単調函数の微分定理と微分積分学の基本定理

柳原 宏

連続かつ狭義増加函数 $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ により定まる $[a,b]$ 上の Lebesgue-Stieltjes 測度を μ_φ と表す．また μ_1 で $\mathbb{R}$ 上の Lebesugue 測度を表す．このとき有界閉区間 $[a,b]$ 上の単調関数は μ_1 に関し殆ど至るところ微分可能であること，及び $[a,b]$ 上の絶対連続函数 f について微分積分学の基本定理と呼ばれる等式 $\int_{[a,b]} f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$ が成り立つ．これらの事実が μ_1 から μ_φ に置き換えても成り立つことを証明するのがこの小冊子の目標である．

第 1 章では Lebesgue-Stieltjes 外測度，並びに Lebesgue-Stieltjes 測度の導入方法について解説する．最終的に $[a,b]$ 上の外測度 μ_φ^* と $[\varphi(a), \varphi(b)]$ 上の Lebesgu 外測度 μ_1^* が φ により互いにうつり変わることを示すのが目標である．

第 2 章で増加函数が殆ど至るところ微分可能であることを証明する．これには Rising Sun Lemma を用いる方法と Vitali の被覆定理を用いる方法の 2 つがあるが，ここでは両方を解説する．第 3 章では絶対連続函数について，微分積分学の基本定理が成り立つことを示す．

目次

第 1 章

Lebesgue-Stieltjes 測度

1.1 測度

集合 X について X の部分集合の全体よりなる族を 2^X で表す.

Definition 1.1.1. 空でない集合 X の部分集合の族 $\mathcal{M} \subset 2^X$ が 可算加法代数であるとは次の 3 条件を満たす時を言う.

(i) $\emptyset \in \mathcal{M}$.
(ii) $A \in \mathcal{M}$ ならば $A^c = X \backslash A \in \mathcal{M}$.
(iii) $A_n \in \mathcal{M}$, $n = 1, 2, \ldots$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

可算加法代数 $\mathcal{M}$ について $X (= X \backslash \emptyset) \in \mathcal{M}$ が成り立つ. また等式 $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$ より

(iv) $A_n \in \mathcal{M}$, $n = 1, 2, \ldots$ ならば $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$

が成り立つ.

可算加法代数 $\mathcal{M}$ について ($A_{n+1} = \cdots = \emptyset$ とおけば)

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{M} \Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{M} \tag{1.1.1}$$

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{M} \Longrightarrow \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{M} \tag{1.1.2}$$

が成り立つことは容易に分かる.

$\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が交わらない集合族であるとは $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ が $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば $C_{\lambda_1} \cap C_{\lambda_1} = \emptyset$ を満たすときを言う.

Definition 1.1.2. X を空でない集合, $\mathcal{M} \subset 2^X$ を可算加法代数とする. このとき写像 $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ が次の 2 条件を満たす時, 測度であると言う.

(a) $\mu(\emptyset) = 0$

(b) $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}$ が交わらない *(disjoint)* 集合の列ならば $\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n)$

性質 (b) が成り立つとき μ は可算加法的 (countably additive) であると言う.

空でない集合 X と, その上の可算加法代数 $\mathcal{M}$ の組 $(X, \mathcal{M})$ を可測空間 (measurable space) と言う. さらに $\mathcal{M}$ 上の測度 μ を加えた組 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間 (measure space) と言う.

Definition 1.1.3. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする. μ が完備 *(complete)* である *(*より正確には $(X, \mathcal{M}, \mu)$ が完備と言うべき*)* であるとは $E \subset F \in \mathcal{M}$ かつ $\mu(F) = 0$ ならば, $E \in \mathcal{M}$ が成り立つ時を言う.

1.2　外測度

前節で定義した測度の具体例を構成する為に, まず構成の容易な外測度から始める方法がある.

Definition 1.2.1. X を空でない集合とする. このとき写像 $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$ が X 上の外測度 *(outer measure)* であるとは μ^* が以下の 3 条件を満たすときを言う.

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$
(ii) $E, F \in 2^X$ について $E \subset F$ ならば $\mu^*(E) \le \mu^*(F)$
(iii) $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset 2^X$ について $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) \le \sum_{n=1}^\infty \mu^*(E_n)$

外測度を導入するには次の定理が便利である. 証明は容易であるから省略する.

Theorem 1.2.2. X を空でない集合とし族 $\mathcal{G} \subset 2^X$ と写像 $\rho : \mathcal{G} \to [0, \infty]$ は

(1) $\emptyset \in \mathcal{G}$
(2) $X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$
(3) $\rho(\emptyset) = 0$

を満たすとする. このとき

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^\infty \rho(E_n) : \{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{G},\ E \subset \bigcup_{n=1}^\infty E_n\right\}, \quad E \in 2^X$$

は X 上の外測度である.

Theorem 1.2.3. $E \in \mathcal{G}$ について $\mu^*(E) \le \rho(E)$ が成り立つ. また μ^* が ρ の拡張であること, つまり

$$\mu^*(E) = \rho(E), \quad E \in \mathcal{G}$$

が成り立つ為の必要十分条件は ρ が 劣可算加法的 であること, すなわち $E \subset \cup_{n=1}^\infty E_n$ を満たす任意の $E \in \mathcal{G}$ と $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{G}$ について

$$\rho(E) \le \sum_{n=1}^\infty \rho(E_n) \tag{1.2.1}$$

が成り立つことである.

Proof. $E \in \mathcal{G}$ の時 $E_1 = E$, $E_2 = \cdots = \emptyset$ と取れば $\rho(\emptyset) = 0$ より $\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \rho(E_n) = \rho(E)$ が成り立つ.

また ρ に劣可算加法性があれば, $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ を満たす任意の $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{G}$ について $\rho(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \rho(E_n)$ が成り立つので右辺の inf を取ると $\rho(E) \leq \mu^*(E)$ が成り立つ. 従って先に示した逆の不等式と合わせて $\rho(E) = \mu^*(E)$ が成り立つ.

逆に ρ が外測度に μ^* に拡張されるならば, $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ を満たす任意の $E \in \mathcal{G}$ と $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{G}$ について (ii), (iii) より

$$\rho(E) = \mu^*(E) \leq \mu^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(E_n)$$

となるので (1.2.1) が成り立つ. □

さて外測度 $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$ は劣可算加法性を持つが, 可算加法性を持つかどうかは分らない. しかしながら定義域 2^X を適当に制限すれば, 可算加法性を持ち, 測度になることが証明できる.

Definition 1.2.4. $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$ を空でない集合 X 上の外測度とする. このとき $E \in 2^X$ が

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E) \quad \forall A \in 2^X$$

を満たす時 μ^*-可測であると言う. μ^*-可測集合の全体を $\mathcal{M}_{\mu^*}$ とおく.

Theorem 1.2.5 (Carathéodory)**.** 空でない集合 X 上の外測度 $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$ について μ^*-可測集合の全体 $\mathcal{M}_{\mu^*}$ は可算加法代数であり μ^* の $\mathcal{M}_{\mu^*}$ への制限は完備な測度である.

Proof. 証明は幾つかの step に分けて行う.

1° $\emptyset, X \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ を示そう.

これは任意の $A \in 2^X$ について

$$\begin{aligned}
\mu^*(A \cap \emptyset) + \mu^*(A \backslash \emptyset) &= \mu^*(\emptyset) + \mu^*(A) = 0 + \mu^*(A) = \mu^*(A) \\
\mu^*(A \cap X) + \mu^*(A \backslash X) &= \mu^*(A) + \mu^*(\emptyset) = \mu^*(A) + 0 = \mu^*(A)
\end{aligned}$$

より従う.

2° $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ ならば $E^c \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ が成り立つことを示そう.

これは任意の $A \in 2^X$ について

$$\mu^*(A \cap E^c) + \mu^*(A \backslash E^c) = \mu^*(A \backslash E) + \mu^*(A \cap E) = \mu^*(A)$$

となることより従う.

3° $E, F \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ ならば $E \cup F \in \mathcal{M}_{\mu^*}$. 特に $E \cap F = \emptyset$ の時は $\mu^*(A \cap (E \cup F)) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap F)$ が任意の $A \in 2^X$ について成り立つことを示そう.

前半は $A \cap (E \cup F) = (A \cap E) \cup ((A \backslash E) \cap F$ と $A \backslash (E \cup F) = (A \backslash E) \backslash F$ より

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &\leq \mu^*(A \cap (E \cup F)) + \mu^*(A \backslash (E \cup F)) \\
&\leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*((A \backslash E) \cap F) + \mu^*((A \backslash E) \backslash F) \\
&= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E) = \mu^*(A)
\end{aligned}$$

となることより従う．また上の不等式において等号が起こることより

$$\mu^*(A \cap (E \cup F)) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*((A \backslash E) \cap F)$$

が成り立つが, $E \cap F = \emptyset$ のときは $(A \backslash E) \cap F = A \cap F$ であるから $\mu^*(A \cap (E \cup F)) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap F)$ が成り立つ．

4°．交わらない列 $E_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, $n = 1, 2, \ldots$ について $\mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n)$ が任意の $A \in 2^X$ について成り立つことを示そう．

(iii) より $\mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n)$ は明らかである．逆向きの不等式は 3° を帰納的に用いて

$$\mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \mu^*\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k)$$

となるので $n \to \infty$ とすれば直ちに得られる．

5°．　交わらない列 $E_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, $n = 1, 2, \ldots$ について $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ が成り立ち, $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$ が成り立つことを示そう．

まず前半を示す為に $A \in 2^X$ について $\mu^*(A) = \mu\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) + \mu\left(A \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$ を示そう． $\mu\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \infty$ の時は両辺ともに ∞ であり, 成り立つので $\mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \infty$ の時に示せばよい．これは 4° と 3° より

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) \leq & \mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) + \mu^*\left(A \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \\
\leq & \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*\left(A \backslash \bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \\
\leq & \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*\left(A \backslash \bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) \\
= & \mu^*\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) + \mu^*\left(A \backslash \bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) \\
= & \mu^*(A) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで 4° より $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) = \mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \infty$ であるから $n \to \infty$ とすれば $\sum_{k=n+1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) \to 0$ が成り立つ．従って

$$\mu^*(A) = \mu\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) + \mu\left(A \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

が分かり, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ が従う．また後半は 4° の等式において $A = X$ とおけば直ちに従う．

以上で $\mathcal{M}_{\mu^*}$ が有限加法代数であり, μ^* の $\mathcal{M}_{\mu^*}$ への制限が測度であることが示された．

最後に $(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}})$ が完備であることを示そう．それには次を示せば十分である．

6°　$E \in 2^X$ が $\mu^*(E) = 0$ を満たせば $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$．

これは任意の $A \in 2^X$ に対して

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E) \leq \mu^*(E) + \mu^*(A) = \mu^*(A)$$

が成り立つことより分かる. □

1.3 距離外側度と Borel 代数

空でない集合 X 上の可算加法代数の族 $\{\mathcal{S}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について, その共通部分

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{S}_\lambda = \{A \in 2^X : A \in \mathcal{S}_\lambda \ \forall \lambda \in \Lambda\}$$

もまた可算加法代数であることは容易に分かる. そこで族 $\mathcal{A} \subset 2^X$ について $\mathcal{A}$ を含む可算加法代数の族の全体を考えよう. 2^X 自体が $\mathcal{A}$ を含む可算加法代数の 1 つであるから, この族は空でない. 従って $\mathcal{A}$ を含む可算加法代数の族の全体の共通部分もまた可算加法代数であり, 定義より $\mathcal{A}$ を含む最小の可算加法代数である. これを $\sigma(\mathcal{A})$ と表して $\mathcal{A}$ の生成する可算加法代数と呼ぶ.

$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ ならば $\sigma(\mathcal{A}_1) \subset \sigma(\mathcal{A}_2)$ が成り立つことに注意しておこう.

Definition 1.3.1. *X を位相空間とし $\mathcal{O}$ を X の開集合の全体とする. この時 $\mathcal{O}$ を含む最小の加法代数を $\mathcal{B}(X)$ で表して, X の Borel 代数と呼ぶ. また $\mathcal{B}(X)$ に属する個々の集合を Borel 集合 (Borel set) と言う.*

Definition 1.3.2. *X を距離 d を持つ距離空間とし, μ^* を 2^X 上の外測度とする. このとき $E, F \in 2^X$ が $d(E,F) := \inf_{x \in E, y \in F} d(x,y) > 0$ ならば $\mu^*(E \cup F) = \mu^*(E) + \mu^*(F)$ が成り立つとき, μ^* は距離外測度 (metric outer measure) であると言う.*

Theorem 1.3.3 (Carathéodory)**.** *μ^* が距離空間 (X,d) 上の距離外測度ならば $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$ が成り立つ.*

Proof. 任意の開集合 $G \in 2^X$ と集合 $A \in 2^X$ について

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap G) + \mu^*(A \backslash G) \tag{1.3.1}$$

が成り立つことを示せば良い. 実際このとき, 逆向きの不等式が成り立つことは明らかであるから, 等号が成り立つことが直ちに分かり, $G \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ が従う. そして $\mathcal{B}(X)$ は全ての開集合を含む最小の可算加法代数であるから $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$ が成り立つことになる. また上の不等式は $\mu^*(A) = \infty$ の場合, 自明に成り立つので, 以下では $\mu^*(A) < \infty$ と仮定する.

さて仮に $d(G, G^c) > 0$ であれば $d(A \cap G, A \backslash G) = d(A \cap G, A \cap G^c) \geq d(G, G^c) > 0$ であるから, (1.3.1) は等式として成り立つ. しかしながら $d(G, G^c) > 0$ が成り立つことは一般の距離空間では期待出来ない. そこで G を内側から近似して

$$G_n = \left\{ x \in X : d(x, G^c) > \frac{1}{n} \right\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

とおく. このとき $d(G_n, G^c) \geq \frac{1}{n}$ より

$$\mu^*(A \cap G_n) + \mu^*(A \backslash G) = \mu^*((A \cap G_n) \cup (A \backslash G)) \leq \mu^*(A)$$

が成り立つ．従って証明は $\lim_{n\to\infty}\mu^*(A\cap G_n)=\mu^*(A\cap G)$ を示すことに帰着された．さらに $\mu^*(A\cap G)\leq\mu^*(A\cap G_n)+\mu^*(A\cap(G\backslash G_n))$ より

$$\mu^*(A\cap G)-\mu^*(A\cap(G\backslash G_n))\leq\mu^*(A\cap G_n)\leq\mu^*(A\cap G)$$

であるから, 結局, 定理の証明は $\lim_{n\to\infty}\mu^*(A\cap(G\backslash G_n))=0$ を示すことに還元された.

そこで

$$D_n=\left\{x\in X:\frac{1}{n+1}<d(x,G^c)\leq\frac{1}{n}\right\},$$

とおけば

$$G\backslash G_n=\left\{x\in X:0<d(x,G^c)\leq\frac{1}{n}\right\}=\bigcup_{k=n}^{\infty}D_k$$

と分解され,

$$d(D_j,D_k)\geq\frac{1}{j}-\frac{1}{k},\quad k\geq j+2$$

が成り立つので

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{\infty}\mu^*(A\cap D_{2\ell})\leq&\mu^*\left(A\cap\bigcup_{\ell=1}^{\infty}D_{2\ell}\right)\leq\mu^*(A)\\ \sum_{\ell=0}^{\infty}\mu^*(A\cap D_{2\ell+1})\leq&\mu^*\left(A\cap\bigcup_{\ell=0}^{\infty}D_{2\ell+1}\right)\leq\mu^*(A)\end{aligned}$$

であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A\cap D_n)\leq\sum_{\ell=1}^{\infty}\mu^*(A\cap D_{2\ell})+\sum_{\ell=0}^{\infty}\mu^*(A\cap D_{2\ell+1})\leq2\mu^*(A)$$

となり $\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A\cap D_n)$ は収束する．従って

$$\mu^*(A\cap(G\backslash G_n))=\mu^*\left(A\cap\bigcup_{k=n}^{\infty}D_k\right)\leq\sum_{k=n}^{\infty}\mu^*\left(A\cap D_k\right)\leq\sum_{k=n}^{\infty}\mu^*(A\cap D_n)\to0$$

が成り立つ. □

1.4 増加関数から定まる Lebesgue-Stieltjes 測度

はじめに Besicovitch の被覆定理の 1 次元の場合に相当する, 有限個の開区間に関する結果を述べよう.

Lemma 1.4.1. $\{I_k\}$ を開区間の有限列とすると, この中から部分列 $J_1=(a_1,b_1),\ldots,J_n=(a_n,b_n)$ を

$$\bigcup I_k=J_1\cup\cdots\cup J_n,\quad a_1<a_2<\cdots<a_n\ and\ b_1<b_2<\cdots<b_n$$

かつ $n\geq3$ のときは $b_i<a_{i+2}$, $i=1,\ldots,n-2$ が成り立つように取ることができる．特に $\{J_{2p}\}$ は互いに素な区間列であり, $\{J_{2p+1}\}$ も互いに素な区間である.

Proof. $I_1 \subset \bigcup_{k\neq 1} I_k$ ならば $\{I_k\}$ から I_1 を取り除き, そうでなければ何もしない. この操作を次々に続け最後まで残ったものを $J_1,\dots,J_n$ と置けば

$$\bigcup_k I_k = J_1\cup\cdots\cup J_n,\quad J_i\setminus\left(\bigcup_{k\neq i} J_k\right)\neq\emptyset,\ i=1,\dots,n \tag{1.4.1}$$

が成り立つ. また必要ならば番号を付け直すことにより, $I_1=(a_1,b_1),\dots,I_n=(a_n,b_n)$ は $a_1\leq\cdots\leq a_n$ を満たすとしてよい. このとき実際には $a_1<\cdots<a_n$ が成り立つ. 何故ならば $a_i=a_{i+1}$ とすると $b_i\leq b_{i+1}$ ならば $J_i=(a_i,b_i)\subset(a_{i+1},b_{i+1})=J_{i+1}$ となり (1.4.1) に反する. 同様に $b_i\geq b_{i+1}$ のときは $J_{i+1}\subset J_i$ となりやはり矛盾を生じる. また $b_i\geq b_{i+1}$ となる i が存在すれば $a_i<a_{i+1}$ より $J_{i+1}=(a_{i+1},b_{i+1})\subset(a_i,b_i)=J_i$ となりやはり矛盾を生じる. 従って $b_1<\cdots<b_n$ が成り立つ.

最後にある i について $a_{i+2}\leq b_i$ が成り立つとすると

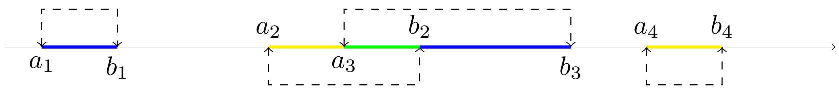
$$a_i<a_{i+1}<a_{i+2}\leq b_i<b_{i+1}<b_{i+2}$$

より

$$J_{i+1}=(a_{i+1},b_{i+1})\subset(a_i,b_i)\cup(a_{i+2},b_{i+2})=J_i\cup J_{i+2}$$

となり矛盾である. □

Lemma 1.4.1 は次の図のように区間の列に間隙がある場合も許容する.

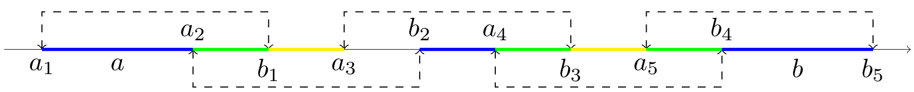


$\{I_k\}$ が有界閉区間 $[a,b]$ を被覆している場合は, このような間隙を許すことなく $\{J_k\}$ を取ることができる.

Corollary 1.4.2. $\{I_k\}$ を開区間の有限列で $[a,b]\subset\bigcup I_k$ を満たすとする. このとき部分列 $J_1=(a_1,b_1),\dots,J_n=(a_n,b_n)$ を

$$[a,b]\subset J_1\cup\cdots\cup J_n,$$
$$a_1<a<a_2<b_1<a_3<b_2<\cdots<a_{n-1}<b_{n-2}<a_n<b_{n-1}<b<b_n$$

が成り立つように取ることができる.



Proof. $[a,b]\cap I_k=\emptyset$ となる区間をあらかじめ取り除いてから Lemma 1.4.1 の証明と同じ操作を行い $\{J_k\}$ を得たとしよう. このとき $[a,b]\subset\bigcup_k J_K$ が成り立つ.

$a_1<a<b_1$ が成り立つことを示そう. これは $a\leq a_1$ ならば $a_1<\cdots<a_n$ より $a\notin J_k=(a_k,b_k)$ となり $[a,b]\subset\bigcup_k J_K$ に矛盾する. また $b_1\leq a$ ならば $(a_1,b_1)\cap[a,b]=\emptyset$ となり, やはり矛盾である. 上と同様な議論により $a_n<b<b_n$ が成り立つことも分かる.

さらに　$a<a_2$ が成り立つとしてよいことも分かる. 何故ならば $a_2\leq a$ のときは $[a,b]\subset J_2\cup\cdots\cup J_n$ であるから, 最初から $J_1=(a_1,b_1)$ を取り除いて考えれば良いからである. また同様な議論により $b_{n-1}<b$ が成り立つとしてよい.

次に $a_{i+1} < b_i,\ i = 1, \cdots, n-1$ が成り立つことを示そう．これは $b_i \le a_{i+1}$ ならば $b_i \notin (a, b_i) \cup (a_{i+1}, b)$ となるがこれは $b_i \in [a, b] \subset \bigcup_{k=1}^n J_K$ に矛盾する．

以上の不等式と Lemma 1.4.1 で示した $b_i < a_{i+2},\ i = 1, \ldots, n-2$ を合わせると

$$a_1 < a < a_2 < b_1 < a_3 < b_2 < \cdots < a_{n-1} < b_{n-2} < a_n < b_{n-1} < b < b_n$$

が成り立つことが従う． $\square$

それでは Lebesgue-Stieltjes 測度の導入の仕方を説明しよう．

Definition 1.4.3. 空でない開区間 $I \subset$ 上の函数 $\varphi : I \to \mathbb{R}$ が右連続で増加とする．このとき各開部分区間 J について $\rho_\varphi(J)$ を以下のように定義する．まず $\rho(\emptyset) = 0$ とし $J = (a, b) \subset I,\ -\infty \le a < b \le \infty$ について

$$\rho_\varphi(J) = \varphi(b-0) - \varphi(a), \tag{1.4.2}$$

と定義する．このとき *Theorem 1.2.2* より

$$\mu_\varphi^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^\infty \rho(J_n) : E \subset \bigcup_{n=1}^\infty J_n,\ J_n \text{ は } I \text{ の部分開区間}\right\}, \quad E \in 2^I \tag{1.4.3}$$

と定義すれば μ_φ^* は I 上の外測度である．これを φ により定まる *Lebesgue-Stieltjes* 外測度と言う． ここで *Theorem 1.2.5* より μ_φ^* の $\mathcal{M}_\varphi = \mathcal{M}_{\mu_\varphi^*}$ への制限を μ_φ とおけば $(I, \mathcal{M}_\varphi, \mu_\varphi)$ は完備な測度である．これを φ により定まる *Lebesgue-Stieltjes* 測度と言う．

I が開区間以外の区間の場合の Lebesgue-Stieltjes 外測度と測度の定義については以下のように行う．例えば $\alpha = \inf I \in I \cap \mathbb{R}$ のときは $x < \alpha$ について $\varphi(x) = \varphi(\alpha)$ とおく, また $\beta = \sup I \in I \cap \mathbb{R}$ のときは $x > \beta$ について $\varphi(x) = \varphi(\beta)$ とおく．このようにおけば φ は $\mathbb{R}$ 上の右連続増加函数になるのでこれについて $\mathbb{R}$ に Lebesgue-Stieltjes 外測度と測度を導入し, それらを I に制限したものを本来の φ の Lebesgue-Stieltjes 外測度と測度とする．

Theorem 1.4.4. (a) ρ_φ は劣可算加法性を持ち, μ_φ^* は ρ_φ の拡張である．つまり任意の開区間 J について $\mu_\varphi^*(J) = \rho_\varphi(J) = \varphi(\sup J - 0) - \varphi(\inf J)$ が成り立つ．
(b) μ_φ^* は距離外測度であり $\mathcal{B}(I) \subset \mathcal{M}_{\mu_\varphi^*}$ を満たす．

証明の前に (a), (b) を組合せれば, 任意の開区間 J について $J \in (\mathcal{B}(I) \subset)\mathcal{M}_\varphi$ であり $\mu_\varphi(J) = \varphi(\sup J - 0) - \varphi(\inf J)$ が成り立つことが分かる．

Proof. (a) については ρ_φ が劣可算加法性を持つことさえ示せば Theorem 1.2.3 より後半の主張が従う．

さて $J,\ J_n,\ n = 1, 2, \ldots$ は開区間で $J \subset \cup_{n=1}^\infty J_n$ が成り立つとする．任意の $\varepsilon > 0$ について有界閉区間 $[a, b] \subset J$ を $\rho(J) \le \varphi(b-0) - \varphi(a) + \varepsilon$ を満たすように取る．$[a, b]$ の compact 性より $[a, b]$ は有限個の J_n で被覆される．さらに Corollary 1.4.2 を用いれば適当に番号を付け替えることにより $[a, b] \subset J_1 \cup \cdots J_{n_0}$ で $J_k = (a_k, b_k),\ k = 1, \ldots, n_0$ は

$$a_1 < a < a_2 < b_1 < a_3 < b_2 < \cdots < a_{n_0-1} < b_{n_0-2} < a_{n_0} < b_{n_0-1} < b < b_{n_0}$$

を満たすとしてよい. 従って

$$\begin{aligned}
&\rho_\varphi(J)-\varepsilon\\
\leq&\varphi(b-0)-\varphi(a)\\
\leq&\varphi(b_{n_0}-0)-\varphi(a_1)\\
\leq&\varphi(b_{n_0}-0)-\varphi(a_{n_0})+\varphi(b_{n_0-1}-0)-\varphi(a_{n_0-1})\\
&+\cdots+\varphi(b_2-0)-\varphi(a_2)+\varphi(b_1-0)-\varphi(a_1)\\
=&\rho_\varphi(J_1)+\cdots+\rho_\varphi(J_{n_0})\leq\sum_{n=1}^\infty\rho_\varphi(J_n)
\end{aligned}$$

を得る.

次に (b) μ_φ^* が距離外測度になることを示そう. まず φ の不連続点は高々可算個であるから任意の開区間 J と $\delta>0$ について高々可算個の開区間の列 $\{J_k\}$ を

$$J\subset\bigcup_k J_k,\quad \sum_k\rho(J_k)\leq\rho(J)+\varepsilon\quad\text{and}\quad\mathrm{diam}(J_k)<\delta\quad\forall k$$

を満たすように取ることが出来ることに注意しよう. この事実より任意の $\delta>0$ について

$$\mu_\varphi^*(E)=\inf\left\{\sum_{n=1}^\infty\rho(J_n):E\subset\bigcup_{n=1}^\infty J_n,\right.\\ \left. J_n \text{ は } I \text{ の部分開区間で } \mathrm{diam}(J_n)<\delta\right\} \tag{1.4.4}$$

が成り立つ.

さて $\mathrm{dist}(E,F)\geq\delta>0$ を満たす $E,F\in 2^I$ が与えられたとして, 任意の $\varepsilon>0$ について開区間による高々可算な被覆 $E\cup F\subset\bigcup_k I_k$ を

$$\mu_\varphi^*(E\cup F)+\varepsilon\geq\sum_k\rho(I_k)\quad\text{and}\quad\mathrm{diam}(I_k)<\frac{\delta}{2}$$

が成り立つように取る. このとき $E\cap I_k\neq\emptyset$ ならば $F\cap I_k=\emptyset$ が成り立ち, 同様に $F\cap I_k\neq\emptyset$ ならば $E\cap I_k=\emptyset$ が成り立つ. 従って $E\cap I_k\neq\emptyset$ を満たす I_k を全て集めて適当に番号を付けた列を $\{J_p^{(1)}\}$ とし $F\cap I_k\neq\emptyset$ を満たす I_k を全て集めて適当に番号を付けた列を $\{J_q^{(2)}\}$ とすれば 2 つの列に共通な区間は存在せず, $E\subset\cup_p J_p^{(1)}$, $F\subset\cup_q J_q^{(2)}$ であるから

$$\begin{aligned}
\mu_\varphi^*(E\cup F)+\varepsilon&\geq\sum_k\rho(I_k)\\
&\geq\sum_p\rho(J_p^{(1)})+\sum_q\rho(J_q^{(2)})\\
&\geq\mu_\varphi^*(E)+\mu_\varphi^*(F)\geq\mu_\varphi^*(E\cup F)
\end{aligned}$$

となるので, $\varepsilon>0$ の任意性より $\mu_\varphi^*(E\cup F)=\mu_\varphi^*(E)+\mu_\varphi^*(F)$ が成り立つ. □

Definition 1.4.5. 外測度 $\mu^*:2^X\to[0,\infty]$ が正則であるとは任意の $E\in 2^X$ について $F\in\mathcal{M}_{\mu^*}$ で $E\subset F$, $\mu^*(E)=\mu^*(F)$ が成り立つものが取れるときを言う.

Theorem 1.4.6. *Lebesgue-Stieltjes* 外測度 μ_φ^* は正則である. 特に $E \in 2^I$ について G_δ-集合 *(*可算個の開集合の共通部分とあらわせる集合のことである*)* F で $E \subset F$, $\mu^*(E) = \mu^*(F)$ を満たすものが取れる.

Proof. 任意の E について開区間による被覆の列 $\{I_k^{(n)}\}$, $n = 1, 2, \ldots$ を $\sum_k \rho_\varphi(I_k^{(n)}) < \mu_\varphi^*(E) + n^{-1}$ となるように取れる. このとき $V_n = \cup_k I_k^{(n)}$ とおけば V_n は開集合であるから $V_n \in \mathcal{B}(I) \subset \mathcal{M}_\varphi$ であり $E \subset \cap_j V_j \in \mathcal{B}(I) \subset \mathcal{M}_\varphi$ が成り立つので

$$\mu_\varphi^*(E) \le \mu_\varphi^*(\cap_j V_j) = \mu_\varphi(\cap_j V_j) \le \mu_\varphi(V_n) \le \sum_k \rho_\varphi(I_k^{(n)}) < \mu_\varphi^*(E) + \frac{1}{n}$$

を得る. $n \to \infty$ とすれば $\mu_\varphi^*(E) = \mu_\varphi^*(\cap_j V_j)$ が成り立つことが分かる. □

Definition 1.4.7. X を位相空間とし, $\mathcal{M}$ を可算加法代数, μ を $(X, \mathcal{M})$ 上の測度とする.

(i) μ が *Borel* 測度であるとは $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}$ が成り立つときを言う.

(ii) μ が *Borel* 正則測度であるとは μ が *Borel* 測度であり, かつ任意の $E \in \mathcal{M}$ について $F \in \mathcal{B}(X)$ で $E \subset F$, $\mu(E) = \mu(F)$ を満たすものが存在するときを言う.

(iii) μ が *Radon* 測度であるとは μ が *Borel* 測度であり,

(a) 任意の *compact* 集合について $\mu(K) < \infty$.

(b) 任意の開集合 V は内正則, つまり

$$\mu(V) = \sup\{\mu(K) : K \subset V,\ K \ \textit{is compact}\ \}$$

が成り立つ.

(c) 任意の $E \in \mathcal{M}$ は外正則, つまり

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U,\ U \ \textit{is open}\ \}$$

が成り立つ.

後のために次を示しておこう.

Proposition 1.4.8. X を位相空間とし, $\mathcal{M}$ を可算加法代数, μ を $(X, \mathcal{M})$ 上の *Radon* 測度とする. $\mu(X) < \infty$ ならば任意の $A \in \mathcal{M}$ について, さもなければ $\overline{A}$ が *compact* である $A \in \mathcal{M}$ について

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A,\ \textit{compact}\ \}$$

が成り立つ.

Proof. $\mu(A) \ge \sup\{\mu(K) : K \subset A,\ \text{compact}\ \}$ より逆を示せばよい.

$\overline{A}$ が compact ならば $\mu(\overline{A}) < \infty$ が成り立つことに注意しよう. (c) より $\overline{A} \backslash A \subset V_n$, $\mu(V_n) \le \mu(\overline{A} \backslash A) + \frac{1}{n}$ を満たす開集合の列 $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ が取れる. 各 n について $K_n = \overline{A} \backslash V_n$ は compact であり $K_n \subset A$ である. また

$$\mu(A) - \frac{1}{n} = \mu(\overline{A}) - \{\mu(\overline{A} \backslash A) + \frac{1}{n}\} \le \mu(\overline{A}) - \mu(V_n) \le \mu(K_n) \le \mu(A).$$

よって $\mu(A) \le \sup\{\mu(K) : K \subset A,\ \text{compact}\ \}$ が成り立つ.

$\mu(X) < \infty$ の場合は上の証明において $\overline{A}$ を X で置き換えるとよい. □

Theorem 1.3.3 と Theorem 1.4.6 の証明より, μ_φ が Borel 測度であり, さらに Borel 正則測度でもあることは容易に分かるであろう.

Theorem 1.4.9. *Lebesgue-Stieltjes* 測度 μ_φ は *Radon* 測度である.

Proof. (a) については $K \subset J \subset \overline{J} \subset I$ を満たす有界開区間 J が取れることと $\overline{J} = [\alpha, \beta]$ とすれば $\mu(K) \leq \mu(J) = \varphi(\beta - 0) - \varphi(\alpha) < \infty$ が成り立つ.

(c) は　Theorem 1.4.6 の証明より直ちに従う.

(b) については任意の開区間 $J = (\alpha, \beta)$ と $\varepsilon > 0$ について $[\alpha_0, \beta_0] \subset (\alpha, \beta)$ を

$$\varphi(\beta - 0) - \varphi(\alpha) \leq \varphi(\beta_0) - \varphi(\alpha_0 - 0) + \varepsilon$$

が成り立つように取れることを示せば十分であるが, これは φ の右連続性より直ちに従う. □

Remark 1.4.10. *Lebesgue-Stieltjes* 測度 μ_φ について

$$\begin{aligned}
\mu_\varphi((\alpha, \beta)) &= \varphi(\beta - 0) - \varphi(\alpha + 0) = \varphi(\beta - 0) - \varphi(\alpha), \\
\mu_\varphi([\alpha, \beta]) &= \varphi(\beta + 0) - \varphi(\alpha - 0) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha - 0), \\
\mu_\varphi([\alpha, \beta)) &= \varphi(\beta - 0) - \varphi(\alpha - 0) = \varphi(\beta - 0) - \varphi(\alpha - 0), \\
\mu_\varphi((\alpha, \beta]) &= \varphi(\beta + 0) - \varphi(\alpha + 0) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)
\end{aligned}$$

が成り立つことは明らかであろう. また φ に連続性を仮定すれば, 任意の $x \in I$ について $\mu_\varphi(\{x\}) = 0$ が成り立つことに注意する.

この章の最後に φ が位相写像のときの

Theorem 1.4.11. 函数 $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ が連続かつ狭義増加のとき $c = \varphi(a)$, $d = \varphi(b)$ と置けば

$$\mu_\varphi^*(E) = \mu_1^*(\varphi(E)), \quad \forall E \subset [a, b]$$

が成り立つ. 特に $[a, b]$ の μ_φ-可測部分集合と $[c, d]$ の μ_1-可測部分集合は φ, φ^{-1} によりお互いにうつされ, 測度は一致する.

第 2 章

単調函数の微分可能性に関する Lebesgue の定理

単調函数が Lebesgue 測度に関して殆どいたる所微分可能であるという Lebesgue の定理を証明するには色々な方法があるが, Dini 微分の外測度評価というそれ自身大変興味深い評価式を用いて行うののが簡単である．そこで §1 では Faure [2] による Rising Sun Lemma を用いた外測度評価の証明を解説する．但し §1 で考えるのは片側微分に関する外測度評価であり, 連続性や狭義増加性などを仮定した証明を行い, その後にこのような仮定を落としても結果が成り立つという手順を取る．他に Vitali の被覆定理を用いも外測度評価を導くことが出来るが, この場合は片側微分のみならず両側微分に関する外測度評価を導くことが出来るし, 連続性や狭義増加性などの余計な仮定がいらないという利点がある．但し Vitali の被覆定理の証明は煩雑で少々時間がかかる．そこで §2 で Vitali の被覆定理を証明し, §3 でそれを用いた外測度評価を導こう．最後の §4 において, これらの外測度評価を用いて Lebesgue の定理を証明する.

2.1 Rising Sun Lemma による外測度評価

函数 u の微分は

$$Du(x) := \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \tag{2.1.1}$$

と定義される．詳しく言うと右辺の極限が存在するとき “u は x において微分可能である” と言い, 極限値を記号 $Du(x)$ で表し, u の x における微分係数と呼ぶ.

さて微分係数の存在はつねに保証される訳ではない．そこで次の Dini 微分と呼ばれる 4 つの量を導入する.

Definition 2.1.1 (Dini 微分)**.** 函数 $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ について

$$\underline{D}^+u(x) := \liminf_{h\to+0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h}, \qquad \bar{D}^+u(x) := \limsup_{h\to+0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h},$$
$$\underline{D}^-u(x) := \liminf_{h\to+0} \frac{u(x)-u(x-h)}{h}, \qquad \bar{D}^-u(x) := \limsup_{h\to+0} \frac{u(x)-u(x-h)}{h}$$

と定義する.

$Du(x)$ と異なり Dini 微分は (値として $\pm\infty$ も許せば) つねに存在し

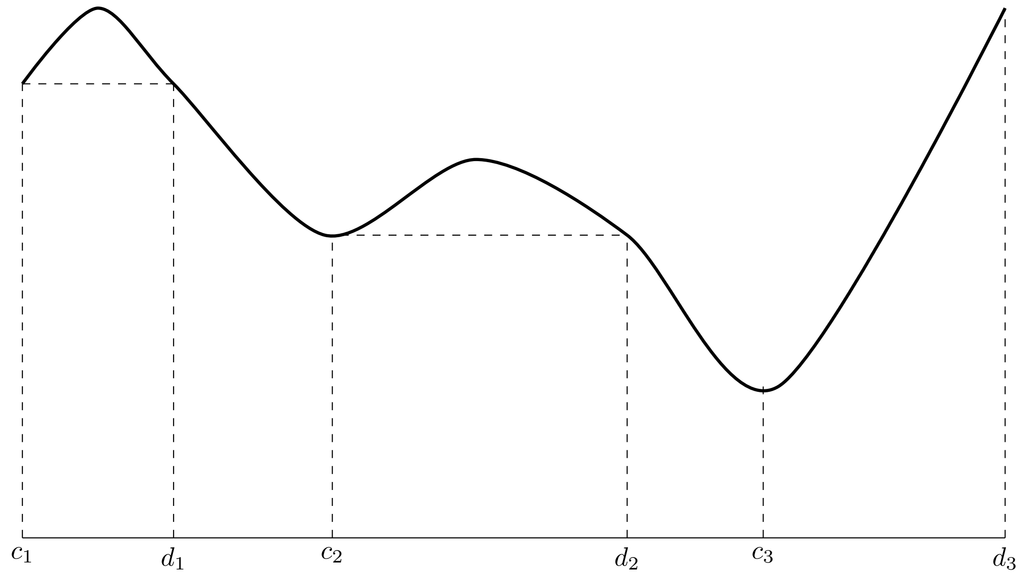
$$-\infty \leq \underline{D}^+u(x) \leq \bar{D}^+u(x) \leq \infty, \qquad -\infty \leq \underline{D}^-u(x) \leq \bar{D}^-u(x) \leq \infty$$

が成り立つ．またこれら 4 つの Dini 微分が全て一致し有限値の時 u は x において微分可能であり Dini 微分と $Du(x)$ は一致する．

Theorem 2.1.2 (Rising Sun Lemma)**.** 連続函数 $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ について

$$U = \{x \in (a,b) : \min_{a \leq y \leq x} F(y) \leq F(x)\}$$

と置けば, U は開集合であり (c,d) が U の成分ならば $F(c) \leq F(d)$ が成り立つ.



Proof. U が (a,b) の開集合であることは明らかであろう．(c,d) を U の成分とする．$F(c) \leq F(d)$ を示すには $x \in (c,d)$ について $F(c) \leq F(x)$ を示せば十分である．そこで $x \in (c,d)$ について

$$\gamma = \min\{y \in [c,x] : F(y) \leq F(x)\}$$

と置く．このとき $c \leq \gamma \leq x$ に注意する．$\gamma = c$ ならば $F(c) \leq F(x)$ が成り立つので $c < \gamma$ と仮定して矛盾を導こう．このとき $F(\gamma) = F(x)$ と $F(c) > F(x)$ が成り立ち $c < \gamma \leq x < d$ より $\gamma \in (c,d) \subset U$ である．よって $z \in [a,\gamma)$ で $F(z) < F(\gamma)$ を満たすものが存在する．従って

$$F(z) < F(\gamma) = F(x) < F(c)$$

が成り立つ．もし $z < c$ ならば上の不等式より $c \in U$ となるので矛盾である．また $c \leq z < \gamma$ の場合も γ の最小性に反する．以上より $\gamma = c$ でなければならない． $\square$

Rising Sun Lemma は連続性を仮定するものの大変強力な定理である． μ_1, μ_1^* で Lebesgue 測度と Lebesgue 外測度を表す.

Proposition 2.1.3. 函数 $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ は増加かつ連続であり $R>0$ とする．また集合 $E\subset(a,b)$ は

$$E\subset\left\{x\in(a,b):\ \bar{D}^{-}u(x):=\limsup_{y\to x-0}\frac{u(x)-u(y)}{x-y}>R\right\}$$

を満たすとする．このとき

$$R\mu_1^*(E)\le\mu_1^*(u(E))$$

が成り立つ．

Proof. 任意の $\varepsilon>0$ について開集合 G を $u(E)\subset G$ かつ $\mu_1(G)\le\mu_1^*(u(E))+\varepsilon$ を満たすように取る．そして開集合 $u^{-1}(G)\cap(a,b)$ を連結成分に分解し $u^{-1}(G)\cap(a,b)=\bigcup_n(a_n,b_n)$ を得たとする．各小区間 $[a_n,b_n]$ において函数 $F(x)=u(x)-Rx$ を考えよう．$x\in E\cap(a_n,b_n)$ ならば $\bar{D}^{-}u(x)>R$ より

$$\begin{aligned}&\exists y\in(a_n,x)\text{ with }u(x)-u(y)>R(x-y)\\ \Longrightarrow\quad&\exists y\in(a_n,x)\text{ with }F(y)<F(x)\\ \Longrightarrow\quad&\min_{a_n\le y\le x}u(y)<F(x)\end{aligned}$$

となる．よって

$$U_n=\{x\in(a_n,b_n):\min_{a_n\le y\le x}F(y)\le F(x)\}$$

と置けば

$$E\cap(a_n,b_n)\subset U_n$$

が成り立つ． Rising Sun Lemma (Theorem 2.1.2) によれば U_n は開集合であり，成分への分解 $U_n=\bigcup_k(c_k^{(n)},d_k^{(n)})$ を取れば $F(c_k^{(n)})\le F(d_k^{(n)})$ が成り立つ．これより

$$R(d_k^{(n)}-c_k^{(n)})\le u(d_k^{(n)})-u(c_k^{(n)})$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}\mu_1^*(E\cap(a_n,b_n))\le&\mu_1(U_n)\\ =&\mu_1\left(\bigcup_k(c_k^{(n)},d_k^{(n)})\right)\\ =&\sum_k\mu_1\left((c_k^{(n)},d_k^{(n)})\right)\\ =&\sum_k\{d_k^{(n)}-c_k^{(n)}\}\\ =&\frac{1}{R}\sum_k\{u(d_k^{(n)})-u(c_k^{(n)})\}\end{aligned}$$

が成り立つ．これらの不等式と $E \subset u^{-1}(G) \cap (a,b) = \bigcup_n (a_n, b_n)$ と合わせて

$$
\begin{aligned}
\mu_1^*(E) \leq & \mu_1^* \left(E \cap \bigcup_n (a_n, b_n) \right) \\
= & \sum_n \mu_1^* \left(E \cap (a_n, b_n) \right) \\
\leq & \frac{1}{R} \sum_n \left\{ \sum_k \{ u(d_k^{(n)}) - u(c_k^{(n)}) \} \right\} \\
\leq & \frac{1}{R} \sum_n \{ u(b_n) - u(a_n) \} \quad (\because \cup (c_k^{(n)}, d_k^{(n)}) \subset (a_n, b_n),\ \text{disjoint}) \\
\leq & \frac{1}{R} \sum_n \mu_1((u(a_n), u(b_n)))
\end{aligned}
$$

ここで $\{(u(a_n), u(b_n))\}_n$ は disjoint である．実際もしそうでないとすると $y \in (u(a_j), u(b_j)) \cap (u(a_k), u(b_k))$ が存在し，中間値の定理より $c_j \in (a_j, b_j)$, $c_k \in (a_k, b_k)$ を $y = u(c_j) = u(c_k)$ となるように取れる．従って閉区間 $[c_j \wedge c_k, c_j \vee c_k]$ 上で u は一定であり，開区間 $(a_j \wedge a_k, b_j \vee b_k)$ の u による像は G に含まれる．従って $(a_j \wedge a_k, b_j \vee b_k) \subset u^{-1}(G) \subset (a,b)$ となるが，これは (a_j, b_j), (a_k, b_k) が $u^{-1}(G) \subset (a,b)$ の連結成分であることに反する．よって

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{R} \sum_n \mu_1((u(a_n), u(b_n))) \\
= & \frac{1}{R} \mu_1 \left(\bigcup_n (u(a_n), u(b_n)) \right) \\
\leq & \frac{1}{R} \mu_1^* \left(u \left(\bigcup_n (a_n, b_n) \right) \right) \quad (\because u \text{ の連続性と中間値の定理より}) \\
\leq & \frac{1}{R} \mu_1(G) < \frac{1}{R} (\mu_1^*(u(E)) + \varepsilon)
\end{aligned}
$$

が成り立つ． □

以下では Proposition 2.1.3 から $\underline{D}_\varphi^{\pm} u(x)$ に関する結果を導くこと，及び u の連続性を落としても結果が成り立つことを示す．このためには増加函数の左逆函数が必要になる．

Lemma 2.1.4. 函数 $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ は増加であるとし $c = u(a) < d = u(b)$ とする．このとき

$$
v(y) = \inf\{ z \in [a,b] : u(z) \geq y \}, \quad c \leq y \leq d
$$

と置けば，v は増加であり $v(u(x)) \leq x$ が成り立つ．また $u(v(x)) < x$ が成り立つ為の必要十分条件はある $z \in [a,x)$ で $[z,x]$ 上 u が定数となるものが存在することである．さらに u が狭義増加ならば v は連続であり，$[a,b]$ 上 $v(u(x)) = x$ が成り立つ，つまり v は u の左逆函数である．

Proof. v が増加であることは明らかであろう．次に $x \in [a,b]$ に対して

$$
v(u(x)) = \inf\{ z \in [a,b] : u(z) \geq u(x) \} \leq \inf[x,b] = x
$$

が成り立つ．$x_0 := v(u(x)) < x$ ならば $z \in (x_0, x]$ について v の定義より $u(z) \geq u(x)$ が成り立ち，u の増加性より $u(z) \leq u(x)$ も成り立つので $u(z) = u(x)$ が成り立つ．逆にある $z < x$ について $[z,x]$ 上 $u \equiv u(x)$ であれば v の定義より $v(u(x)) \leq z < x$ が成り立つ．

u が狭義増加であれば u が定数値となる部分区間は存在しないので上の議論により $v(u(x)) \equiv x$ が成り立つことが分かる．またこのとき $x \in [a, b)$ について $x + \varepsilon < b$ を満たす $\varepsilon > 0$ を取ると $u(x) < y < u(x + \varepsilon)$ を満たす y について $x \le v(y) < x + \varepsilon$ が成り立つので u は右連続である．$x \in a, b]$ における左連続性も同様に示される． □

Proposition 2.1.5. 函数 $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ は狭義増加であり $r > 0$ とする．また集合 $E \subset (a, b)$ は

$$E \subset \left\{ x \in (a, b) : \ \underline{D}^- u(x) := \liminf_{y \to x-0} \frac{u(x) - u(y)}{x - y} < r \right\}$$

を満たすとする．このとき

$$\mu_1^*(u(E)) \le r \mu_1^*(E)$$

が成り立つ．

Proof. u に対して Lemma 2.1.4 における左逆函数 v を取る．このとき v は連続で $v(u(x)) = x$ が成り立つことに注意する．N を u の左不連続点の全体，つまり $N = \{x \in (a, b] \lim_{y \to x-0} u(y) < u(x)\}$ と置く．このとき N は高々可算であり $x \in E \setminus N$ についてある $\varepsilon \in (0, r)$ と $\{x_n\}$ で

$$\frac{u(x) - u(x_n)}{x - x_n} \ge r - \varepsilon, \quad x_n \to x - 0$$

を満たすものが存在する．u は x で左連続ゆえ $u(x_n) \to u(x)$ が成り立ち上式より (または u の狭義増加性より) $u(x_n) < u(x)$ が成り立つ．よって

$$\frac{v(u(x)) - v(u(x_n))}{u(x) - u(x_n)} \le \frac{1}{r - \varepsilon} > \frac{1}{r}$$

が成り立ち，これより $\bar{D}^- v(u(x)) > \frac{1}{r}$ が成り立つ．v は連続であるから v と $u(E \setminus N)$ に Proposition 2.1.3 を適用すれば

$$\frac{1}{r} \mu_1^*(u(E)) = \frac{1}{r} \mu_1^*(u(E \setminus N)) \le \mu_1^*(v(u(E \setminus N))) = \mu_1^*(E \setminus N) = \mu_1^*(E)$$

が成り立つ． □

Proposition 2.1.5 中の u に関する狭義増加性の仮定を落とすために補題を準備する．

Lemma 2.1.6. 2 つの函数 $u_1, u_2 [a, b] \to \mathbb{R}$ はともに増加であり $E \subset [a, b]$ とする．このとき

$$\mu_1^*(u_1(E)) + \mu_1^*(u_2(E)) \le \mu_1^*((u_1 + u_2)(E))$$

が成り立つ．

Proof. 任意の $\varepsilon > 0$ について開集合 G を $(u_1 + u_2)(E) \subset G$ かつ $\mu_1(G) \le \mu_1^*((u_1 + u_2)(E)) + \varepsilon$ を満たすように取る．$G = \bigcup_k (c_k, d_k)$ を成分への分解とすれば $x_1 < y_1$, $x_2 < y_2$ を満たす任意の $x_1, y_1, x_2, y_2 \in (u_1 + u_2)^{-1}((c_k, d_k))$ に対して

$$u_1(y_1) - u_1(x_1) + u_2(y_2) - u(x_2) \le (u_1 + u_2)(y_1 \vee y_2) - (u_1 + u_2)(x_1 \wedge x_2) \le d_k - c_k$$

が成り立つ．従って $A_k^{(i)} = \inf u_i((u_1+u_2)^{-1}((c_k,d_k)))$, $B_k^{(i)} = \sup u_i((u_1+u_2)^{-1}((c_k,d_k)))$ と置けば $u_i((u_1+u_2)^{-1}((c_k,d_k))) \subset I_k^{(i)} := [A_k^{(i)}, B_k^{(i)}]$ と $B_k^{(1)} - A_k^{(1)} + B_k^{(2)} - A_k^{(2)} \leq d_k - c_k$ が成り立つ．以上より

$$\begin{aligned}
\mu_1^*(u_1(E)) + \mu_1^*(u_2(E)) \leq& \mu_1^*(u_1((u_1+u_2)^{-1}(G))) + \mu_1^*(u_2((u_1+u_2)^{-1}(G))) \\
\leq& \mu_1^*(u_1((u_1+u_2)^{-1}(G))) + \mu_1^*(u_2((u_1+u_2)^{-1}(G))) \\
\leq& \mu_1^*(u_1\left(\bigcup_k (u_1+u_2)^{-1}((c_k,d_k))\right)) + \mu_1^*(u_2\left(\bigcup_k (u_1+u_2)^{-1}((c_k,d_k))\right)) \\
\leq& \sum_k \mu_1^*(u_1\left((u_1+u_2)^{-1}((c_k,d_k))\right)) + \sum_k \mu_1^*(u_2\left((u_1+u_2)^{-1}((c_k,d_k))\right)) \\
\leq& \sum_k \mu_1^*(I_k^{(1)}) + \sum_k \mu_1^*(I_k^{(2)}) \\
\leq& \sum_k (d_k - c_k) \\
=& \mu_1(G) < \mu_1^*((u_1+u_2)(E)) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Theorem 2.1.7. 函数 $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ は増加であり $r > 0$ とする．また集合 $E \subset (a,b)$ は

$$E \subset \left\{ x \in (a,b) : \ \underline{D}^- u(x) := \liminf_{y \to x-0} \frac{u(x)-u(y)}{x-y} < r \right\}$$

または

$$E \subset \left\{ x \in (a,b) : \ \underline{D}^+ u(x) := \liminf_{y \to x+0} \frac{u(y)-u(x)}{y-x} < r \right\}$$

を満たすとする．このとき

$$\mu_1^*(u(E)) \leq r\mu_1^*(E)$$

が成り立つ．

Proof. $\underline{D}^-$ の場合を考えよう．函数 $u + \mathrm{id}$ つまり $u(x)+x$ は狭義増加であり, $x \in E$ ならば $\underline{D}^-(u+\mathrm{id})(x) < r+1$ が成り立つので Proposition 2.1.5 を適用すれば Lemma 2.1.6 より

$$\mu_1^*(u(E)) + \mu_1(E) \leq \mu_1((u+\mathrm{id})(E)) \leq (r+1)\mu_1^*(E)$$

が成り立つ．

$\underline{D}^+$ の場合は $u(x)$ の代わりに $-u(-x)$ に上で示した結果を適用すれば直ちに得られる． □

それでは Proposition 2.1.3 中の u に関する連続性の仮定を落としても結果が成り立つことを示そう．

Theorem 2.1.8. 函数 $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ は増加であり $R > 0$ とする．また集合 $E \subset (a,b)$ は

$$E \subset \left\{ x \in (a,b) : \ \bar{D}^- u(x) := \limsup_{y \to x-0} \frac{u(x)-u(y)}{x-y} > R \right\}$$

または

$$E \subset \left\{ x \in (a,b) : \ \bar{D}^+ u(x) := \limsup_{y \to x+0} \frac{u(y)-u(x)}{y-x} > R \right\}$$

を満たすとする．このとき

$$R\mu_1^*(E) \leq \mu_1^*(u(E))$$

が成り立つ．

Proof. 任意の $y \in [u(a), u(b)]$ について $u^{-1}(y)$ は 1 点よりなるか, または非退化区間 (閉, 開, 半開も含めて) である．このような区間がもし存在すれば u の定数区間と呼ぼう．

まず $\bar{D}^+u(x)$ に関する結果を証明する．N_1 を u の右不連続点の全体とし, N_2 を u の定数区間の右端点の全体とする．このとき $N_1 \cup N_2$ は高々可算である．さて $x \in E \setminus (N_1 \cup N_2)$ について, ある $\varepsilon > 0$ と $\{x_n\}$ で

$$\frac{u(x_n) - u(x)}{x_n - x} \geq R + \varepsilon, \quad x_n \to x + 0$$

を満たすものが存在する．上式より $u(x_n) > u(x)$ であるから x は定数区間の内点でも左端点でもない．そして $x \notin N_2$ より右端点でもない．よって $v(u(x)) = x$ と $v(u(x_n)) \leq x_n$ が成り立つので

$$\frac{v(u(x_n)) - v(u(x))}{u(x_n) - u(x)} \leq \frac{x_n - x}{u(x_n) - u(x)} \leq \frac{1}{R + \varepsilon} < \frac{1}{R}$$

が成り立つ．$x \notin N_1$ より $u(x_n) \to u(x)$ であるから上式は $(\underline{D}^+v)(u(x)) < \frac{1}{R}$ を示す．そこで v と $u(E \setminus (N_1 \cup N_2))$ に Theorem 2.1.7 を適用して

$$\mu_1^*(E) = \mu_1^*(E \setminus (N_1 \cup N_2)) = \mu_1^*(v(u(E \setminus (N_1 \cup N_2)))) \leq \frac{1}{R}\mu_1^*(u(E \setminus (N_1 \cup N_2)))$$

が成り立つ． □

函数 $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ が狭義増加で連続とする．このとき函数 u の φ に関する微分を

$$D\varphi u(x) := \lim_{h \to 0} \frac{u(x + h) - u(x)}{\varphi(x + h) - \varphi(x)} \tag{2.1.2}$$

と定義する．詳しく言うと右辺の極限が存在するとき “u は φ に関し x において微分可能である” と言い, 極限値を記号 $D\varphi u(x)$ で表し, u の φ に関する x における微分係数と呼ぶ．

さて φ に関する微分係数の存在はつねに保証される訳ではない．そこで次の Dini 微分と呼ばれる 4 つの量を導入する．

Definition 2.1.9 (φ に関する Dini 微分)**.** 函数 $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ について

$$\underline{D}_\varphi^+ u(x) := \liminf_{y \to x+0} \frac{u(y) - u(x)}{\varphi(y) - \varphi(x)}, \qquad \bar{D}_\varphi^+ u(x) := \limsup_{y \to x+0} \frac{u(y) - u(x)}{\varphi(y) - \varphi(x)},$$

$$\underline{D}_\varphi^- u(x) := \liminf_{y \to x-0} \frac{u(x) - u(y)}{\varphi(x) - \varphi(y)}, \qquad \bar{D}_\varphi^- u(x) := \limsup_{y \to x-0} \frac{u(x) - u(y)}{\varphi(x) - \varphi(y)},$$

と定義する．

外測度評価と呼ばれる Theorem 2.1.7, 2.1.8 は φ に関する微分についても拡張可能である．証明の前に $x \in (a, b)$ について $y = \varphi(x)$ と置くとき上極限, 下極限や左右の極限及び $> R$, $< r$ などの不等式は全て複合同順として

$$\bar{\underline{D}}_\varphi^\pm u(x) > R \quad (\text{ or } < r) \quad \iff \quad \bar{\underline{D}}^\pm (u \circ \varphi^{-1})(y) > R \quad (\text{ or } < r)$$

が成り立つ．実際

$$
\begin{aligned}
&\bar{D}^+_\varphi u(x) > R\\
\Longleftrightarrow &\exists \varepsilon > 0 x_n \to x+0 : \frac{u(x_n)-u(x)}{\varphi(x_n)-\varphi(x)}\\
\Longleftrightarrow &\exists \varepsilon > 0 y_n \to y+0 : \frac{u\circ\varphi^{-1}(y_n)-u\circ\varphi^{-1}(y)}{y_n-y}\\
\Longleftrightarrow &\bar{D}^+(u\circ\varphi^{-1})(y) > R
\end{aligned}
$$

となり他の場合も同様である．従って

$$
E \subset \{x\in(a,b)\bar{D}^+_\varphi u(x) > R\} \quad\Longleftrightarrow\quad \varphi(E)\subset\{y\in(c,d)\bar{D}^+(u\circ\varphi^{-1})(\varphi(x)) > R\}
$$

が成り立つ．よって $u\circ\varphi^{-1}$ に Theorem 2.1.8 を用いて

$$
R\mu^*_\varphi(E) = R\mu^*_1(\varphi(E)) \le \mu^*_1((u\circ\varphi^{-1})(\varphi(E))) = \mu^*_1(u(E))
$$

が成り立つ．他の場合も同様であるから

Theorem 2.1.10. 函数 $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ は狭義増加連続とし, 函数 $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ は増加, そして $r>0$ とする．また集合 $E\subset(a,b)$ は

$$
E \subset \left\{x\in(a,b):\ \underline{D}^-_\varphi u(x) := \liminf_{y\to x-0}\frac{u(x)-u(y)}{\varphi(x)-\varphi(y)} < r\right\}
$$

または

$$
E \subset \left\{x\in(a,b):\ \underline{D}^+_\varphi u(x) := \liminf_{y\to x+0}\frac{u(y)-u(x)}{\varphi(y)-\varphi(x)} < r\right\}
$$

を満たすとする．このとき

$$
\mu^*_1(u(E)) \le r\mu^*_\varphi(E)
$$

が成り立つ．

Theorem 2.1.11. 函数 $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ は狭義増加連続とし, 函数 $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ は増加, そして $R>0$ とする．また集合 $E\subset(a,b)$ は

$$
E \subset \left\{x\in(a,b):\ \bar{D}^-_\varphi u(x) := \limsup_{y\to x-0}\frac{u(x)-u(y)}{\varphi(x)-\varphi(y)} > R\right\}
$$

または

$$
E \subset \left\{x\in(a,b):\ \bar{D}^+_\varphi u(x) := \limsup_{y\to x+0}\frac{u(y)-u(x)}{\varphi(y)-\varphi(x)} > R\right\}
$$

を満たすとする．このとき

$$
R\mu^*_\varphi(E) \le \mu^*_1(u(E))
$$

が成り立つ．

2.2 Vitali の被覆定理

この節では $\mathbb{R}^n$ における Vitali の被覆定理を証明する．μ_n, μ_n^* で n 次元の Lebesgue 測度と Lebesgeu 外測度を表す．

Definition 2.2.1. $a \in \mathbb{R}^n$ と $r > 0$ について $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-a| \leq r\}$ とおく．つまり中心 a, 半径 r の閉球である．また $\mathbb{R}^n$ 内の閉球 B について B と中心が一致し半径が 5 倍の閉球を $\hat{B}$ で表す．$B = B(a,r)$ のとき $\hat{B} = B(a,5r)$ である．以下では閉球とは, $B(a,0) = \{a\}$ のように 1 点に退化した場合を含まないとする．しかしながらこのことを強調したいときは非退化であるという．

Theorem 2.2.2 (Vitali's Covering Theorem)**.** $\mathcal{F}$ を $\mathbb{R}^n$ の非退化な閉球の族とする．このとき

$$D = \sup\{r : B(a,r) \in \mathcal{F}\} < \infty$$

ならば $\mathcal{F}$ の高々可算な部分族 $\mathcal{G} = \{B_j\}_{j=1}^J$ $(1 \leq J \leq \infty)$ で, 次の性質を持つものが存在する．

(1) $\{B_j\}_{j=1}^J$ は互いに交わらない, つまり $i \neq j$ ならば $B_i \cap B_j = \emptyset$.

(2) 任意の $B \in \mathcal{F}$ について, ある番号 j で $r_j > r/2$, $B \cap B_j \neq \emptyset$ かつ $B \subset \hat{B}$ をみたすものが存在する．

(3) $\displaystyle\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{j=1}^J \hat{B}_j$ が成り立つ．

Proof. 各 $k \in \mathbb{N}$ について

$$\mathcal{F}_k = \{B(a,r) \in \mathcal{F} : \frac{D}{2^k} < r \leq \frac{D}{2^{k-1}}\}$$

とおくと, 互いに交わらない．つまり $k \neq \ell$ ならば $\mathcal{F}_k \cap \mathcal{F}_\ell = \emptyset$ が成り立つ．また $\mathcal{F} = \cup_{k=1}^\infty \mathcal{F}_k$ である．

1. $\mathcal{F}_1$ の高々可算な部分族 $\{B_j^{(1)}\}_{j=1}^{J_1}$, $1 \leq J_1 \leq \infty$ で次の性質を持つものが存在することを示そう．

(i) $i \neq j$ ならば $B_i^{(1)} \cap B_j^{(1)} = \emptyset$

(ii) 任意の $B \in \mathcal{F}_1$ について, ある番号 i で $B \cap B_i^{(1)} \neq \emptyset$ をみたすものが存在する．

$\mathcal{F}_1$ をさらに分割し

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 =& \{a : B(a,r) \in \mathcal{F}_1\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\},\\ \mathcal{C}_p =& \{a : B(a,r) \in \mathcal{F}_1\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : p-1 < |x| \leq p\}, \quad p \geq 2\end{aligned}$$

とおく．まず $\mathcal{C}_1$ より 1 つの球を任意に取り $B_1^{(1)}$ とおく．$B = B(a,r) \in \mathcal{F}_1$ で $a \in C_1$, $B \cap B_1^{(1)} = \emptyset$ を満たすものが存在すれば, その 1 つを $B_2^{(1)}$ とおく．以下同様に $B_1^{(1)}, \ldots, B_j^{(1)}$ まで取りだせたとして $B = B(a,r) \in \mathcal{C}_1$ で $B(a,r) \cap (B_1^{(1)} \cup \cdots \cup B_j^{(1)}) = \emptyset$ をみたす $B = B(a,r) \in \mathcal{C}_1$ が存在すれば, その 1 つを $B_{j+1}^{(1)}$ とおく．この操作は有限回で終了する．何故ならばこのようにして取りだした閉球の列は互いに交わらず, 各球の半径は $D/2$ より大きく, さらに中心は $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ に含まれるからである．そこで $B_1^{(1)}, \ldots, B_{j_1}^{(1)}$ で操作が終了し, これ以上球が取りだせないとする．つまり $B_1^{(1)} \cup \cdots \cup B_{J_1}^{(1)}$ と交わらない $B \in \mathcal{C}_1$ は存在しないとする．

次に $B = B(a,r) \in \mathcal{C}_2$ を $B \cap (B_1^{(1)} \cup \cdots \cup B_{J_1}^{(1)}) = \emptyset$ をみたす $B = B(a,r) \in \mathcal{C}_2$ が存在すれば, その 1 つを $B_{J_1+1}^{(1)}$ とおき以下同様に互いに交わらない球を取り出すことを可能な限り続ける. この操作もやはり有限回で終了することは前と同様な理由から分かる. $\mathcal{C}_3, \ldots$ についても同様な操作を行い,

$$B_1^{(1)}, \ldots, B_{j_1}^{(1)}, \ldots, B_{j_2}^{(1)}, \ldots, B_{j_3}^{(1)}, \ldots, \quad 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq j_3 \leq \cdots$$

を得たとしよう. $\lim_{p\to\infty} j_p = J_1 \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ とおき, $\mathcal{G}_1 = \{B_j^{(1)}\}_{j=1}^{J_1}$ とおく. このとき $\mathcal{G}_1$ が性質 (i), (ii) を満たすことは $\mathcal{G}_1$ の選び出し方より明らかであろう.

2. $\mathcal{F}_1$ に引き続いて $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \ldots$ からも, 互いに交わらない閉球の高々可算な部分族の列 $\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \ldots$ を

$$k \neq \ell \text{ ならば任意の } B \in \mathcal{G}_k,\ B' \in \mathcal{G}_\ell \text{ について } B \cap B' = \emptyset$$

を満たすよう帰納的に取り出す. $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_k$ が取りだせたとして,

$$\mathcal{F}'_{k+1} = \{B \in \mathcal{F}_{k+1} : B \cap \tilde{B} = \emptyset\, \forall \tilde{B} \in \mathcal{G}_1 \cup \cdots \mathcal{G}_k\}$$

とおき, $\mathcal{F}'_{k+1}$ に **1**. の操作を行い取り出した閉球の列 $\{B_j^{(k+1)}\}_{j=1}^{J_{k+1}}$ を $\mathcal{G}_{k+1}$ とおけば良い.

3. $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots$ は高々可算個の閉球の族の列であるから, 適当に並び替えを行えば, 和 $\cup_k^\infty \mathcal{G}_k$ を可算個の閉球の族 $\mathcal{G} = \{B_j\}_{j=1}^J$, $J \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ と表すことができる. このとき作り方から $\mathcal{G}$ は互いに交わらない列である.

4. $\mathcal{G}$ が (2) をみたすことを示そう. $B = B(a,r) \in \mathcal{F}$ が任意に与えられたとする. $B \in \mathcal{F}_1$ の場合は $B \in \mathcal{C}_p$ を満たす p を取れば **1** で示したように B について $B \cap (B_1^{(1)} \cup \cdots B_{j_p}) \neq \emptyset$ が成り立つ. 従って $B \cap B' \neq \emptyset$ を満たす $B' = B(a', r') \in \mathcal{G}_1$ が存在する. このとき $B \in \mathcal{F}_1$ と $B' \in \mathcal{F}_1$ より $r \leq D = 2(D/2) < 2r'$ が成り立つ.

$B = B(a,r) \notin \mathcal{F}_1$ ならば $B \in \mathcal{F}_k$ となる, $k \geq 2$ を取る. このとき $B \cap B' \neq \emptyset$ をみたす $B_j = B(a_j, r_j) \in \mathcal{G}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{G}_k$ が存在する. このとき $B \in \mathcal{F}_k$ と $B_j \in \mathcal{G}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{G}_k \subset \mathcal{F}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_k$ より

$$r \leq \frac{D}{2^{k-1}} = 2\frac{D}{2^k} < 2r_j$$

が成り立つ. 以上より (2) が示された.

5. 最後に (3) を示そう. $x_0 \in \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B$ ならば $x_0 \in B = B(a,r)$ を満たす $B \in \mathcal{F}$ を取る. また **4** より $B_{j_0} = B(a_{j_0}, r_{j_0}) \in \mathcal{G}$ を $B \cap B_{j_0} \neq \emptyset$, $r < 2r_{j_0}$ を満たすように取れる. このとき $B \subset \hat{B}_{j_0}$ が成り立つことは. B_j と B の共有点を y とし x を B に属する任意の点とすれば

$$|a_{j_0} - x| \leq |a_{j_0} - y| + |y - x| \leq r_{j_0} + 2r < 5r_{j_0}$$

となることより従う. 従って $x \in B \subset \hat{B}_{j_0} \subset \bigcup_{j=1}^J \hat{B}_j$ となり, x の任意性より (3) が成り立つことが分かる. □

Definition 2.2.3. 閉球の族 $\mathcal{F}$ が $A \subset \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B$ を満たすとき A の被覆 *(cover* または *covering)* であるという. 特に

$$\inf\{r > 0 : x \in B(a,r) \in \mathcal{F}\} = 0, \quad x \in A$$

を満たすとき A の細被覆 *(fine cover* または *fine covering)* であるという.

Corollary 2.2.4. 閉球の族 $\mathcal{F}$ が集合 A の細被覆であり

$$\sup\{r>0 : B=B(a,r)\in\mathcal{F}\}<\infty$$

を満たすとする．このとき互いに交わらない $\mathcal{F}$ の部分族 $\mathcal{G}$ で次の性質を持つものが存在する．$\mathcal{G}$ から取り出した任意有限個の $B_1, B_m\in\mathcal{F}$ について

$$A\backslash\bigcup_{k=1}^{m}B_k\subset\bigcup_{B\in\mathcal{G}\backslash\{B_1,\ldots,B_m\}}\hat{B}.$$

Proof. $\mathcal{G}$ を Theorem 2.2.2 のように取る．$A\subset\bigcup_{k=1}^{m}B_k$ の場合, 上式は明らかに成り立つので, そうでないと仮定し $x\in A\backslash\bigcup_{k=1}^{m}B_k$ が与えられたとする．$\mathcal{F}$ は A の細被覆であること及び $B_1,\ldots,B_m$ は閉球であることより $B=B(a,r)\in\mathcal{F}$ で $x\in B$ かつ $B\cap\bigcup_{k=1}^{m}B_k=\emptyset$ を満たすものが存在する．このとき Theorem 2.2.2 (2) より $B'\in\mathcal{G}$ で $B'\cap B\neq\emptyset$, $B\subset\hat{B}'$ を満たすものが存在する．よって $x\in\hat{B}'\subset\bigcup_{B\in\mathcal{G}\backslash\{B_1,\ldots,B_m\}}\hat{B}$ が成り立ち, $x\in A\backslash\bigcup_{k=1}^{m}B_k$ の任意性より $A\backslash\bigcup_{k=1}^{m}B_k\subset\bigcup_{B\in\mathcal{G}\backslash\{B_1,\ldots,B_m\}}\hat{B}$ が成り立つ． □

Theorem 2.2.5. 開集合 $U\in\mathbb{R}^n$ と $\delta>0$ について互いに交わらない可算な閉球の族 $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ を

$$\mu_n\left(U\backslash\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\right)=0$$

が成り立つように取ることが出来る．

Proof. はじめに $\mu_n(U)<\infty$ の場合に示そう．$0<\theta<\frac{1}{5^n}$ を満たす定数 θ を任意に取る．

Claim. 任意の開集合 U と $\delta>0$ について有限個の閉球 $B_1=B(a_1,r_1),\ldots,B_K=B(a_K,r_K)$ を $r_1,\ldots,r_K\leq\delta$, $B_1\cup\cdots\cup B_K\subset U$ かつ

$$\mu_n\left(U\backslash\bigcup_{k=1}^{K}B_k\right)\leq(1-\theta)\mu_n(U)$$

が成り立つように取ることが出来る．

$\because$ $B(a,r)\subset U$, $r\leq\delta$ を満たす閉球 $B(a,r)$ の全てがなす族を $\mathcal{F}$ とする．Theorem 2.2.2 よりこの $\mathcal{F}$ について高々可算な部分族 $\mathcal{G}$ を互いに交わらず $U\subset\bigcup_{B\in\mathcal{G}}\hat{B}$ が成り立つように取ることができる．このとき

$$\mu_n\left(\bigcup_{B\in\mathcal{G}}B\right)=\sum_{B\in\mathcal{G}}\mu_n(B)=\frac{1}{5^n}\sum_{B\in\mathcal{G}}\mu_n\left(\hat{B}\right)\geq\frac{1}{5^n}\mu_n(U)$$

が成り立つが, $\mathcal{G}$ が高々可算であることより有限個の $B_1,\ldots,B_m\in\mathcal{G}$ を

$$\mu_n\left(\bigcup_{k=1}^{m}B_k\right)\geq\theta\mu_n(U)$$

が成り立つように取ることができる．この不等式と $\bigcup_{k=1}^{m}B_k\subset U$ より

$$\mu_n\left(U\backslash\bigcup_{k=1}^{m}B_k\right)=\mu_n(U)-\sum_{k=1}^{m}\mu_n(B_k)\leq\mu_n(U)-\theta\mu_n(U)=(1-\theta)\mu_n(U)$$

が成り立つ．

$U_1 = U$ とおき上で存在を示した閉球の列 $B_1, \ldots, B_m$ を取る. そして $K_0 = 0$, $K_1 = m$ とおく.

$$\mu_n\left(U_1 \backslash \bigcup_{k=1}^{K_1} B_k\right) \leq (1-\theta)\mu_n(U_1)$$

そして今度は開集合 $U_2 = U_1 \backslash \bigcup_{k=1}^{K_1} B_k$ と $\delta > 0$ に **Claim** を適用し, 互いに交わらない閉球の有限列 $B_{K_1+1}, \ldots, B_{K_2}$ を

$$\mu_n\left(U_2 \backslash \bigcup_{k=K_1+1}^{K_2} B_k\right) \leq (1-\theta)\mu_n(U_2)$$

が成り立つように取る.

以下帰納的に **Claim** を適用して互いに交わらない閉球の列

$$B_1, \ldots, B_{K_1}, \ldots, B_{K_{p-1}+1}, \ldots, B_{K_p}, \ldots$$

と開集合の列 $U_1, \ldots, U_p, \ldots$ を

$$\begin{aligned} U_{p+1} =& U_p \backslash \bigcup_{k=K_{p-1}+1}^{K_p} B_k, \\ \mu_n(U_{p+1}) \leq& (1-\theta)\mu_n(U_p), \quad p = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

が成り立つように取る. このとき

このとき

$$\begin{aligned} \mu_n\left(U \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \leq \mu_n\left(U \backslash \bigcup_{k=1}^{K_p} B_k\right) =& \mu_n\left(U_{p+1}\right) \\ \leq& (1-\theta)\mu_n\left(U_p\right) \\ &\vdots \\ \leq& (1-\theta)^p \mu_n\left(U_1\right) = (1-\theta)^p \mu_n\left(U\right) \end{aligned}$$

が任意の p について成り立つので $p \to \infty$ として $\mu_n\left(U \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = 0$ を得る. □

Theorem 2.2.6 (Vitali)**.** $E \subset \mathbb{R}^n$ は $\mu_n^*(E) < \infty$ を満たすとする. また $\mathcal{F}$ は非退化閉球の族で E の *fine cover* であるとする. このとき任意の $\varepsilon > 0$ について互いに交わらない高々可算個の部分族 $\{B_n\} \subset \mathcal{F}$ で

$$\mu_n^*\left(E \backslash \bigcup_n B_n\right) = 0, \quad \mu_n^*\left(\bigcup_n B_n\right) \leq \mu_n^*\left(E\right) + \varepsilon$$

を満たすものが存在する.

Proof. 証明は Theorem 2.2.5 と殆ど同じである.

はじめに $\mu_n^*(E) < \infty$ より開集合 U を $E \subset U$, $\mu_n(U) < \mu_n^*(E) + \varepsilon$ を満たすように取る. また $0 < \theta < \frac{1}{5^n}$ を満たす定数 θ を任意に取る.

Claim. 有限個の閉球 $B_1 = B(a_1, r_1), \dots, B_K = B(a_K, r_K) \in \mathcal{F}$ を $r_1, \dots, r_K \leq \delta$, $B_1 \cup \cdots \cup B_K \subset U$ かつ

$$\mu_n\left(U \backslash \bigcup_{k=1}^{K} B_k\right) \leq (1-\theta)\mu_n(U)$$

が成り立つように取ることが出来る.

$\because$ $B(a,r) \subset U$ を満たす閉球 $B(a,r) \in \mathcal{F}$ の全てがなす族を $\mathcal{F}_1$ とする. $\mathcal{F}$ は E の fine cover であるから, $\mathcal{F}_1$ も E の fine cover である.

Theorem 2.2.2 よりこの $\mathcal{F}_1$ から高々可算な部分族 $\mathcal{G}$ を互いに交わらず $U \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} \hat{B}$ が成り立つように取ることができる. このとき

$$\mu_n\left(\bigcup_{B \in \mathcal{G}} B\right) = \sum_{B \in \mathcal{G}} \mu_n(B) = \frac{1}{5^n} \sum_{B \in \mathcal{G}} \mu_n\left(\hat{B}\right) \geq \frac{1}{5^n} \mu_n(U)$$

が成り立つが, $\mathcal{G}$ が高々可算であることより有限個の $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{G}$ を

$$\mu_n\left(\bigcup_{k=1}^{m} B_k\right) \geq \theta \mu_n(U)$$

が成り立つように取ることができる. この不等式と $\bigcup_{k=1}^{m} B_k \subset U$ より

$$\mu_n\left(U \backslash \bigcup_{k=1}^{m} B_k\right) = \mu_n(U) - \sum_{k=1}^{m} \mu_n(B_k) \leq \mu_n(U) - \theta\mu_n(U) = (1-\theta)\mu_n(U)$$

が成り立つ.

□

Theorem 2.2.6 と同じ内容の結果が一般の Radon 測度についても成り立つが, 証明には Besicovitch の被覆定理と呼ばれる定理が必要である.

2.3 Vitali の被覆定理による外測度評価

この節では Vitali の被覆定理を用いた単調函数の微分に関する Lebesgue の定理の証明を解説する. Vitali の定理を用いると前節で示した片側微分係数についての外測度評価を得るのみならず, 次の upper derivative, lower derivative

$$\bar{D}_\varphi u(x) := \limsup_{y \to x} \frac{u(y) - u(x)}{\varphi(y) - \varphi(x)}, \quad \underline{D}_\varphi u(x) := \liminf_{y \to x} \frac{u(y) - u(x)}{\varphi(y) - \varphi(x)}$$

に関する外測度評価を得ることが出来る. その前に upper derivative, lower derivative は x にまたがる $x_1 \leq x \leq x_2$ について $0 < x_2 - x_1 \to 0$ としたときの上極限, 下極限とも一致することに注意しておこう. つまり

$$\bar{D}^*_\varphi u(x) = \limsup_{x_1 \leq x \leq x_2,\, x_2 - x_1 \to 0+} \frac{u(x_2) - u(x_1)}{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}, \quad \underline{D}^*_\varphi u(x) := \liminf_{x_1 \leq x \leq x_2,\, x_2 - x_1 \to 0+} \frac{u(x_2) - u(x_1)}{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}$$

と置くとき

$$\bar{D}^*_\varphi u(x) = \bar{D}_\varphi u(x), \qquad \underline{D}^*_\varphi u(x) = \underline{D}_\varphi u(x)$$

が成り立つ．この事実に 1 年ほど気が付かずにいたが, McShane [4] §31.1 の節末の exercise に記載があることを発見した．Loewner の微分方程式のように $s, t \in I\ s < t$ についての半群 $\{\omega_{st}\}_{s,t\in I,\, s<t}$ を扱う際には $\bar{D}^*_\varphi u(x)$, $\underline{D}^*_\varphi u(x)$ を考えることが重要なので, これらの等式が成り立つことは大変役有り難い．念の為に証明しておこう．

Proof. $\bar{D}^*_\varphi u(x) = \bar{D}_\varphi u(x)$ を示そう．有限値かそうでないかに関わらず $\bar{D}_\varphi u(x) \leq \bar{D}^*_\varphi u(x)$ が成り立つことは明らかである．

逆の不等式 $\bar{D}^*_\varphi u(x) \leq \bar{D}_\varphi u(x)$ が成り立つことを示そう．まず $\bar{D}_\varphi u(x) = \infty$ の場合は自明に成り立つ．$\bar{D}_\varphi u(x) \in \mathbb{R}$ のときを考える．任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を $0 < |y - x| < \delta$ ならば

$$\frac{u(y) - u(x)}{\varphi(y) - \varphi(x)} < \bar{D}_\varphi u(x) + \varepsilon$$

が成り立つように取る．このとき x_1, x_2 が $x_1 \leq x \leq x_2$, $0 < x_2 - x_1 < \delta$ を満たすとき $0 \leq x - x_1 < \delta$, $0 \leq x_2 - x < \delta$ であるから $x_1 < x$ ならば

$$\frac{u(x_1) - u(x)}{\varphi(x_1) - \varphi(x)} < \bar{D}_\varphi u(x) + \varepsilon$$

より

$$u(x) - u(x_1) \leq (\bar{D}_\varphi u(x) + \varepsilon)(\varphi(x) - \varphi(x_1))$$

が成り立つ．またこの不等式は $x_1 = x$ の場合でも自明に成り立つ．同様に

$$u(x_2) - u(x) \leq (\bar{D}_\varphi u(x) + \varepsilon)(\varphi(x_2) - \varphi(x))$$

が成り立つ．これらの不等式を辺々加えて

$$u(x_2) - u(x_1) \leq (\bar{D}_\varphi u(x) + \varepsilon)(\varphi(x_2) - \varphi(x_1))$$

が成り立つことが分かり, これより $\bar{D}^*_\varphi u(x) \leq \bar{D}_\varphi u(x)$ が従う．$\bar{D}_\varphi u(x) = -\infty$ の場合については任意の $M > 0$ について $\delta > 0$ を $0 < |y - x| < \delta$ ならば

$$\frac{u(y) - u(x)}{\varphi(y) - \varphi(x)} < -M$$

が成り立つように取れば, 上と同様に

$$u(x_2) - u(x_1) \leq -M(\varphi(x_2) - \varphi(x_1))$$

が成り立つので $\bar{D}^*_\varphi u(x) \leq -M$ となり $\bar{D}^*_\varphi u(x) = -\infty = \bar{D}_\varphi u(x)$ が従う．

$\underline{D}^*_\varphi u(x) = \underline{D}_\varphi u(x)$ についても同様である． □

Theorem 2.3.1. 函数 $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ は狭義増加連続とし, 函数 $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ は増加, そして $r > 0$ とする．また集合 $E \subset (a, b)$ は

$$E \subset \left\{ x \in (a, b) :\ \underline{D}_\varphi u(x) := \liminf_{x_1 \leq x \leq x_2} \frac{u(x_2) - u(x_1)}{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)} < r \right\}$$

を満たすとする．このとき

$$\mu_1^*(u(E)) \leq r\mu_\varphi^*(E)$$

が成り立つ．

Proof. $y \in [u(a), u(b)]$ について $u^{-1}(y)$ は 1 点よりなるか非退化 (閉, 開, 半開を問わず) 区間である．このような区間を u の定数区間と呼ぶ．B を $u^{-1}(y)$ が非退化 (閉, 開, 半開を問わず) 区間となる y の全体とすれば B は高々可算集合である．また u の全ての定数区間に番号をつけ A_k と置く，このとき $u\left(\bigcup_k \bar{A}_k\right)$ は，各 k について高々 2 点 B に新しい点が付け加わるだけなのでやはり高々可算集合である．

$\varepsilon > 0$ について開集合 G を $E \subset G$ かつ $\mu_\varphi(G) < \mu_\varphi^*(E) < \varepsilon$ を満たすように取る．各 $x_0 \notin \bigcup_k \bar{A}_k$ に対し $x_1 \leq x \leq x_2$, $x_1 < x_2$ ならば $u(x_1) < u(x_2)$ が成り立つことに注意しよう．そこで各 $x_0 \in E \backslash \bigcup_k \bar{A}_k$ について非退化閉区間 $I_n(x_0) = [c_n, d_n]$ を $x_0 \in I_n(x_0) \subset G$, $d_n - c_n \to 0+$ かつ

$$\frac{u(d_n) - u(c_n)}{\varphi(d_n) - \varphi(c_n)} < r$$

を満たすように取る．$J_n(x_0) = [u(c_n), u(d_n)]$ と置くと

$$\mu_1(J_n(x_0)) \leq r\mu_\varphi(I_n(x_0))$$

が成り立つ．$J_n(x_0)$ は非退化閉区間であり，上の不等式より $u(d_n) - u(c_n) = \mu_1(I_n(x_0)) \to +0$ が成り立つので $\{J_n(x_0)\}_{x_0 \in E,\, n \in \mathbb{N}}$ は $u\left(E \backslash\backslash \bigcup_k \bar{A}_k\right)$ の細被覆である．よって Vitali の被覆定理 (Theorem 2.2.6) より

$$\mu_1^*\left(u\left(E \backslash \bigcup_k \bar{A}_k\right) \backslash \bigcup_i J_{n_i}(x_i)\right) = 0$$

を満たす高々可算個で交わらない閉区間列 $\{J_{n_i}(x_i)\}_i$ が存在する．これに対応する閉区間列 $\{I_{n_i}(x_i)\}_i$ も交わらず $I_{n_i}(x_i) \subset G$ が成り立つ．以上より

$$\begin{aligned}
\mu_1^*(u(E)) =& \mu_1^*\left(u\left(E \backslash \bigcup_k \bar{A}_k\right)\right) + \mu_1^*\left(u\left(\bigcup_k \bar{A}_k\right)\right) \\
=& \mu_1^*\left(u\left(E \backslash \bigcup_k \bar{A}_k\right)\right) \\
\leq& \mu_1\left(\bigcup_i J_{n_i}(x_i)\right) \\
=& \sum_i \mu_1(J_{n_i}(x_i)) \leq p\sum_i \mu_\varphi(I_{n_i}(x_i)) = p\mu_\varphi\left(\bigcup_i I_{n_i}(x_i)\right) \leq \mu_1(G) < \mu_1^*(E) + \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ． □

Theorem 2.3.2. 函数 $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ は狭義増加連続とし，函数 $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ は増加，そして $R > 0$ とする．また集合 $E \subset (a, b)$ は

$$E \subset \left\{x \in (a, b) :\ \bar{D}_\varphi u(x) := \limsup_{x_1 \leq x \leq x_2,\, x_2 - x_1 \to 0+} \frac{u(x_2) - u(x_1)}{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)} > R\right\}$$

を満たすとする．このとき

$$R\mu_\varphi^*(E) \leq \mu_1^*(u(E))$$

が成り立つ.

Proof. $\varepsilon > 0$ について有界な開集合 G を $u(E) \subset G$, $\mu_1(G) < \mu_1^*(u(E)) + \varepsilon$ を満たすように取る.

A を u の不連続点の全体とし, 各 $x_0 \in E \backslash A$ に対し非退化閉区間 $I_n(x_0) = [c_n, d_n]$ を $x_0 \in I_n(x_0)$, $d_n - c_n \to 0+$ かつ

$$\frac{u(d_n) - u(c_n)}{\varphi(d_n) - \varphi(c_n)} > R$$

を満たすように取る. $J_n(x_0) = [u(c_n), u(d_n)]$ と置くと x_0 は u の連続点であり $u(x_0) \in u(E) \subset G$ であるから必要ならば有限項を取り除くことにより $J_n(x_0) \subset G$ が成り立つと仮定してよい. また

$$\mu_\varphi(I_n(x_0)) \leq \mu_1(J_n(x_0))$$

が成り立つ.

さて $\{I_n(x_0)\}_{x_0 \in E \backslash A,\, n \in \mathbb{N}}$ は $E \backslash A$ の細被覆である. 従って $\{\varphi(I_n(x_0))\}_{x_0 \in E \backslash A,\, n \in \mathbb{N}}$ は $\varphi(E \backslash A)$ の細被覆である. よって Vitali の被覆定理 (Theorem 2.2.6) より

$$\mu_\varphi^* \left(E \backslash \bigcup_i I_{n_i}(x_i) \right) = \mu_1^* \left(\varphi(E \backslash A) \bigcup_i \varphi(I_{n_i}(x_i)) \right) = 0$$

を満たす高々可算個で交わらない閉区間列 $\{I_{n_i}(x_i)\}_i$ が存在する. 函数 u は増加であるから $\{I_{n_i}(x_i)\}_i$ に対応する閉区間列 $\{J_{n_i}(x_i)\}_i$ のどの 2 つも内点を共有しないことに注意する. 以上より

$$\begin{aligned}
R\mu_\varphi^*(E) &\leq R\mu_\varphi \left(\bigcup_i I_{n_i}(x_i) \right) \\
&= R \sum_i \mu_\varphi(I_{n_i}(x_i)) \\
&\leq \sum_i \mu_1(J_{n_i}(x_i)) \\
&= \sum_i \mu_1(\mathrm{Int}\, J_{n_i}(x_i)) \\
&= \mu_1 \left(\bigcup_i \mathrm{Int}\, J_{n_i}(x_i) \right) \\
&\leq \mu_1(G) \\
&< \mu_1^*(u(E)) + \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ. □

2.4 単調函数の微分に関する Lebesgue の定理と導函数の積分評価

それではこの節の最後に Lebesgue の定理を証明する.

Theorem 2.4.1. 函数 $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ は狭義増加連続とし, 函数 $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ は増加とする. このとき集合 $E \subset [a, b]$ で $\mu_\varphi^*(E) = 0$ かつ任意の $x \in (a, b) \backslash E$ について

(2.4.1) $$\underline{D}_\varphi^- u(x) = \bar{D}_\varphi^+ u(x) = \underline{D}_\varphi^- u(x) = \bar{D}_\varphi^- u(x) \in \mathbb{R}$$

が成り立つものが存在する．また $I=\{x\in(a,b):\bar{D}_\varphi^+u(x)=\infty\ or\ \bar{D}_\varphi^-u(x)=\infty\}$ と置けば $\mu_\varphi^*(I)=0$ であり，$Z=\{x\in(a,b):\underline{D}_\varphi^+u(x)=0\ or\ \underline{D}_\varphi^-u(x)=0\}$ と置けば $\mu_1^*(u(Z))=0$ が成り立つ．

Proof. $0<r<R$ を満たす $r,\ R$ について

$$E_{rR}=\{x\in(a,b):\underline{D}_\varphi^-u(x)<r<R<\bar{D}_\varphi^+u(x)\}$$

と置けば $R\mu_\varphi^*(E_{rR})\le\mu_1^*(E_{rR})\le r\mu_\varphi^*(E_{rR})$ が成り立つ．よって $\mu_\varphi^*(E_{rR})=\mu_1^*(\varphi(E_{rR}))=0$ である．これより

$$E_1=\{x\in(a,b):\underline{D}_\varphi^-u(x)<\bar{D}_\varphi^+u(x)\}$$

について $\mu_\varphi^*(E_1)=\mu_1^*(E_1)=0$ が従う．同様に

$$E_2=\{x\in(a,b):\underline{D}_\varphi^+u(x)<\bar{D}_\varphi^-u(x)\}$$

についても $\mu_\varphi^*(E_2)=\mu_1^*(E_2)=0$ が従う．よって $E_0=E_1\cup E_2$ と置けば $\mu_\varphi^*(E_0)=\mu_1^*(E_0)=0$ であり $x\in(a,b)\backslash E_0$ について

$$\underline{D}_\varphi^-u(x)\le\bar{D}_\varphi^-u(x)\le\underline{D}_\varphi^+u(x)\le\bar{D}_\varphi^+u(x)\le\underline{D}_\varphi^-u(x)$$

が成り立つ．また $I^+=\{x\in(a,b):\bar{D}_\varphi^+u(x)=\infty\}$, $I^-=\{x\in(a,b):\bar{D}_\varphi^-u(x)=\infty\}$ と置けば $R\mu_\varphi(I^+)\le\mu_1(u(I^+))\le u(b)-u(a)$, $R\mu_\varphi(I^-)\le\mu_1(u(I^-))\le u(b)-u(a)$ が成り立つので $\mu_\varphi(I^+)=\mu_\varphi(I^-)=0$ である．よって $I=I^+\cup I^-$ も $\mu_\varphi^*(I)=0$ を満たし $E=E_0\cup I$ と置けば $\mu_\varphi^*(E)=0$ であり，$x\in(a,b)\backslash E$ について (2.4.2) が成り立つ．最後に Z については $\mu_1^*(u(Z))\le r\mu_\varphi^*(E)\le r(\varphi(b)-\varphi(a))$ が任意の $r>0$ に対し成り立つので $\mu_1^*(u(Z))=0$ である． □

次は $\bar{D}_\varphi u,\ \underline{D}_\varphi u$ を用いて表現した Lebesgue の定理を述べよう．

Theorem 2.4.2. 函数 $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ は狭義増加連続とし，函数 $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ は増加とする．このとき集合 $E\subset[a,b]$ で $\mu_\varphi^*(E)=0$ かつ任意の $x\in(a,b)\backslash E$ について

$$\underline{D}_\varphi u(x)=\bar{D}_\varphi u(x)\in\mathbb{R} \tag{2.4.2}$$

が成り立つものが存在する．また $I=\{x\in(a,b):\bar{D}_\varphi u(x)=\infty\}$ と置けば $\mu_\varphi^*(I)=0$ であり，$Z=\{x\in(a,b):\underline{D}_\varphi u(x)=0\}$ と置けば $\mu_1^*(u(Z))=0$ が成り立つ．

Proof. $0<r<R$ を満たす $r,\ R$ について

$$E_{rR}=\{x\in(a,b):\underline{D}_\varphi u(x)<r<R<\bar{D}_\varphi u(x)\}$$

と置けば $R\mu_\varphi^*(E_{rR})\le\mu_1^*(E_{rR})\le r\mu_\varphi^*(E_{rR})$ が成り立つ．よって $\mu_\varphi^*(E_{rR})=\mu_1^*(\varphi(E_{rR}))=0$ である．これより

$$E_0=\{x\in(a,b):\underline{D}_\varphi u(x)<\bar{D}_\varphi u(x)\}$$

について $\mu_\varphi^*(E_0)=\mu_1^*(E_0)=0$ が従う．$x\in(a,b)\backslash E_0$ について

$$\underline{D}_\varphi u(x)=\bar{D}_\varphi u(x)$$

が成り立つ．また $I=\{x\in(a,b):\bar{D}_\varphi u(x)=\infty\}$ と置けば $R\mu_\varphi(I)\le\mu_1(u(I))\le u(b)-u(a)$ が成り立つので $\mu_\varphi(I)=0$ である．$E=E_0\cup I$ と置けば $\mu_\varphi^*(E)=0$ であり, $x\in(a,b)\backslash E$ について (2.4.2) が成り立つ．最後に Z については $\mu_1^*(u(Z))\le r\mu_\varphi^*(E)\le r(\varphi(b)-\varphi(a))$ が任意の $r>0$ に対し成り立つので $\mu_1^*(u(Z))=0$ である． □

最後に導函数の積分の評価を与えておこう．

Theorem 2.4.3. 函数 $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ が連続かつ増加ならば

$$\int_{[a,b]}D_\varphi u(x)\,d\mu_\varphi(x)\le u(b)-u(a)$$

が成り立つ．特に非負函数 $D_\varphi u$ は μ_φ に関して可積分である．

Proof. 各 $n\in\mathbb{N}$ について

$$x_k^{(n)}=a+\frac{k(b-a)}{2^n},\quad k=0,1,\ldots,2^n$$

とおき

$$g_n(x)=\frac{f(x_k^{(n)})-f(x_{k-1}^{(n)})}{\varphi(x_k^{(n)})-\varphi(x_{k-1}^{(n)})},\quad x_{k-1}^{(n)}\le x<x_k^{(n)},\quad k=1,2,\ldots,2^n$$

とおく．このとき集合 $\{x_k^{(n)}:n\in\mathbb{N},\ k=0,1,\ldots,2^n\}$ は μ_φ-測度 0 である．また u が φ に関して微分不可能な点の全体を E_0 とし $E=E_0\cup\{x_k^{(n)}:n\in\mathbb{N},\ k=0,1,\ldots,2^n\}$ とおけば $\mu_\varphi(E)=0$ であり $x\in I\backslash E$ について $n\to\infty$ のとき $g_n(x)\to D_\varphi u(x)$ が成り立つ．従って Fatou の補題より

$$\int_{[a,b]}D_\varphi u(x)\,d\mu_\varphi(x)\le\liminf_{n\to\infty}\int_{[a,b]}g_n(x)\,d\mu_\varphi(x)$$

が成り立つ．この不等式を次の等式と組み合わせれば直ちに Theorem 中の不等式を得る．

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]}g_n(x)\,d\mu_\varphi(x)&=\sum_{k=1}^{2^n}\int_{[x_{k-1}^{(n)},x_k^{(n)})}\frac{f(x_k^{(n)})-f(x_{k-1}^{(n)})}{\varphi(x_k^{(n)})-\varphi(x_{k-1}^{(n)})}\,d\mu_\varphi(x)\\&=\sum_{k=1}^{2^n}\frac{f(x_k^{(n)})-f(x_{k-1}^{(n)})}{\varphi(x_k^{(n)})-\varphi(x_{k-1}^{(n)})}\mu_\varphi([x_{k-1}^{(n)},x_k^{(n)}))\\&=\sum_{k=1}^{2^n}\{f(x_k^{(n)})-f(x_{k-1}^{(n)})\}=f(b)-f(a)\end{aligned}$$

□

2.5 Banach-Zarecki の定理

絶対連続函数の定義を行う前に函数による可測集合の像について考えておこう．高々可算個の閉集合の和として表される集合のことを F_σ 集合と呼ぶ．

Definition 2.5.1. 函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が

$$E\subset[a,b]\ \mathit{with}\ \mu_\varphi^*(E)=0 \quad\Longrightarrow\quad \mu_1^*(f(E))=0$$

を満たすとき *Lusin* の条件 (N) を満たすという.

Theorem 2.5.2. 函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が連続ならば任意の F_σ 集合 $E\subset[a,b]$ の像 $f(E)$ も F_σ 集合である.

Proof. E_n, $n=1,2,\ldots$ を $[a,b]$ 内の閉集合の列とし, $E=\cup_{n=1}^\infty E_n$ とする. このとき E_n はコンパクトであるから, $f(E_n)$ もそうであり, 特に閉集合である. よって $f(E)=\bigcup_{n=1}^\infty f(E_n)$ は F_σ 集合である. □

Theorem 2.5.3. 連続函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が *Lusin* の条件 (N) を満たせば

$$A\subset[a,b] \text{ が } \varphi\text{-可測集合} \quad\Longrightarrow\quad f(A) \text{ は } \mathit{Lebesgue} \text{ 可測集合} \tag{2.5.1}$$

が成り立つ.

Proof. $A\subset[a,b]$ が φ-可測ならば μ_φ の内正則性より F_σ 集合 A_0 と φ-測度 0 の集合 E で $A=A_0\cup E$, $A_0\cap E=\emptyset$ を満たすものが存在する. このとき $f(A_0)$ は F_σ 集合であるから Lebesgue 可測であり, Lusin の条件 (N) より $\mu_1^*(f(E))=0$ が成り立つので $f(E)$ も Lebesgue 可測である. よって $f(A)=f(A_0)\cup f(E)$ は Lebesugu 可測である. □

Remark 2.5.4. μ_φ が 1 次元 *Lebesgue* 測度の場合 *Lebesgue* 可測函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ について *Lusin* の条件 *(N)* と *(2.5.1)* は同値になる. 実際 *(N)* を仮定し A を *Lebesgue* 可測集合とすれば *Lusin* の定理よりコンパクト集合 $K_j\subset A$, $j=1,2,\ldots$ を K_j 上 f は連続であり, $E=A\backslash\bigcup K_j$ の *Lebesgue* 測度が 0 となるように取ることが出来る. このとき $f(\cup_j K_j)=\cup_j f(K_j)$ は F_σ 集合であり $f(E)$ は 条件 *(N)* より *Lebesgue* 可測であるから $f(A)=f(\cup_j K_j)\cup f(E)$ も *Lebesgue* 可測である. また逆に *(N)* が成り立たないとすれば $m_1^*(E)=0$ かつ $m_1^*(f(E))>0$ を満たす集合 $E\subset[a,b]$ が存在する. このとき非 *Lebesgue* 可測集合 $B\subset f(E)$ を取り $E_0=f^{-1}(B)\cap E$ と置けば, $\mu_1^*(E_0)\le\mu_1^*(E)=0$ であるから E_0 は *Lebesgue* 可測であるが, その像 $f(E_0)=B$ は *Lebesgue* 可測でない.

次に連続かつ有界変動函数が φ-絶対連続函数となるための必要十分条件は Lusin の性質 (N) が成り立つことであるという Banach-Zarecki による特徴付を解説しよう. その前に補題を準備する.

Lemma 2.5.5. $\mathbb{R}$ の部分集合の列 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ が増加, つまり $A_n\subset A_{n+1}$ を満たせば $A=\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ について

$$\lambda_\varphi^*(A)=\lim_{n\to\infty}\mu_\varphi^*(A_n)$$

が成り立つ.

Proof. μ_φ-可測集合 B, B_n, $n=1,2\ \ldots$ を

$$A\subset B,\quad \mu_1^*(A)=\mu_1(B),\quad A_n\subset B_n,\quad \mu_1^*(A_n)=\mu_1(B_n)$$

を満たすように取る. このとき

$$H_n=B\cap\bigcap_{k=n}^\infty B_k,\quad n=1,2,\ldots,\quad H=\bigcup_{n=1}^\infty H_n=B\cap\bigcup_{n=1}^\infty\bigcap_{k=n}^\infty B_k$$

と置くと, これらは全て μ_φ-可測集合であり

$$A_n \subset H_n \subset B_n, \quad A \subset H \subset B \text{ and } H_n \subset H_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

が成り立つので,

$$\mu_\varphi^*(A_n) = \mu_\varphi(H_n), \qquad n = 1, 2, \ldots \quad \mu_\varphi^*(A) = \mu_\varphi(H),$$

が成り立つ. よって

$$\lambda_\varphi^*(A) = \lambda_\varphi(H) = \lim_{n\to\infty} \mu_\varphi(H_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_\varphi^*(A_n)$$

□

Lemma 2.5.6. $p > 0$ とする. 函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が集合 $E \subset [a,b]$ の各点において微分可能で $|D_\varphi f(x)| < p$ を満たせば

$$\mu_1^*(f(E)) \leq p\mu_\varphi^*(E)$$

が成り立つ.

Proof. $\varepsilon > 0$ とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ について

$$E_n = \left\{ x \in E : |f(x_1) - f(x_2)| < p(\varphi(x_2) - \varphi(x_1)) \text{ whenever } x_1 \leq x \leq x_2,\ 0 < x_2 - x_1 < \frac{1}{n} \right\}.$$

と置くと $E_n \subset E_{n+1},\ n = 1, 2, \ldots$ と $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ を満たす. よって Lemma 2.5.5 より $\mu_\varphi^*(E) = \lim_{n\to\infty} \mu_\varphi^*(E_n)$ が成り立つ. また $f(E) = \bigcup_{n=1}^\infty f(E_n)$ を満たすので $\mu_1^*(f(E)) = \lim_{n\to\infty} \mu_1^*(f(E_n))$ が成り立つ. ここで各 n について区間の長さが $\frac{1}{n}$ より小さな閉区間の列 $\{I_k^{(n)}\}$ で $E_n \subset \bigcup_k I_k^{(n)}$, $\sum_k \mu_\varphi(I_k^{(n)}) < \mu_\varphi^*(E_n) + \varepsilon$ が成り立つものを取ると, $\mu_1^*(f(E \cap I_k^{(n)})) \leq p\mu_\varphi(I_k^{(n)})$ が成り立つので

$$\mu_1^*(f(E_n)) \leq \sum_k \mu_1^*(f(E_n \cap I_k^{(n)})) \leq \sum_k p\mu_\varphi(I_k^{(n)}) \leq p\left(\mu_1^*(E_n) + \varepsilon\right)$$

が成り立つ. $n \to \infty$ とした後に $\varepsilon \to 0$ とすれば所与の不等式が得られる. □

Theorem 2.5.7. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を φ-可測函数とする. また $E \subset [a,b]$ を φ-可測集合とし, E の各点において f は φ-微分可能とすれば

$$\mu_1^*(f(E)) \leq \int_E |D_\varphi f|\, d\mu_\varphi$$

が成り立つ.

Proof. はじめに E は φ-可測であるから $f|_E$ も φ-可測であることに注意する. 従って $\varepsilon > 0$ について

$$E_n = \{x \in E : (n-1)\varepsilon \leq |D_\varphi f(x)| < n\varepsilon\}$$

と置けば E_n も φ-可測であり $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ は互いに交わらず $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ が成り立つ. よって $f(E) = \bigcup_{n=1}^\infty f(E_n)$ が成り立つので Lemma 2.5.6 より

$$\begin{aligned}
\mu_1^*(f(E)) &\leq \sum_{n=1}^\infty \mu_1^*(f(E_n)) \\
&\leq \sum_{n=1}^\infty n\varepsilon\mu_\varphi^*(E_n) \leq \sum_{n=1}^\infty (n-1)\varepsilon\mu_\varphi^*(E_n) + \sum_{n=1}^\infty \varepsilon\mu_\varphi^*(E_n) \\
&\leq \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} |D_\varphi f|\, d\mu_\varphi + \varepsilon \sum_{n=1}^\infty \mu_\varphi(E_n) = \int_E |D_\varphi f|\, d\mu_\varphi + \varepsilon\mu_\varphi(E)
\end{aligned}$$

を得る.

$\square$

Theorem 2.5.8 (Banach-Zarecki)**.** 函数 $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ について u が $[a,b]$ 上で φ-絶対連続であることは次の 3 条件が全て成り立つことと同値である.

(i) u は $[a,b]$ で連続.
(ii) u は μ_φ-殆ど至るところ φ-微分可能であり $D_\varphi u\in L^1([a,b],\mu_\varphi)$.
(iii) $\mu_\varphi(E)=0$ を満たす $E\subset[a,b]$ について $\mu_1(u(E))=0$ が成り立つ.

Proof. u が $[a,b]$ 上で φ-絶対連続とする. このとき Theorem 3.3.2 より u は $[a,b]$ で連続であり, かつ有界変動である. 従って増加函数の差として表されるので Corollary 3.1.4 より μ_φ-殆ど至るところ φ-微分可能であり $D_\varphi u\in L^1([a,b],\mu_\varphi)$ が成り立つ.

(iii) を示そう. $E\subset[a,b]$ が $\mu_\varphi(E)=0$ を満たすとする. 一般性を失うことなく $a,b\notin E$ と仮定してよい. $\varepsilon>0$ を任意に取り固定する. この ε に対し φ-絶対連続性の定義における $\delta>0$ を取る. そして開集合 $V\subset(a,b)$ を $E\subset V$, $\mu_\varphi(V)<\delta$ を満たすように取る. V を連結成分に分解し $V=\bigcup_k(a_k,b_k)$ を得たとする. $\{(a_k,b_k)\}$ は交わらないので $\sum_k(\varphi(b_k)-\varphi(a_k))=\mu_\varphi(V)<\delta$ が成り立つ. ここで $a_k^*,b_k^*\in[a_k,b_k]$ を

$$u(a_k^*)=\min_{a_k\le x\le b_k}u(x),\qquad u(b_k^*)=\max_{a_k\le x\le b_k}u(x)$$

を満たすように取る. このとき中間値の定理より $\overline{u((a_k,b_k))}=[u(a_k^*),u(b_k^*)]$ が成り立つ. また $a_k^*,b_k^*\in[a_k,b_k]$ より $|\varphi(b_k^*)-\varphi(a_k^*)|\le\varphi(b_k)-\varphi(a_k)$ が成り立つので $\sum_k|\varphi(b_k^*)-\varphi(a_k^*)|\le\sum_k(\varphi(b_k)-\varphi(a_k))<\delta$ となり, $\sum_k|u(b_k^*)-u(a_k^*)|<\varepsilon$ が成り立つ. 以上より

$$\begin{aligned}\mu_1(u(E))\le&\mu_1\left(u\left(\cup_k(a_k,b_k)\right)\right)\\ \le&\sum_k\mu_1(u((a_k,b_k))\\ \le&\sum_k|u(b_k^*)-u(a_k^*)|<\varepsilon\end{aligned}$$

が成り立ち, $\mu_1(u(E))=0$ が従う.

逆に u が (i),(ii),(iii) を満たすとする. $\{(a_k,b_k)\}$ を交わらない高々可算個の開区間とし,

$$E_k=\{x\in(a_k,b_k):\ u\text{ は }x\text{ において }\varphi\text{-微分可能}\}$$

と置く. 但し u が x において φ-微分可能であるとは x において 4 つの Dini 微分が全て有限値であり一致する, または $\bar{D}_\varphi u(x)$, $\underline{D}_\varphi u(x)$ がともに有限値で, 一致するという意味である. このとき (ii) より $\mu_\varphi((a_k,b_k)\backslash E_k)=0$ が成り立つ. よって (iii) より $\mu_1(u((a_k,b_k)\backslash E_k))=0$ が成り立つ. さて (i) より u は連続であるから 2 点 $u(a_k)$, $u(b_k)$ を端点に持つ区間は $u([a_k,b_k])$ に含まれ, $\mu_1(u([a_k,b_k]))=\mu_1(u(a_k,b_k))$

であるから

$$
\begin{aligned}
\sum_k |u(b_k) - u(a_k)| &\le \sum_k \mu_1(u([a_k, b_k])) \\
&= \sum_k \mu_1(u(a_k, b_k)) \\
&= \sum_k \mu_1(u(E_k)) \\
&\le \sum_k \int_{E_k} |D_\varphi u(x)|\ d\mu_\varphi(x) \quad (\because\ \text{Corollary 3.1.4}) \\
&\le \sum_k \int_{(a_k, b_k)} |D_\varphi u(x)|\ d\mu_\varphi(x) \\
&\le \int_{\cup_k (a_k, b_k)} |D_\varphi u(x)|\ d\mu_\varphi(x)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって Theorem 3.2.1 より u は φ-絶対連続である． □

Theorem 2.5.9 (Zarecki)**.** $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ は狭義増加連続であるとし $c = \varphi(a),\ d = \varphi(b)$ とする．このとき以下の 3 つの条件は同値である．

(i) φ が $[a, b]$ 上 *Lebesgue* 測度について絶対連続.
(ii) $\mu_1(\varphi(\{x \in (a, b) : \bar{D}\varphi(x) = \infty\})) = 0$.
(iii) $\mu_1(\varphi(\{x \in (a, b) : \underline{D}\varphi(x) = \infty\})) = 0$.

また同様に以下の 3 つの条件も同値である．

(a) φ^{-1} が $[c, d]$ 上 *Lebesgue* 測度について絶対連続.
(b) $\mu_1(\{x \in (a, b) : \underline{D}\varphi(x) = 0\}) = 0$.
(c) $\mu_1(\{x \in (a, b) : \bar{D}\varphi(x) = 0\}) = 0$.

Proof. φ が絶対連続ならば μ_1 について殆ど至ることと微分可能であり Lusin の性質 (N) を持つので (i) $\Longrightarrow$ (ii) が成り立つ．また $\underline{D}\varphi(x) \le \bar{D}\varphi(x)$ より (ii) $\Longrightarrow$ (iii) が成り立つ．

$E = \{x \in (a, b) : \underline{D}\varphi(x) = \infty\}$ と置き (iii) を仮定する．つまり $\mu_1^*(\varphi(E)) = 0$ が成り立つと仮定しよう．$x \in E$ について $\infty = \underline{D}\varphi(x) \le \bar{D}\varphi(x)$ であるから, 外測度評価を用いれば, 任意の $R > 0$ について

$$
R\mu_1^*(E) \le \mu_1^*(\varphi(E))
$$

が成り立つ．よって $\mu_1^*(E) = 0$ が従う．さて $\mu_1^*(N) = 0$ を満たす任意の $N \subset [a, b]$ について $x \in N \backslash E$ ならば $\underline{D}\varphi(x) < \infty$ であるから

$$
N \backslash E = \bigcup_{k=1} \{x \in N : \underline{D}\varphi(x) < k\} = \bigcup_{k=1} N_k \quad (\text{と置く})
$$

である．外測度評価より

$$
\mu_1^*(\varphi(N_k)) \le k\mu_1^*(N_k) \le k\mu_1^*(N) = 0
$$

であるから, 全ての $k \in \mathbb{N}$ について $\mu_1^*(\varphi(N_k)) = 0$ が成り立つ. よって

$$\mu_1^*(\varphi(N)) \leq \mu_1^*(\varphi(N \backslash E)) + \mu_1^*(\varphi(E)) \leq \mu_1^*\left(\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k\right)\right) \leq \sum_{K=1}^{\infty} \mu_1^*(\varphi(N_k)) = 0.$$

従って φ は Lusin の性質 (N) を持つので絶対連続である.

後半の 3 条件についてはまず $x \in (a,b)$ について $y = \varphi(x) \in (c,d)$ と置くと

$$\begin{aligned}
& \underline{D}\varphi(x) = \liminf_{x_1 \leq x \leq x_2,\, x_2 - 1 \to 0+} \frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & \exists \{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\} \text{ with } x_1^{(n)} \leq x \leq x_2^{(n)},\ 0 < x_2^{(n)} - x_1^{(n)} \to 0+ \ \text{ such that } \frac{\varphi(x_2^{(n)}) - \varphi(x_1^{(n)})}{x_2^{(n)} - x_1^{(n)}} \to 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & \exists \{y_1^{(n)}\}, \{y_2^{(n)}\} \text{ with } y_1^{(n)} \leq y \leq y_2^{(n)},\ 0 < y_2^{(n)} - y_1^{(n)} \to 0+ \ \text{ such that } \frac{\varphi^{-1}(y_2^{(n)}) - \varphi^{-1}(y_1^{(n)})}{y_2^{(n)} - y_1^{(n)}} \to \infty \\
\Longleftrightarrow\quad & \bar{D}\varphi^{-1}(y) = \limsup_{y_1 \leq y \leq y_2,\, y_2 - y_1 \to 0+} \frac{\varphi^{-1}(y_2) - \varphi^{-1}(y_1)}{y_2 - y_1} = \infty
\end{aligned}$$

より

$$\varphi^{-1}(\{y \in (c,d) : \bar{D}\varphi^{-1}(y) = \infty\}) = \{x \in (a,b) : \underline{D}\varphi(x) = 0\}$$

が成り立つ. よって φ^{-1} について (ii) を適用した条件が (b) である. 同様に

$$\begin{aligned}
& \bar{D}\varphi(x) = \limsup_{x_1 \leq x \leq x_2,\, x_2 - 1 \to 0+} \frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \text{ with } x_1 \leq x \leq x_2,\ 0 < x_2 - x_1 < \delta : \frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1} < \varepsilon \\
\Longleftrightarrow\quad & \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta' > 0 : \forall y_1, y_2 \text{ with } y_1 \leq y \leq y_2,\ 0 < y_2 - y_1 < \delta' : \frac{\varphi^{-1}(y_2) - \varphi^{-1}(y_1)}{y_2 - y_1} > \frac{1}{\varepsilon} \\
\Longleftrightarrow\quad & \underline{D}\varphi^{-1}(y) = \liminf_{y_1 \leq y \leq y_2,\, y_2 - y_1 \to 0+} \frac{\varphi^{-1}(y_2) - \varphi^{-1}(y_1)}{y_2 - y_1} = \infty
\end{aligned}$$

より

$$\varphi^{-1}(\{y \in (c,d) : \underline{D}\varphi^{-1}(y) = \infty\}) = \{x \in (a,b) : \bar{D}\varphi(x) = 0\}$$

が成り立つ. よって φ^{-1} について (iii) を適用した条件が (c) である. 以上で後半の 3 条件が同値であることは前半の 3 条件の同値性より従う. □

第 3 章

有界変動函数と絶対連続函数

3.1　有界変動函数

Definition 3.1.1. 有界閉区間 $[a,b]$ 上の函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が与えられたとする．区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta : a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ について

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})| \tag{3.1.1}$$

の形の和を考え，このような分割に付随する和の上限を

$$W_a^b(f)=\sup_{\Delta}\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})| \tag{3.1.2}$$

と置き，f の区間 $[a,b]$ における総変動量と云う．$W_a^b(f)<\infty$ のとき f は有界変動函数であると云う．

有界変動函数 f について $W_a^b(f)=W_a^x(f)+W_c^b(f)$ が成り立つことは容易に分かるであろう．次の定理より，連続な有界変動函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ について $W_a^x(f)$ は $x\in[a,b]$ について連続であることが分かる．

Theorem 3.1.2. 函数 f が区間 $[a,b]$ で有界変動であり，$x=x_0(\in[a,b])$ で右または左連続ならば函数 $[a,b]\ni x\mapsto W_a^x(f)$ も $x=x_0(\in[a,b])$ で，それぞれ右または左連続である．

Proof. 右連続性を示そう．これには $x>x_0$ の時 $W_a^x(f)=W_a^{x_0}(f)+W_{x_0}^x(f)$ が成り立つことより $\lim_{x\to x_0+0}W_{x_0}^x(f)=0$ を示せば良い．

任意の $\varepsilon>0$ について $\delta>0$ を $x_0<x<x_0+\delta$ ならば $|f(x)-f(x_0)|<2^{-1}\varepsilon$ が成り立つように取る．また $[x_0,b]$ の分割 $x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ を

$$W_{x_0}^b(f)\le|f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\cdots+|f(x_n)-f(x_{n-1})|+\frac{\varepsilon}{2} \tag{3.1.3}$$

かつ $x_0<x_1<x_0+\delta$ が成り立つように取る．このとき

$$\begin{aligned}
&|f(x_2)-f(x_1)|+\cdots+|f(x_n)-f(x_{n-1})|\le W_{x_1}^b(f)\\
&|f(x_1)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

が成り立つので (3.1.3) と合わせて

$$W_{x_0}^b(f) < \frac{\varepsilon}{2} + W_{x_1}^b(f) + \frac{\varepsilon}{2} = W_{x_1}^b(f) + \varepsilon$$

となる．従って

$$0 \le W_{x_0}^{x_1}(f) = W_{x_0}^b(f) - W_{x_1}^b(f) < \varepsilon$$

が成り立つ． □

区間 $[a,b]$ 上の増加函数は有界変動であるから, 2 つの増加函数の差は有界変動函数になることは容易に分かる．重要なのはこの事実の逆が成り立つことである．

Theorem 3.1.3 (Jordan 分解)**.** 函数 f が区間 $[a,b]$ で有界変動函数ならば

$$u(x) = \frac{1}{2}\left\{W_a^x(f) + f(x)\right\}, \quad v(x) = \frac{1}{2}\left\{W_a^x(f) - f(x)\right\} \tag{3.1.4}$$

と置くと，ともに $[a,b]$ で増加であり，f が $x_0(\in [a,b])$ で右 *(または左)* 連続ならば u, v もともに x_0 で右 *(または左)* 連続である．また特に

(i) $f = u - v$ と 2 つの増加函数の差として表される．

(ii) u と v は f の分解を与える増加函数のの中で変動量が最小である．つまり $f = \tilde{u} - \tilde{v}$ と f が 2 つの増加函数の差として表されれば任意の $a \le x_0 < x_1 \le b$ について

$$u(x_1) - u(x_0) \le \tilde{u}(x_1) - \tilde{u}(x_0), \quad v(x_1) - v(x_0) \le \tilde{v}(x_1) - \tilde{v}(x_0)$$

が成り立つ．

(iii) $W_a^x(f) = W_a^x(u) + W_a^x(v)$ が $x \in [a,b]$ について成り立つ．

Proof. $x_0, x_1 \in [a,b]$ with $a \le x_0 < x_1 \le b$ について成り立つ不等式

$$|f(x_1) - f(x_0)| \le W_{x_0}^{x_1}$$

より

$$\begin{aligned}
u(x_1) - u(x_0) =& \frac{1}{2}\left\{W_a^{x_1}(f) + f(x_1)\right\} - \frac{1}{2}\left\{W_a^{x_0}(f) + f(x_0)\right\} \\
=& \frac{1}{2}\left\{f(x_1) - f(x_0) + W_{x_0}^{x_1}\right\} \ge 0, \\
v(x_1) - v(x_0) =& \frac{1}{2}\left\{W_a^{x_1}(f) - f(x_1)\right\} - \frac{1}{2}\left\{W_a^{x_0}(f) - f(x_0)\right\} \\
=& \frac{1}{2}\left\{-f(x_1) + f(x_0) + W_{x_0}^{x_1}\right\} \ge 0
\end{aligned}$$

となるので, u, v は増加である．左右の連続性については Theorem 3.1.2 より従う．

(i) については明らかである．(ii) については

$$\begin{aligned}
& u(x_1) - u(x_0) \le \tilde{u}(x_1) - \tilde{u}(x_0) \\
\iff\quad & \frac{1}{2}\left\{W_a^{x_1}(f) + f(x_1)\right\} - \frac{1}{2}\left\{W_a^{x_0}(f) + f(x_0)\right\} \le \tilde{u}(x_1) - \tilde{u}(x_0) \\
\iff\quad & \frac{1}{2}\left\{W_{x_0}^{x_1}(f) + f(x_1) - f(x_0)\right\} \le \tilde{u}(x_1) - \tilde{u}(x_0) \\
\iff\quad & W_{x_0}^{x_1}(f) + \tilde{u}(x_1) - \tilde{u}(x_0) - (\tilde{v}(x_1) - \tilde{v}(x_0)) \le 2(\tilde{u}(x_1) - \tilde{u}(x_0)) \\
\iff\quad & W_{x_0}^{x_1}(f) \le \tilde{u}(x_1) - \tilde{u}(x_0) + \tilde{v}(x_1) - \tilde{v}(x_0)
\end{aligned}$$

同様に

$$
\begin{aligned}
& v(x_1)-v(x_0)\le \tilde{v}(x_1)-\tilde{v}(x_0)\\
\iff\ & \frac{1}{2}\left\{W_a^{x_1}(f)-f(x_1)\right\}-\frac{1}{2}\left\{W_a^{x_0}(f)-f(x_0)\right\}\le \tilde{v}(x_1)-\tilde{v}(x_0)\\
\iff\ & \frac{1}{2}\left\{W_{x_0}^{x_1}(f)-f(x_1)+f(x_0)\right\}\le \tilde{v}(x_1)-\tilde{v}(x_0)\\
\iff\ & W_{x_0}^{x_1}(f)-\tilde{u}(x_1)+\tilde{u}(x_0)+\tilde{v}(x_1)-\tilde{v}(x_0)\le 2(\tilde{v}(x_1)-\tilde{v}(x_0))\\
\iff\ & W_{x_0}^{x_1}(f)\le \tilde{u}(x_1)-\tilde{u}(x_0)+\tilde{v}(x_1)-\tilde{v}(x_0)
\end{aligned}
$$

であるので, どちらの場合も最後の不等式を示せば良い. これは区間 $[x_0,x_1]$ の任意の分割 $x_0=y_0<y_1<\cdots<y_n=x_1$ について

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}|f(y_k)-f(y_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{n}|\tilde{u}(y_k)-\tilde{u}(y_{k-1})-\tilde{v}(y_k)-\tilde{v}(y_{k-1})|\\
&\le \sum_{k=1}^{n}(\tilde{u}(y_k)-\tilde{u}(y_{k-1}))+\sum_{k=1}^{n}(\tilde{v}(y_k)-\tilde{v}(y_{k-1}))\\
&= \tilde{u}(x_1)-\tilde{u}(x_0)+\tilde{v}(x_1)-\tilde{v}(x_0)
\end{aligned}
$$

が成り立つことより従う.

(iii) については u と v の定義式 (3.1.4) を辺々加えると

$$
u(x)+v(x)=W_a^x(f)
$$

が成り立つこと, 及び u, v は増加であるから

$$
W_a^x(u)=u(x)-u(a),\quad W_a^x(v)=v(x)-v(a)
$$

が成り立つこと, 最後に

$$
u(a)=\frac{1}{2}\{W_a^a(f)+f(a)\}=\frac{f(a)}{2},\quad v(a)=\frac{1}{2}\{W_a^a(f)-f(a)\}=-\frac{f(a)}{2},
$$

を組み合わせれば直ちに従う. □

Jordan 分解を用いると前節までの単調函数に関する結果を, 有界変動函数に関する結果に拡張することができる.

Corollary 3.1.4. 函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が連続かつ有界変動であり, $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ は連続かつ狭義増加とする. このとき f は測度 μ_φ に関し殆ど全ての x において φ-微分可能である. さらに $D_\varphi f$ は μ_φ に関して可積分であり,

$$
\int_{[a,b]}|D_\varphi f(x)|\,d\mu_\varphi(x)\le W_a^b(f)
$$

が成り立つ.

Proof. Jordan 分解を行い $f=u-v$ と f を 2 つの増加函数の差に表す. このとき f の連続性より $W_a^x(f)$ も連続であるから $u(x)=2^{-1}\{W_a^x(f)+f(x)\}$, $v=2^{-1}\{W_a^x(f)-f(x)\}$ も連続である. 従って u, v はそれ

それ測度 μ_φ に関し殆ど全ての x において φ-微分可能である．さらに $D_\varphi u$, $D_\varphi v$ は μ_φ に関して可積分であり，$\int_{[a,b]} D_\varphi u(x)\,d\mu_\varphi(x) \leq u(b)-u(a)$, $\int_{[a,b]} D_\varphi v(x)\,d\mu_\varphi(x) \leq v(b)-v(a)$ が成り立つ．従って

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} |D_\varphi f(x)|\,d\mu_\varphi(x) &\leq \int_{[a,b]} |D_\varphi u(x) - D_\varphi v(x)|\,d\mu_\varphi(x) \\ &\leq \int_{[a,b]} \{D_\varphi u(x) + D_\varphi v(x)\}\,d\mu_\varphi(x) \\ &\leq u(b)-u(a)+v(b)-v(a) \\ &= \frac{1}{2}\{W_a^b(f)+f(b)-f(a)\} + \frac{1}{2}\{W_a^b(f)-f(b)-f(a)\} \\ &= W_a^b(f)\end{aligned}$$

□

3.2 積分の絶対連続性と不定積分の微分

μ_φ に関する可積分関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ について，その不定積分を

$$F(x) = \int_{[a,x)} f\,d\mu_\varphi$$

とおけば φ に関して殆ど至る所 φ-微分可能であり $D_\varphi F(x) = f(x)$ が成り立つことを示すのが，この節の目標である．

Theorem 3.2.1 (積分の絶対連続性)**.** 函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が μ_φ について可積分とする．このとき任意の $\varepsilon>0$ について $\delta>0$ で次の性質を持つものが存在する．

$$E\in\mathcal{M}_\varphi \text{ with } \mu_\varphi(E)\leq\delta \quad\Longrightarrow\quad \left|\int_E f\,d\mu_\varphi\right| \leq \varepsilon.$$

Proof. $f_n(x) = \min\{n,|f(x)|\}$, $x\in[a,b]$ とおくと各点 $x\in[a,b]$ において $0\leq f_n(x)\leq |f(x)|$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ が成り立つ．よって Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} f_n\,d\mu_\varphi = \int_{[a,b]} |f|\,d\mu_\varphi$$

が成り立つ．そこで $\varepsilon>0$ について $N\in\mathbb{N}$ を

$$0 \leq \int_{[a,b]} (|f|-f_N)\,d\mu_\varphi \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つように取れる．ここで $\delta = \frac{\varepsilon}{2N}$ とおけば $\mu_\varphi(E)\leq\delta$ ならば

$$\begin{aligned}\left|\int_E f\,d\mu_\varphi\right| &\leq \int_E |f|\,d\mu_\varphi \\ &\leq \int_E (|f|-f_N)\,d\mu_\varphi + \int_E f_N\,d\mu_\varphi \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + N\mu_\varphi(E) \leq \frac{\varepsilon}{2} + N\delta \leq \varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ． □

Lemma 3.2.2. 函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が μ_φ について可積分とする．このとき

$$\int_{(a,x]} f\,d\mu_\varphi = 0, \quad x\in[a,b]$$

ならば $f(x)=0$ が μ_φ に関して殆ど至る所成り立つ．

Proof. $A=\{x\in(a,b): f(x)>0\}$ とおき，$\mu_\varphi(A)=0$ を示せば十分である．そこで $\mu_\varphi(A)>0$ と仮定して矛盾を導こう．$A_k=\{x\in(a,b): f(x)>k^{-1}\}$ とおけば $A_1\subset A_2\subset\cdots$ と $\cup_k A_k = A$ より $\mu_\varphi(A_k)\to\mu_\varphi(A)$ が成り立つので，十分大きな全ての k について $\mu_\varphi(A_k)>0$ が成り立つ．このような k について compact 集合 K を $K\subset A_k$ かつ $\mu_\varphi(K)>0$ が成り立つように取れる．$G=(a,b)\backslash K$ とおけば，G は 開集合であるから $G=\cup_n(a_n,b_n]$ のように交わらない半開区間の和に表せる．(開区間の可算和に表してから，それぞれの開区間を半開区間の可算和で表せばよい.) このとき

$$\begin{aligned}\int_G f\,d\mu_\varphi &= \sum_n \int_{(a_n,b_n]} f\,d\mu_\varphi \\ &= \sum_n\left(\int_{(a,b_n]} - \int_{(a,a_n]}\right) f\,d\mu_\varphi = 0\end{aligned}$$

であるから

$$\int_K f\,d\mu_\varphi = \int_{(a,b]} f\,d\mu_\varphi - \int_G f\,d\mu_\varphi = \int_{(a,b]} f\,d\mu_\varphi - \int_G f\,d\mu_\varphi = 0-0=0$$

となるが，これは K 上 $f(x)>k^{-1}$ ゆえ

$$\int_K f\,d\mu_\varphi \geq \frac{\mu_\varphi(K)}{k} > 0$$

に矛盾する． □

Theorem 3.2.3. 函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が μ_φ について可積分とする．このとき

$$F(x)=\int_{(a,x]} f\,d\mu_\varphi$$

F は μ_φ に関して殆ど至る所 φ-微分可能であり $D_\varphi F(x)=f(x)$ が成り立つ．

Proof. $f^+(x)=\max\{f(x),0\}$，$f^-(x)=-\min\{f(x),0\}$ とおけば $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$ より $F(x)=\int_{(a,x]} f\,d\mu_\varphi = \int_{(a,x]} f^+\,d\mu_\varphi - \int_{(a,x]} f^-\,d\mu_\varphi$ と増加函数の差に分解される．従って $f\geq 0$ のときに成り立つことを示せば，μ_φ に関して殆ど至る所

$$D_\varphi\left(\int_{(a,x]} f^+\,d\mu_\varphi\right) = f^+(x), \quad D_\varphi\left(\int_{(a,x]} f^-\,d\mu_\varphi\right) = f^-(x)$$

が成り立つことが従い，これより一般の場合も従う．

次に f が有界で　$0\leq f\leq M$　の場合に示そう．まずこのとき $a\leq x\leq y\leq b$ について

$$0\leq F(y)-F(x) = \int_{(a,y]} f\,d\mu_\varphi - \int_{[a,x)} f\,d\mu_\varphi = \int_{(x,y]} f\,d\mu_\varphi \leq M\mu_\varphi([x,y)) = M(\varphi(y)-\varphi(x))$$

より F が連続であることに注意する．

さて $n \in \mathbb{N}$ について分点を $x_k^{(n)} = a + \frac{(b-a)k}{2^n}$, $k = 0, 1, \ldots, 2^n$ とおいて, $x \in [a, b)$ に対し $x_k^{(n)} < x \leq x_{k+1}^{(n)}$ を満たす k を取り

$$h_n(x) = \frac{F(x_{k+1}^{(n)}) - F(x_k^{(n)})}{\varphi(x_{k+1}^{(n)}) - \varphi(x_k^{(n)})}, \quad x_k^{(n)} < x \leq x_{k+1}^{(n)}$$

とおくと $0 \leq h_n \leq M$ であり, μ_φ に関して殆ど至る所 $h_n(x) \to D_\varphi F(x)$ が成り立つので

$$\int_{(a,x]} D_\varphi F \, d\mu_\varphi = \lim_{n\to\infty} \int_{(a,x]} h_n \, d\mu_\varphi$$

ここで $x \in (a, b]$ について $x_k^{(n)} < x \leq x_{k+1}^{(n)}$ を満たす k を取ると

$$\begin{aligned}
\int_{[a,x)} h_n \, d\mu_\varphi &= \sum_{\ell=1}^{k} \int_{[x_{\ell-1}^{(n)}, x_{\ell-1}^{(n)})} \frac{F(x_\ell^{(n)}) - F(x_{\ell-1}^{(n)})}{\varphi(x_\ell^{(n)}) - \varphi(x_{\ell-1}^{(n)})} \, d\mu_\varphi + \int_{[x_k^{(n)}, x)} \frac{F(x_{k+1}^{(n)}) - F(x_k^{(n)})}{\varphi(x_{k+1}^{(n)}) - \varphi(x_k^{(n)})} \, d\mu_\varphi \\
&= \sum_{\ell=1}^{k} \{F(x_\ell^{(n)}) - F(x_{\ell-1}^{(n)})\} + \frac{F(x_{k+1}^{(n)}) - F(x_k^{(n)})}{\varphi(x_{k+1}^{(n)}) - \varphi(x_k^{(n)})} \{\varphi(x) - \varphi(x_k^{(n)})\} \\
&= F(x_k^{(n)}) + \frac{F(x_{k+1}^{(n)}) - F(x_k^{(n)})}{\varphi(x_{k+1}^{(n)}) - \varphi(x_k^{(n)})} \{\varphi(x) - \varphi(x_k^{(n)})\}
\end{aligned}$$

ここで $n \to \infty$ のとき $x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)} \to x$ が成り立つこと, F が連続であること及び

$$0 \leq \frac{\varphi(x) - \varphi(x_k^{(n)})}{\varphi(x_{k+1}^{(n)}) - \varphi(x_k^{(n)})} \leq 1$$

より $\int_{(a,x]} h_n \, d\mu_\varphi \to F(x)$ が成り立つので

$$\int_{(a,x]} D_\varphi F \, d\mu_\varphi = F(x)$$

が成り立つ.

f が有界とは限らない非負函数の場合は $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$, $F_n(x) = \int_{(a,x]} f_n \, d\mu_\varphi$, $G_n(x) = \int_{(a,x]} (f - f_n) \, d\mu_\varphi$ とおく. このとき $F(x) = F_n(x) + G_n(x)$ となり, F_n, G_n ともに増加函数であるから μ_φ に関して殆ど至る所微分可能であり, 前段で示したことより $D_\varphi F_n(x) = f_n(x) \geq 0$ であり, さらに $D_\varphi G_n(x) \geq 0$ が成り立つ. よって μ_φ に関して殆ど至る所 $D_\varphi F(x) \geq f_n(x)$ が成り立つが, $n \to \infty$ として $D_\varphi F(x) \geq f(x)$ となるので

$$\int_{(a,b]} D_\varphi F \, d\mu_\varphi \geq \int_{(a,b]} f \, d\mu_\varphi = F(b) = F(b) - F(a)$$

が成り立つ. 逆向きの不等式が Theorem 2.4.3 より従うので結局

$$\int_{(a,b]} D_\varphi F \, d\mu_\varphi = F(b) - F(a) = \int_{(a,b]} f \, d\mu_\varphi$$

となり

$$\int_{(a,b]} (D_\varphi F - f) \, d\mu_\varphi = 0$$

が成り立つが, μ_φ に関して殆ど至る所 $D_\varphi F(x) \geq f(x)$ と合わせれば, 最後に μ_φ に関して殆ど至る所 $D_\varphi F(x) = f(x)$ であることが分かる. □

3.3 絶対連続函数に関する微分積分学の基本定理

Definition 3.3.1. 函数 $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ は $[a,b]$ で増加とする．このとき函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が φ に関して絶対連続であるとは任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ を次が成り立つように取ることが出きるときを言う．高々可算個の交わらない区間列 $(a_1, b_1), \dots$ について

$$\sum_k (\varphi(b_k) - \varphi(a_k)) \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \sum_k |f(b_k) - f(a_k)| \leq \varepsilon.$$

また f が φ に関して *Lipschitz* 連続であるとは定数 $K \geq 0$ で

$$|f(x_1) - f(x_0)| \leq K|\varphi(x_1) - \varphi(x_0)|, \quad \forall x_0, x_1 \in [a,b]$$

が成り立つものが存在するときを言う．

Theorem 3.3.2. $[a,b]$ を有界閉区間とし，函数 $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ は $[a,b]$ で増加とする．

(i) 函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が φ に関して *Lipschitz* 連続ならば φ に関して絶対連続である．
(ii) 函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が φ に関して絶対連続ならば $[a,b]$ で一様連続である．
(iii) 函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が φ に関して絶対連続ならば $[a,b]$ で有界変動である．

Proof. (i) は明らかであろう．

(ii) については f が φ に関して絶対連続として $\varepsilon > 0$ に対して上の $\delta > 0$ を取ったとしよう．このとき φ は $[a,b]$ で一様連続であるから $\eta > 0$ を $|x_1 - x_0| \leq \eta$ ならば $|\varphi(x_1) - \varphi(x_0)| \leq \delta$ が成り立つように取ることができる．従って $|x_1 - x_0| \leq \eta$ ならば $|f(x_1) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ が成り立つので f も $[a,b]$ で一様連続である．

(iii) を示そう．$\varepsilon = 1$ について

$$\sum_k (\varphi(b_k) - \varphi(a_k)) \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \sum_k (f(b_k) - f(a_k)) \leq 1$$

が成り立つように $\delta > 0$ を取る．そして φ の $[a,b]$ における一様連続性より $\eta > 0$ を

$$|x_1 - x_0| \leq \eta \quad \Longrightarrow \quad |\varphi(x_1) - \varphi(x_0)| \leq \delta$$

を満たすように取り，さらに $N \in \mathbb{N}$ を $\frac{b-a}{N} < \eta$ を満たすように取る．このとき $[a,b]$ を N 等分して分点を $a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_N = b$ とおく．

さて任意の分割 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ について $\{\xi_k\}_{k=0}^N$ と $\{x_k\}_{k=0}^n$ を合わせた分割を $a = c_0 < c_1 < \dots < c_m = b$ とおき，各 $k = 1, 2, \dots, N$ について $\xi_{k-1} = c_p$, $\xi_k = c_{p+q}$ とすると

$$\sum_{s=p+1}^{p+q} |\varphi(c_s) - \varphi(c_{s-1})| = \varphi(\xi_k) - \varphi(\xi_{k-1}) \leq \delta \quad (\because \xi_k - \xi_{k-1} = \frac{b-a}{N} \leq \eta)$$

より

$$\sum_{s=p+1}^{p+q} |f(c_s) - f(c_{s-1})| \leq 1$$

であるから

$$\sum_{s=1}^{m} |f(c_s) - f(c_{s-1})| \leq N$$

が成り立つ. 従って f は有界変動である. $\square$

Theorem 3.3.3. 函数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ について f が φ-絶対連続であることと, $W_a^x(f)$ が φ-絶対連続であることは同値であり, このとき $f = u - v$ を *Jordan* 分解とすれば u, v も φ-絶対連続である.

Proof. f が φ-絶対連続であれば高々可算個の交わらない区間列 $(a_1, b_1), \ldots$ について

$$\sum_k (\varphi(b_k) - \varphi(a_k)) \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \sum_k |f(b_k) - f(a_k)| \leq \varepsilon.$$

が成り立つ. このとき (a_k, b_k) を更に細分しても単調性より $\sum_k (\varphi(b_k) - \varphi(a_k))$ は変化しない. 従って $\sum_k |f(b_k) - f(a_k)|$ を $\sum_k W_{a_k}^{b_k}(f)$ に代えて $\sum_k W_{a_k}^{b_k}(f) \leq \varepsilon$ が成り立つことになり $W_a^x(f)$ が φ-絶対連続であることが分かる.

逆に $W_a^x(f)$ が φ-絶対連続であれば $|f(b_k) - f(a_k)| \leq W_{a_k}^{b_k}$ より直ちに f の φ-絶対連続性が従う.

後半については $u(x) = \frac{1}{2}\{W_a^x(f) + f(x)\}$, $v(x) = \frac{1}{2}\{W_a^x(f) - f(x)\}$ より従う. $\square$

Lemma 3.3.4. 函数 $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ が増加かつ絶対連続で μ_φ に関して殆ど至る所 $D_\varphi u(x) = 0$ ならば $u(b) = u(a)$.

Proof. $E = \{x \in (a, b) : D_\varphi u(x) = 0\}$ とおくと $\mu_\varphi(E) = b - a$ であり Theorem 2.3.1 または Theorem 2.3.1 より任意の $\varepsilon > 0$ について $m^*(u(E)) \leq \varepsilon\mu_\varphi(E) = \varepsilon(b - a)$ が成り立つので $m^*(u(E)) = 0$ である.

次に任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を Definition 3.3.1 のものとする. $\mu_\varphi([a, b]\backslash E) = 0$ より, 開集合 V で $[a, b]\backslash E \subset V$, $\mu_\varphi(U) < \delta$ を満たすものが存在する. $V = \cup_k (a_k, b_k)$ と連結成分に分解すれば $\mu_\varphi(U) = \sum_k (\varphi(b_k) - \varphi(a_k)) < \delta$ より

$$\begin{aligned}
m^*(u([a, b]\backslash E)) &\leq m^*(u(V)) \\
&= m^*(u(\cup_k (a_k, b_k))) \\
&\leq \sum_k m(u((a_k, b_k))) \\
&= \sum_k (u(b_k) - u(a_k)) \quad (\because \text{中間値の定理}) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つので $m^*(u([a, b]\backslash E)) = 0$ である.

以上より $m(u([a, b])) \leq m^*(E) + m^*(u([a, b]\backslash E)) = 0$ となる. ここで中間値の定理より $[u(a), u(b)] \subset u([a, b])$ が成り立つので $u(b) = u(a)$ となる. $\square$

Theorem 3.3.5 (微分積分学の基本定理)**.** $[a, b]$ を有界閉区間とし, 函数 $\varphi : [a, b] \to$ は狭義増加で連続とする. このとき函数 $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ が φ に関して絶対連続であれば μ_φ に関して殆ど至る所微分可能で $D_\varphi F$ は μ_φ-可積分であり

$$F(x) - F(a) = \int_{(a,x]} D_\varphi F \, d\mu_\varphi, \quad a \leq x \leq b$$

が成り立つ．逆に μ_φ に関して可積分な函数 f により

$$F(x) = F(a) + \int_{(a,x]} f \, d\mu_\varphi, \quad a \leq x \leq b$$

と表されれば F は φ に関して絶対連続であり $D_\varphi F(x) = f(x)$ が μ_φ に関して殆ど至る所成り立つ．

Proof. 定理の後半は Theorem 3.2.3 より従う．

前半を示す為に F は φ に関して絶対連続とするまた $F = u - v$ を F の Jordan 分解とすれば u, v も φ に関して絶対連続である．

$$U(x) = u(x) - u(a) - \int_{(a,x]} D_\varphi u \, d\mu_\varphi, \quad a \leq x \leq b$$

とおけば $a \leq x_0 < x_1 \leq b$ に対し Theorem 2.4.3　より

$$U(x_1) - U(x_0) = u(x_1) - u(x_0) - \int_{(x_0,x_1]} D_\varphi u \, d\mu_\varphi \geq 0$$

が成り立つので増加である．また Theorem 3.2.3 より μ_φ に関して殆ど至る所 $D_\varphi U(x) = 0$ が成り立つ．よって Lemma 3.3.4 より $U(x) = U(a) = 0$ が任意の $x \in [a, b]$ について成り立つ． □

参考文献

[1] A. M. Bruckner, J. B. Bruckner and B. S. Thomson, Real Analysis, Prentice-Hall 1996.

[2] C.-A. Faure, The Lebesgue Differentiation Theorem via the Rising Sun Lemma, Real Anal. Exch., 29 (2004-05).

[3] G. Leoni, A first course in Sobolev spaces, Graduate Studies in Mathematics, 105. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[4] E. J. McShane, Integration, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1944.

[5] I. P. Natanson, Theory of Functions of a Real Variable, vol. I and II, Ungar 1955.