Gauss の驚異の定理

柳原 宏
山口大学工学部

目次

まずはこの冊子でのお約束を述べる．出てくる函数は全て必要な階数まで微分または偏微分可能とし, 導函数は全て連続とする．したがって偏微分の順序は交換可能, つまり $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ などが成り立ち, このような等式は断りなく使用する．この冊子では局所座標を固定して考え, 局所座標の取り替えにまつわる議論は一切省略した．そして 2 次元平面，3 次元空間内の曲線の曲率と 3 次元空間内の曲面の曲率の説明に特化し, 最後に述べる Gauss の驚異の定理を直接的な計算により示すことが最終目標である．

1 曲線の曲率

1.1 平面曲線

$\mathbb{R}^2$ の座標を $u = (u_1, u_2)$ で表す．一般的な書き表し方ではないが $\mathbf{u}$ のように太文字で書いたら, 原点から u をみた位置ベクトル

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

を表すことにする．曲線 $u = \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$, $a \leq t \leq b$ についても

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{pmatrix}$$

のように太文字で表すことにする．t に関する微分は $\frac{df}{dt}$ 以外に記号 $\dot{f}$ も用いる．接ベクトル

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1(t) \\ \dot{\alpha}_2(t) \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

と表される．t が時間を表すパラメータのとき $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)$ は速度ベクトルであり，$|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)|$ は速さである．また $\ddot{\boldsymbol{\alpha}}(t)$ は加速度ベクトルである．

以下ではつねに $\dot{\boldsymbol{\alpha}} \neq \mathbf{0}$ が成り立つと仮定する．このとき

$$s = \varphi(t) = \int_a^t |\dot{\boldsymbol{\alpha}}(\tau)|\, d\tau = \int_a^t |\sqrt{(\dot{\alpha}_1(t))^2 + (\dot{\alpha}_2(t))^2}\, d\tau, \qquad a \leq b \leq b \tag{1.2}$$

及び $L = \int_a^b |\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)|\, dt$ と置くと φ は $[a, b]$ から $[0, L]$, への連続かつ狭義増加函数であるから，全単射であり $\varphi^{-1} : [0, L] \to [a, b]$ が存在する．s を弧長パラメータと呼ぶ．弧長パラメータ s は便利であるが，実用上 φ や φ^{-1} の式表示が簡単に求まることは期待できない．また s に関する微分は $'$ で，t に関する微分は $\dot{}$ で表し，自由自在に変数の取り換えを行うことが多い．そこで以下では

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}\{\boldsymbol{\alpha}(t)\} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1(t) \\ \dot{\alpha}_2(t) \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \frac{d}{ds}\{\boldsymbol{\alpha}(\varphi^{-1}(s))\} \\ &= \frac{d}{ds}\begin{pmatrix} \alpha_1(\varphi^{-1}(s)) \\ \alpha_2(\varphi^{-1}(s)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\alpha_1}{dt}(\varphi^{-1}(s)) \\ \frac{d\alpha_2}{dt}(\varphi^{-1}(s)) \end{pmatrix} \frac{d\varphi^{-1}}{ds}(s) = \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(\varphi^{-1}(s))|}\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1(\varphi^{-1}(s)) \\ \dot{\alpha}_2(\varphi^{-1}(s)) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.4}$$

のように表し，独立変数として t を使用する場合と，弧長 s を使う場合，それぞれ $\dot{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x}'$ と書き表す．つまり $\mathbf{x}'$ は $\boldsymbol{\alpha}(t)$ に $t = \varphi^{-1}(s)$ が代入されたものを s で微分したものとして取扱う．

さて接ベクトルを正規化し

$$\mathbf{e}(t) = \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)|}\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) \tag{1.5}$$

と置く．このとき上式より

$$\mathbf{x}' = \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(\varphi^{-1}(s))|}\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1(\varphi^{-1}(s)) \\ \dot{\alpha}_2(\varphi^{-1}(s)) \end{pmatrix} = \mathbf{e}(\varphi^{-1}(s)) \tag{1.6}$$

である．つまりパラメータとして弧長 s を採用すれば，接ベクトル $\mathbf{x}'$ はつねに単位ベクトルである．$\boldsymbol{\alpha}(\varphi^{-1}(s))$ は速さが一定値 1 になるように曲線のパラメータを取り直したものと見ることが出来る．このとき $\mathbf{x}''$ は曲線の単位接ベクトル $\mathbf{x}'$ が曲がって行く方向と変化する割合を表すものであるから，曲線の曲がり方を反映すると考えられる．そこで $\mathbf{x}''$ を曲率ベクトルと呼ぶ．

ベクトル $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ を反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転したベクトルを $J\mathbf{p}$ で表そう．成分で表すと

$$J\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -p_2 \\ p_1 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

である．またベクトルの内積

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}=p_1q_1+p_2q_2, \qquad \mathbf{p}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix} \text{ and } \mathbf{q}=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}$$

のように · で表す．

さて $\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}'=1$ であるから両辺を s で微分すると $\mathbf{x}''\cdot\mathbf{x}'=0$ を得る．よって $\mathbf{x}''$ は $\mathbf{x}'$ と直交するので $J\mathbf{x}'$ と平行である．従って

$$\mathbf{x}''=\kappa J\mathbf{x}', \qquad \kappa=\mathbf{x}''\cdot J\mathbf{x}' \tag{1.8}$$

の形に表せる．$\kappa=\kappa(s)$ を曲率と呼ぶ．

それでは $\kappa(s)$ の t による表示, つまり $\kappa(\varphi(t))$ を求めてみよう．それには (1.6) の両辺を s で微分すると良さそうであるが, 実のところ計算が大変になり得策ではない．ここでは次のように行う．

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}&=\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\frac{d\mathbf{x}}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{dt}\mathbf{x}'\\ \ddot{\mathbf{x}}&=\frac{d}{dt}\left\{\frac{ds}{dt}\mathbf{x}'\right\}=\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{x}'+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{x}''\end{aligned}$$

よって $\mathbf{x}'\cdot J\mathbf{x}'=0$ より

$$\ddot{\mathbf{x}}\cdot J\dot{\mathbf{x}}=\frac{d^2s}{dt^2}\frac{ds}{dt}\mathbf{x}'\cdot J\mathbf{x}'+\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\mathbf{x}''\cdot J\mathbf{x}'=|\dot{\mathbf{x}}|^3\kappa$$

であるから

$$\kappa=\frac{\ddot{\mathbf{x}}\cdot J\dot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}}|^3}=\frac{\ddot{\boldsymbol{\alpha}}\cdot J\dot{\boldsymbol{\alpha}}}{|\dot{\boldsymbol{\alpha}}|^3}(t) \tag{1.9}$$

を得る．

Problem 1.1. 複素平面の単位円板 $\mathbb{D}=\{z{\in}\mathbb{C}:|z|<1\}$ 上の正則函数 f について $r\in(0,1)$ を固定し $f(re^{i\theta})$ を θ をパラメータとする曲線とみなす．このとき曲率が $z=re^{i\theta}$ について $\frac{1}{|zf'(z)|}\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}$ で与えられることを導け．

Proof. 接ベクトルは

$$\frac{d}{d\theta}f(re^{i\theta})=ire^{i\theta}f'(re^{i\theta})=izf'(z)$$

であり, 加速度ベクトルは

$$\frac{d^2}{d\theta^2}f(re^{i\theta})=-re^{i\theta}f'(re^{i\theta})-(re^{i\theta})^2f''(re^{i\theta})=-zf'(z)-z^2f''(z)$$

である．また

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot J\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-v\\u\end{pmatrix}=-xv+yu$$

であり, $z=x+iy$, $w=u+iv$ について $z\bar{w}=(x+iy)(u-iv)=xu+vy+i(-xv+yu)$ であるから

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\mathrm{Re}\,(z\bar{w}), \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot J\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\mathrm{Im}\,\{z\bar{w}\} \tag{1.10}$$

が成り立つ. 以上より曲率 κ は

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{\mathrm{Im}\left\{-(zf'(z)+z^2f''(z))\overline{izf'(z)}\right\}}{|zf'(z)|^3}\\ &= \frac{\mathrm{Re}\left\{(zf'(z)+z^2f''(z))\overline{zf'(z)}\right\}}{|zf'(z)|^3}\\ &= \frac{1}{|zf'(z)|}\mathrm{Re}\left\{\frac{(zf'(z)+z^2f''(z))\overline{zf'(z)}}{zf'(z)\overline{zf'(z)}}\right\}\\ &= \frac{1}{|zf'(z)|}\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}\end{aligned}$$

□

1.2 空間曲線

$\mathbf{R}^3$ の点を $x=(x_1,x_2,x_3)$ のように表す. 原点からの位置ベクトル化したら $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ と表すのは平面曲線のときと同様である. また平面曲線のときと同様にパラメータ t に関する微分は $\dot{}$ を用いて表す.

さて空間曲線 $x=\alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t))$, $a\le t\le b$ を空間曲線とする. このとき, 位置ベクトル, 接ベクトル (= 速度ベクトル), 加速度ベクトルは

$$\mathbf{x}=\boldsymbol{\alpha}(t)=\begin{pmatrix}\alpha_1(t)\\\alpha_2(t)\\\alpha_3(t)\end{pmatrix},\quad \dot{\mathbf{x}}=\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)=\begin{pmatrix}\dot\alpha_1(t)\\\dot\alpha_2(t)\\\dot\alpha_3(t)\end{pmatrix},\quad \ddot{\mathbf{x}}=\ddot{\boldsymbol{\alpha}}(t)=\begin{pmatrix}\ddot\alpha_1(t)\\\ddot\alpha_2(t)\\\ddot\alpha_3(t)\end{pmatrix} \tag{1.11}$$

である. 以下ではつねに $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)\neq\mathbf{0}$ と仮定する. このとき平面曲線のときと同様に

$$s=\varphi(t)=\int_a^t|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(\tau)|\,d\tau=\int_a^t\sqrt{(\dot\alpha_1(t))^2+(\dot\alpha_2(t))^2+(\dot\alpha_3(t))^2}\,d\tau,\qquad a\le b\le b \tag{1.12}$$

と置き, s を弧長パラメータと呼ぶ. $L=\int_a^b|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)|\,dt$ と置く時 $\varphi:[a,b]\to[0,L]$ は連続で狭義増加であるから全単射であり, 逆写像を持つ. さて接ベクトル $\dot{\mathbf{x}}(t)$ を正規化し

$$\mathbf{e}(t)=\frac{1}{|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)|}\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)$$

と置く. このとき平面曲線での計算と全く同様に

$$\mathbf{x}'=\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\frac{1}{|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(\varphi^{-1}(s))|}\begin{pmatrix}\dot\alpha_1(\varphi^{-1}(s))\\\dot\alpha_2(\varphi^{-1}(s))\end{pmatrix}=\mathbf{e}(\varphi^{-1}(s)) \tag{1.13}$$

が成り立つ. ただし $'$ は s に関する微分を表す. このとき 2 次微分 $\mathbf{x}''$ は曲率ベクトルと呼ばれる. 以下では曲線上でつねに $\mathbf{x}''\neq\mathbf{0}$ と仮定する.

平面曲線の場合は接ベクトル $\mathbf{x}'$ に対して, 標準的な直交するベクトル $J\mathbf{x}'$ を取ることが出来たが, 空間の場合はこのようなベクトルを取る一般的な手段が与えられていない. (向き付けられた曲面の中に曲線がある

場合は可能であるが, この場合は次節で考える.) 空間曲線の場合は $\mathbf{x}''$ の方向を基準に取り

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{x}''|}\mathbf{x}''$$

と置き, スカラー量

$$\kappa = \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{x}''| \tag{1.14}$$

を曲率と呼ぶ. 平面曲線の場合と異なり κ はつねに非負である.

それでは空間曲線の曲率 κ を t を用いて表す公式を求めておこう. 空間の場合 J の代わりに, ベクトルの外積 ($\times$ で表す) が利用できる. まず

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{x}'\frac{ds}{dt}\\ \ddot{\mathbf{x}} &= \frac{d}{dt}\left\{\mathbf{x}'\frac{ds}{dt}\right\} = \mathbf{x}''\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mathbf{x}'\frac{d^2s}{dt^2}\end{aligned}$$

より, 外積を取ることにより

$$\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \mathbf{x}' \times \mathbf{x}''$$

である. ここで $\mathbf{x}'$ と $\mathbf{x}''$ は直交し, $|\mathbf{x}'| = 1$ であるから $|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''| = |\mathbf{x}''| = \kappa$ であり, $\frac{ds}{dt} = |\dot{\mathbf{x}}|$ であるから

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}|}{|\dot{\mathbf{x}}|^3} \tag{1.15}$$

を得る.

2 曲面

2.1 曲面片

$\mathbb{R}^2$ の座標を $u = (u_1, u_2)$, $\mathbb{R}^3$ の座標を $x = (x_1, x_2, x_3)$ で表す. ここでも $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ のように太文字は対応する列ベクトルを表す.

Definition 2.1. *U を $\mathbb{R}^2$ 内の領域とする. このとき C^1-級の写像 $f : U \to \mathbb{R}^3$ が (パラメタライズされた) 曲面片 (parameterized surface element) であるとは f がはめ込み (immersion) であること, つまり $x = f(u) = (f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2), f_3(u_1, u_2))$ と分解して表示する時, 函数行列*

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(u) := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1}(u_1, u_2) & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_2}(u_1, u_2) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u_1}(u_1, u_2) & \dfrac{\partial f_2}{\partial u_2}(u_1, u_2) \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial u_1}(u_1, u_2) & \dfrac{\partial f_3}{\partial u_2}(u_1, u_2) \end{pmatrix}$$

の階数が各点で 2, つまり最大階数であることである．換言すれば, ベクトル

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1}(u_1,u_2) := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1}(u_1,u_2) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u_1}(u_1,u_2) \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial u_1}(u_1,u_2) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2}(u_1,u_2) := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_2}(u_1,u_2) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u_2}(u_1,u_2) \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial u_2}(u_1,u_2) \end{pmatrix}$$

が各点で線形独立であることである．以下では曲面片のことを単に曲面と言うことにする．

2.2 曲面上の曲線と第 1 基本形式

さて曲面 $f: U \to \mathbb{R}^3$ 上の曲線とは $\mathbb{R}^2$ 上の曲線 $u = \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ と f の合成 $f \circ \alpha$ であるから, これの接ベクトルは合成函数の微分の連鎖公式より

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\alpha(t))\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1}(\alpha_1(t),\alpha_2(t)) & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_2}(\alpha_1(t),\alpha_2(t)) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u_1}(\alpha_1(t),\alpha_2(t)) & \dfrac{\partial f_2}{\partial u_2}(\alpha_1(t),\alpha_2(t)) \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial u_1}(\alpha_1(t),\alpha_2(t)) & \dfrac{\partial f_3}{\partial u_2}(\alpha_1(t),\alpha_2(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1(t) \\ \\ \dot{\alpha}_2(t) \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

である．従って曲面上にもう一本の曲線が $u = \beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$ により与えられたとし, 交点における 2 本の接ベクトルの内積は

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\dot{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\dot{\boldsymbol{\beta}} \\ &= {}^t\dot{\boldsymbol{\alpha}}\ {}^t\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\dot{\boldsymbol{\beta}} \\ &= (\dot{\alpha}_1\ \dot{\alpha}_2) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_3}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dfrac{\partial f_3}{\partial u_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_3}{\partial u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \end{pmatrix} \\ &= (\dot{\alpha}_1\ \dot{\alpha}_2) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.2}$$

と表せる．そこで正値対称行列

$$\begin{aligned} (g_{ij}) &= \begin{pmatrix} g_{11}(u) & g_{12}(u) \\ g_{21}(u) & g_{22}(u) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E(u) & F(u) \\ F(u) & G(u) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.3}$$

と置けば, u 座標に関する接ベクトル $\dot\alpha$, $\dot\beta$ に対応する像曲線における内積は

$$I(\dot{\boldsymbol{\alpha}}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\dot\alpha_i\dot\beta_j \tag{2.4}$$

で与えられる. この対称行列 (g_{ij}) に関する各点における 2 次形式を

$$(ds)^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}du_i du_j = E(du_1)^2 + 2F du_1 du_2 + G(du_2)^2 \tag{2.5}$$

と表し, 第 1 基本形式と呼ぶ. 基本形式の式 において du, dv などの意味が明確でないが, du, dv は単に実数であると考えてもよいし, (2.5) において du, dv の位置には本来その前の式 (2.4) の $\dot\alpha_i$, $\dot\beta_j$ のような接ベクトル (微分) の成分が入るものであるから, 単に u, v と書かずに du, dv と書いたと思ってもよい. また

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\frac{du_i}{dt}\frac{u_j}{dt} = E\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du_1}{dt}\frac{du_2}{dt} + G\left(\frac{du_2}{dt}\right)^2 \tag{2.6}$$

において形式的に分母の $(dt)^2$ を払い式を覚えやすい形に表したものと考えてもよい. (2.5) を使用する場合, 実際には (2.4) または (2.6) の形で使うので, ここで厳密な意味 (可微分多様体の接空間を学習すれば分かる) を考える必要は無い.

U 内の曲線 $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$, $a \le t \le b$ について像曲線 $f(\alpha)$ の接ベクトルの大きさが

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{I(\dot{\boldsymbol{\alpha}}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})} \tag{2.7}$$

であるから, その孤長は第 1 基本形式を用いて

$$\int_a^b \sqrt{I(\dot{\boldsymbol{\alpha}}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})}\,dt = \int_a^b \sqrt{E(\alpha(t))\dot\alpha_1(t)^2 + 2F(\alpha(t))\dot\alpha_1(t)\dot\alpha_2(t) + G(\alpha(t))\dot\alpha_2(t)^2}\,dt$$

を用いて計算される. 第 1 基本形式はベクトルの内積であるから, これより 2 つのベクトルの角度を定めることが出来る. また上で見たように曲線の長さを測ることが出来るので, 計量 (metric) と呼ばれる.

一方, 曲面の面積 A については $A = \iint_U \left|\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2}\right| du_1 du_2$ により計算される. 2 つの空間ベクトル $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ についてなす角を $\theta \in [0, \pi)$ と置けば

$$|\mathbf{p} \times \mathbf{q}| = |\mathbf{p}||\mathbf{q}|\sin\theta = |\mathbf{p}||\mathbf{q}|\sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{q}|^2 - |\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}|^2}$$

この等式を $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1}$, $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2}$ に適用すると

$$\begin{aligned} A &= \iint_U \left|\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2}\right| du_1 du_2 \\ &= \iint_U \sqrt{\left|\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1}\right|^2 \left|\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2}\right|^2 - \left|\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2}\right|^2}\, du_1 du_2 \\ &= \iint_U \sqrt{EG - F^2}\,du_1 du_2 = \iint_U \sqrt{\det(g_{ij})(u)}\,du_1 du_2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

を得る. このように曲面積も第 1 基本形式を用いて計算される. また

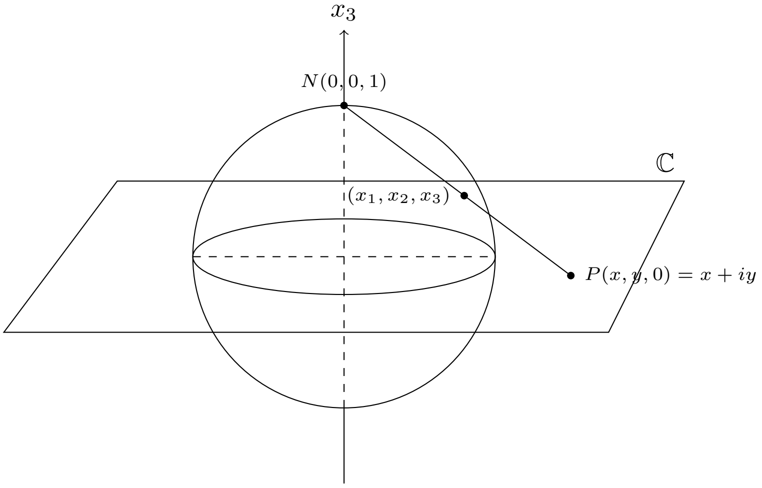
$$dA = \sqrt{EG - F^2}\,du_1 du_2 = \sqrt{\det(g_{ij})(u)}\,du_1 du_2$$

のことを面積要素と呼ぶ．これは第 1 基本計量の導入のところで, その意味について述べたときと同様に, 意味のはっきりしないものであるが, 曲面内の集合の面積を計算する際に u 座標での積分に変換するときに覚えやすく表した公式とでも思って頂きたい.

以下の図のように $\mathbb{R}^3$ において x_1x_2 平面を複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視し, 単為球面 $S^2=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 : x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$ の点 $N(0,0,1)$ から 点 $P(x,y,0)$ へ半直線を引き, S^2 との交点を (x_1,x_2,x_3) とし,

$$\mathbf{f}(x,y)=\begin{pmatrix} f_1(x,y)\\ f_2(x,y)\\ f_3(x,y)\end{pmatrix}\in \S^2, z=x+iy\in\mathbb{C}$$

と置いて $\mathbf{f}:\mathbb{C}\to S^2$ を定義する．また逆写像を立体射影 (stereographic projection) と言う.



Problem 2.2. $\mathbf{f}$ の式表示を求め, $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}$, $E=\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}$, $F=\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}$, $G=\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}$, 第 1 基本形式, 面積要素を求めよ．またこの $\mathbf{f}$ が等角, つまり 2 曲線のなす角を変えないことを示せ.

Proof. $\frac{x_1}{x}=\frac{x_2}{y}=1-x_3$ より立体射影の式表示は

$$x=\frac{x_1}{1-x_3},\quad y=\frac{x_2}{1-x_3} \tag{2.9}$$

である．また $x_1=x(1-x_3)$, $x_2=y(1-x_3)$ を $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ に代入し, 整理すると $|z|^2=x^2+y^2=\frac{1+x_3}{1-x_3}$ を得る．逆に解くと

$$x_3=\frac{|z|^2-1}{1+|z|^2},\quad 1-x_3=\frac{1}{1+|z|^2}$$

であるから

$$x_1=f_1(z)=\frac{2x}{1+|z|^2},\quad x_2=f_2(z)=\frac{2y}{1+|z|^2},\quad x_3=f_3(z)=\frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \tag{2.10}$$

を得る．この表示式を x, y で偏微分すると

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}=\begin{pmatrix}\dfrac{2(1-x^2+y^2)}{(1+|z|^2)^2}\\ \dfrac{-4xy}{(1+|z|^2)^2}\\ \dfrac{-4x}{(1+|z|^2)^2}\end{pmatrix},\qquad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}=\begin{pmatrix}\dfrac{-4xy}{(1+|z|^2)^2}\\ \dfrac{2(1+x^2-y^2)}{(1+|z|^2)^2}\\ \dfrac{-4y}{(1+|z|^2)^2}\end{pmatrix} \tag{2.11}$$

であり

$$E = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \frac{4}{(1+|z|^2)^2}, \quad F = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} = 0, \quad G = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} = \frac{4}{(1+|z|^2)^2} \tag{2.12}$$

を得る．よって第 1 基本形式, 面積要素は

$$I = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1+|z|^2)^2}, \tag{2.13}$$

$$dA = \frac{4dxdy}{(1+|z|^2)^2} \tag{2.14}$$

である．また 2 本のベクトル $\begin{pmatrix} dx_1 \\ dy_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx_2 \\ dy_2 \end{pmatrix}$ のなす角は

$$\cos\theta = \frac{dx_1 dx_2 + dy_1 dy_2}{\sqrt{dx_1^2 + dy_1^2}\sqrt{dx_2^2 + dy_2^2}}$$

であり, 対応する 2 本の球面での接ベクトルは

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dy_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_2 \\ dy_2 \end{pmatrix},$$

であるから, なす角 φ は

$$\cos\varphi = \frac{Edx_1dx_2 + F(dx_1dy_2 + dy_1dx_2) + Gdy_1y_2}{\sqrt{Edx_1^1 + 2Fdx_1dy_1 + Gdy_1^2}\sqrt{Edx_2^1 + 2Fdx_2dy_2 + Gdy_2^2}} = \frac{dx_1dx_2 + dy_1dy_2}{\sqrt{dx_1^2 + dy_1^2}\sqrt{dx_2^2 + dy_2^2}} = \cos\theta$$

であるから $\theta = \varphi$ が成り立ち, 写像は等角である． □

Remark 2.3. 第 1 基本形式が $E = G$, $F = 0$ を満たし $E(du_1^2 + du_2^2)$ となる座標を等温座標と呼ぶ．上で見たように等温座標では u での 2 本の接ベクトルのなす角と, x での対応する 2 本の接ベクトルのなす角は一致する．

2.3 法曲率と第 2 基本形式

曲面 $f : U \to \mathbb{R}^3$ において, $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1}$ と $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2}$ は曲面上の接ベクトルで一次独立であるから

$$\mathbf{n}(u) = \frac{1}{\left|\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2}(u)\right|} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2}(u)$$

は接平面と直交するので単位法ベクトルと呼ぶ．曲面上の曲線が $u = \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ で与えられたとき曲率ベクトル $\mathbf{x}''$ の $\mathbf{n}$ 成分を $\kappa_n = \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{n}$ と置き, 法曲率と呼ぶ．法曲率の t に関する表示を求めよう．$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}'\frac{ds}{dt}$ より $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}''\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mathbf{x}'\frac{d^2s}{dt^2}$ であるが, $\mathbf{x}'$ と $\mathbf{n}$ は直交するので $\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{n} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \kappa_n$ であるから

$$\kappa_n = \frac{\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} = \frac{\ddot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}}|^2} \cdot \frac{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2}}{\left|\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2}\right|}$$

である．上式を利用し, 法曲率を計算するために $\dot{\mathbf{x}}$, $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_k}$ は既に求めているので $\ddot{\mathbf{x}}$ を計算する必要がある．等式 (2.1) の両辺の第 k 成分を取れば $\dot{\mathbf{x}}_k = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial f_k}{\partial u_j}\dot{\alpha}_j$ であるから t で微分すると

$$\ddot{x}_k = \sum_{i,j=1} \frac{\partial^2 f_k}{\partial u_i \partial u_j}\dot{\alpha}_i\dot{\alpha}_j + \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial f_k}{\partial u_j}\ddot{\alpha}_j, \quad k = 1, 2, 3$$

を得る．よって

$$\ddot{\mathbf{x}} = \sum_{i,j=1} \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial u_i \partial u_j}\dot{\alpha}_i\dot{\alpha}_j + \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_j}\ddot{\alpha}_j \tag{2.15}$$

そこでベクトル

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial u_i \partial u_j} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial u_i \partial u_j} \\ \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial u_i \partial u_j} \\ \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial u_i \partial u_j} \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, 2 \tag{2.16}$$

を考えよう．これを接平面の成分と法線成分に分解し $i, j = 1, 2$ について

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial u_i \partial u_j} = \Gamma^1_{i\,j}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} + \Gamma^2_{i\,j}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} + h_{i\,j}\mathbf{n}, \qquad (\text{Gauss の等式}) \tag{2.17}$$

と置く．係数 $\Gamma^k_{i\,j}$ は Christoffel 記号と呼ばれ, 後で E, F, G 及びその微分を用いて表す表示を求める．また $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_j} \cdot \mathbf{n} = 0$ と $\mathbf{n}$ が単位ベクトルであることより

$$h_{i\,j} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial u_i \partial u_j} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i} \tag{2.18}$$

が成り立つ．ここで第 1 基本形式のときと同様に対称行列を

$$H = (h_{i\,j}) = \begin{pmatrix} h_{1\,1} & h_{1\,2} \\ h_{2\,1} & h_{2\,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

と置き, この対称行列 $H = (h_{i\,j})$ に関する各点における 2 次形式

$$\sum_{i,j=1}^{2} h_{i\,j} du_i du_j = L(du_1)^2 + 2MF du_1 du_2 + N(du_2)^2 \tag{2.20}$$

を第 2 基本形式と呼ぶ.

それでは法曲率 κ_n の計算に戻ろう．(2.15) において $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_j}$ と $\mathbf{n}$ は直交するので

$$\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} = \sum_{i,j=1} \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial u_i \partial u_j} \cdot \mathbf{n}\dot{\alpha}_i\dot{\alpha}_j = \sum_{i,j=1}^{2} h_{i\,j}\dot{\alpha}_i\dot{\alpha}_j$$

また (2.5) より $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{i\,j}\dot{\alpha}_i\dot{\alpha}_j$ であったから結局

$$\kappa_n = \frac{\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} = \frac{\sum_{i,j=1}^{2} h_{i\,j}\dot{\alpha}_i\dot{\alpha}_j}{\sum_{i,j=1}^{2} g_{i\,j}\dot{\alpha}_i\dot{\alpha}_j} \tag{2.21}$$

となる．これより特に法曲率 κ_n は $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1(t) \\ \dot{\alpha}_2(t) \end{pmatrix}$ のみで定まることが分かる．

ここで参考までに Weingarten の等式と呼ばれる公式を証明しておこう．(2.18) より

$$H = -{}^t\!\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_2} \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

が成り立つ．ここで $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$ より $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i}\cdot\mathbf{n} = 0$ であるから $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i}$ は $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1}$, $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2}$ の一次結合で表せる．よって, ある 2×2 行列 A で

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \end{pmatrix} A$$

となるものが存在する．H の表示式と合わせて

$$H = -{}^t\!\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \end{pmatrix} A = -GA$$

が成り立つ．G^{-1} を左から掛け E, F, G, L, M, N を用いて表すと

$$A = -\frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} GL - FM & GM - FN \\ EM - FL & FM - EN \end{pmatrix}$$

となるので

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_1} = \frac{FM - GL}{EG - F^2}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} + \frac{FL - EM}{EG - F^2}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_2} = \frac{FN - GM}{EG - F^2}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} + \frac{FM - EN}{EG - F^2}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \tag{2.24}$$

これを Weingarten の等式と呼ぶ.

法曲率 κ_n の計算に戻ろう．(2.15) において $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_j}$ と $\mathbf{n}$ は直交するので

$$\ddot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{n} = \sum_{i,j=1} \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial u_i \partial u_j}\cdot\mathbf{n}\dot{\alpha}_i\dot{\alpha}_j = \sum_{i,j=1}^{2} h_{i\,j}\dot{\alpha}_i\dot{\alpha}_j$$

(2.5) より $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{i\,j}\dot{\alpha}_i\dot{\alpha}_j$ であったから結局

$$\kappa_n = \frac{\ddot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{n}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} = \frac{\sum_{i,j=1}^{2} h_{i\,j}\dot{\alpha}_i\dot{\alpha}_j}{\sum_{i,j=1}^{2} g_{i\,j}\dot{\alpha}_i\dot{\alpha}_j} \tag{2.25}$$

となる．$h_{i\,j}$, $g_{i\,j}$ は曲面 $f :\to \mathbb{R}^3$ により定まり $u = \alpha(t)$ に依らない．従って法曲率 κ_n は $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1(t) \\ \dot{\alpha}_2(t) \end{pmatrix}$ のみで定まる．そこで κ_n の最大値・最小値を求めよう．それには $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ が $\sum_{i,j=1}^{2} g_{i\,j}u_1u_2 = 1$ という条件下で動くとき $\sum_{i,j=1}^{2} h_{i\,j}u_1u_2$ の最大・最小問題を考えればよい．Lagrange の未定定数法により, 極値を取る点において

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\sum_{i,j=1}^{2} h_{i\,j}u_iu_j\right) = \lambda\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\sum_{i,j=1}^{2} g_{i\,j}u_iu_j\right), \quad k = 1, 2$$

を満たす定数 $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在する．よって

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{2} h_{k\,j} u_j + \sum_{i=1}^{2} h_{i\,k} u_i = \lambda \left\{ \sum_{j=1}^{2} g_{k\,j} u_j + \sum_{i=1}^{2} g_{i\,k} u_i \right\} \\
\Longrightarrow \quad & h\mathbf{a} = \lambda g \mathbf{a} \\
\Longrightarrow \quad & (h - \lambda g)\mathbf{a} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ゆえ λ は 2 次方程式

$$\det(h - \lambda g) = \begin{vmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{vmatrix} = (EG - F^2)\lambda - (EN + GL - 2FM)\lambda + LN - M^2 = 0$$

を満たす．この方程式の解を κ_k, $k = 1, 2$ と置き $(h - \kappa_k g)\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$, を満たす $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ を取る．条件 ${}^t\mathbf{u}_k g \mathbf{u}_k = 1$ より ${}^t\mathbf{u}_k h \mathbf{u}_k = \kappa_k$ を得るので κ_k, $k = 1, 2$ が最大値と最小値を与える．$k = 1, 2$ について κ_k と $\mathbf{u}_k$ を主曲率と主方向ベクトルと呼ぶ．$\kappa_1\kappa_2$ を Gauss 曲率と言い，$\frac{1}{2}\{\kappa_1 + \kappa_2\}$ を平均曲率と言う．解と係数の関係より

(2.26) $$\kappa_1\kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \qquad \text{(Gauss 曲率)}$$

(2.27) $$\kappa_1 + \kappa_2 = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} \qquad \text{(平均曲率)}$$

が成り立つ．$\kappa_1 \neq \kappa_2$ ならば主方向は直交する．これは

$$\kappa_2 {}^t\mathbf{u}_1 g \mathbf{u}_2 = {}^t\mathbf{u}_1 h \mathbf{u}_2 = {}^t\mathbf{u}_2 h \mathbf{u}_1 = {}^t\mathbf{u}_2 \kappa_1 g \mathbf{u}_1 = \kappa_1 {}^t\mathbf{u}_1 g \mathbf{u}_2$$

より従う．

2.4 Christoffel 記号の計算

ここでは $\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial u_i \partial u_j}$ の接ベクトル $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_k}$ に関する成分である $\Gamma_{i\,j}^k$ を第 1 基本形式の偏微分を用いた表示式を求める．記号が煩雑になるので

(2.28) $$\mathbf{f}_k = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_k}, \quad k = 1, 2,$$

(2.29) $$\mathbf{f}_{i\,j} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial u_i \partial u_j}, \quad i, j = 1, 2,$$

(2.30) $$E = g_{1\,1} = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1 \quad F = g_{1\,2} = g_{2\,1} = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_1, \quad G = g_{22} = \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2$$

を用いる．また E の u_1, u_2 に関する偏微分を E_1, E_2 のように表す．F, G についても同じである．

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \frac{\partial}{\partial u_1}(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1) = 2\mathbf{f}_{1\,1} \cdot \mathbf{f}_1 \\
E_2 &= \frac{\partial}{\partial u_2}(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1) = 2\mathbf{f}_{1\,2} \cdot \mathbf{f}_1 \\
G_1 &= \frac{\partial}{\partial u_1}(\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2) = 2\mathbf{f}_{2\,1} \cdot \mathbf{f}_2 \\
G_2 &= \frac{\partial}{\partial u_2}(\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2) = 2\mathbf{f}_{2\,2} \cdot \mathbf{f}_2 \\
F_1 &= \frac{\partial}{\partial u_1}(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2) = \mathbf{f}_{1\,1} \cdot \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_{2\,1} \cdot \mathbf{f}_1 = E_2 + +\mathbf{f}_{2\,1} \cdot \mathbf{f}_1 \\
F_2 &= \frac{\partial}{\partial u_2}(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2) = \mathbf{f}_{1\,2} \cdot \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_{2\,2} \cdot \mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_{1\,2} \cdot \mathbf{f}_2 + G_{u_1} \\
F_1 &= \frac{\partial}{\partial u_1}(\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_1) = \mathbf{f}_{2\,1} \cdot \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_{1\,1} \cdot \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_{2\,1} \cdot \mathbf{f}_1 + E_{u_2} \\
F_2 &= \frac{\partial}{\partial u_2}(\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_1) = \mathbf{f}_{2\,2} \cdot \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_{1\,2} \cdot \mathbf{f}_2 = G_1 + \mathbf{f}_{1\,2} \cdot \mathbf{f}_2
\end{aligned}
$$

これらの等式より $\mathbf{f}_{1\,1} \cdot \mathbf{f}_1 = \frac{1}{2}E_1$, $\mathbf{f}_{1\,1} \cdot \mathbf{f}_2 = F_1 - \frac{1}{2}E_2$ のように $\mathbf{f}_{i\,j} \cdot \mathbf{f}_k$ を E, G, F の偏微分で表すことが出来る．一方 Gauss の等式 (2.17) をこれらの記号を用いて書き直すと

$$\mathbf{f}_{i\,j} = \Gamma^1_{i\,j}\mathbf{f}_1 + \Gamma^2_{i\,j}\mathbf{f}_2 + h_{i\,j}\mathbf{n}$$

となる．これより例えば

$$\mathbf{f}_{i\,j} \cdot \mathbf{f}_2 = \Gamma^1_{i\,j}\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 + \Gamma^2_{i\,j}\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2 = \Gamma^1_{i\,j}F + \Gamma^2_{i\,j}G$$

のような等式を得る．以上を列挙すれば

$$
\begin{cases}
\mathbf{f}_{1\,1} \cdot \mathbf{f}_1 = & \Gamma^1_{1\,1}E + \Gamma^2_{1\,1}F = \frac{1}{2}E_1 \\
\mathbf{f}_{1\,1} \cdot \mathbf{f}_2 = & \Gamma^1_{1\,1}F + \Gamma^2_{1\,1}G = F_1 - \frac{1}{2}E_2 \\
\mathbf{f}_{1\,2} \cdot \mathbf{f}_1 = & \Gamma^1_{1\,2}E + \Gamma^2_{1\,2}F = \frac{1}{2}E_2 \\
\mathbf{f}_{1\,2} \cdot \mathbf{f}_2 = & \Gamma^1_{1\,2}F + \Gamma^2_{1\,2}G = \frac{1}{2}G_1 \\
\mathbf{f}_{2\,1} \cdot \mathbf{f}_1 = & \Gamma^1_{2\,1}E + \Gamma^2_{2\,1}F = \frac{1}{2}E_2 \\
\mathbf{f}_{2\,1} \cdot \mathbf{f}_2 = & \Gamma^1_{2\,1}F + \Gamma^2_{2\,1}G = \frac{1}{2}G_1 \\
\mathbf{f}_{2\,2} \cdot \mathbf{f}_1 = & \Gamma^1_{2\,2}E + \Gamma^2_{2\,2}F = F_2 - \frac{1}{2}G_1 \\
\mathbf{f}_{2\,2} \cdot \mathbf{f}_2 = & \Gamma^1_{2\,2}F + \Gamma^2_{2\,2}G = \frac{1}{2}G_2
\end{cases}
\tag{2.31}
$$

これらの等式を行列で表現すると

$$
\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \Gamma^1_{1\,1} & \Gamma^1_{1\,2} & \Gamma^1_{2\,1} & \Gamma^1_{2\,2} \\ \Gamma^2_{1\,1} & \Gamma^2_{1\,2} & \Gamma^2_{2\,1} & \Gamma^2_{2\,2} \end{pmatrix}
= \frac{1}{2}
\begin{pmatrix} E_1 & E_2 & E_2 & 2F_2 - G_1 \\ 2F_1 - E_2 & G_1 & G_1 & G_2 \end{pmatrix}
\tag{2.32}
$$

となるので, $\Gamma_{i\,j}^{k}$ の表示は次のようになる.

$$
\begin{cases}
2(EG-F^2)\Gamma_{1\,1}^{1} = & GE_1 - 2FF_1 + FE_2 \\
2(EG-F^2)\Gamma_{1\,1}^{2} = & -FE_1 + 2EF_1 - EE_2 \\
2(EG-F^2)\Gamma_{1\,2}^{1} = & GE_2 - FG_1 \\
2(EG-F^2)\Gamma_{1\,2}^{2} = & EG_1 - FE_2 \\
2(EG-F^2)\Gamma_{2\,1}^{1} = & GE_2 - FG_1 \\
2(EG-F^2)\Gamma_{2\,1}^{2} = & EG_1 - FE_2 \\
2(EG-F^2)\Gamma_{2\,2}^{1} = & 2GF_2 - GG_1 - FG_2 \\
2(EG-F^2)\Gamma_{2\,2}^{2} = & 2EG_2 - 2FF_2 + FG_1
\end{cases}
\tag{2.33}
$$

Problem 2.4. *Problem 2.2 で取り扱った* $\mathbf{f}:\mathbb{C}\to S^2$ *について Christoffel 記号を求めよ.*

Proof. $E = G = \frac{4}{(1+|z|^2)^2}$, $F = 0$ であるから

$$
E_1 = G_1 = -\frac{16x}{(1+|z|^2)^3}, \quad E_2 = G_2 = -\frac{16y}{(1+|z|^2)^3}, \quad F_1 = F_2 = 0
$$

また $2(EG-F^2) = \frac{32}{(1+|z|^2)^4}$ であるので

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_{1\,1}^{1} = \Gamma_{1\,2}^{2} = \Gamma_{2\,1}^{2} = -2x(1+|z|^2) \\
&\Gamma_{1\,2}^{1} = \Gamma_{2\,1}^{1} = \Gamma_{2\,2}^{2} = -2y(1+|z|^2) \\
&\Gamma_{1\,1}^{2} = 2y(1+|z|^2) \\
&\Gamma_{2\,2}^{1} = 2x(1+|z|^2)
\end{aligned}
$$

□

Problem 2.5. $\frac{4(dx^2+dy^2)}{(1-|z|^2)^2}$ *で与えられる* $\mathbb{D} = \{z\in\mathbb{C} : |z| < 1\}$ *上の基本形式について Christoffel 記号を求めよ.*

Proof. $E = G = \frac{4}{(1-|z|^2)^2}$, $F = 0$ であるから

$$
E_1 = G_1 = \frac{16x}{(1-|z|^2)^3}, \quad E_2 = G_2 = \frac{16y}{(1-|z|^2)^3}, \quad F_1 = F_2 = 0
$$

また $2(EG-F^2) = \frac{32}{(1-|z|^2)^4}$ であるので

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_{1\,1}^{1} = \Gamma_{1\,2}^{2} = \Gamma_{2\,1}^{2} = 2x(1-|z|^2) \\
&\Gamma_{1\,2}^{1} = \Gamma_{2\,1}^{1} = \Gamma_{2\,2}^{2} = 2y(1-|z|^2) \\
&\Gamma_{1\,1}^{2} = -2y(1-|z|^2) \\
&\Gamma_{2\,2}^{1} = -2x(1-|z|^2)
\end{aligned}
$$

である. □

2.5 Gauss の驚異の定理

驚異の定理とは Gauss 曲率 $\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}$ が第 1 基本形式の係数 E, G, F 及びその 2 階までの偏微分で表わせることを主張するものである．Gauss の等式 (2.17) より

$$
\begin{aligned}
L\mathbf{n} &= \mathbf{f}_{1\,1} - \{\Gamma^1_{1\,1}\mathbf{f}_1 + \Gamma^2_{1\,1}\mathbf{f}_2\} \\
M\mathbf{n} &= \mathbf{f}_{1\,2} - \{\Gamma^1_{1\,2}\mathbf{f}_1 + \Gamma^2_{1\,2}\mathbf{f}_2\} \\
M\mathbf{n} &= \mathbf{f}_{2\,1} - \{\Gamma^1_{2\,1}\mathbf{f}_1 + \Gamma^2_{2\,1}\mathbf{f}_2\} \\
N\mathbf{n} &= \mathbf{f}_{2\,2} - \{\Gamma^1_{2\,2}\mathbf{f}_1 + \Gamma^2_{2\,2}\mathbf{f}_2\}
\end{aligned}
$$

であるから, $LN-M^2$ を計算するには, 右辺の内積を計算すればよい．それには $\mathbf{f}_{11}\cdot\mathbf{f}_{2\,2}-\mathbf{f}_{1\,2}\cdot\mathbf{f}_{2\,1}$ 及び $\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{f}_j$, $\mathbf{f}_{i\,j}\cdot\mathbf{f}_k$ の内積の計算が必要である．$\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{f}_j$ については E, F, G で表せるし, $\mathbf{f}_{i\,j}\cdot\mathbf{f}_k$ については (2.31) より E, F, G の 1 階偏導函数で表せる．また $\Gamma^k_{i\,j}$ については (2.33) を用いればよい．最後に $\mathbf{f}_{11}\cdot\mathbf{f}_{2\,2}-\mathbf{f}_{1\,2}\cdot\mathbf{f}_{2\,1}$ についても (2.33) より

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}_{1\,1}\cdot\mathbf{f}_{2\,2}-\mathbf{f}_{1\,2}\cdot\mathbf{f}_{2\,1} &= \frac{\partial}{\partial u_2}(\mathbf{f}_{1\,1}\cdot\mathbf{f}_2) - \mathbf{f}_{1\,1\,2}\cdot\mathbf{f}_2 - \left\{\frac{\partial}{\partial u_1}(\mathbf{f}_{1\,2}\cdot\mathbf{f}_2) - \mathbf{f}_{1\,1\,2}\cdot\mathbf{f}_2\right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial u_2}(\mathbf{f}_{1\,1}\cdot\mathbf{f}_2) - \frac{\partial}{\partial u_1}(\mathbf{f}_{1\,2}\cdot\mathbf{f}_2) \\
&= \frac{\partial}{\partial u_2}\left(F_1-\frac{1}{2}E_2\right) - \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{2}G_1\right) \\
&= F_{1\,2} - \frac{1}{2}(E_{2\,2}+G_{1\,1})
\end{aligned}
$$

となり, E, F, G の 2 階偏導函数で表せる．

実際の計算については

$$
\begin{aligned}
LN &= \{\mathbf{f}_{1\,1} - (\Gamma^1_{1\,1}\mathbf{f}_1 + \Gamma^2_{1\,1}\mathbf{f}_2)\}\cdot\{\mathbf{f}_{2\,2} - (\Gamma^1_{2\,2}\mathbf{f}_1 + \Gamma^2_{2\,2}\mathbf{f}_2)\} \\
&= \mathbf{f}_{1\,1}\cdot\mathbf{f}_{2\,2} - \{\Gamma^1_{2\,2}\mathbf{f}_{1\,1}\cdot\mathbf{f}_1 + \Gamma^2_{2\,2}\mathbf{f}_{1\,1}\cdot\mathbf{f}_2\} - \{\Gamma^1_{1\,1}\mathbf{f}_{2\,2}\cdot\mathbf{f}_1 + \Gamma^2_{1\,1}\mathbf{f}_{2\,2}\cdot\mathbf{f}_2\} \\
&\quad + \Gamma^1_{1\,1}\{\Gamma^1_{2\,2}E + \Gamma^2_{2\,2}F\} + \Gamma^2_{1\,1}\{\Gamma^1_{2\,2}F + \Gamma^2_{2\,2}G\} \\
&= \mathbf{f}_{1\,1}\cdot\mathbf{f}_{2\,2} - \Gamma^1_{2\,2}\frac{1}{2}E_1 - \Gamma^2_{2\,2}\left(F_1-\frac{1}{2}E_2\right) - \left\{\Gamma^1_{1\,1}\left(F_2-\frac{1}{2}G_1\right) + \Gamma^2_{1\,1}\frac{1}{2}G_1\right\} \\
&\quad + \Gamma^1_{1\,1}\left(F_2-\frac{1}{2}G_1\right) + \Gamma^2_{1\,1}\frac{1}{2}G_2 \\
&= \mathbf{f}_{1\,1}\cdot\mathbf{f}_{2\,2} + \frac{1}{2}\left\{\Gamma^2_{2\,2}E_2 - \Gamma^1_{2\,2}E_1 - 2\Gamma^2_{2\,2}F_1\right\}
\end{aligned}
$$

と

$$
\begin{aligned}
M^2 =& \{\mathbf{f}_{1\,2} - (\Gamma^1_{1\,2}\mathbf{f}_1 + \Gamma^2_{1\,2}\mathbf{f}_2)\} \cdot \{\mathbf{f}_{2\,1} - (\Gamma^1_{2\,1}\mathbf{f}_1 + \Gamma^2_{2\,1}\mathbf{f}_2)\} \\
=& \mathbf{f}_{1\,2} \cdot \mathbf{f}_{2\,1} - \{\Gamma^1_{2\,1}\mathbf{f}_{1\,2} \cdot \mathbf{f}_1 + \Gamma^2_{2\,1}\mathbf{f}_{1\,2} \cdot \mathbf{f}_2\} - \{\Gamma^1_{1\,1}\mathbf{f}_{2\,1} \cdot \mathbf{f}_1 + \Gamma^2_{1\,1}\mathbf{f}_{2\,1} \cdot \mathbf{f}_2\} \\
& + \Gamma^1_{1\,2}\{\Gamma^1_{2\,1}E + \Gamma^2_{2\,1}F\} + \Gamma^2_{1\,2}\{\Gamma^1_{2\,1}F + \Gamma^2_{2\,1}G\} \\
=& \mathbf{f}_{1\,2} \cdot \mathbf{f}_{2\,1} - \Gamma^1_{2\,1}\frac{1}{2}E_2 + \Gamma^2_{2\,1}\frac{1}{2}G_1 - \Gamma^1_{1\,1}\frac{1}{2}E_2 + \Gamma^2_{1\,1}\frac{1}{2}G_1 \\
& + \Gamma^1_{1\,2}\frac{1}{2}E_2 + \Gamma^2_{1\,2}\frac{1}{2}G_1 \\
=& \mathbf{f}_{1\,2} \cdot \mathbf{f}_{2\,1} - \Gamma^1_{2\,1}\frac{1}{2}E_2 - \Gamma^2_{2\,1}\frac{1}{2}G_1
\end{aligned}
$$

今までの 3 つの等式を組み合わせ

$$
LN - M^2 = F_{12} - \frac{1}{2}(E_{22} + G_{11}) + \frac{1}{2}\left\{\Gamma^2_{2\,2}E_2 - \Gamma^1_{2\,2}E_1 - 2\Gamma^2_{2\,2}F_1 + \Gamma^1_{2\,1}E_2 + \Gamma^2_{2\,1}G_1\right\} \tag{2.34}
$$

を得る．以上より

Theorem 2.6. 曲面 $f : U \to \mathbb{R}^3$ の *Gauss* 曲率は

$$
\begin{aligned}
& \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \\
=& \frac{1}{EG - F^2}\left\{F_{12} - \frac{1}{2}(E_{22} + G_{11}) + \frac{1}{2}\left(\Gamma^2_{2\,2}E_2 - \Gamma^1_{2\,2}E_1 - 2\Gamma^2_{2\,2}F_1 + \Gamma^1_{2\,1}E_2 + \Gamma^2_{2\,1}G_1\right)\right\} \\
=& -\frac{E_{22} + G_{11} - 2F_{12}}{2(EG - F^2)} + \frac{F(E_1G_2 - E_2G_1 + 4F_1F_2 - F_1G_1 - 2E_2F_2)}{4(EG - F^2)^2} \\
& + \frac{E(E_2G_2 - 2F_1G_2 + G_1^2)}{4(EG - F^2)^2} + \frac{G(E_1G_1 - 2E_1F_2 + E_2^2)}{4(EG - F^2)^2}
\end{aligned} \tag{2.35}
$$

ただし $E = \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1}$, $F = \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2}$, $G = \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2}$ であり，下添え字の 1, 2 は u_1, u_2 に関する偏微分を表す．

Corollary 2.7. 直交座標，つまり第 1 基本形式が $Edu_1^2 + Gdu_2^2$ の形の場合，*Gauss* 曲率は

$$
-\frac{E_{22} + G_{11}}{2EG} + \frac{EE_2G_2 + EG_1^2 + GE_1G_1 + GE_2^2}{4E^2G^2} = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)\right\}
$$

で与えられる．

Corollary 2.8. 等温座標，つまり第 1 基本形式が $E(u_1, u_2)\left(du_1^2 + du_2^2\right)$ の形の場合，*Gauss* 曲率は

$$
\frac{E_1^2 + E_2^2 - E(E_{11} + E_{22})}{2E^3}
$$

で与えられる．また $\lambda = \sqrt{E}$ と置けば *Gauss* 曲率は

$$
\frac{\lambda_1^2 + \lambda_1^2 - \lambda(\lambda_{11} + \lambda_{11})}{\lambda^4} = -\frac{\Delta(\log\lambda)}{\lambda^2}
$$

で与えられる．ただし Δ は *Laplace-Beltrami* 作用素 $\frac{\partial^2}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_2^2}$ である．

この Corollary を使って双曲計量と球面計量に関する曲率の計算を行うことを問題としておく．

Problem 2.9. 第 1 基本形式が $U = \{x, y \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ において $ds^2 = \frac{4(dx^2+dy^2)}{\{1-(x^2+y^2)\}^2}$ で与えられる曲面の *Gauss* 曲率 が一定値 -1 であることを示せ.

Problem 2.10. *Problem 2.2* で取り扱った $\mathbf{f} : \mathbb{C} \to S^2$ について第 1 基本形式は $\mathbb{C}$ において $ds^2 = \frac{4(dx^2+dy^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$, $z = x + iy$ で与えられた. このとき *Gauss* 曲率が一定値 1 であることを示せ.

参考文献

[1] 梅原雅顕, 山田光太郎, 曲線と曲面 -微分幾何的アプローチ-, 裳華房, 2002 年.

[2] 大森英樹, 力学的な微分幾何, 日本評論社, 1989 年.

[3] 小林昭七, 曲線と幽面の微分幾何 (改訂版), 裳華房, 1995 年.