り立つことが分かる. つまり $\text{w-}\lim_{n\to\infty} f_n = f$ である. 従って Threorem 3.2.12 より, $\{g_i\}_{i=1}^\infty$ の存在が従う. □

3.3 弱 *-位相と Banach-Alaoglu の定理

X を位相ベクトル空間とし X^* を X の双対空間とする. 前節と異なり, X^* が X の点を分離するかどうかは, 以下の議論には殆ど影響しないので, 仮定しないでおく. さて $x \in X$ について $f_x : X^* \to \Phi$ を $f_x(\Lambda) = \Lambda x$ で定義すれば, f_x は線形であり, $\{f_x\}_{x\in X}$ は X^* の点を分離する. 実際 $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$ ならば $\Lambda_1 x \neq \Lambda_2 x$ となる $x \in X$ が存在する. (もし存在しなければ $\Lambda_1 = \Lambda_2$ である.) そこでこの $\{f_x\}_{x\in X}$ から誘導される $\{f_x\}_{x\in X}$-位相を X^* の弱 *-位相 (weak*-topology 発音は weak star topology) と言う. Theorem 3.2.7 より弱 *-位相のもとで X^* は局所凸位相ベクトル空間であり, X^* 上の連続線形汎関数は, ある $x \in X$ について f_x と合わせるものに限り, $(X^*)^* = X$ が成り立つ.

位相ベクトル空間 X の 0 の近傍 V について

$$K = \{\Lambda \in X^* : |\Lambda x| \leqslant 1\ \forall x \in V\}$$

を V の極 (polar) と言う. polar V が凸かつ平衡的であることは明らかであろう.

Theorem 3.3.1 (Banach-Alaoglu の定理) 位相ベクトル空間 X の 0 の近傍 V について V の極は弱 *-*wcompact* である.

Proof. 証明は compact 集合の直積が compact であるという Tychonoff の定理の簡単な応用である.

位相ベクトル空間における 0 の近傍は吸収的であるから任意の $x \in X$ について $x \in \gamma(x)V$ となる $\gamma(x) \geqslant 0$ が存在する. このとき $\gamma(x)^{-1}x \in V$ であるから

$$|\Lambda x| \leqslant \gamma(x) \quad x \in X,\ \lambda \in K$$

が成り立つ. そこで

$$P = \Pi_{x \in X} D_x, \quad D_x = \{\alpha \in \Phi : |\alpha| \leqslant \gamma(x)\}$$

と置き, τ を P の直積位相とする. $\Phi = \mathbb{R}$ のとき D_x は有界閉区間であり, $\Phi = \mathbb{C}$ のとき D_x は閉円板であるからどちらの場合でも compact であり, P も Tychonoff の定理より compact になる. P の各元は X 上の関数 f とみなすことができ

$$|f(x)| \leqslant \gamma(x), \quad x \in X$$

を満たす. また逆に上の不等式を満たす関数 f は P の元とみなすこともできる. 従ってこの同一視のもとで $K \subset X^* \cap P$ が成り立つ. K には弱 *-位相と, P の位相 τ から誘導される位相の 2 つが定義されるがこの 2 つが一致する. 実際 $\Lambda_0 \in K$ について

$$W_1 = \{\Lambda \in X^* : |\Lambda x_i - \Lambda_0 x_i| < \delta_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$
$$W_1 = \{f \in P : |f(x_i) - \Lambda_0 x_i| < \delta_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

と置いて, $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$, $\delta_1, \ldots, \delta_n > 0$ を動かしたときの $W_1 \cap K$ の形の集合の全体が Λ_0 における K の弱 *-位相の近傍基であり, 同じく $W_2 \cap K$ の形の集合の全体が Λ_0 における τ から誘導される K の位相の近傍基である. W_1, W_2 の定義より明らかに $W_1 \cap K = W_2 \cap K$ であるから 2 つの位相は一致する.

次に K が閉であることを示そう. K の P における閉包を $\overline{K}$ と表し $f_0 \in \overline{K}$ とする. $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \Phi$, $\varepsilon > 0$ について

$$|f(x) - f_0(x)| < \varepsilon, \quad |f(y) - f_0(y)| < \varepsilon, \quad |f(\alpha x + \beta y) - f_0(\alpha x + \beta y)| < \varepsilon$$

を満たす $f \in P$ の全体は P における f_0 の近傍であるからこの近傍内に少なくとも 1 つ $\Lambda \in K$ が存在する. Λ の線形性より

$$\begin{aligned} |f_0(\alpha x + \beta y)| &= |(f_0 - \Lambda)(\alpha x + \beta y) + \alpha(\Lambda - f_0) + \beta(\Lambda - f_0)| \\ &\leqslant (1 + |\alpha| + |\beta|)\varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つので, f_0 も線形である. また同様な議論により $x \in V$ について $|f_0(x)| \leqslant 1$ が成り立つことも分かる. 従って f_0 は連続であり, $f_0 \in X^*$ であり, 特に $f_0 \in K$ である. 以上より K が compact 集合 P 内の閉集合であることが分かったの compact である. □

さて位相空間 X が可分 (separable) であるとは, 稠密で高々可算な X の部分集合が存在する時を言う.

Theorem 3.3.2 V を可分な位相ベクトル空間 X の 0 の近傍とし, K をその極とすれば, K は弱 *-*compact* であり, 弱 *-位相のもとで距離化可能である.

K は距離化可能であるが, X^* がそうなるとは限らないことに注意しよう.

Proof. $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ を可算かつ稠密な X の部分集合とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ について $f_n : X^* \to \Phi$ を $f_n(\Lambda) = \Lambda x_n$ で定義すれば f_n は弱 *-位相のもとで連続である. また

$$\begin{aligned} f_n(\Lambda) = f_n(\Lambda') \quad \forall x \in \mathbb{N} &\Longleftrightarrow \Lambda x_n = \Lambda' x_n \quad \forall x \in \mathbb{N} \\ &\Longleftrightarrow \Lambda = \Lambda' \end{aligned}$$

が成り立つので $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は X^* の点を分離する. 特に各 f_n を K を制限して $\{f_n|_K\}_{n=1}^\infty$ を弱 * 位相のもとでの compact 集合 K 上の連続線形汎関数の族とみても K の点を分離するので, Propositon 3.2.5 を K, $\{f_n|_K\}_{n=1}^\infty$ に適用すれば K が距離化可能であることが従う. □

Theorem 3.3.3 V を可分な位相ベクトル空間 X の 0 の近傍とし, $\{\Lambda_n\}_{n=1}^\infty$ を X^* の列で

$$|\Lambda_n x| \leqslant 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x \in V$$

が成り立つとする. この時, ある部分列 $\{\Lambda_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ と $\Lambda \in X^*$ で

$$\Lambda x = \lim_{i \to \infty} \Lambda_{n_i} x \tag{3.3.1}$$

を満たすものが存在する.

Proof. Theorem 3.3.2 より V の極 $K = \{\Lambda \in X^* : |\Lambda x| \leqslant 1\ \forall x \in V\}$ は弱 *-位相のもとで compact であり距離化可能であるから, 点列 compact である. 従って弱 *-位相のもとでの収束部分列 $\{\Lambda_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ ととその極限 $\Lambda \in X^*$ が存在する. 弱 *-位相のもとで $\Lambda_{n_i} \to \Lambda$ とは (3.3.1) が成り立つことに他ならない.
□

Theorem 3.3.4 X を局所凸位相ベクトル空間で, $E \subset X$ とすると

$$E \text{ が 弱有界} \quad \Longleftrightarrow \quad E \text{ が本来の位相で有界}$$

が成り立つ.

Proof. "$\Longleftarrow$" については $\tau_w \subset \tau$ より明らかである. 逆を示す為に E が弱有界とし, U を X における 0 の近傍とする. X は局所凸であるから $\overline{V} \subset U$ を満たす平衡的かつ凸な 0 の近傍 V が存在する. V の極を K つまり

$$K = \{\Lambda \in X^* : |\Lambda x| \leqslant 1\ \forall x \in V\}$$

と置く. この時,

$$\overline{V} = \{x \in X : |\Lambda x| \leqslant 1\ \forall \Lambda \in K\}$$

が成り立つ. "$\subset$" については容易であるから "$\supset$" のみを示そう. $x_0 \in X \backslash \overline{V}$ を取ると Theorem 3.1.8 より $\Lambda x_0 > 1$ かつ $\overline{V}$ 上 $|\Lambda| \leqslant 1$ を満たす $\Lambda \in X^*$ が存在する. この Λ は K に属すので $x_0 \notin \{x \in X : |\Lambda x| \leqslant 1\ \forall \Lambda \in K\}$ である. よって $X \backslash \overline{V} \subset X \backslash \{x \in X : |\Lambda x| \leqslant 1\ \forall \Lambda \in K\}$ となり, $\overline{V} \subset \{x \in X : |\Lambda x| \leqslant 1\ \forall \Lambda \in K\}$ が成り立つ.

さて E は弱有界であるから, 各 $\Lambda \in X^*$ について $\gamma(\Lambda) > 0$ で

$$|\Lambda x| \leqslant \gamma(\Lambda) \quad \forall x \in E$$

を満たすものが存在する. K は convex で弱 *-compact. また $X^* \ni \Lambda \mapsto \Lambda x \in \Phi$ は弱 *-連続であるから Theorem 2.1.10 を X^* と Φ, E に適用すれば

$$|\Lambda x| \leqslant \gamma, \quad x \in E \text{ and } \Lambda \in K$$

を満たす定数 $\gamma > 0$ の存在が分かる. これより $x \in E$ について $\gamma^{-1} x \in \overline{V}$ が成り立つので $V, \overline{V}$ の平衡性と合わせれば $t \geqslant \gamma$ について

$$E \subset \gamma \overline{V} \subset tV \subset tU$$

が成り立つ. よって E は有界である. □

Corollary 3.3.5 X をノルム空間とし $E \subset X$ とする.

$$\sup_{x \in E} |\Lambda x| < \infty, \quad \Lambda \in X^* \tag{3.3.2}$$

ならば $\sup_{X \in E} \|x\| < \infty$ である.

Proof. (3.3.2) は E が弱有界であることを意味するので, Theorem 3.3.4 より E は有界になる. X はノルム空間であるから, E が有界であるとは $\sup_{X \in E} \|x\| < \infty$ を意味する. □

3.4 Krein-Milman の定理

ベクトル空間 X の部分集合 E について

$$\mathrm{co}(E) = \bigcap_{E \subset \tilde{E}, \text{convex}} \tilde{E} \tag{3.4.1}$$

と置くと, $\mathrm{co}(E)$ は E を含む最小の凸集合である. $\mathrm{co}(E)$ は E から有限個の元 $x_1, \ldots, x_n \in E$ を取り出して作った凸結合 (convex combination), つまり

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n, \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant 0,\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1)$$

の形の元の全体と一致する. また X が位相ベクトル空間の場合 $\mathrm{co}(E)$ の閉包 $\overline{\mathrm{co}(E)}$ を $\overline{\mathrm{co}}(E)$ と表すことにする.

位相ベクトル空間 X の部分集合 K が compact であるとして $\mathrm{co}(K)$ が compact になるかどうかという問題を考えよう. X が Hilbert 空間であっても $\mathrm{co}(K)$ は compact どころか閉集合とも限らない. また $\overline{\mathrm{co}}(K)$ が compact とならない空間の例もある. Fréchet 空間の場合には $\overline{\mathrm{co}}(K)$ が compact になることが証明できるがこの時, 完備距離空間において集合が copmact である為の必要十分条件が, 閉かつ全有界 (totally bounded) であることを用いる. ここに距離空間 X の部分集合 E が全有界であるとは任意の $\varepsilon > 0$ について有限個の $x_1, \ldots, x_n \in X$ を

$$E \subset B_{x_1}(\varepsilon) \cup \cdots \cup B_{x_n}(\varepsilon)$$

が成り立つように取れることである. 但し $B_{x_0}(\varepsilon) = \{x \in X : d(x_0, x) < \varepsilon\}$ とする.

X が位相ベクトル空間の場合も同様に $E \subset X$ が全有界であるとは任意の 0 の近傍 V について有限個の $x_1, \ldots, x_n \in X$ を

$$E \subset (x_1 + V) \cup \cdots (x_n + V)$$

が成り立つように取れることと定義する. X が距離化可能な位相ベクトル空間の場合, 考える距離を平行移動に関して不変なで誘導する位相が本来の位相と一致するものに限れば全有界の 2 つの定義は一致する.

Theorem 3.4.1 位相ベクトル空間 X について次が成り立つ.

(i) $A_1, \ldots, A_n$ が *compact* かつ凸ならば $\mathrm{co}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ は *compact* である.

(ii) X が局所凸で, $E \subset X$ が全有界ならば $\mathrm{co}(E)$ も全有界である.

(iii) X が *Fréchet* 空間で $K \subset X$ が *compact* ならば $\overline{\mathrm{co}}(K)$ も *compact* である.

Proof. (i) $S = \{s = (a_1, \ldots, s_n) : s_1, \ldots, s_n \geqslant 0,\ s_1 + \cdots + s_n = 1\}$, $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ と置いて $f : S \times A \to X$ を

$$f(s, a) = s_1 a_1 + \cdots + s_n a_n, \quad s = (s_1, \ldots, s_n) \in S \text{ and } a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$$

と定義すると f は連続で $S \times A$ は compact であるから $K = f(S, A)$ も compact である. また

$$K \subset \mathrm{co}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$$

であることも明らかである. $A_1, \ldots, A_n$ の凸性より逆の包含関係も成り立つので実際には等号が成り立つことを示そう. これが示されれば $\mathrm{co}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = K$ は compact になる.

逆の包含関係を示すには $A_1 \cup \cdots \cup A_n \subset K$ であるから K が凸であることを示せば良い. $s = (s_1, \ldots, s_n)$, $t = (t_1, \ldots, t_n) \in S$ $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in A$ とし, $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$ について

$$\begin{aligned}
\alpha f(s, a) + \beta f(t, b) =& \alpha(s_1 a_1 + \cdots s_n a_n) + \beta(t_1 b_1 + \cdots t_n b_n) \\
=& (\alpha s_1 a_1 + \beta t_1 b_1) + \cdots + (\alpha s_n a_n + \beta t_n b_n) \\
=& \sum_{j=1}^{n} (\alpha s_j + \beta t_j) \left(\frac{\alpha s_j}{\alpha s_j + \beta t_j} a_j + \frac{\beta t_j}{\alpha s_j + \beta t_j} b_j \right)
\end{aligned}$$

が成り立つ. 但し $\alpha s_j + \beta t_j = 0$ となる j がもし存在すれば, $\alpha s_j = \beta t_j = 0$ であるから, $0 \cdot (1 \cdot a_j + 0 \cdot b_j)$ で置き換えるものとする. これより $\alpha f(s, a) + \beta f(t, b) \in K$ が従うので K は凸である.

(ii) X における 0 の近傍 U に対して $V + V \subset U$ を満たす 0 の凸近傍を取る. E は全有界であるから $x_1, \ldots, x_n \in X$ を

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{n} (x_k + V)$$

が成り立つように取れる. 従って $x \in E$ ならば, ある k について $x \in x_k + V \subset \mathrm{co}(\{x_1, \ldots, x_n\}) + V$ が成り立つので

$$E \subset \mathrm{co}(\{x_1, \ldots, x_n\}) + V \tag{3.4.2}$$

が成り立つが, $\mathrm{co}(\{x_1,\ldots,x_n\})$ は compact であるから全有界となり, $y_1,\ldots,y_m\in X$ を

$$\mathrm{co}(\{x_1,\ldots,x_n\})\subset\bigcup_{j=1}^m(y_j+V)$$

が成り立つように取れる. よって

$$\begin{aligned}\mathrm{co}(E)\subset&\mathrm{co}(\{x_1,\ldots,x_n\})+V\quad(\because\ (3.4.2)\ \text{の右辺が凸であることに注意})\\ \subset&\bigcup_{j=1}^m(y_j+V)+V\\ =&\bigcup_{j=1}^m(y_j+V+V)\subset\bigcup_{j=1}^m(y_j+U)\end{aligned}$$

となるので, $\mathrm{co}(E)$ は全有界である.

(iii) まず距離空間において全有界集合の閉包は再び全有界になることに注意する. 従って

$$\begin{aligned}&K\ \text{は compact}\\ \Longrightarrow\ &K\ \text{は全有界}\\ \Longrightarrow\ &\mathrm{co}(K)\ \text{は全有界}\quad(\because\ \text{(ii) より})\\ \Longrightarrow\ &\overline{\mathrm{co}}(K)\ \text{は全有界かつ閉}\quad(\because\ \text{距離空間において全有界集合の閉包は再び全有界})\\ \Longrightarrow\ &\overline{\mathrm{co}}(K)\ \text{は全有界かつ閉}\quad(\because\ \text{完備距離空間において全有界集合かつ閉と compact は同値})\\ \Longrightarrow\ &\overline{\mathrm{co}}(K)\ \text{は compact}\end{aligned}$$

□

$X=\mathbb{R}^n$ の場合には compact 集合の凸包は再び compact になる. これを示すために

Proposition 3.4.2 $n,N\in\mathbb{N}$, $N\geqslant n+2$ とする. また $x_1,\ldots,x_N\in\mathbb{R}^n$, $t_1,\ldots,t_N\geqslant 0$, $\sum_{j=1}^N t_j=1$ とする. この時ある $j_0\in\{1,\ldots,N\}$ と $c_1,\ldots,c_{j_0-1}$, $c_{j_0+1},\ldots,c_N\geqslant 0$ $\sum_{j=1,\ldots,N\ j\neq j_0}c_j=1$ で

$$\sum_{j=1}^N t_jx_j=\sum_{j=1,\ldots,N\ j\neq j_0}c_jx_j$$

を満たすものが存在する.

Proof.　線形写像

$$\mathbb{R}^N\ni(a_1,\ldots,a_N)\mapsto\left(\sum_{j=1}^N a_jx_j,\sum_{j=1}^N a_j\right)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$$

は $Ngeqn+2$ であるから, その kernel の次元は 1 以上である. 従って

$$\sum_{j=1}^N a_jx_j=0,\quad\sum_{j=1}^N a_j=0$$

を満たす $a_1,\ldots,a_N$ が存在する.

さてもし $t_{j_0}=0$ となる j_0 が存在すれば, $c_j=t_j$, $j=1,\ldots,N$ と置けば Proposition は成立する. よって各 $j=1,\ldots,N$ について $0<t_j<1$ と仮定して良い. このとき

$$\min_{j=1,\ldots,N}\frac{t_j}{|a_j|}=\frac{t_{j_0}}{|a_{j_0}|}$$

を満たす j_0 を取る．但し $a_j = 0$ となる j については 左辺の min を取る範囲から除外するものとする．$\lambda = -\frac{t_{j_0}}{a_{j_0}}$ と置くと

$$\forall j \in \{1, \ldots, N\} : \frac{t_j}{|a_j|} \geqslant \frac{t_{j_0}}{|a_{j_0}|} = |\lambda|$$

より

$$\begin{aligned}\forall j \in \{1, \ldots, N\} : |\lambda a_j| \leqslant t_j &\Longleftrightarrow \forall j \in \{1, \ldots, N\} : -t_j \leqslant \lambda a_j \leqslant t_j \\ &\Longrightarrow \forall j \in \{1, \ldots, N\} : 0 \leqslant \lambda a_j + t_j\end{aligned}$$

が成り立つ．また $j = j_0$ の場合は $\lambda = t_{j_0}/a_{j_0}$ より $\lambda a_{j_0} + t_{j_0} = 0$ が成り立つ．従って $c_j = \lambda a_j + t_j$, $j = 1, \ldots, N$ と置けば

$$\sum_{j=1}^{N} c_j x_j = \lambda \sum_{j=1}^{N} a_j x_j + \sum_{j=1}^{N} t_j x_j = 0 + x = x$$

であり，

$$\sum_{j=1}^{N} c_j = \lambda \sum_{j=1}^{N} a_j + \sum_{j=1}^{N} t_j = 0 + 1 = 1$$

が成り立つ． □

Theorem 3.4.3 $K \subset \mathbb{R}^n$ が *compact* ならば $\mathrm{co}(K)$ も *compact* である．

Proof. S を $t = (t_1, \ldots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ で $t_1, \ldots, t_{n+1} \geqslant 0$ かつ $\sum_{j=1}^{n+1} t_j = 1$ を満たすものの全体と置く．この時 Proposition 3.4.2 より

$$x \in \mathrm{co}(K) \Longleftrightarrow \exists t = (t_1, \ldots, t_{n+1}) \in S \text{ and } x_1, \ldots, x_{n+1} \in K : x = \sum_{j=1}^{n+1} t_j x_j$$

が成り立つ．従って $\mathrm{co}(K)$ は連続写像

$$S \times (\mathbb{R}^n)^{n+1} \ni (t, x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto \sum_{j=1}^{n+1} t_j x_j \in \mathbb{R}^n$$

による compact 集合 $S \times K^{n+1}$ の像であるから compact である． □

Theorem 3.4.4 X を位相ベクトル空間で，X^* は X の点を分離するとする．また A, B は X の *cmpact* な凸部分集合で空でないとし，$A \cap B = \varnothing$ とする．このとき $\Lambda \in X^*$ で

$$\sup_{x \in A} \mathrm{Re}\, \Lambda x < \inf_{x \in B} \mathrm{Re}\, \Lambda x$$

が成り立つものが存在する．

Proof. τ を X 本来の位相とし，τ_w を X の弱位相とする．このとき $\tau_w \subset \tau$ より A, B は τ-comapct でもある．また X^* は X の点を分離するので (X, τ_w) は Hausdorff 空間である．従って A, B は τ-閉である．さらに (X, τ_w) は局所凸位相ベクトル空間であるから Theorem 3.1.4 の (ii) より $\Lambda \in (X_w)^*$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ で

$$\sup_{x \in A} \mathrm{Re}\, \Lambda x \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 \leqslant \inf_{x \in B} \mathrm{Re}\, \Lambda x$$

を満たすものが存在する．Theorem 3.2.7 より $(X_w)^* = X^*$ であるから $\Lambda \in X^*$ であるから定理が証明されたことになる． □

3.5 Extreme points

K をベクトル空間 X の部分集合とする．このとき空でない $S \subset K$ が K の extreme set であるとは任意の $p \in S$ について $p = (1-t)x + ty$ を満たす $x,\ y \in K \backslash S$ と $t \in (0,1)$ が存在しないことである．これは任意の $p \in S$ について

$$p = (1-t)x + ty, \quad 0 < t < 1,\ x,\ y \in K \Longrightarrow x, y \in S$$

が成り立つことと同値である．

$p \in K$ が K の extreme point であるとは $\{p\}$ が K の extreme set であることと定義する．これは

$$p = (1-t)x + ty, \quad 0 < t < 1,\ x,\ y \in K \Longrightarrow x = y = p$$

が成り立つことと同値である．K の extreme points の全体を $E(K)$ で表す．

Theorem 3.5.1 (Krein-Milman の定理) X を位相ベクトル空間で X^* は X の点を分離するとする．このとき空でない *compact* 凸集合 $K \subset X$ について

$$K = \overline{\mathrm{co}}(E(K))$$

が成り立つ．

Proof. $\mathcal{P}$ で空でない compact かつ凸な extreme set $S \subset K$ の全体とする．$K \in \mathcal{P}$ であるから $\mathcal{P}$ は空でない．$\mathcal{P}$ は次の性質を持つことは容易に分かる．

(a) 空でない部分族 $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ について
$$S_0 = \bigcap_{S \in \mathcal{Q}} S$$
と置くとき $S_0 \neq \varnothing$ ならば $S_0 \in \mathcal{P}$ つまり, S_0 も compact かつ凸な extreme set である．

(b) $S \in \mathcal{P}$, $\Lambda \in X^*$ のとき
$$S_\lambda := \{x \in S : \operatorname{Re}\Lambda x = \max_{y \in S} \operatorname{Re}\Lambda y\}$$
と置くと, $S_\lambda \in \mathcal{P}$ である．

$S \in \mathcal{P}$ について

$$\mathcal{P}' = \{T \in \mathcal{P} : T \subset S\}$$

ち置くと, $S \in \mathcal{P}'$ ゆえ $\mathcal{P}' \neq \varnothing$ であり, $\mathcal{P}'$ は包含関係について半順序集合である．従って Hausdorrff の極大性原理より極大な全順序部分族 $\Omega \subset \mathcal{P}'$ が存在する．Ω は包含関係について全順序集合であるから, 任意有限個 $T_1, T_2, \ldots, T_n \in \Omega$ を取り出したとき最小なもの $T_{j_0} \subset T_j$, $j = 1, \ldots, n$ が取れ $T_{j_0} \in \Omega \subset \mathcal{P}$ であるから $T_{j_0} \neq \varnothing$ である．従って Ω は有限交叉性を持つ．また Ω の最大元 S は compact であるから

$$M = \bigcap_{T \in \Omega} T$$

と置くと, $M \neq \varnothing$ であり, (a) より $M \in \mathcal{P}$ が成り立つ．また Ω の極大性より M の真部分集合で $\mathcal{P}$ に属すものは存在しない．従って (b) より任意の $\Lambda \in X^*$ について $M_\Lambda = M$ が成り立つ．よって 任意の $\Lambda \in X^*$ について Λ は M 上で定数であるが, これと X^* が X の点を分離することを合わせれば M が 1 点よりなることが分かる．以上より各 $S \in \mathcal{P}$ は少なくとも 1 つ extreme point を元に持つ．

ここで K は凸であるから $E(K) \subset K$ より $\mathrm{co}(E(K)) \subset K$ が成り立ち, さらに K は compact であるから閉なので $\overline{\mathrm{co}}(E(K)) \subset K$ が成り立つ. 特に $\overline{\mathrm{co}}(E(K))$ は compact である. $x_0 \in K \backslash \overline{\mathrm{co}}(E(K))$ が存在すると仮定して矛盾を導こう. Theorem 3.4.4 より $\Lambda \in X^*$ を

$$\mathrm{Re}\,\Lambda x < \mathrm{Re}\,\Lambda x_0, \quad x \in \overline{\mathrm{co}}(E(K)) \tag{3.5.1}$$

が成り立つように取れる.

$$K_\Lambda = \{x \in K : \mathrm{Re}\,\Lambda x = \max_{y \in K} \mathrm{Re}\,\Lambda y\}$$

と置くと, (b) より K_Λ は extreme set であり, 凸である. また Λ の連続性より閉であり, compact 集合 K に含まれるので compact である. 従って $K_\Lambda \in \mathcal{P}$ が成り立つ. このとき

$$\mathrm{Re}\,\Lambda x < \mathrm{Re}\,\Lambda x_0 \leqslant \max_{y \in K} \mathrm{Re}\,\Lambda y, \quad x \in \overline{\mathrm{co}}(E(K))$$

より $\overline{\mathrm{co}}(E(K)) \cap K_\Lambda = \varnothing$ が成り立つ. これは extreme set $E(K)$ は少なくとも 1 つ extreme point を元に持つという事実に反する. □

上の証明の中で, K の凸性を使用したのは, $\mathrm{co}(E(K)) \subset K$ を示した箇所のみで, これと K の compact 性を合わせて $\overline{\mathrm{co}}(E(K)) \subset K$ が成り立ち, さらに $\overline{\mathrm{co}}(E(K))$ が compact であることを導いた. そして Theorem 3.4.4 を用いて (3.5.1) が成り立つような連続線形汎関数の存在を示した. X が局所凸の場合は Theorem 3.4.4 の代わりに Theorem 3.1.4 の (ii) を用いることができるので $\overline{\mathrm{co}}(E(K))$ の compact 性を示す必要はなく, 閉集合でありさえすれば良く, これは自動的に満たされる. また局所凸位相ベクトル空間 X では Corollary 3.1.5 より X^* が X の点を分離する. 従って次の定理の 1 つめの式が成り立つ.

Theorem 3.5.2 *X を局所凸位相ベクトル空間でこのとき空でない compact 集合 $K \subset X$ について*

$$K \subset \overline{\mathrm{co}}(E(K)), \quad \overline{\mathrm{co}}(K) = \overline{\mathrm{co}}(E(K))$$

が成り立つ.

Proof. $\overline{\mathrm{co}}(K) = \overline{\mathrm{co}}(E(K))$ が成り立つことのみ示せば良い. これは $K \subset \overline{\mathrm{co}}(E(K))$ が成り立つことと, 右辺の凸性より $\mathrm{co}(K) \subset \overline{\mathrm{co}}(E(K))$ が成り立つ. さらに右辺が閉であることより $\overline{\mathrm{co}}(K) \subset \overline{\mathrm{co}}(E(K))$ が成り立つ. 逆の包含関係も $E(K) \subset K$ より成り立つ. □

さて X に局所凸性を仮定しないときは $\overline{\mathrm{co}}(K)$ が K に属さない extreme point を持つという病理的な現象が起こることもある. X の局所凸性を仮定すればこのようなことが起きない.

Theorem 3.5.3 (Milman の定理) *X を局所凸位相ベクトル空間とし $K \subset X$ を空でない compact 集合とし, $\overline{\mathrm{co}}(K)$ も compact であるとする. このとき $E(\overline{\mathrm{co}}(K)) \subset K$, つまり $\overline{\mathrm{co}}(K)$ の extreme point は K に属す. 特に X が Fréchet 空間の場合任意の空でない compact 集合 K について $E(\overline{\mathrm{co}}(K)) \subset K$ が成り立つ.*

Proof. $p \in K \backslash \overline{\mathrm{co}}(K)$ が存在すると仮定して矛盾を導こう. 凸かつ平衡的な 0 の近傍 V を

$$(p + \overline{V}) \cap K = \varnothing \tag{3.5.2}$$

が成り立つように取る. K は compact であるから

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V)$$

となる $x_1, \ldots, x_n$ が存在する.

$$A_i = \overline{\mathrm{co}}(K \cap (x_i + V))(\subset \overline{\mathrm{co}}(K))$$

と置くと, $\overline{\mathrm{co}}(K)$ の compact 性より A_i も compact であり

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n (K \cap (x_i + V)) \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$$

より

$$\overline{\mathrm{co}}(K) \subset \overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \mathrm{co}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)$$

が成り立つ. ここで上式の最後の等号は Theorem 3.4.1 の (i) より $\mathrm{co}\,(\bigcup_{i=1}^n A_i)$ が compact であることより従う. また $A_i = \overline{\mathrm{co}}(K \cap (x_i + V)) \subset \overline{\mathrm{co}}(K)$ より逆の包含関係も成り立つので

$$\overline{\mathrm{co}}(K) = \mathrm{co}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)$$

である. 従って $p \in \overline{\mathrm{co}}(K) \backslash K$ を次のように表すことができる.

$$p = t_1 y_i + \cdots + t_N y_N, \quad t_1, \ldots, t_N > 0, \ \sum_{j=1}^N t_j = 1$$

で各 j について $y_j \in A_i$ が成り立つような i が存在する. このとき

$$p = t_1 y_1 + (1 - t_1)\left\{\frac{t_2}{t_2 + \cdots + t_N} y_2 + \cdots + \frac{t_N}{t_2 + \cdots + t_N} y_N\right\} \in t_1 \overline{\mathrm{co}}(K) + (1 - t_1)\overline{\mathrm{co}}(K)$$

と変形できるが, p は $\overline{\mathrm{co}}(K)$ の extreme point であるから $y_1 = p$ が成り立つ. よって, ある i について $p \in A_i \subset x_i + \overline{V}$ が成り立つ. V の平衡性より $\overline{V}$ も平衡的なので $-\overline{V} = \overline{V}$ が成り立つから $x_i \in p - \overline{V} = p + \overline{V}$ となるが, これは (3.5.2) に反する.

X が Fréchet 空間の場合 Theorem 3.4.1 の (iii) より K が compact 集合ならば $\overline{\mathrm{co}}(K)$ も compact であるから前半で示したことより $E(\overline{\mathrm{co}}(K)) \subset K$ が成り立つ. □

3.6 ベクトル値関数の積分と解析性

この節では複素平面内の領域を定義域とし位相ベクトル空間に値を持つ関数について解析性や複素線積分の定義を与え Cauchy の積分定理がこの場合に成り立つことを示す. この為には測度空間 Q で定義され位相ベクトル空間 X に値を持つ関数 $f : Q \to X$ の積分を定義し, その性質を調べておく必要がある. X に値を持つ解析的な関数の議論で必要になるのは

$$\Lambda\left(\int_Q f\,d\mu\right) = \int_Q (\Lambda f)\,d\mu, \quad \forall \Lambda \in X^*$$

と言う性質であるから, この性質に即した積分の定義から始めよう.

X を位相ベクトル空間で X^* は X の点を分離すると仮定する. また Q は compact 位相空間で $\mathcal{B}(Q)$ で Q の Borel σ-加法族を表し, μ を測度空間 $(Q, \mathcal{B}(Q))$ の確率測度とする. また写像 $f : Q \to X$ が与えられていて連続とする. このとき任意の $\Lambda \in X^*$ について

$$\Lambda x_0 = \int_Q (\Lambda f)\,d\mu$$

が成り立つ $x_0 \in X$ が存在すれば, y を f の Q における μ に関する積分と言い,

$$x_0 = \int_Q f\ d\mu$$

と表す. X^* は X の点を分離するので $x_0 = \int_Q f\ d\mu$ は存在すれば一意に定まるので, 問題は y の存在である. X, Q に関する上の条件に $\overline{\mathrm{co}}(f(Q))$ が compact という要請を加えれば y の存在することを後ほど Theorem 3.6.1 で示そう. その前に確率測度に関する積分の存在が示されれば signed measure ν についても $\nu = \nu_+ - \nu_-$ と分解し全変動が有限, つまり $|\nu|(Q) = \nu_+(Q) + \nu_-(Q) < \infty$ ならば $\nu_+(Q)^{-1}\nu_+$, $\nu_-(Q)^{-1}\nu_-$ は確率測度であるから

$$\int_Q f\,d\nu = \nu_+(Q)\int_Q f\,d\left(\frac{\nu_+}{\nu_+(Q)}\right) + \nu_-(Q)\int_Q f\,d\left(\frac{\nu_-}{\nu_-(Q)}\right)$$

と置くことにより ν に関する f の積分も定義することができる. ここで $\nu_+(Q) = 0$ または $\nu_-(Q) = 0$ の場合は上式の右辺においてそれぞれ初項または第 2 項を 0 と置くことにする.

Theorem 3.6.1 *X は位相ベクトル空間で X^* は X の点を分離するとする. また Q は compact 位相空間で μ を測度空間 $(Q, \mathcal{B}(Q))$ の確率測度とし, 写像 $f : Q \to X$ は連続とする. このとき $\overline{\mathrm{co}}(f(Q))$ が compact ならば積分 $x_0 = \int_Q f\ d\mu$ が存在し $x_0 \in \overline{\mathrm{co}}(f(Q))$ が成り立つ.*

Proof. 有限集合 $L = \{L_1, \dots, L_n\} \subset X^*$ について

$$E_L = \{x \in \overline{\mathrm{co}}(f(Q)) : \Lambda x = \int_Q (\Lambda f)\,d\mu \text{ for } \Lambda \in L\}$$

と置く. このとき任意の有限集合 $L \subset X^*$ について $E_L \neq \varnothing$ が示されれば, 集合族

$$\{E_L : L \text{ は有限集合で } L \subset X^*\}$$

は有限交叉性を持ち, 各 E_L は compact 集合 $\overline{\mathrm{co}}(f(Q))$ に含まれるので

$$\bigcap_{L \subset X^*,\ \text{finite}} E_L \neq \varnothing$$

が従い $x_0 \in \bigcap E_L$ と置けば積分の定義を満たす.

それでは $E_L \neq \varnothing$ を示そう. $L = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}$ について $F_L : X \to \mathbb{R}^n$ を

$$F_L(x) = (\Lambda_1 x, \dots, \Lambda_n x)$$

と置く.

$$m_i = \int_Q (\Lambda f)\,d\mu, \quad i = 1, \dots, n$$

とし $m = (m_1, \dots, m_n)$ と置く. さて Q が compact で f は連続であるから $f(Q)$ は compact であり, $F_L(f(Q)) \subset \mathbb{R}^n$ も compact である. 従って Theorem 3.4.1 より $\mathrm{co}(F_L(f(Q)))$ も compact である. $t = (t_1, \dots, t_n) \notin F_L(f(Q))$ ならば Theorem 3.1.4 の (ii) より t と $\mathrm{co}(F_L(f(Q)))$ を分離する $\mathbb{R}^n$ 上の連続線形汎関数が存在する. つまり

$$\sum_{i=1}^n c_i u_i < \sum_{i=1}^n c_i t_i, \quad u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathrm{co}(F_L(f(Q)))$$

が成り立つような $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ が存在する. 従って

$$\sum_{i=1}^n c_i \Lambda_i f(x) < \sum_{i=1}^n c_i t_i, \quad x \in Q$$

が成り立つ. 両辺を確率測度 μ で積分すれば

$$\sum_{i=1}^{n} c_i m_i < \sum_{i=1}^{n} c_i t_i$$

が成り立つので $m \neq t$ が従う. これより $m \notin \mathbb{R}^n \backslash \mathrm{co}(F_L(f(Q)))$ となり, $m \in \mathrm{co}(F_L(f(Q)))$ が成り立つ. $m = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j F_L(f(x_j))$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \geqslant 0$ かつ $\sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1$ と表せ, これより

$$m = \left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \Lambda_1 f(x_j), \ldots, \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \Lambda_n f(x_j) \right) = \left(\Lambda_1 \left\{ \sum_{j=1}^{N} \lambda_j f(x_j) \right\}, \ldots, \Lambda_n \left\{ \sum_{j=1}^{N} \lambda_j f(x_j) \right\} \right)$$

と表せることになる. $x = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j f(x_j)$ と置けば

$$\int_Q (\Lambda_i f)\, d\mu = m_i = \Lambda_i \left\{ \sum_{j=1}^{N} \lambda_j f(x_j) \right\} = \Lambda_i x, \quad i = 1, \ldots, n$$

となるので $x \in E_L$ である.

X が複素位相ベクトル空間の場合は, 実位相ベクトル空間とみなし, 連続線形汎関数の実部に上で示した事実を適用すれば任意の $\Lambda \in X^*$ について

$$\mathrm{Re}\, \Lambda x_0 = \int_Q (\mathrm{Re}\, \Lambda f)\, d\mu$$

を満たす x_0 が存在する. $\Lambda \in X^*$ について $\tilde{\Lambda} x = \Lambda(ix)$ と置けば, 複素線形な連続汎関数であるから

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, \tilde{\Lambda} x_0 &= \int_Q (\mathrm{Re}\, \tilde{\Lambda} f)\, d\mu \\ \Longleftrightarrow \mathrm{Re}\,(i\Lambda x_0) &= \int_Q (\mathrm{Re}\,(i\Lambda f)\, d\mu \\ \Longleftrightarrow -\mathrm{Im}\,(\Lambda x_0) &= -\int_Q (\mathrm{Im}\, \Lambda f)\, d\mu \end{aligned}$$

が成り立つので, 結局

$$\Lambda x_0 = \int_Q (\Lambda f)\, d\mu$$

が成り立つ. □

さて位相空間 Q 上の Borel 測度が正則であるとは, 任意の Borel 集合 E について

$$\mu(E) = \sup_{K \subset E, \mathrm{compact}} \mu(K) = \inf_{E \subset G, \mathrm{open}} \mu(G)$$

が成り立つことである.

Theorem 3.6.2 *X は位相ベクトル空間で X^* は X の点を分離するとする. また Q を X の compact な部分集合とし $\overline{co}(Q)$ も compact であるとする. このとき $x_0 \in \overline{co}(Q)$ である為の必要十分条件は Q 上の正則な Borel 確率測度 μ で*

$$x_0 = \int_Q x\, d\mu(x)$$

を満たすものが存在することである.

証明の前に X が Fréchet 空間の場合は Q が compact ならば $\overline{\mathrm{co}}(Q)$ も compact であり, X^* が X の点を分離するので Q が compact であることのみ仮定すれば十分である.

Proof. まず X が実位相ベクトル空間の場合に証明しよう. $C(Q)$ を Q 上の実数値連続関数の全体がなす線形空間に sup ノルムを導入してできる Banach 空間としよう. Riesz の表現定理により $C(Q)^*$ は全測度有限な 2 つの正則 Borel 測度の差で表される signed measure の全体と同一視できる. このとき写像 $\phi : C(Q)^* \to X$ を

$$\phi(\mu) = \int_Q x\, d\mu(x)$$

と置き, P を reguar Borel 確率測度の全体と置けば定理の主張は $\phi(P) = \overline{\mathrm{co}}(Q)$ と表すことができる. $x \in Q$ について δ_x で x における点測度と置けば $\delta_x \in P$ であり $\phi(\delta_x) = x$ より $Q \subset \phi(P)$ が成り立つ. また P は凸であり $t \in [0,1]$, $\mu_1, \mu_2 \in P$ について凸結合 $(1-t)\mu_1 + t\mu_2 \in P$ であり $\phi((1-t)\mu_1 + t\mu_2) = (1-t)\phi(\mu_1) + t\phi(\mu_2)$ が成り立つので $\phi(P)$ は凸である. よって $\mathrm{co}(Q) \subset \phi(P)$ が成り立つ. さらに Theorem 3.6.1 より $\phi(P) \subset \overline{\mathrm{co}}(Q)$ が成り立つ. 以上より定理を示すには $\phi(P)$ が閉であることを示せば十分である. これは次の事実より導かれる.

(i) P は $C(Q)^*$ 内で弱 *-compact.

(ii) 写像 $\phi : C(Q)^* \to X$ は $C(Q)^*$ の弱 * 位相と X の弱位相に関して連続.

(i), (ii) を仮定して証明を続けよう. このとき $\phi(P)$ は弱-compact になる. X は弱位相のもとで Hausdorff 空間であるから $\phi(P)$ は弱位相のもとで閉であり, 従って本来の位相のもとでも閉である.

(i) を示すには

$$P \subset \left\{ \mu : \left| \int_Q h\, d\mu \leqslant 1 \text{ for } \|h\| < 1 \right| \right\}$$

が成り立つことに注意する. 上式の右辺の集合が弱 *-compact であることは Banach-Alaoglu の定理 (Theorem 3.3.1) より従う. 従って P が弱 *-閉であることを示せば良い.

$h \in C(Q)$, $h \geqslant 0$ について

$$E_h = \left\{ \mu : \int_Q h\, d\mu \geqslant 0 \right\}.$$

と置く. 写像 $\mu \mapsto \in h\, d\mu$ は弱 *-位相に関して連続であるから E_h は 弱 *-閉である. また

$$E = \left\{ \mu : \int_Q d\mu = 1 \right\}$$

も弱 *-閉であり,

$$P = E \cap \bigcap_{h \in C(Q),\ h \geqslant 0} E_h$$

と表せるので P も弱 *-閉である.

(ii) を示すには ϕ の線形性より ϕ が原点で連続であることを示せば良い. U を X の弱位相に関する 0 の近傍とし

$$W = \{ y \in X : |\Lambda_i x| < r_i,\ i = 1, \ldots, n \} \subset U$$

$\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n \in X^*$, $r_1, \ldots, r_n > 0$ を取る. このとき Λ_i の Q への制限は連続であるから

$$V = \left\{ \mu \in C(Q)^* : \left| \int_Q \Lambda_i(x)\, d\mu(x) \right| < r_i,\ i = 1, \ldots, n \right\}$$

は $C(Q)^*$ における弱 * 位相に関する 0 の近傍である．しかるに

$$\Lambda_i(\phi(\mu)) = \Lambda_i\left(\int_Q x\,d\mu\right) = \int_Q \Lambda_i(x)\,d\mu$$

であるから

$$V = \{\mu \in C(Q)^* : |\Lambda_i(\phi(\mu))| < r_i,\ i = 1, \ldots, n\} = \{\mu \in C(Q)^* : \phi(\mu) \in W\}$$

が成り立つので $\phi(V) \subset W$ である． □

次に積分に関する不等式を与えておこう．

Theorem 3.6.3 *Q, X* をそれぞれ *compact* 位相空間と *Banach* 空間とし $f : Q \to X$ を連続写像とし，μ を Q 上の有限 *Borel measure* とする．このとき

$$\left\|\int_Q f\,d\mu\right\| \leqslant \int_Q \|f\|\,d\mu$$

が成り立つ．

Proof. $x_0 = \in_Q f\,d\mu$ と置く．Coroallary 3.1.3 より $\Lambda x_0 = \|x_0\|$ かつ任意の $x \in X$ について $|\Lambda x| \leqslant \|x\|$ を満たす $\Lambda \in X^*$ を取れば

$$|\Lambda f(s)| \leqslant \|f(s)\|$$

が任意の $s \in Q$ について成り立つので

$$\|x_0 = \in_Q f\,d\mu\| = \|x_0\| = \Lambda x_0 = \int_Q (\Lambda f)\,d\mu \leqslant \int_q \|f\|\,d\mu$$

となる． □

超関数の議論を行うときに, (複素) 解析関数の概念を, 複素数値からベクトル値に一般化しておくと有益である．

Ω を $\mathbb{C}$ 内の領域とし X を複素位相ベクトル空間とし写像 $f : \Omega \to X$ が与えられたとする．このとき

(a) f が弱解析的 (weakly analytic) であるとは任意の $\Lambda \in X^*$ について $\Lambda f : \Omega \to \mathbb{C}$ が解析的, つまり

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\Lambda f(z) - \Lambda f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

が各点 $z_0 \in \Omega$ について存在する時を言う．

(b) f が強解析的 (storongly analytic) であるとは

$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{z - z_0}\{f(z) - f(z_0)\} = f'(z_0)$$

が各点 $z_0 \in \Omega$ について X の本来の位相における収束の意味で存在する時を言う．

強解析的ならば弱解析であることは明らかであろう．

さて以下で取り扱う $\mathbb{C}$ 内の曲線は全て有界閉区間で定義され区分的に連続的微分可能とする．つまり $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ と表され Γ は $I = [a, b]$ で連続で, I から有限個の点を除いたところで微分可能で導関数

は連続であり, 除外点の左右での導関数の極限が存在するとする. このとき X^* が X の点を分離するならば, Γ に沿う (複素線) 積分を $[a,b]$ 上の測度 $\Gamma'(t)dt$ に関する積分として

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{[a,b]} f(\Gamma(t))\Gamma'(t)\,dt$$

を定義できる. 但し f は Γ の像を含んだ集合上で連続な X に値を持つ写像とし, 右辺の積分はこの節のはじめの方で定義した意味に取る.

$\mathbb{C}$ 内の閉曲線 Γ と Γ の像に属さない z について z における Γ の回転数 (winding number) を

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

と定義する. $\operatorname{Ind}_\Gamma(z)$ は $\mathbb{C}$ から Γ の像を除いた開集合上で連続であり, 整数値である. 従って $\mathbb{C}$ から Γ の像を除いた開集合の各成分上で一定値となる.

Theorem 3.6.4 Ω を $\mathbb{C}$ 内の領域とし X を複素 *Fréchet* 空間とする. また写像 $f:\Omega\to X$ が与えられているとする. このとき f が Ω で弱解析的であれば次が成り立つ.

(i) f は強連続, つまり本来の位相でも連続.

(ii) *Cauchy* の積分定理と *Cauchy* の積分公式が成り立つ. つまり Γ が Ω 内の閉曲線で $\operatorname{Ind}_\Gamma(w) = 0$ が $w \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ について成り立てば

$$\int_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta = 0$$
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad z\in\Omega \ \textit{with}\ \operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 1$$

が成り立つ.

(iii) f は Ω で強解析的.

Proof. (i) f が $z_0\in\Omega$ で連続であることを示そう.

$$\overline{\mathbb{D}}(z_0,r) = \{z\in\mathbb{C} : |z-z_0| \leqslant r\}, \quad r>0$$

と置き, 境界 $\partial\mathbb{D}(z_0,r)$ に半時計回りの向きを与える曲線を Γ と置く. $\overline{\mathbb{D}}(z_0,2r)\subset\Omega$ となる $r>0$ を取る. $\Lambda\in X^*$ について Λf は通常の意味で Ω で解析的であるから

$$\frac{(\Lambda f)(z) - (\Lambda f)(z_0)}{z-z_0}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\Lambda f)(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)}\,d\zeta \quad 0<|z-z_0|<2r$$

が成り立つ. $M(\Lambda) = \max_{z\in\overline{\mathbb{D}}(z_0,2r)} |(\Lambda(f)(z))|$ と置くと上の等式より $|z-z_0|\leqslant r$ ならば

$$\left|\frac{(\Lambda f)(z) - (\Lambda f)(z_0)}{z-z_0}\right| \leqslant \frac{M(\Lambda)}{r}$$

が成り立つ. よって集合

$$E = \left\{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} : 0 < |\ z-z_0| \leqslant r\right\}(\subset X)$$

は弱有界である. Theorem 3.3.4 より局所凸空間では弱有界ならば有界であるから, 上の集合は有界である. 任意の 0 の近傍 U について平衡的な近傍 V を $V\subset U$ となるように取る. このとき E の有界性よ

り $E \subset tV$ を満たす $t > 0$ が存在する．これは $|z - z_0| \leqslant r$ ならば $f(z) - f(z_0) \in ztV$ を意味するから，$|z| \leqslant \min\{r, t^{-1}\}$ ならば

$$f(z) - f(z_0) \in ztV \subset V \subset U$$

が成り立つ．よって f は z_0 で連続である．

(i) が成り立つことが分かれば (ii), (iii) については複素解析学の知識を仮定すれば殆ど自動的に成り立つことを導くことができる．実際 f の連続性より Theorem 3.6.1 が適用できて (ii) における積分の存在が従う．そしてこれらの公式は f を Λf に置き換えると成り立つ．よって

$$\Lambda\left(\int_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta\right) = \int_\Gamma (\Lambda f)(\zeta)\,d\zeta = 0 \quad \forall\Lambda \in X^*$$

であるから $\int_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta = 0$ が成り立つ．同様に $z \in \Omega$ with $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 1$ ならば

$$(\Lambda f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\Lambda f)(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \Lambda\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\right)$$

であるから

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

が成り立つ．

(iii) (i) の証明と同様に $\overline{\mathbb{D}}(z_0, 2r) \subset \Omega$ とし，Γ を $\partial\mathbb{D}(z_0, 2r)$ に半時計回りの向きを入れた閉曲線とする．

$$w_0 = \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta$$

と置く．このとき Cauchy の公式より

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}\,d\zeta = \frac{z - z_0}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^2}\,d\zeta$$

が成り立つので

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = w_0 + (z - z_0)g(z),$$

但し

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^2}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(z_0 + 2re^{i\theta})}{2re^{i\theta}(z_0 + 2re^{i\theta} - z)}\,d\theta$$

である．ここで V を X における凸かつ平衡的な 0 の近傍とする．$K = \{f(z) : |z - z_0| = 2r\}$ と置くと，K は $\mathbb{C}$ の compact 集合 $\partial\mathbb{D}(z_0, 2r)$ の連続写像 f による像であるから X の compact 集合であるから $K \subset tV$ を満たす $t > 0$ が存在する．$s = t/(2r^2)$ と置くと $|z - z_0| \leqslant r$ について

$$\begin{aligned}
\frac{f(z_0 + 2re^{i\theta})}{2re^{i\theta}(z_0 + 2re^{i\theta} - z)} &\in \frac{1}{2re^{i\theta}(z_0 + 2re^{i\theta} - z)}K \\
&\subset \frac{1}{2re^{i\theta}(z_0 + 2re^{i\theta} - z)}tV \\
&\subset \frac{1}{2r \cdot r}tV = sV
\end{aligned}$$

が成り立つ．$g(z)$ は最左辺の確率測度 $\frac{d\theta}{2\pi}$ による積分であるから $g(z) \in s\overline{V}$ が成り立つ．これより

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = w_0$$

が従う．　□

3.7 Frechét 空間と帰納極限の位相

X をベクトル空間とし, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の部分空間の列で, 次の性質を持つとする.

(i) $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ かつ $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ を満たす.

(ii) 各 $n \in \mathbb{N}$ について X_n は Fréchet 空間でその位相を τ_n と置くと $\tau_n = \tau_{n+1} \cap X_n$ つまり X_n の位相は X_{n+1} から誘導される相対位相と一致する.

このとき X に $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ の帰納極限と呼ばれる位相 τ で (X, τ) が局所凸で完備な位相ベクトル空間となる位相を導入できる. この節の目標は帰納極限を定義し, この事実を証明することである.

Theorem 3.7.1 ベクトル空間 X と, その部分空間である *Fréchet* 空間の列 $\{(X_n, \tau_n)\}_{n=1}^{\infty}$ で上の性質 (i), (ii) を持つものが与えられたとする. このとき $\mathcal{B}$ を X の部分集合 V で凸, 平衡的かつ吸収的であり

$$\forall n \in \mathbb{N} : V \cap X_n \text{ は } X_n \text{ における } 0 \text{ の近傍}$$

を満たすものの全体とおけば, $\mathcal{B}$ を局所近傍基とする位相 τ が一意的に存在し, (X, τ) は局所凸かつ完備な位相ベクトル空間になる. また各 $n \in \mathbb{N}$ について X_n は X の閉部分空間となり, X から誘導される位相と X_n の本来の位相は一致する. つまり $\tau \cap X_n := \{U \cap X_n : U \in \tau\} = \tau_n$ が成り立つ.

Proof. $X \in \mathcal{B}$ であるから $\mathcal{B} \neq \emptyset$ である. また $\mathcal{B}$ が次の条件を満たすことは容易に分かる.

($\mathcal{L}B1$) $\forall U \in \mathcal{B} : 0 \in U$

($\mathcal{L}B2$) $\forall U, V \in \mathcal{B} : \exists W \in \mathcal{B} : W \subset U \cap V$

($\mathcal{L}B3'$) $\forall U \in \mathcal{B},\ x \in U : \exists V \in \mathcal{B} : x + V \subset U$

($\mathcal{L}B4$) 各 $U \in \mathcal{B}$ は吸収的である

($\mathcal{L}B5$) 各 $U \in \mathcal{B}$ は平衡的である

($\mathcal{L}B6$) $\forall U \in \mathcal{B} : \exists V \in \mathcal{B} : V + V \subset U$

($\mathcal{L}B7$) $\forall x \in X \backslash \{0\} : \exists U \in \mathcal{B} : x \notin U$

Theorem 1.3.14

□

第4章　超関数

4.1　テスト関数の空間とその位相

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ の空でない開集合 Ω 上の様々な関数空間を定義しておこう. 始めに Ω の compact 部分集合の列 $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ で

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega, \quad K_n \subset \operatorname{Int} K_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

を満たすものを取っておく.

空間 $C(\Omega)$　§1.9 で定義したように $C(\Omega)$ を Ω 上の複素数値連続関数の全体がなす線形空間とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ について

$$p_n(f) = \max\{|f(x)| : x \in K_n\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

と置けば p_n が $C(\Omega)$ 上のセミノルムであり, $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots$ が成り立つことは容易に分かるであろう. そこで $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ により定まる位相を導入する. つまり

$$V_n = \{f \in C(\Omega) : p_n(f) < 1/n\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

の形の凸集合の全体を近傍基とする位相である. $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ は勿論 $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ の取り方に依存するが, 導入された位相は $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ の取り方に依らず定まることに注意する. またこの位相に関する Cauchy 列は, 各 $n \in \mathbb{N}$ について K_n 上での一様収束列であるから, Ω 内で局所一様収束することが分かり, 極限関数も連続で $C(\Omega)$ に属する. 従ってこの位相のもとで $C(\Omega)$ は完備となり, 結局 $C(\Omega)$ は Fréchet 空間 (= 可算な凸平衡的近傍基を持ち完備な位相ベクトル空間) である. また $E \subset C(\Omega)$ について

$$E \text{ が有界} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} : \exists M_n \geqslant 0 : \forall f \in E : p_n(f) \leqslant M_n$$

が成り立つ.

空間 $C^m(\Omega)$　$m = 0, 1, 2, \ldots$ について $C^m(\Omega)$ を m 階までの偏導関数が全て連続である Ω 上の (複素数値) 関数 f の全体とする. つまり $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d \leqslant m$ を満たす全ての多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, について $D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$ が Ω で連続な複素数値関数 f の全体がなす線形空間である. またセミノルム

$$p_n(f) = \max\{|D^\alpha f(x)| : x \in K_n,\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^d \text{ with } |\alpha| \leqslant m\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

と置いて, $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ より定まる位相を導入すれば, $C(\Omega)$ の場合と同様に Fréchet 空間になることが証明できる. 実際, 可算個のセミノルムにより位相が定義されるので証明すべきは完備性のみである. §1.9 とも一部重複するが, 冗長を厭わず証明を行っておく. p_n の n に関する単調性より, 局所近傍基として, 次の形の集合

$$V_n = \{f \in C^m(\Omega) : p_n(f) < n^{-1}\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ が取れる. $\{f_j\}$ が Cauchy 列ならば固定した $N \in \mathbb{N}$ について $f_i - f_j \in V_N$ が十分大きな全ての i, j について成り立つ. よって $|D^\alpha f_i - D^\alpha f_j| < N^{-1}$ が K_N 上 $|\alpha| \leqslant m$ を満たす多重指数 α につい

て成り立つ. 従って各 α について $D^\alpha f_i$ は Ω 上, 局所一様に収束するので極限関数を $g_\alpha \in C(\Omega)$ と置き, 特に $f = g_0$ と置こう. このとき例えば $\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$ の時

$$f_j(b, x') - f_j(a, x') = \int_a^b \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(t, x')\, dt$$

に於いて $j \to \infty$ とすれば

$$f(b, x') - f(a, x') = g_0(b, x') - g_0(a, x') = \int_a^b g_\alpha(t, x')\, dt$$

より $D^\alpha f = g_\alpha$ が分かる. 同じことを続けて行けば任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$, $|\alpha| \leqslant m$ について $D^\alpha f = g_\alpha \in C(\Omega)$ が従い, $f \in C(\Omega)$ が分かる. そして $\{D^\alpha f_j\}$ が $D^\alpha f$ に Ω 上, 局所一様に収束することが従う. よって $f_j \to f$ となり, $C(\Omega)$ の完備性が示された. 以上より $C(\Omega)$ は Fréchet 空間になる.

空間 $C^\infty(\Omega)$　Ω 上の (複素数値) 関数 f で任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$ について $D^\alpha f$ が Ω で連続である関数 f を無限回微分可能な関数と言う. Ω 上の無限回微分可能な関数の全体がなす線形空間を $C^\infty(\Omega)$ と表す. $C^\infty(\Omega)$ のセミノルムを

$$p_n(f) = \max\{|D^\alpha f(x)| : x \in K_n,\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^d \text{ with } |\alpha| \leqslant n\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

と置いて, $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ より定まる位相を導入すれば $C^m(\Omega)$ の場合と同じ論法により, $\{f_n\}$ が Cauchy 列ならば, 任意の多重指数 α と K_j について $D^\alpha f_j$ が K_j 上, 一様収束することが従うので, 完備性が従い, Fréchet 空間になる.

空間 $\mathscr{D}_K(\Omega)$　K を Ω の compact 部分集合とする. $f \in C^\infty(\Omega)$ で $\operatorname{supp} f \subset K$ を満たすものの全体がなすベクトル空間を $\mathscr{D}_K(\Omega)$ で表す. 各 $f \in \mathscr{D}_K(\Omega)$ は $x \in \mathbb{R}^d \backslash \Omega$ について $f(x) = 0$ と置いて, $\mathbb{R}^d$ の関数に拡張すれば, $\mathbb{R}^d$ で無限回微分可能な関数で, $\operatorname{supp} f \subset K$ を満たす. 逆にこのような関数を Ω に制限すれば, それは $\mathscr{D}_K(\Omega)$ に属する関数になる. 以上より $\mathscr{D}_K(\Omega) = \mathscr{D}_K(\mathbb{R}^d)$ とみなすことができる. $\mathscr{D}_K(\Omega)$ の位相は $C^\infty(\Omega)$ の部分空間として誘導される位相とする. つまり可算個のセミノルム

$$\max\{|D^\alpha f(x)| : x \in K_n,\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^d \text{ with } |\alpha| \leqslant n\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

により定まる位相である. このとき $\mathscr{D}_K(\Omega)$ は $C^\infty(\Omega)$ の閉部分集合であることが分かる. 実際 $f \in C^\infty(\Omega) \backslash \mathscr{D}_K(\Omega)$ とすると $f(a) \neq 0$ となる点 $a \in \Omega \backslash K$ が存在する. $K \cup \{a\} \subset K_n$ を満たす n を取り

$$V = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : p_n(\varphi) < |f(a)|\}$$

と置けば, V は $C^\infty(\Omega)$ における 0 の近傍で

$$\begin{aligned} \psi \in f + V &\Longleftrightarrow \psi - f \in V \\ &\Longrightarrow |\psi(a) - f(a)| < |f(a)| \\ &\Longrightarrow \psi(a) \neq 0 \\ &\Longrightarrow \psi \notin \mathscr{D}_K(\Omega) \end{aligned}$$

となるので $f + V \in C^\infty(\Omega) \backslash \mathscr{D}_K(\Omega)$ が成り立つ. よって $C^\infty(\Omega) \backslash \mathscr{D}_K(\Omega)$ は開集合であり, 換言すれば $\mathscr{D}_K(\Omega)$ は閉集合である.

空間 $C_c^\infty(\Omega)$　$f \in C^\infty(\Omega)$ で $\operatorname{supp} f$ が Ω の compact 集合になるものの全体を $C_c^\infty(\Omega)$ で表す. $C_c^\infty(\Omega)$ の位相は $C^\infty(\Omega)$ から導入される相対位相とする. $\mathscr{D}_K(\Omega) \subset C_c^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$ であり, $\mathscr{D}_K(\Omega)$, $C_c^\infty(\Omega)$ の位相はともに $C^\infty(\Omega)$ からの相対位相であるから, $\mathscr{D}_K(\Omega)$ の位相は $C_c^\infty(\Omega)$ から誘導される相対位相と一致する. また

$$C_c^\infty(\Omega) = \bigcup_{n=1}^\infty \mathscr{D}_{K_n}(\Omega)$$

が成り立つ. 大変残念なことに $C_c^\infty(\Omega)$ は $C^\infty(\Omega)$ の閉部分空間ではなく, 従って完備ではない. 例えば $\Omega = \mathbb{R}$ として $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ を $\operatorname{supp}\varphi \in [0,1]$ かつ開区間 $(0,1)$ 上で $\varphi > 0$ となるように取る. このとき

$$\psi_n(x) = \varphi(x-1) + \frac{1}{2}\varphi(x-2) + \cdots + + \frac{1}{n}\varphi(x-n)$$

と置けば, $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ は Cauchy 列をなし, $C^\infty(\Omega)$ で収束するが, 極限関数は compact support を持たないので $C_c^\infty(\mathbb{R})$ に属さない.

それでは $C_c^\infty(\Omega)$ に別の局所凸位相で完備になるものを導入する. この位相は metrizable でないという不便な点があるが, 完備性はそれを補って余りある.

4.2 超関数と緩増加超関数

4.3 超関数の演算と構造, 近似定理

4.4 急減少関数と Fourier 変換

4.5 緩増加超関数の Fourier 変換

第II部

切断ベキの Fourier 変換

第5章　発散積分の正則化

この章では $\mathbb{R}$ 上の関数を扱うので, テスト関数の空間は $\mathscr{D} = \mathscr{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$, または $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R})$ とする.

5.1　簡単な超関数

さて $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ について

$$(u_f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in \mathscr{D}$$

と置けば, u_f は $\mathscr{D}$ 上の連続線形汎関数, つまり超関数 u_f である. このように超関数 $u \in \mathscr{D}'$ が, ある $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ を用いて $u = u_f$ と表せるとき, u は正則であると云う.

さて, 対応 $L^1_{loc}(\mathbb{R}) \ni f \mapsto u_f \in \mathscr{D}'$ は 1 対 1 であるから, f と u_f を同一視して $L^1_{loc}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{D}'$ とみなす. また混乱が生じない限り u_f を f と表すことにしよう.

以下では, 超関数の具体例を紹介していこう. 便宜的に超関数 u の微分を Du で表し, (絶対連続) 関数 f の微分を f' で表すことにする.

5.1.1　Dirac 測度

$a \in \mathbb{R}$ について $\delta_a \in \mathscr{D}'$ を

$$(\delta_a, \varphi) = \varphi(a), \quad \varphi \in \mathscr{D}$$

で定義する. δ_a は Dirac 測度と呼ばれ, $a = 0$ のときは特に $\delta = \delta_0$ と表す.

$$(\check{\delta}_a, \varphi) = (\delta_a, \varphi(-x)) = \varphi(-a) = (\delta_{-a}, \varphi)$$

より

$$\check{\delta}_a = \delta_{-a} \tag{5.1.1}$$

であり, 特に $\check{\delta} = \delta$ である. また

$$(\tau_b\delta_a, \varphi) = (\delta_a, \varphi(x+b)) = \varphi(a+b) = (\delta_{a+b}, \varphi)$$

より

$$\tau_b\delta_a = \delta_{a+b} \tag{5.1.2}$$

が成り立つ.

δ_a の微分については

$$(D\delta_a, \varphi) = -(\delta_a, \varphi') = -\varphi'(a)$$

である．同様にして

$$(D^n\delta_a, \varphi) = (-1)^n\varphi^{(n)}(a) \tag{5.1.3}$$

である．

5.1.2 Heaviside 関数

Heaviside 関数とは

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

で定義される関数であり, $H_a(x) = (\tau_a H)(x) = H(x-a)$ と置くと

$$(H_a, \varphi) = \int_a^\infty \varphi(x)\,dx$$

である．従って

$$\begin{aligned}(DH_a, \varphi) &= -(H_a, \varphi') \\ &= -\int_a^\infty \varphi'(x)\,dx = -\left[\varphi(x)\right]_a^\infty = \varphi(a) = (\delta_a, \varphi)\end{aligned}$$

であるから

$$DH_a = \delta_a \tag{5.1.4}$$

である．

5.1.3 絶対連続関数

f が $\mathbb{R}$ 内の任意の有界閉区間で絶対連続ならば $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ である．テスト関数 $\varphi \in \mathscr{D}$ について $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A, A]$ を満たす $A > 0$ をとれば

$$\begin{aligned}(u_{f'}, \varphi) &= \int_{-A}^A f'(x)\varphi(x)\,dx \\ &= \left[f(x)\varphi(x)\right]_{-A}^A - \int_{-A}^A f(x)\varphi'(x)\,dx \\ &= -\int_{-\infty}^\infty f(x)\varphi'(x)\,dx = (Du_f, \varphi)\end{aligned}$$

より $Du_f = u_{f'}$ が成り立つ．u_f, $u_{f'}$ は, それぞれ f, f' とも表すとしたから, これは

$$Df = f'$$

つまり超関数としての微分と通常の微分が一致することを意味する．

f が区分的に絶対連続で, 不連続点が x_k で, そこでの飛びが η_k ならば

$$g(x) = f(x) - \sum_k \eta_k H_{x_k}(x)$$

は絶対連続になり, 殆ど至るところ $g'(x) = f'(x)$ であるから $f' = D(f - \sum_k \eta_k H_{x_k}) = Df - \sum_k \eta_k \delta_{x_k}$ ゆえ

$$Df = f' + \sum_k \eta_k \delta_{x_k}$$

が成り立つ.

5.1.4 $\log x_+$, $\log|x|$, p.v. $\dfrac{1}{x}$

次に

$$\log x_+ = \begin{cases} \log x, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

と置くと $\log x_+ \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ であるから正則な超関数を定義する. これの微分を計算すると

$$\begin{aligned}
&(D\log x_+, \varphi) \\
&= -(\log x_+, \varphi') \\
&= -\int_0^\infty \varphi'(x)\log x\,dx \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \varphi'(x)\log x\,dx - \int_1^\infty \varphi'(x)\log x\,dx \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{[(\varphi(x)-\varphi(0))\log x]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx\right\} - \left\{[\varphi(x)\log x]_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right\} \\
&= \int_0^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx.
\end{aligned}$$

となる. そこで超関数 x_+^{-1} を

$$(x_+^{-1}, \varphi) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx, \quad \varphi \in \mathscr{D}$$

と定義すれば,

$$D\log x_+ = x_+^{-1}$$

と表すことができる. 次節で x のベキ乗の形の特異点を持ち, $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ に属さない関数を, どのように超関数に対応付けるかと言う問題を取り扱うが, x_+^{-1} もその中の典型的な例である.

同様に $\log|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ の微分を計算しておこう．

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{dx}\log|x|, \varphi\right) \\
&= -(\log|x|, \varphi') \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)\log|x|\,dx \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \varphi'(x)\log|x|\,dx \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{[\varphi(x)\log|x|]_{-\infty}^{-\varepsilon} + [\varphi(x)\log x]_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right\} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\{-\{\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)\}\}\log\varepsilon + \int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx
\end{aligned}
$$

上式の最左辺の極限は Cauchy の主値積分と呼ばれる．これに対応する超関数を $\mathrm{p.v.}\dfrac{1}{x}$ と表す．つまり

$$\left(\mathrm{p.v.}\frac{1}{x}, \varphi\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

である．従って

$$D\log|x| = \mathrm{p.v.}\frac{1}{x}$$

である．主値積分の極限が $\lim_{|x|\to\infty}\varphi(x) = 0$ を満たす関数 $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ について存在することを, 念の為に示しておこう．まず $1/x$ が奇関数であることより

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx &= \int_{\varepsilon<|x|<1}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx \\
&= \int_{\varepsilon<|x|<1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx
\end{aligned}
$$

が成り立つ．そして $\varphi(x)-\varphi(0) = \mathrm{O}(x)\ (x\to 0)$ より $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$ が区間 $[-1,1]$ で可積分であることに注意すれば, 上式において $x\to 0$ の時の極限の存在と

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{|x|<1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

が成り立つことが分かる．

$\mathrm{p.v.}\dfrac{1}{x}$ による主値積分は他に

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx$$

と表すこともできる．

5.1.5　$\log(x \pm i0)$

超関数 $\log(x+i0)$ を

$$(\log(x+i0), \varphi) = \lim_{y\to+0}(\log(x+iy), \varphi) = \lim_{y\to+0}\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\log(x+iy)\,dx$$

で定義する．但し対数関数 $\log(x+iy)$ の分枝は $\log(x+iy) = \log|x+iy| + i\mathrm{Arg}\,(x+iy)$, $-\pi < \mathrm{Arg}\,(x+iy) < \pi$ で定めたとする．このとき

$$\lim_{y\to+0}\log(x+iy) = \begin{cases} \log x, & x>0 \\ -\infty + i\frac{\pi}{2}, & x=0 \\ \log|x| + \pi i, & x<0 \end{cases}$$

である．ここで $|y|<1$ について $|x+iy| \geqslant 1$ ならば $0 \leqslant \log|x+iy| \leqslant \log(|x|+1)$. $|x+iy|<1$ ならば $0 > \log|x+iy| \geqslant \log|x|$ より $|\log(x+iy)| \leqslant |\log|x|| + \log(|x|+1) + \pi \in L^1(\mathbb{R})$ が成り立つ．よって Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned}(\log(x+i0),\varphi) &= \int_0^\infty \varphi(x)\log x\,dx + \int_{-\infty}^0 \varphi(x)\{\log|x| + \pi i\} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\log|x|\,dx + \pi i\int_{-\infty}^0 \varphi(x) \\ &= (\log|x| + \pi i(1-H),\varphi)\end{aligned}$$

より

$$\log(x+i0) = \log|x| + \pi i(1-H), \qquad D\log(x+i0) = \mathrm{p.v.}\frac{1}{x} - \pi i\delta$$

が成り立つ．同様に $(\log(x-i0),\varphi) = \lim_{y\to+0}(\log(x-iy),\varphi)$ で $\log(x-iy)$ を定義すれば

$$\lim_{y\to+0}\log(x-iy) = \begin{cases} \log x, & x>0 \\ -\infty - i\frac{\pi}{2}, & x=0 \\ \log|x| - \pi i, & x<0 \end{cases}$$

より

$$\log(x-i0) = \log|x| - \pi i(1-H), \qquad D\log(x-i0) = \mathrm{p.v.}\frac{1}{x} + \pi i\delta$$

が成り立つ.

5.2 発散積分の正則化の問題とベキ型特異点

局所可積分な関数 f については対応 $f \mapsto u_f$ により正則超関数 u_f と 1 対 1 に対応付けることができた．この節では関数 f が点 x_0 のある近傍で可積分でなく, x_0 を除けば局所積分可能なときにも超関数と対応が付けられるかどうかを考える．この場合はテスト関数 φ について, 積分

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx \tag{5.2.1}$$

の収束は一般には保証されない．しかし $x_0 \notin \mathrm{supp}\,\varphi$ つまり x_0 のある近傍で φ が恒等的に 0 ならば収束する．そこで超関数 $u \in \mathscr{D}'$ で $x_0 \notin \mathrm{supp}\,\varphi$ を満たすテスト関数 φ について

$$(u,\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$$

が成り立つものが存在するかという問題を考えよう．もしこのような超関数 u が存在すれば u を発散積分 (5.2.1) を正則化して得られた超関数と呼ぶ.

さて v をもうひとつの正則化とすれば u と v は $\mathbb{R}\backslash\{x_0\}$ で一致する．つまり $\mathrm{supp}\,\varphi \subset \mathbb{R}\backslash\{x_0\}$ をみたす任意の $\varphi \in \mathscr{D}$ について $(u,\varphi) = (v,\varphi)$ が成り立つ．従って $u - v$ は $\{x_0\}$ を台に持つ超関数であ

るから, δ_{x_0} 及びその有限階数の微分の有限個の 1 次結合である. 逆に u に δ_{x_0} 及びその有限階数の微分の有限個の 1 次結合を加えても, やはり正則化を与える. このように発散積分の正則化は存在すれば $\{x_0\}$ を台に持つ超関数の差を除いて定まる.

例えば $f(x) = 1/x$ は $x = 0$ の近傍で可積分ではないが主値積分と呼ばれる極限

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx &= \int_0^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx \\
&= \int_{|x|\leqslant 1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx
\end{aligned}
\tag{5.2.2}
$$

が $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R})$ について存在し上式が成り立つことを前節で示した. また

$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right| \leqslant \max_{|t|\leqslant 1}|\varphi'(t)|,$$

と

$$\left|\frac{\varphi(x)}{x}\right| \leqslant |\varphi(x)| \leqslant \max_{t\in\mathbb{R}}|\varphi(t)|, \quad |x| \geqslant 1$$

となることより, (5.2.2) の最右辺は $\mathscr{D}$ (または $\mathscr{S}$) 上の汎線形関数とみなして連続であるから, 超関数 (または緩増加超関数) を定義する. 従って超関数 $\mathrm{p.v.}\dfrac{1}{x}$ は発散積分 $\int\frac{\varphi(x)}{x}\,dx$ の正則化の 1 つの例を与えている.

Theorem 5.2.1 関数 f が $x = 0$ を除いて局所可積分で, ある定数 $p > 0$ について $f(x)|x|^p$ が $x = 0$ のある近傍で可積分ならば発散積分 $\int f(x)\varphi(x)\,dx$ は正則化できる.

Proof. p_0 を p の整数部分 $[p]$ と置く. このとき $p_0 \leqslant p < p_0 + 1$ に注意して

$$(f,\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\left\{\varphi(x) - \chi_{[-1,1]}(x)\sum_{k=0}^{p_0}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right\}dx$$

と置けば, $x \to 0$ のとき

$$\varphi(x) - \chi_{[-1,1]}(x)\sum_{k=0}^{p_0}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k = \mathrm{O}(|x|^{p_0+1}) = \mathrm{O}(|x|^p)$$

であり, $|x| > 1$ のときは

$$\varphi(x) - \chi_{[-1,1]}(x)\sum_{k=0}^{p_0}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k = \varphi(x)$$

であるから積分は収束し, $\varphi \in \mathscr{D}$ に関する連続性も容易に従うので, 超関数を定義する. そして $0 \notin \operatorname{supp}\varphi$ ならば $\varphi(0) = \cdots = \varphi^{(p_0)}(0) = 0$ であるから $(f,\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$ が成り立つので, 確かに正則化を与えている. □

5.3 切断ベキの超関数 $x_\pm^\lambda$, $x_\pm^\lambda(\log x_\pm)^m$,

Theorem 5.2.1 の証明の中で与えたベキ型の特異点を持つ関数による発散積分の正則化は確かに正則化の 1 つの例を与えているが, この正則化が適当なものになっているかどうかは, また別の問題である. ここでは複素数 $\lambda = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ について

$$x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

と置き, 関数系 $\{x_+^\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{C}}$ について望ましい正則化とは何であるかを考えよう.

はじめに $x>0$ について

$$x^\lambda = e^{\lambda\log x} = e^{\sigma\log x}\{\cos(\tau\log x)+i\sin(\tau\log x)\}$$

であるから

$$|x^\lambda| = e^{\sigma\log x} = x^\sigma$$

である. よって $\mathrm{Re}\,\lambda=\sigma>-1$ のときは $x_+^\lambda\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ となり正則超関数を定義する. $\mathrm{Re}\,\lambda\leqslant -1$ のときは $x=0$ の近傍で可積分でないから発散積分の正則化の問題が生じる. この場合に望ましい正則化とはどのようなものであろうか? 後々の便宜を考え, 実数 a について

$$\mathbb{H}_a = \{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}\,z>a\} \tag{5.3.1}$$

と定義する.

まず $\mathrm{Re}\,\lambda>-1$ の時に成立する等式

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx &= \int_0^1 x^\lambda\varphi(x)\,dx+\int_1^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx\\ &= \int_0^1 x^\lambda\{\varphi(x)-\varphi(0)\}\,dx+\frac{\varphi(0)}{\lambda+1}+\int_1^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx\end{aligned}$$

について考えよう. 最左辺の積分は $\mathrm{Re}\,\lambda>-1$ の時に収束するのみならず半平面 $\mathbb{H}_{-1}=\{\mathrm{Re}\,\lambda>-1\}$ で解析的である. 一方最右辺の初項の積分は $\mathrm{Re}\,\lambda>-2$ で収束するので, 半平面 $\mathbb{H}_{-2}$ で解析的である. また第 3 項の積分は任意の $\lambda\in\mathbb{C}$ について収束するので, $\mathbb{C}$ で解析的である. 最後に第 2 項は $\mathbb{C}\backslash\{-1\}$ において解析的である. 以上より最右辺は半平面から 1 点を除いた領域 $\mathbb{H}_{-2}\backslash\{-1\}$ で解析的である. 従って上式の右辺を用いて $\lambda\in\mathbb{H}_{-2}\backslash\{-1\}$ についての超関数 x_+^λ の定義とすれば, 任意の $\varphi\in\mathscr{S}$ を 1 つ取り固定するとき (x_+^λ,φ) が $\lambda\in\mathbb{H}_{-2}\backslash\{-1\}$ について解析的になると云う望ましい性質を持つ. 但し $\lambda=-1$ が λ を変数とする関数 (x_+^λ,φ) の 1 位の極であるから $\lambda=-1$ について, この方式では正則化が行えないことに注意しよう.

このような拡張は $\mathbb{H}_{-2}\backslash\{-1\}$ にとどまることなく, 次々に行うことができる. 実際 $\mathrm{Re}\,\lambda>-1$ ならば

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx\\ &=\int_0^1 x^\lambda\varphi(x)\,dx+\int_1^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx\\ &=\int_0^1 x^\lambda\left\{\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right\}dx+\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(\lambda+k+1)}x^{\lambda+k+1}\}\right]_0^1+\int_1^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx\\ &=\int_0^1 x^\lambda\left\{\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right\}dx+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(\lambda+k+1)}+\int_1^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx\end{aligned}$$

が成り立つが, 最右辺は $\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k=\mathrm{O}(x^n)$ より $\mathrm{Re}\,\lambda+n>-1$ の時に積分は収束する. 従って半平面から 1 位の極を除いた領域, つまり $\mathbb{H}_{-n-1}\backslash\{-1,-2,-n\}$ で解析的である. そこで以下のように定義を行う.

Definition 5.3.1 $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{-1,-2,\cdots\}$ について $n\in\mathbb{Z}_+$ を $\mathrm{Re}\,\lambda>-n-1$ を満たすように取り, 超関数 *(または緩増加超関数)* x_+^λ を

$$(x_+^\lambda,\varphi)=\int_0^1 x^\lambda\left\{\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right\}dx+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(\lambda+k+1)}+\int_1^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx \tag{5.3.2}$$

で定義する.

定義式 (5.3.2) の右辺は $-n-1<\mathrm{Re}\,\lambda<-n$ のとき, もう少し簡潔に表現できる. 実際このとき $0\leqslant k\leqslant n-1$ について $\mathrm{Re}\,\lambda+k+1<0$ より

$$\int_1^\infty x^{\lambda+k}\,dx=\left[\frac{x^{\lambda+k+1}}{\lambda+k+1}\right]_1^\infty=-\frac{1}{\lambda+k+1}$$

であるから

$$(x_+^\lambda,\varphi)=\int_0^\infty x^\lambda\left\{\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right\}dx \tag{5.3.3}$$

が成り立つ.

さて (x_+^λ,φ) の λ に関する解析性より微分の公式を導くことができる.

Theorem 5.3.2

$$D\left(x_+^\lambda\right)=\lambda x_+^{\lambda-1},\qquad \lambda\in\mathbb{C}\backslash\{-1,-2,\ldots\} \tag{5.3.4}$$

が成り立つ.

Proof. $\lambda>0$ のときに

$$\begin{aligned}\left(Dx_+^\lambda,\varphi\right)&=-\left(x_+^\lambda,\varphi'\right)\\&=-\int_0^\infty x^\lambda\varphi'(x)\,dx\\&=-\left[x^\lambda\varphi(x)\right]_0^\infty+\lambda\int_0^\infty x^{\lambda-1}\varphi(x)\,dx\\&=\lambda\int_0^\infty x^{\lambda-1}\varphi(x)\,dx\\&=\lambda(x_+^{\lambda-1},\varphi)\end{aligned}$$

が成り立つ. これは領域 $\mathbb{C}\backslash\{-1,-2,\ldots\}$ における 2 つの解析関数 $-(x_+^\lambda,\varphi')$ と $\lambda(x_+^\lambda,\varphi)$ が半平面 $\mathbb{H}_0$ で一致することを意味する. 従って解析関数に関する一致の定理より $\mathbb{C}\backslash\{-1,-2,\ldots\}$ においても両者は一致する. □

(5.3.4) では $\lambda=0$ の場合を除外している. 実際この場合は $x_+^0=H(x)$ であるから $Dx_+^0=\delta$ が成り立つので, (5.3.4) は成り立たない.

さて定義式 (5.3.2) を λ で複素微分すると $x>0$ のとき $\frac{d^m}{d\lambda^m}x^\lambda=x^\lambda(\log x)^m$ であるから, 以下のように新しい超関数 $x_+^\lambda(\log x_+)^m$ を導入しよう.

Definition 5.3.3 超関数 $x_+^\lambda(\log x_+)^m$ を

$$\begin{aligned}\left(x_+^\lambda(\log x_+)^m,\varphi\right)=&\int_0^1 x^\lambda(\log x)^m\left\{\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right\}dx\\&+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^m m!\varphi^{(k)}(0)}{k!(\lambda+k+1)^{m+1}}+\int_1^\infty x^\lambda(\log x)^m\varphi(x)\,dx\end{aligned} \tag{5.3.5}$$

で定義する.

$-n-1<\mathrm{Re}\,\lambda<-n$ のときは (5.3.3) が成り立つので両辺を λ で微分すれば

$$(x_+^{\lambda}(\log x_+)^m,\varphi)=\int_0^{\infty}x^{\lambda}(\log x_+)^m\left\{\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right\}dx \tag{5.3.6}$$

が成り立つ.

次に x_+^{λ}, $x_+^{\lambda}(\log x_+)^m$ と対になる x_-^{λ}, $x_-^{\lambda}(\log x_-)^m$ について述べよう. $\mathrm{Re}\,\lambda>-1$ のとき

$$x_-^{\lambda}=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ |x|^{\lambda}\quad, & x<0\end{cases} \tag{5.3.7}$$

と置けば, $x_-^{\lambda}\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ であるから正則超関数を定義することができる. これから出発して (x_-^{λ},φ) について $\mathrm{Re}\,\lambda>-2$, $\lambda\neq-1$ についても有効な式表示を導いて行くという x_+^{λ} の時に用いた方法で定義を拡張しても良いが, むしろ $\mathrm{Re}\,\lambda>-1$ のとき

$$(x_-^{\lambda},\varphi)=\int_{-\infty}^{0}|x|^{\lambda}\varphi(x)\,dx=\int_0^{\infty}x^{\lambda}\varphi(-x)\,dx$$

が成り立つことを参考にして

Definition 5.3.4 $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{-1,-2,-3,\ldots\}$ について

$$(x_-^{\lambda},\varphi)=(x_+^{\lambda},\varphi(-x)),\qquad \varphi\in\mathscr{D} \tag{5.3.8}$$

と定義する.

$\mathrm{Re}\,\lambda>-n-1$ のとき

$$(x_-^{\lambda},\varphi)=\int_0^1 x^{\lambda}\left\{\varphi(-x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right\}dx+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\varphi^{(k)}(0)}{k!(\lambda+k+1)}+\int_1^{\infty}x^{\lambda}\varphi(x)\,dx \tag{5.3.9}$$

が成り立ち, $-n-1<\mathrm{Re}\,\lambda<-n$ のときは

$$(x_-^{\lambda},\varphi)=\int_0^{\infty}x^{\lambda}\left\{\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right\}dx \tag{5.3.10}$$

と簡潔に表現できる. 微分の公式については

$$\begin{aligned}\left(Dx_-^{\lambda},\varphi\right)&=-\left(x_-^{\lambda},\varphi'\right)\\&=-\left(x_+^{\lambda},\varphi'(-x)\right)\\&=(x_+^{\lambda},\psi')\quad(\psi(x)=\varphi(x)\text{ と置いた })\\&=-\left(Dx_+^{\lambda},\psi\right)\\&=-\left(\lambda x_+^{\lambda-1},\psi\right)\\&=-\left(\lambda x_-^{\lambda-1},\varphi\right)\end{aligned}$$

となるので

$$D\left(x_-^{\lambda}\right)=-\lambda x_-^{\lambda-1},\qquad \lambda\in\mathbb{C}\backslash\{-1,-2,\ldots\} \tag{5.3.11}$$

が成り立つ.

Definition 5.3.5 超関数 $x_-^\lambda(\log x_-)^m$ を

$$(x_-^\lambda(\log x_-)^m,\varphi)=(x_+^\lambda(\log x_+)^m,\varphi(-x))$$

で定義する.

$\mathrm{Re}\,\lambda>-n-1$ のときは

$$(x_-^\lambda(\log x_-)^m,\varphi)=\int_0^1 x^\lambda(\log x)^m\left\{\varphi(-x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right\}dx \\ +\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{m+k}m!\varphi^{(k)}(0)}{k!(\lambda+k+1)^{m+1}}+\int_1^\infty x^\lambda(\log x)^m\varphi(-x)\,dx \tag{5.3.12}$$

$-n-1<\mathrm{Re}\,\lambda<-n$ のときは

$$(x_-^\lambda(\log x_-)^m,\varphi)=\int_0^\infty x^\lambda(\log x_+)^m\left\{\varphi(-x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right\}dx \tag{5.3.13}$$

が成り立つ.

5.4　$x_\pm^{-n}$

前節で行った $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{-1,-2,\ldots\}$ $x_\pm^\lambda$ に関する定義では, $\lambda=-n$, $n\in\mathbb{N}$ は極となってしまうので別の正則化を導入する必要がある. まず $\mathrm{Re}\,\lambda>-n-1$ の時の

$$(x_+^\lambda,\varphi)=\int_0^1 x^\lambda\left\{\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right\}dx+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(\lambda+k+1)}+\int_1^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx$$

において $-n-1<\mathrm{Re}\,\lambda-n+1$ ならば $0\leqslant k\leqslant n-2$ について

$$\int_1^\infty x^{\lambda+k}dx=\left[\frac{1}{\lambda+k+1}\right]_1^\infty=-\frac{1}{\lambda+k+1}$$

が成り立つので

$$(x_+^\lambda,\varphi)=\int_0^\infty x^\lambda\left\{\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k-\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\chi_(0,1)(x)x^{n-1}\right\}dx \\ +\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!(\lambda+n)} \tag{5.4.1}$$

と書き直せる. これは λ に関する有理型関数 (x_+^λ,φ) の $\lambda=-n$ のまわりでの Laurent 展開を与えていて, 主要部は $\dfrac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!(\lambda+n)}$ であることが分かる. そこでこれを取り除いたものを x_+^λ と定義しよう.

Definition 5.4.1 $n=1,2,\ldots$ について

$$(x_+^{-n},\varphi)=\int_0^\infty x^{-n}\left\{\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k-\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\chi_{(0,1)}(x)x^{n-1}\right\}dx \tag{5.4.2}$$

と定義する. 但し $n=1$ の時には, $\sum_{k=0}^{n-2}$ の項は $=0$ と置く.

$n=1$ の時は

$$(x_+^{-1},\varphi)=\int_0^\infty x^{-1}\{\varphi(x)-\varphi(0)\chi_{(0,1)}(x)\}=\int_0^1\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx+\int_1^\infty\frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

となり, §5.1.4 で導入した $x_+^{-1}=D\log x_+$ になる. また

$$\begin{aligned}(x_+^{-2},\varphi)&=\int_0^\infty x^{-2}\{\varphi(x)-\varphi(0)-\varphi'(0)\chi_{(0,1)}(x)x\}\,dx\\&=\int_0^1\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-\varphi'(0)x}{x^2}\,dx+\int_1^\infty\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx\end{aligned}$$

次に微分の公式を導いておこう.

Theorem 5.4.2 $n\in\mathbb{N}$ について

$$Dx_+^{-n}=-nx_+^{-n-1}+\frac{(-1)^n}{n!}\delta^{(n)} \tag{5.4.3}$$

が成り立つ.

Proof.

$$\begin{aligned}&\big(Dx_+^{-n},\varphi\big)\\&=-(x_+^{-n},\varphi')\\&=-\int_0^1 x^{-n}\left\{\varphi'(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!}x^k\right\}dx-\int_1^\infty x^{-n}\left\{\varphi'(x)-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!}x^k\right\}dx\\&=-\left[x^{-n}\left(\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right)\right]_0^1-n\int_0^1 x^{-n-1}\left(\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right)dx\\&\quad-\left[x^{-n}\left(\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right)\right]_1^\infty-n\int_1^\infty x^{-n-1}\left(\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right)dx\\&=-n\int_0^\infty x^{-n-1}\left(\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k-\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}\chi_{((0,1))(x)x^n}\right)dx+\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}\\&=-n(x_+^{-n-1},\varphi)+\frac{(-1)^n}{n!}(\delta^{(n)},\varphi)\end{aligned}$$

□

Definition 5.4.3 $n=1,2,\dots$ について

$$(x_-^{-n},\varphi)=(x_+^{-n},\varphi(-x)) \tag{5.4.4}$$

と定義する.

このとき

$$(x_-^{-n},\varphi)=\int_0^\infty x^\lambda\left\{\varphi(-x)-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k-(-1)^{n-1}\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\chi_{(0,1)}(x)x^{n-1}\right\}dx$$

が成り立つ. 但し $n=1$ の時には, $\sum_{k=0}^{n-2}$ の項は $=0$ と置く.

微分の公式については

$$
\begin{aligned}
&(Dx_-^{-n}, \varphi) \\
=&-(x_-^{-n}\varphi') \\
=&-(x_+^{-n}\varphi'(-x)) \\
=&(x_+^{-n}\psi') \qquad (\psi(x)=\varphi(-x) \text{ と置いた}) \\
=&-(Dx_+^{-n}\psi) \\
=&-\left\{-n(x_+^{-n-1}, \psi) + \frac{\psi^{(n)}(0)}{n!}\right\} \\
=&n(x_-^{-n-1}, \varphi) - \frac{(-1)^n\varphi^{(n)}(0)}{n!} \\
=&\left(nx_-^{-n-1} - \frac{\delta^{(n)}}{n!}, \varphi\right)
\end{aligned}
$$

より

(5.4.5) $$Dx_-^{-n} = nx_-^{-n-1} - \frac{\delta^{(n)}}{n!}$$

が成り立つ.

5.5　$|x|^\lambda$ と $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$

Definition 5.5.1 $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{-1,-2,\ldots\}$ について

(5.5.1) $$|x|^\lambda := x_+^\lambda + x_-^\lambda, \qquad |x|^\lambda \operatorname{sgn} x := x_+^\lambda - x_-^\lambda$$

と定義する.

$D(x_+^\lambda) = \lambda x_+^{\lambda-1}$, $D(x_-^\lambda) = -\lambda x_-^{\lambda-1}$ より

(5.5.2) $$D(|x|^\lambda) = \lambda|x|^{\lambda-1}\operatorname{sgn} x, \qquad D(|x|^\lambda \operatorname{sgn} x) = \lambda|x|^{\lambda-1}$$

が成り立つ.

さて

$$
\begin{aligned}
(|x|^\lambda, \varphi(x)) &= \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx + \int_0^\infty x^\lambda\varphi(-x)\,dx \\
&= \int_0^\infty x^\lambda\{\varphi(x)+\varphi(-x)\}\,dx
\end{aligned}
$$

において $g(x) = \varphi(x) + \varphi(-x)$ と置くと, $g^{(k)}(x) = \varphi^{(k)}(x) + (-1)^k\varphi^{(k)}(-x)$ であるから

$$g^{(2k)}(0) = 2\varphi^{(2k)}(0), \qquad g^{(2k+1)}(0) = 0$$

となり,

$$g(x) - 2\sum_{k=0}^m \frac{\varphi^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k} = \mathrm{O}(x^{2m+2}), \quad x \to 0$$

である. 従って $\mathrm{Re}\,\lambda > -2m-1$ について

$$(|x|^\lambda, \varphi(x)) = \int_0^1 x^\lambda \left\{ \varphi(x) + \varphi(-x) - 2\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} \right\} dx \tag{5.5.3}$$
$$+ 2\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(2k)}(0)}{(\lambda+2k+1)(2k)!} + \int_1^\infty x^\lambda \{\varphi(x) + \varphi(-x)\}\, dx$$

が成り立つ. $-2m-1 < \mathrm{Re}\,\lambda < -2m+1$ の時は

$$(|x|^\lambda, \varphi(x)) = \int_0^\infty x^\lambda \left\{ \varphi(x) + \varphi(-x) - 2\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} \right\} dx$$

となり, $\lambda = -2m$ の場合でも $|x|^{-2m}$ を定義でき

$$(|x|^{-2m}, \varphi(x)) = \int_0^\infty x^{-2m} \left\{ \varphi(x) + \varphi(-x) - 2\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} \right\} dx$$

となる. ここで

$$(x_+^{-2m}, \varphi) = \int_0^1 x^{-2m} \left\{ \varphi(x) - \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \right\} dx + \int_1^\infty x^{-2m} \left\{ \varphi(x) - \sum_{k=0}^{2m-2} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \right\} dx$$

$$(x_-^{-2m}, \varphi) = \int_0^1 x^{-2m} \left\{ \varphi(-x) - \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{(-1)^k\varphi^{(k)}(0)}{k!} \right\} dx + \int_1^\infty x^{-2m} \left\{ \varphi(x) - \sum_{k=0}^{2m-2} \frac{(-1)^k\varphi^{(k)}(0)}{k!} \right\} dx$$

より

$$(x_+^{-2m} + x_-^{-2m}, \varphi) = \int_0^\infty \left\{ \varphi(x) + \varphi(-x) - 2\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(2k)}(0)}{(2k)!} \right\} dx = (|x|^{-2m}, \varphi(x))$$

である. つまり $|x|^{-2m} = x_+^{-2m} + x_-^{-2m}$ が成り立つ. そこで $x^{-2m} = |x|^{-2m}$ と定義することにすれば

$$x^{-2m} := |x|^{-2m} = x_+^{-2m} + x_-^{-2m} \tag{5.5.4}$$

が成り立つ.

同様に $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$ の時に成り立つ等式

$$\begin{aligned}(|x|^\lambda \operatorname{sgn} x, \varphi(x)) &= \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\, dx - \int_0^\infty x^\lambda \varphi(-x)\, dx \\ &= \int_0^\infty x^\lambda \{\varphi(x) - \varphi(-x)\}\, dx\end{aligned}$$

において $g(x) = \varphi(x) - \varphi(-x)$ と置くと $g^{(k)}(x) = \varphi^{(k)}(x) - (-1)^k \varphi^{(k)}(-x)$ であるから

$$g^{(2k)}(0) = 0, \qquad g^{(2k+1)}(0) = 2\varphi^{(2k+1)}(0)$$

となり,

$$g(x) - 2\sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \mathrm{O}(x^{2m+3}), \quad x \to 0$$

である. 従って $\mathrm{Re}\,\lambda > -2m-2$ について

$$(|x|^\lambda \operatorname{sgn} x, \varphi(x)) = \int_0^1 x^\lambda \left\{ \varphi(x) - \varphi(-x) - 2\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right\} dx \tag{5.5.5}$$

$$+ 2\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(2k+1)}(0)}{(\lambda+2k+2)(2k+1)!} + \int_1^\infty x^\lambda \{\varphi(x) - \varphi(-x)\}\, dx \tag{5.5.6}$$

が成り立つ．$-2m-2<\mathrm{Re}\,\lambda<-2m$ の時は

$$(|x|^{\lambda}\mathrm{sgn}\,,\varphi(x))=\int_0^{\infty}x^{\lambda}\left\{\varphi(x)-\varphi(-x)-2\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right\}dx$$

となり, $\lambda=-2m-1$ の場合でも $|x|^{-2m-1}\mathrm{sgn}\,x$ を定義でき

$$(|x|^{-2m-1}\mathrm{sgn}\,x,\varphi(x))=\int_0^{\infty}x^{-2m-1}\left\{\varphi(x)-\varphi(-x)-2\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right\}dx$$

となる．ここで

$$(x_+^{-2m-1},\varphi)=\int_0^1 x^{-2m-1}\left\{\varphi(x)-\sum_{k=0}^{2m}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\right\}dx+\int_1^{\infty}x^{-2m-1}\left\{\varphi(x)-\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\right\}dx$$

$$(x_-^{-2m-1},\varphi)=\int_0^1 x^{-2m-1}\left\{\varphi(-x)-\sum_{k=0}^{2m}\frac{(-1)^k\varphi^{(k)}(0)}{k!}\right\}dx+\int_1^{\infty}x^{-2m-1}\left\{\varphi(x)-\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k\varphi^{(k)}(0)}{k!}\right\}dx$$

より

$$(x_+^{-2m}-x_-^{-2m},\varphi)=\int_0^{\infty}\left\{\varphi(x)-\varphi(-x)-2\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}\right\}dx=(|x|^{-2m-1}\mathrm{sgn}\,x,\varphi(x))$$

である．つまり $|x|^{-2m-1}\mathrm{sgn}\,x=x_+^{-2m-1}+x_-^{-2m-1}$ が成り立つ．そこで $x^{-2m-1}=|x|^{-2m-1}\mathrm{sgn}\,x$ と定義することにすれば

$$x^{-2m-1}:=|x|^{-2m-1}\mathrm{sgn}\,x=x_+^{-2m-1}-x_-^{-2m-1} \tag{5.5.7}$$

が成り立つ．

5.6　$(x\pm i0)^{\lambda}$

$\lambda\in\mathbb{C}$ とする．$y\neq 0$ の時に

$$\begin{aligned}(x+iy)^{\lambda}&=e^{\lambda\log(x+iy)}\\&=e^{\lambda(\log|x+iy|+i\mathrm{Arg}\,(x+iy))}=|x+iy|e^{i\lambda\mathrm{Arg}\,(x+iy)}\end{aligned}$$

より

$$\lim_{y\to+0}(x+iy)^{\lambda}=\begin{cases}x^{\lambda}, & x>0\\ e^{i\pi\lambda}|x|^{\lambda}, & x<0\end{cases}$$

$$\lim_{y\to+0}(x-iy)^{\lambda}=\begin{cases}x^{\lambda}, & x>0\\ e^{-i\pi\lambda}|x|^{\lambda}, & x<0\end{cases}$$

が成り立つ．

Definition 5.6.1 $\lambda\in\mathbb{C}\backslash-1,-2,\ldots$ について

$$(x+i0)=x_+^{\lambda}+e^{i\pi\lambda}x_-^{\lambda},\quad (x-i0)=x_+^{\lambda}+e^{-i\pi\lambda}x_-^{\lambda} \tag{5.6.1}$$

と定義する．

ここで $\mathrm{Re}\lambda > -n-1$ のとき

$$(x_+^\lambda, \varphi) = \int_0^1 x^\lambda \left\{ \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)(0)}}{k!} x^k \right\} dx + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)(0)}}{(\lambda+k+1)k!} + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x)\, dx$$

$$(x_-^\lambda, \varphi) = \int_0^1 x^\lambda \left\{ \varphi(-x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k\varphi^{(k)(0)}}{k!} x^k \right\} dx + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k\varphi^{(k)(0)}}{(\lambda+k+1)k!} + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(-x)\, dx$$

より

$$\begin{aligned}
&(x_+^\lambda + e^{i\pi\lambda} x_-^\lambda, \varphi) \\
&= \int_0^1 x^\lambda \left\{ \varphi(x) + e^{i\pi\lambda}\varphi(-x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1+(-1)^k e^{i\pi\lambda})\varphi^{(k)(0)}}{k!} x^k \right\} dx \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1+(-1)^k e^{i\pi\lambda})\varphi^{(k)(0)}}{(\lambda+k+1)k!} + \int_1^\infty x^\lambda \{\varphi(x) + e^{i\pi\lambda}\varphi(-x)\}\, dx
\end{aligned}$$

となるが, $\lambda \to -n$ とすると

$$\frac{(1+(-1)^k e^{i\pi\lambda})}{\lambda+n} = -\frac{e^{i\pi(\lambda+n)-1}}{\lambda+n} \to -\frac{d}{dz}\left(e^{i\pi z}\right)\Big|_{z=0} = -i\pi$$

であるから

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to -n} \left((x+i0)^\lambda, \varphi\right) \\
&= \int_0^1 x^{-n} \left\{ \varphi(x) + (-1)^n\varphi(-x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1+(-1)^{n+k})\varphi^{(k)(0)}}{k!} x^k \right\} dx \\
&+ \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(1+(-1)^{n+k})\varphi^{(k)(0)}}{(\lambda+k+1)k!} - i\pi\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \int_1^\infty x^{-n}\{\varphi(x) + (-1)^n\varphi(-x)\}\, dx
\end{aligned}$$

n が偶数の場合と奇数の場合に分けて (5.5.3) (5.5.5) を用いると,

(5.6.2) $$\lim_{\lambda\to -n} (x+i0)^\lambda = x^{-n} - i\pi\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}$$

同様にして

(5.6.3) $$\lim_{\lambda\to -n} (x-i0)^\lambda = x^{-n} + i\pi\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}$$

が成り立つ.

従って超関数 $(x\pm 0)^\lambda$ は $\lambda = -1, -2, \dots$ に於いても極限を持つので, $\lambda = -1, -2, \dots$ は除去可能特異点であり, 結局 $\mathbb{C}$ 全体で正則になる.

次に微分の公式については $\lambda \neq -1, -2, \dots$ のときに $D(x_+^\lambda) = \lambda x_+^{\lambda-1}$ と $D(x_-^\lambda) = -\lambda x_-^{\lambda-1}$ より

$$\begin{aligned}
D(x\pm i0)^\lambda &= D(x_+^\lambda + e^{\pm i\pi\lambda}x_-^\lambda) \\
&= \lambda x_+^{\lambda-1} - \lambda e^{\pm i\pi\lambda} x_-^{\lambda-1}) \\
&= \lambda x_+^{\lambda-1} + \lambda e^{\pm i\pi(\lambda-1)} x_-^{\lambda-1}) \\
&= \lambda(x\pm i0)^{\lambda-1}
\end{aligned}$$

が成り立つが, 最右辺と最左辺はともに $\mathbb{C}$ で正則であるから,

(5.6.4) $$D(x\pm i0)^\lambda = \lambda(x\pm i0)^{\lambda-1}$$

が $\mathbb{C}$ で成り立つ.

第6章　Fourier 変換の計算

6.1　デルタ関数と関連する関数の Fouirer 変換

6.1.1　デルタ関数の Fourier 変換

手始めに

$$\mathscr{F}\delta_a = e^{-ixa}$$

を示そう．これは任意の $\varphi \in \mathscr{S}$ について

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}\delta_a, \varphi) &= (\delta_a, \mathscr{F}\varphi)\\ &= \mathscr{F}\varphi(a)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iax}\varphi(x)\,dx = (e^{-iax}, \varphi(x))\end{aligned}$$

より従う．ここで $\mathscr{F}^{-1} = \tilde{\mathscr{F}} = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}\check{}$ より $\delta_a = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}(e^{iax})$ が成り立つので,

$$\begin{aligned}&\mathscr{F}(e^{iax}) = 2\pi\delta_a, \quad \mathscr{F}(e^{-iax}) = 2\pi\delta_{-a},\\ &\mathscr{F}(\cos ax) = \pi(\delta_a + \delta_{-a}), \quad \mathscr{F}(\sin ax) = -i\pi(\delta_a - \delta_{-a})\end{aligned}$$

次に

$$\mathscr{F}(u^{(n)}) = (ix)^n\mathscr{F}u, \quad D^{(n)}\mathscr{F}(u) = \mathscr{F}((-ix)^n u)$$

より

$$\mathscr{F}(D^n\delta) = (ix)^n, \quad \mathscr{F}(x^n) = 2\pi i^n\delta^{(n)}$$

が成り立つ．これより多項式 $P(x)$ について

$$\mathscr{F}(P(D)\delta) = P(ix) \quad \mathscr{F}(P(x)) = 2\pi P(iD)\delta$$

が成り立つ．

6.1.2　Heavisaide 関数の Fourier 変換

まず Heaviside 関数 $H(x) = \chi_{(0,\infty)}(x)$ の緩増加超関数としての Fourier 変換が

(6.1.1)
$$\mathscr{F}(H) = -i\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x} + \pi\delta$$

となることを示そう．テスト関数 $\varphi \in \mathscr{S}$ について

$$
\begin{aligned}
&(\mathscr{F}H, \varphi)\\
=&(\varphi, \mathscr{F}H)\\
=&\int_0^\infty \hat{\varphi}(\xi)\,d\xi\\
=&\lim_{R\to\infty}\int_0^R\left\{\int_{-\infty}^\infty \varphi(x)e^{-i\xi x}\,dx\right\}d\xi \qquad \left(\varphi(x)e^{-i\xi x} \text{ は } \mathbb{R}\times[0,R] \text{ で可積分ゆえ積分の順序交換可能}\right)\\
=&\lim_{R\to\infty}\int_{-\infty}^\infty \varphi(x)\left\{\int_0^R e^{-i\xi x}\,d\xi\right\}dx\\
=&i\lim_{R\to\infty}\int_{-\infty}^\infty \varphi(x)\frac{e^{-iRx}-1}{x}\,dx\\
=&i\lim_{R\to\infty}\left\{\int_{|x|\leqslant 1}\varphi(x)\frac{e^{-iRx}-1}{x}\,dx+\int_{|x|>1}\varphi(x)\frac{e^{-iRx}-1}{x}\,dx\right\}
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\int_{|x|>1}\varphi(x)\frac{e^{-iRx}-1}{x}\,dx = -\int_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx+\int_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{x}e^{-iRx}\,dx
$$

において $\psi(x)=\frac{\varphi(x)}{x}$ は $|x|\geqslant 1$ で C^1-級で $\psi(x)\to 0$ ($|x|\to\infty$) であり，$\psi'(x)$ も $|x|\geqslant 1$ で可積分である．よって

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{x}e^{-iRx}\,dx &= \left(\int_{-\infty}^{-1}+\int_1^\infty\right)\psi(x)e^{-iRx}\,dx\\
&=\left[-\frac{1}{iR}\psi(x)e^{-iRx}\right]_{-\infty}^{-1}+\left[-\frac{1}{iR}\psi(x)e^{-iRx}\right]_1^\infty\\
&\quad+\frac{1}{iR}\int_{-\infty}^{-1}\psi'(x)e^{-iRx}\,dx+\frac{1}{iR}\int_1^\infty\psi'(x)e^{-iRx}\,dx\\
&\quad-\frac{1}{iR}\psi(-1)e^{iR}+\frac{1}{iR}\psi(1)e^{-iR}+\frac{1}{iR}\int_{|x|>1}\psi'(x)e^{-iRx}\,dx\to 0 \qquad (R\to\infty)
\end{aligned}
$$

よって

$$
\lim_{R\to\infty}\int_{|x|>1}\varphi(x)\frac{e^{-iRx}-1}{x}\,dx = -\int_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx
$$

である．

次に

$$
\begin{aligned}
&\int_{|x|\leqslant 1}\varphi(x)\frac{e^{-iRx}-1}{x}\,dx\\
=&\int_{|x|\leqslant 1}\{\varphi(x)-\varphi(0)\}\frac{e^{-iRx}-1}{x}\,dx+\varphi(0)\int_{|x|\leqslant 1}\frac{e^{-iRx}-1}{x}\,dx\\
=&\int_{|x|\leqslant 1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}e^{-iRx}\,dx-\int_{|x|\leqslant 1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx+\varphi(0)\int_{|x|\leqslant 1}\frac{e^{-iRx}-1}{x}\,dx
\end{aligned}
$$

となるが，ここで

$$
\tilde{\psi}(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}, & x\neq 0\\ \varphi'(0), & x=0\end{cases}
$$

と置くと, $\tilde{psi}$ は $|x| \leqslant 1$ で C^1-級であるから

$$\begin{aligned}\int_{|x|\leqslant 1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} e^{-iRx}\,dx &= \int_{-1}^{1} \tilde{\psi}(x) e^{-iRx}\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{iR}\tilde{\psi}(x)e^{-iRx}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{iR}\int_{-1}^{1} \tilde{\psi}'(x)e^{-iRx}\,dx \\ &= -\frac{1}{iR}\{\tilde{\psi}(1)e^{-iR} - \tilde{\psi}(-1)e^{iR}\} + \frac{1}{iR}\int_{-1}^{1}\tilde{\psi}'(x)e^{-iRx}\,dx \to 0, \quad R\to\infty\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}\int_{|x|\leqslant 1} \frac{e^{-iRx}-1}{x}\,dx &= \int_{-1}^{1} \frac{\cos Rx - 1 - i\sin Rx}{x} \\ &= -i\int_{-1}^{1}\frac{\sin Rx}{x} \\ &= -i\int_{-R}^{R} \frac{\sin y}{y/R}\frac{dy}{R} \\ &= -i\int_{-R}^{R}\frac{\sin x}{x}\,dx \to \infty - i\pi, \quad R\to\infty\end{aligned}$$

である. これで

$$\lim_{R\to\infty}\int_{|x|\leqslant 1}\varphi(x)\frac{e^{-iRx}-1}{x}\,dx = -\int_{|x|\leqslant 1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}, dx - i\pi\varphi(0)$$

であることが分かった. 以上より

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}H,\varphi) &= i\left\{-\int_{|x|\leqslant 1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx - i\pi\varphi(0) - \int_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\,dx\right\} \\ &= -i\left\{\int_{|x|\leqslant 1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\,dx\right\} + \pi\varphi(0)\end{aligned}$$

となるので $\mathscr{F}H = -i\mathrm{p.v.}\dfrac{1}{x} + \pi\delta$ である.

それでは H に関連する関数の Fourier 変換を求めておこう. $\operatorname{sgn} x = H(x) - H(-x) = H(x) - \check{H}(x)$ と $\mathscr{F}\check{\ } = \check{\ }\mathscr{F}$ より

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(\operatorname{sgn} x) &= \mathscr{F}(H) - \mathscr{F}(\check{H}) \\ &= \mathscr{F}(H) - \mathscr{F}(H)\check{\ } \\ &= \pi\delta - i\mathrm{p.v.}\frac{1}{\xi} - \left\{\pi\delta - i\mathrm{p.v.}\frac{1}{\xi}\right\}\check{\ }\end{aligned}$$

ここで $(\check{\delta_a},\varphi) = (\delta_a,\check{\varphi}) = \varphi(-a) = (\delta_{-a},\varphi)$ より

$$\check{\delta_a} = \delta_{-a} \tag{6.1.2}$$

である. また

$$\begin{aligned}(\widetilde{\mathrm{p.v.}\frac{1}{x}},\varphi) &= (\mathrm{p.v.}\frac{1}{x},\varphi(-x)) \\ &= \int_{|x|\leqslant 1}\frac{\varphi(-x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int_{|x|>1}\frac{\varphi(-x)}{x}\,dx \\ &= \int_{|x|\leqslant 1} -\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx - \int_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = -(\mathrm{p.v.}\frac{1}{x},\varphi)\end{aligned}$$

より

$$\widetilde{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x}} = -\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x} \tag{6.1.3}$$

よって

$$\mathscr{F}(\operatorname{sgn} x) = -2i\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{\xi} \tag{6.1.4}$$

上式の両辺に $\mathscr{F}^{-1} = (2\pi)^{-1}\mathscr{F}^{\vee}$ を施して $\operatorname{sgn} x = i\pi^{-1}\mathscr{F}\left(\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{\xi}\right)$ となるので

$$\mathscr{F}\left(\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x}\right) = -i\pi\operatorname{sgn}\xi \tag{6.1.5}$$

が成り立つ.

6.2　ベキ乗関数の Fourier 変換

6.2.1　x_+^λ のフーリエ変換

$\mathscr{F}(x_+^\lambda)$ の計算を行おう. $-1\mathrm{Re}\,\lambda$ の場合は $x_+^\lambda \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ であるから収束因子と呼ばれる $e^{-\tau x}$, $\tau > 0$ を掛けて可積分にしてから計算を行い, $\tau \to +0$ とする.

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(x_+^\lambda e^{-\tau x})(\xi) &= \int_0^\infty x^\lambda e^{-\tau x} e^{-i\xi x}\,dx \\ &= \int_0^\infty x^\lambda e^{-(\tau+i\xi)x}\,dx\end{aligned}$$

となる. これを複素線積分で表す為に $z = (\tau + i\xi)x$ と置いて L を複素平面の原点から右半平面の点 $\tau + i\xi$ を通り ∞ へ延びる半直線とする.

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(x_+^\lambda e^{-\tau x})(\xi) &= \int_L \left(\frac{x}{\tau+i\xi}\right)^\lambda e^{-z}\frac{dz}{\tau+i\xi} \\ &= \int_L \left(\frac{z}{\tau+i\xi}\right)^\lambda e^{-z}\frac{dz}{\tau+i\xi} \\ &= \frac{e^{-i\pi(\lambda+1)/2}}{(\xi-i\tau)^{\lambda+1}}\int_L z^\lambda e^{-z}\,dz\end{aligned}$$

$$-i\frac{e^{-i\pi\lambda/2}}{(\xi-i\tau)^{\lambda+1}}\int_L z^\lambda e^{-z}\,dz$$

複素線積分 $\int_L z^{[}\lambda e^{-z}\,dz$ を計算する為に, 以下では次の記法を用いる.

$[z_1, z_2]$ で z_1 と z_2 を結ぶ複素平面の線分を表し, $\widehat{Re^{i\theta_1}Re^{i\theta_2}}$ で原点を中心として半時計回りに $Re^{i\theta_1}$ から $Re^{i\theta_2}$ へ向かう円弧を表すことにしよう. このとき $\theta_0 = \operatorname{Arg}\tau + \xi \in (-\pi/2, \pi/2)$ と置けば, Cauchy の積分定理より

$$\int_{[0,R]} z^\lambda e^{-z}\,dz + \int_{\widehat{RRe^{i\theta_0}}} z^\lambda e^{-z}\,dz = \int_{[0,Re^{i\theta_0}]} z^\lambda e^{-z}\,dz$$

が成り立つが　$R \to \infty$ のとき

$$\begin{aligned}\left|\int_{\widehat{RRe^{i\theta_0}}} z^\lambda e^{-z}\,dz\right| = \left|\int_0^{\theta_0} R^\lambda e^{i\lambda\theta} e^{-R(\cos\theta + i\sin\theta)} iRe^{i\theta}\,d\theta\right| &\leqslant R^{\mathrm{Re}\,\lambda}e^{-\mathrm{Im}\,\lambda|\theta_0|}e^{-R\cos\theta_0}R|\theta_0| \\ &\to 0\end{aligned}$$

であるから

$$\int_L z^\lambda e^{-z}, dz = \lim_{R\to\infty}\int_{[0,Re^{i\theta_0}]} z^\lambda e^{-z}\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_{[0,Re]} z^\lambda e^{-z}\,dz = \int_0^\infty x^\lambda e^{-x}\,dx = \Gamma(\lambda+1)$$

である．よって

$$\mathscr{F}(x_+^\lambda e^{-\tau x})(\xi) = -i\frac{e^{-i\pi\lambda/2}}{(\xi-i\tau)^{\lambda+1}}\int_L z^\lambda e^{-z}\,dz = -i\frac{e^{-i\pi\lambda/2}\Gamma(\lambda+1)}{(\xi-i\tau)^{\lambda+1}} \tag{6.2.1}$$

ここで $-1<\mathrm{Re}\,\lambda$ に加えて $\mathrm{Re}\,\lambda<0$ も仮定すれば，$\frac{1}{(\xi-i\tau)^{\lambda+1}}$ は局所可積分で

$(\xi+i0)^{\lambda-1} = \lim_{\tau\to+0}$ は正則超関数になり

$$(\mathscr{F}(x_+^\lambda e^{-\tau x}),\varphi) = -ie^{-i\pi\lambda/2}\Gamma(\lambda+1)((\xi+i\tau)^{-\lambda-1},\varphi)$$

付 録 A　Hausdorff 極大性原理, Zorn の補題, 整列可能定理

付録 A では, まず §A.1 において半順序集合を導入してから Hausdorff 極大性原理を紹介する．但しこの段階では Hausdorff 極大性原理の証明は行わない．§A.2 では帰納的順序集合を定義し, Hausdorff 極大性原理を用いて Zorn の補題を証明する．§A.3 では整列集合の定義と整列集合を用いた超限帰納法の解説を行ってから Zorn の補題を用いた整列可能定理の証明を行う．また整列可能定理を用いた Hausdorff 極大性原理の証明も行う．ここここまでで Hausdorff 極大性原理, Zorn の補題, 整列可能定理 の同値性が示されたことになる．そして最後に §A.4 で Hausdorff 極大性原理を選択公理を用いて証明する．

A.1　Hausdorff の極大性原理

集合 $\mathcal{A}$ に 2 項関係 “$\leqslant$” が定義されているとする．2 項関係とは $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ の部分集合 $\mathcal{D}$ のことであり, 順序対 $(a,b)\in\mathcal{D}$ の時に $a\leqslant b$ と書き表すというのが, 厳密な定義であるが, ここでは単に $a,b\in\mathcal{A}$ の間に $a\leqslant b$ と表される関係が (つねにとは限らないが) あるという漠然とした理解で構わない．

さて集合 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}$ 上の 2 項関係の組 $(\mathcal{A},\leqslant)$ が半順序集合 (partially ordered set, poset) であるとは

(i) $\forall a\in\mathcal{A}: a\leqslant a$

(ii) $a\leqslant b$ かつ $b\leqslant c$ ならば $a\leqslant c$

(iii) $a\leqslant b$ かつ $b\leqslant a$ ならば $a=b$

が成り立つ時を言う．順序 “$\leqslant$” を特に書かなくても文脈から分かる場合は $(\mathcal{A},\leqslant)$ の代わりに単に $\mathcal{A}$ のことを半順序集合と呼ぶ.

半順序集合のことを, “半” を省いて順序集合 (ordered set) と呼ぶこともあるが 2 元 $a,\,b\in\mathcal{A}$ について必ずしも a と b が比較可能でない, つまり $a\leqslant b$ または $b\leqslant a$ のどちらかが成り立つとは限らない場合を許すので “半” を付けることにする．(i), (ii), (iii) に加えて

(iv) $\forall a,b\in\mathcal{A}: a\leqslant b$ or $b\leqslant a$

が成り立つ時, 全順序集合 (totally ordered set) または線形順序集合 (linearly ordered set) と言う．

半順序集合に於ける $a,b\in\mathcal{A}$ の関係は

(1) $a\leqslant b$ かつ $a\neq b$

(2) $b\leqslant a$ かつ $a\neq b$

(3) $a = b$

(4) a, b は比較可能でない

の 4 つの場合のどれか 1 つのみが起こることに注意しよう. 勿論, $\mathcal{A}$ が全順序集合の場合は (1) の場合は起こりえない.

以後, $a \leqslant b$ かつ $a \neq b$ の時, $a < b$ と書くことにする.

半順序集合 $\mathcal{A}$ の任意の部分集合 $\mathcal{B}$ は $\leqslant$ を $\mathcal{B}$ に制限した順序のもとで半順序集合である. 以後, 特に断らない限り半順序集合の部分集合にはつねにこの半順序が定義されていると考える.

Example A.1.1 $\mathcal{A}$ を $\mathbb{R}^2$ 内の開集合の全体とすれば, 包含関係 $\subset$ を順序として半順序集合になる. そして $\mathcal{B}$ を原点を中心とする開円板の全体とすれば $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ であり $\mathbb{R}^2$ という最大元を持つ全順序集合である. さらに $\mathcal{B}$ は極大である, つまりどんな $V \in \mathcal{A} \backslash \mathcal{B}$ を $\mathcal{B}$ に付け加えても $\mathcal{B} \cup \{V\}$ はもはや全順序集合ではない.

Proof. 念の為に, 極大性について証明をしておこう. ここでは $\mathbb{D}(r) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < r\}$ と表すことにする.

$0 \notin V$ の場合 $x \in V$ を任意に取れば $0 < r < |x|$ を満たす r について $x \in V \backslash \mathbb{D}(r)$ かつ $0 \in \mathbb{D}(r) \backslash V$ より V と $\mathbb{D}(r)$ は比較可能ではない. また $0 \in V$ 場合は $V \neq \mathbb{R}^2$ と合わせて $r_0 = \sup\{\mathbb{D}(r) \subset V\}$ と置けば, $0 < r_0 < \infty$ であり, $\mathbb{D}(r_0) \subset V$ が成り立つ. そして $|a| = r_0$ を満たす $a \notin V$ が存在する. もし $V \backslash \mathbb{D}(r_0) = \varnothing$ ならば $V = \mathbb{D}(r_0) \in \mathcal{B}$ となり矛盾を生じるので $b \in V \backslash \mathbb{D}(r_0)$ が存在する. このとき $r_0 < r < |q|$ を満たす r について $a \in \mathbb{D}(r) \backslash V$ かつ $b \in V \backslash \mathbb{D}(r)$ より V と $\mathbb{D}(r)$ は比較可能ではない. □

それでは Hausdorff 極大性原理 (Hausdorff maximal principle) と呼ばれる定理を述べよう.

Theorem A.1.2 (Hausdorff 極大性原理 I) $\mathcal{A}$ を空でない半順序集合とし, $\mathcal{B}$ を $\mathcal{A}$ の全順序部分集合とする. この時, $\mathcal{B}$ を含む極大な全順序部分集合 $\mathcal{C}$ が少なくとも 1 つ存在する.

一見するとより弱くみえるが実は同値な主張として, 次も Hausdorff 極大性原理と呼ばれることがある.

Theorem A.1.3 (Hausdorff 極大性原理 II) $\mathcal{A}$ を空でない半順序集合とすれば極大な全順序部分集合 $\mathcal{B}$ が少なくとも 1 つ存在する.

同値性の証明 Hausdorff 極大性原理 I (Theorem A.1.2) から II (Theorem A.1.3) を導くのは容易である. 実際 $\mathcal{A}$ を空でない半順序集合として元 $a \in \mathcal{A}$ を 1 つ取れば $\{a\}$ は $\mathcal{A}$ の全順序部分集合であるから $\{a\} \subset \mathcal{B}$ を満たす極大な全順序部分集合の存在が Hausdorff 極大性原理 I より分かる.

II から I を導くにはちょっとしたテクニックを要する. $\mathcal{B}$ を半順序集合 $\mathcal{A}$ の全順序部分集合として

$$\mathcal{P} = \{\mathcal{B}' :\ \mathcal{B}' \text{ は } \mathcal{B} \subset \mathcal{B}' \text{ を満たす } \mathcal{A} \text{ の全順序部分集合 }\}$$

と置けば, $\mathcal{P}$ は包含関係 "$\subset$" を順序として半順序集合であり, $\mathcal{B} \in \mathcal{P}$ より空でない. よって Hausdorff 極大性原理 II より $\mathcal{P}$ の極大な全順序部分集合 $\mathcal{Q}$ が存在する. この時

$$\mathcal{C} = \bigcup_{\mathcal{B}' \in \mathcal{Q}} \mathcal{B}'$$

と置けば $\mathcal{B} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ を満たすことは容易に分かる．また $\mathcal{C}$ が全順序集合になることは任意の $a, b \in \mathcal{C}$ について $a \in \mathcal{B}_1$, $b \in \mathcal{B}_2$ を満たす $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathcal{Q}$ を取れば $\mathcal{Q}$ は包含関係について全順序集合であるから $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ または $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1$ が成り立つ．前者の場合は $a, b \in \mathcal{B}_2$ となり $\mathcal{B}_2$ は $\mathcal{A}$ の全順序部分集合ゆえ a, b は比較可能である．後者の場合も $a, b \in \mathcal{B}_1$ となり, やはり比較可能である．

最後に $\mathcal{C}$ を真に含む $\mathcal{A}$ の全順序部分集合 $\mathcal{C}'$ が存在すると仮定すると $\mathcal{Q} \cup \{\mathcal{C}'\}$ は $\mathcal{Q}$ を真に含む $\mathcal{P}$ の全順序部分集合となるが, これは $\mathcal{Q}$ の極大性に矛盾する．従って $\mathcal{C}$ は極大である． □

A.2 Zorn の補題

半順序集合 $(\mathcal{A}, \leqslant)$ の空でない部分集合 $\mathcal{B}$ について $a \in \mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ の上界 (upper bound) であるとは, “$\forall b \in \mathcal{B} : b \leqslant a$” が成り立つ時を言う．同様に $a \in \mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ の下界 (lower bound) であることは “$\forall b \in \mathcal{B} : a \leqslant b$” が成り立つ時を言う．次に $s \in \mathcal{B}$ が $\mathcal{B}$ の極大元 (maximal element) であるとは $s \leqslant b$ を満たす $b \in \mathcal{B}$ はつねに $b = s$ となる時を言う．s と b については “(1) $b \leqslant s$ かつ $b \neq s$ (2) $s \leqslant b$ かつ $b \neq s$ (3) $b = s$ (4) 比較可能でない” の 4 つの場合のどれか 1 つのみが起こるので

$$s \in \mathcal{B} \text{ が } \mathcal{B} \text{ の極大元} \iff \text{(2) を満たす } b \in \mathcal{B} \text{ は存在しない}$$

である．また $s \in \mathcal{B}$ が $\mathcal{B}$ の最大元 (maximum element) であるとは任意の $b \in \mathcal{B}$ について $b \leqslant s$ が成り立つ時を言う．この場合は任意の $b \in \mathcal{B}$ について (3) と (4) が起きないことと同値である．極小元 (minimal element) や最小元 (mimimum element) についても同様に定義する．

さて半順序集合 $(\mathcal{A}, \leqslant)$ の空でない部分集合 $\mathcal{B}$ について, 最大元や最小元は高々 1 つしか存在せず, もし最大元が存在すれば, それは極大元であり, もし最小元が存在すれば, それは極小元である．しかしながら極大元や極小元は存在する場合でも 1 つとは限らないことに注意しよう．

Example A.2.1 区間 $I = [0, 1]$ の直積 $I \times I$ の 2 元 (x, y) と (x', y') について $x = x'$, $y \leqslant y'$ となるとき $(x, y) \leqslant (x', y')$ と定義すれば, $(I \times I, \leqslant)$ は半順序集合になり, 任意の $x \in I$ について $(x, 1)$ は $I \times I$ の極大元であるが, 最大元ではない．

半順序集合 $\mathcal{A}$ が帰納的順序集合 (inductively ordered set) であるとは, $\mathcal{A}$ の任意の全順序部分集合 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{A}$ の中に上界を持つこと, つまり $a \in \mathcal{A}$ で “$\forall b \in \mathcal{B} : b \leqslant a$ “ が成り立つものが存在することである．

それでは Zorn(ツォルン) の補題 (Zorn's lemma) を述べよう．

Theorem A.2.2 (Zorn の補題) 空でない帰納的順序集合は極大元を持つ．

Proof. Hausdorff 極大性原理より Zorn の補題を導こう．$\mathcal{A}$ を空でない帰納的順序集合とし, Hausdorff 極大性原理を用いて極大な全順序部分集合 $\mathcal{B}$ を取る．そして $\mathcal{B}$ の上界の 1 つを $s \in \mathcal{A}$ と置く．このとき $s \in \mathcal{B}$ であることと, s が $\mathcal{A}$ の極大元であることを示そう．

$s \leqslant a$ を満たす $a \in \mathcal{A}$ を取ると, 任意の $b \in \mathcal{B}$ について $b \leqslant s$ と $s \leqslant a$ より b と s, s と a は比較可能であり, 推移律より b と a も比較可能である．従って $\mathcal{B} \cup \{s, a\}$ は $\mathcal{A}$ の全順序部分集合になるが $\mathcal{B}$ の極大性より $\mathcal{B} \cup \{s, a\} = \mathcal{B}$ でなければならない．よって $s = a \in \mathcal{B}$ が成り立つ．これは s が $\mathcal{A}$ の極大元であること示す． □

A.3　整列可能定理と超限帰納法

半順序集合 $\mathcal{A}$ が整列集合 (well-ordered set) であるとは $\mathcal{A}$ の任意の空でない部分集合が最小元を持つときを言う. 定義より直ちに空でない整列集合は最小元を持つことが分かる. また” 整列集合は全順序集合である” と言うことも分かる. 実際 $a, b \in \mathcal{A}$ ならば部分集合 $\{a, b\}$ には最小元が存在するので $a \leqslant b$ または $b \leqslant a$ のどちらかが成り立つ. つまり a, b はつねに比較可能であり, $\mathcal{A}$ は全順序集合である.

整列集合には (数学的) 帰納法を一般化した, 超限帰納法 (transfinite induction) という証明の手法が使える.

Theorem A.3.1 (超限帰納法) $(\mathcal{A}, \leqslant)$ を整列集合とし, a_0 をその最小元とする. また各 $a \in \mathcal{A}$ について命題 $P(a)$ が定まっていて

(i) $P(a_0)$ が真.

(ii) 各 $a \in \mathcal{A}$, $a \neq a_0$ について,

$$\forall x \in \mathcal{A} \ \mathit{with}\ x < a : P(x) \text{ が真} \quad \Longrightarrow \quad P(a) \text{ が真}$$

が成り立つとする. このとき $P(a)$ は全ての $a \in \mathcal{A}$ について真である.

Proof. $\mathcal{B} = \{b \in \mathcal{A} : P(b) \text{ は偽 }\}$ と置いて $\mathcal{B} = \varnothing$ となることを背理法により示そう. もし $\mathcal{B} \neq \varnothing$ ならば, $\mathcal{B}$ には最小元 b_0 が存在するが, (i) より $b_0 \neq a_0$ である. 従って $a_0 < b_0$ である. 次に $x < b_0$ ならば $x \notin \mathcal{B}$ であるから $P(x)$ は真である. よって (ii) を用いて $P(b_0)$ も真となってしまうが, これは $b_0 \in \mathcal{B}$ に矛盾する. □

次の定理は任意の集合には適当な順序を導入して整列集合にすることができるということを主張している. 従ってこの導入された順序のもとで超限帰納法が使えることになる.

Theorem A.3.2 (整列可能定理 (well-ordering theorem)) 任意の集合は整列集合となるように順序を定めることができる.

Proof. Zorn の補題より整列可能定理を導こう. X を空でない集合として,

$$\mathcal{P} = \{(A, \leqslant) : A \subset X,\ \text{“}\leqslant\text{” は } A \text{ 上の順序で } (A, \leqslant) \text{ は整列集合 }\}$$

と置く. $x \in X$ について $\{x\}$ は自明な順序 $x \leqslant x$ のもとで整列集合であるから $\mathcal{P}$ は空でない. また $\mathcal{P}$ における順序を

$$(A, \leqslant) \preceq (A', \leqslant') \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A \subset A' \text{ かつ } A' \text{ の順序 } \leqslant' \text{ の } A \text{ への制限は } \leqslant \text{ と一致}$$

と置く. このとき $\mathcal{P}$ は帰納的順序集合になる. 実際 $\mathcal{Q}$ が $\mathcal{P}$ の全順序部分集合ならば

$$S_{\mathcal{Q}} = \bigcup_{(A, \leqslant) \in \mathcal{P}} A$$

と置いて, $a_1, a_2 \in S_{\mathcal{Q}}$ について以下のように全順序を定義する. $(A_1, \leqslant_1)$, $(A_2, \leqslant_2) \in \mathcal{Q}$ を $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ となるように取る. もし $(A_1, \leqslant_1) \preceq (A_2, \leqslant_2)$ ならば $a_1, a_2 \in A_2$ であるから a_1, a_2 の大小関係は A_2 におけるものと同じと定義する. 同様に $(A_2, \leqslant_2) \preceq (A_1, \leqslant_1)$ ならば $a_1, a_2 \in A_!$ であるから a_1,

a_2 の大小関係は A_1 におけるものと同じと定義する．この定義の仕方は $(A_1, \leqslant_1), (A_2, \leqslant_2) \in \mathcal{Q}$ のとり方に依らず定まり, 全順序になることも容易に分かる．このように定めた順序を $\leqslant_{\mathcal{Q}}$ と書くことにすれば $(S_{\mathcal{Q}}, \leqslant_{\mathcal{Q}})$ は $\mathcal{Q}$ の上界である．

Zorn の補題 (Theorem A.2.2) より $\mathcal{P}$ には極大元が存在するので, その (任意の 1 つを) $(M, \leqslant_M)$ と置く．このとき $X \subset M$ を示せば, $X = M$ となり X には自身が整列集合となるような全順序が導入されたことになる．そこでもし $a \in X \backslash M$ が存在したと仮定しよう．このとき $M_* = M \cup \{a\}$ に順序 $\leqslant_M$ を拡張した順序 $\leqslant_{M^*}$ を

$$x \leqslant_{M^*} a \quad \forall x \in M$$

と定義すれば, 明らかに $(M^*, \leqslant_{M^*})$ も整列集合であり $(M, \leqslant_M) \preceq (M^*, \leqslant_{M^*})$ かつ $(M, \leqslant_M) \neq (M^*, \leqslant_{M^*})$ $(\because M \neq M^*)$ を満たす．これは $(M, \leqslant_M)$ の極大性に反する． □

整列可能定理を用いた Hausdorff 極大性原理の証明 $(X, \preceq)$ を半順序集合とする．整列可能定理 (Theorem A.3.2) より X に全順序 $\leqslant$ を導入して $(X, \leqslant)$ が整列集合となるようにできる．$(X, \leqslant)$ の最小元 x_0 について $\phi(x_0) = \{x_0\}$ と置き．超限帰納法を用いて

$$\phi(a) = \begin{cases} \{a\}, & \text{if } \{a\} \cup \bigcup_{b<a} \phi(b)\ (X, \preceq) \text{ の全順序部分集合となる} \\ \varnothing, & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義し

$$A = \bigcup_{x \in X} \phi(x)$$

と置けば, A は順序 $\preceq$ のもとで極大な全順序部分集合である．実際 $a_1, a_2 \in A$ について $a_1 = a_2$ の場合は明らかに a_1, a_2 は比較可能であり $a_1 < a_2$ の場合は $a_2 \in A$ より

$$\{a_2\} \cup \bigcup_{b<a_2} \phi(b)$$

は $\preceq$ のもとで全順序集合である．$a_1 \in A$ より $\phi(a_1) = \{a_1\}$ であるから $a_1 \in \bigcup_{b<a_2} \phi(b)$ ゆえ, a_1 と a_2 は $\preceq$ に関して比較可能である．$a_2 < a_1$ も場合も全く同様に両者が $\preceq$ に関して比較可能である．

次に極大性を示そう．$x \in X \backslash A$ ならば定義より $\{x\} \cup \bigcup_{b<x} \phi(b)$ は $\preceq$ のもとで X の全順序部分集合でない．ところが前段と同様にして $\bigcup_{b<x} \phi(b)$ が $\preceq$ のもとで X の全順序部分集合となることが分かるので, x は $b < x$ を満たすある $b \in X$ と比較可能でない．従って $A \cup \{x\}$ は $\preceq$ のもとで X の全順序部分集合でない．よって A は極大である． □

A.4 選択公理を用いた Hausdorff 極大性原理の証明

X を空でない集合とする．このとき f が X の選択関数 (choice function) であるとは 空でない X の部分集合 E について E の元 $f(E)$ を対応させる写像のことを言う．空でない任意の集合 X について選択関数の存在を主張するのが選択公理 (axiom of choice) である．この節では選択公理を用いて Hausdorff 極大性原理 I を証明しよう．

選択公理による Hausdorff 極大性原理の証明 $(X, \leqslant)$ を空でない半順序集合とし、X に極大な全順序部分集合が存在することを示す．

$$\mathcal{F} = \{A : A \text{ は } X \text{ の全順序部分集合で } A \neq \varnothing\ \}$$

と置く. 各 $x \in X$ について $\{x\}$ は X の空でない全順序部分集合であるから, $\mathcal{F}$ は空でない. 以下, $\mathcal{F}$ を包含関係 “$\subset$” のもとで半順序集合とみなし, $\mathcal{F}$ に極大元が存在することを示そう. まず次が成り立つことに注意しよう.

Claim 1 $\mathcal{Q} \subset \mathcal{F}$ が包含関係に関する $\mathcal{F}$ の全順序部分集合ならば

$$\bigcup_{A \in \mathcal{Q}} A \in \mathcal{F}$$

が成り立つ.

証明は, 整列可能定理 (Theorem A.3.2) の証明中で $\mathcal{S}_Q$ が全順序集合になることを示した論法と全く同様である.

各 $A \in \mathcal{F}$ について

$$A^* = \{x \in X \backslash A : A \cup \{x\} \in \mathcal{F}\}$$

と置く. つまり A に x を付け加えても全順序集合であるような x, 言い換えれば任意の $a \in A$ と比較可能な x の全体を A^* と置く. $f : 2^X \backslash \{\varnothing\} \to X$ を選択関数とし, 各 $A \in \mathcal{F}$ について

$$g(A) = \begin{cases} A \cup \{f(A^*)\}, & \text{if } A^* \neq \varnothing \\ A, & \text{if } A^* = \varnothing \end{cases}$$

と置く. この時 $f(A*) \in A^*$ と g の定義より次の主張が成り立つことも容易に分かる.

Claim 2 各 $A \in \mathcal{F}$ について $g(A) \in \mathcal{F}$ であり, $A \subset g(A)$ かつ $g(A) \backslash A$ は高々 1 点である.

次の主張はこの証明の核心的な箇所であり, ひとまず認めて証明を先に進めよう.

Claim 3 少なくとも 1 つの $A \in \mathcal{F}$ について $g(A) = A$ が成り立つ.

$g(A) = A$ とは $A^* = \varnothing$ を意味し, これはさらに全順序部分集合 A に如何なる元 x を追加しても, もはや $A \cup \{x\}$ は全順序部分集合とならないということであるから A は極大である. 従って $(X, \leqslant)$ に極大な全順序部分集合が存在する. □

Proof of Claim 3 $A_0 \in \mathcal{F}$ を固定する. $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ が tower であるとは

(1) $A_0 \in \mathcal{F}'$

(2) $\mathcal{Q} \subset \mathcal{F}'$ が包含関係に関する $\mathcal{F}'$ の全順序部分集合ならば

$$\bigcup_{A \in \mathcal{Q}} A \in \mathcal{F}'$$

が成り立つ.

(3) $A \in \mathcal{F}'$ ならば $g(A) \in \mathcal{F}'$

の 3 条件が全て成り立つ時であると定義しよう.

例えば

$$\mathcal{F}_1 = \{A \in \mathcal{F} : A_0 \subset A\}$$

と置く時 $\mathcal{F}_1$ が (1) を満たすことは明らかで (2) を満たすことは Claim 1 より従う. そして $A \in \mathcal{F}_1$ ならば $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ より $A \in \mathcal{F}$ ゆえ Claim 2 を用いて $g(A) \in \mathcal{F}$ であり $A_0 \subset A \subset g(A)$ より $g(A) \in \mathcal{F}_1$ である. 従って $\mathcal{F}_1$ は (3) も満たすので tower である.

tower が少なくとも 1 つは存在することが確かめられたので

$$\mathcal{F}_0 = \bigcap_{\mathcal{F}' \text{ is tower}} \mathcal{F}'$$

と置こう．このとき $\mathcal{F}_0$ が (1), (2), (3) を満たしやはり tower になることは容易に分かる．そして $\mathcal{F}_0$ より真に小さい族はもはや tower ではない．また $A \in \mathcal{F}_0$ ならば $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1$ より $A \in \mathcal{F}_1$ であるから $A_0 \subset A$, つまり

$$A \in \mathcal{F}_0 \Longrightarrow A_0 \subset A \tag{A.4.1}$$

が成り立つ．

さて $\mathcal{F}_0$ は (1), (2), (3) の性質を満たす最小の族であるから $\mathcal{F}_0$ 自身が $\mathcal{F}$ の全順序部分集合になると期待される．これを示す為に

$$\Gamma = \{C \in \mathcal{F}_0 : C \subset A \text{ or } A \subset C \quad \forall A \in \mathcal{F}_0\}$$

と置き, 各 $C \in \Gamma$ について

$$\Phi(C) = \{A \in \mathcal{F}_0 : A \subset C \text{ or } g(C) \subset A\}$$

と置く．この時 (A.4.1) より $A_0 \in \Gamma$ が直ちに従う．また $C \in \Gamma$ ならば $\Gamma \subset \mathcal{F}_0$ より $C \in \mathcal{F}_0$ であるからやはり (A.4.1) より $A_0 \subset C$ が成り立つので $A_0 \in \Phi(C)$ である．以上より Γ と $\Phi(C)$ は (1) を満たす．

さらに $\mathcal{Q} \subset \Gamma$ が包含関係に関する全順序部分集合ならば $\bigcup_{B\in\mathcal{Q}} B$ は $\mathcal{F}_0$ が tower であることから $\bigcup_{B\in\mathcal{Q}} B \in \mathcal{F}_0$ を満たす．また $\bigcup_{B\in\mathcal{Q}} B$ と任意の $A \in \mathcal{F}_0$ は比較可能である．実際, $A\mathcal{F}_0$ を固定して (i) 全ての $B \in \mathcal{Q}$ について $B \subset A$ のときは $\bigcup_{B\in\mathcal{Q}} B \subset A$ が成り立つ. (ii) (i) でないときはある $B \in \mathcal{Q}$ について $B \not\subset A$ であるが A と B は比較可能ゆえ $A \subset B$ が成り立つので $A \subset \bigcup_{B\in\mathcal{Q}} B$ が成り立つ．従って $\bigcup_{B\in\mathcal{Q}} B$ と A は比較可能であり, $\bigcup_{B\in\mathcal{Q}} B \in \Gamma$ が成り立つ．つまり Γ について (2) が成り立つ．

同様に $\Phi(C)$ も (2) を満たす．実際 $\mathcal{Q} \subset \Phi(C)$ が包含関係に関する全順序部分集合ならば $\bigcup_{B\in\mathcal{Q}} B \in \mathcal{F}_0$ であり, (i) 全ての $B \in \mathcal{Q}$ について $B \subset C$ のときは $\bigcup_{B\in\mathcal{Q}} B \subset C$ が成り立つ. (ii) (i) でないときはある $B \in \mathcal{Q}$ について $B \not\subset C$ であるが $B \in \Phi(C)$ より $B \subset C$ または $g(C) \subset B$ であるから $g(C) \subset B$ が成り立つ．よって $g(C) \subset \bigcup_{B\in\mathcal{Q}} B$ が成り立つ．従って $\bigcup_{B\in\mathcal{Q}} B \in \Phi(C)$ が成り立つ．

次に $\Phi(C)$ が (3) を満たすことを示そう．これには $A \in \Phi(C)$ ならば $g(A) \in \Phi(C)$ つまり

$$A \subset C \text{ or } g(C) \subset A \quad \Longrightarrow g(A) \subset C \text{ or } g(C) \subset g(A) \tag{A.4.2}$$

を示そう． $A \subset g(A)$ より $g(C) \subset A$ の時, 上の命題は明らかに成り立つ． また $A = C$ の場合も $g(C) = g(A)$ ゆえ, やはり明らかに成り立つ． 残る場合は $A \subset C$ かつ $A \neq C$ の時である． まず $A \in \Phi(C) \subset \mathcal{F}_0$ より $g(A) \in \mathcal{F}_0$ である．$C \in \Gamma$ と合わせると, $g(A)$ と C は比較可能, つまり $g(A) \subset C$ または $C \subset g(A)$ が成り立つ．前者の場合は命題 (A.4.2) の結論が明らかに成り立つ．以上より $C \subset g(A)$ と仮定してよい．今の場合は $A \subset C \subset g(A)$ となり $A \neq C$ と $g(A) \backslash A$ が高々 1 点であることを合わせて $g(A) = C$ が従い, 命題 (A.4.2) の結論が成り立つ．

以上で $\Phi(C)$ が (3) を満たすことが分かり, 結局 tower である．$\mathcal{F}_0$ の最小性より $\Phi(C) = \mathcal{F}_0$ が任意の $C \in \Gamma$ について成り立つが, これは任意の $A \in \mathcal{F}_0$ について $A \subset C$ または $g(C) \subset A$ が成り立つことを意味し, $C \subset g(C)$ と合わせれば A と $g(C)$ は比較可能である．従って任意の $C \in \Gamma$ について $g(C) \in \Gamma$ が成り立つことになり, 換言すれば Γ は (3) を満たす．先に Γ が (1), (2) を満たすことを示しているので, 結局 Γ も tower になり $\mathcal{F}_0$ の最小性より $\Gamma = \mathcal{F}_0$ が成り立つ．これは $\mathcal{F}_0$ が包含関係に関して全順序部分集合になることを示す．$\mathcal{F}_0$ は tower であったから $\tilde{A} = \bigcup_{A\in\mathcal{F}_0} A$ と置けば, (2) より

$\tilde{A} \in \mathcal{F}_0$ であり, 作り方から任意の $A \in \mathcal{F}_0$ について $A \subset \tilde{A}$ が成り立つ. (3) より $g(\tilde{A}) \in \mathcal{F}_0$ であるから, 特に $A = g(\tilde{A})$ と置けば $g(\tilde{A}) \subset \tilde{A}$ が成り立つが $\tilde{A} \subset g(\tilde{A})$ と合わせて, $g(\tilde{A}) = \tilde{A}$ が成り立つことになる. これで Claim 3 が示された. □

次はおまけである.

整列可能定理を用いた選択公理の証明 X の部分集合の族 $\mathcal{P}$ で $\emptyset \notin \mathcal{P}$ を満たすものについて選択関数 f の存在を示そう. これにはまず整列可能定理を適用して X に全順序 $\leqslant$ を導入して整列集合にする. そして各 $E \in \mathcal{P}$ について最小元 $\min E$ が存在するから $f(E) = \min E$ と置けば良い. □

索 引